ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 64–70
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-64-70

УДК 517.977

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2025 г. В. А. СРОЧКО, Е. В. АКСЕНЮШКИНА

Аннотация. Рассматривается невыпуклая линейно-квадратичная задача оптимального управления со знаконеопределенными матрицами квадратичных форм. Выполнены преобразование и параметризация целевого функционала, что приводит к семейству идентичных задач в смысле глобального решения. Получены условия на параметры, которые выделяют выпуклые задачи. Реализована процедура параметрической оптимизации по критерию близости к исходной задаче. Построены выпуклые линейно-квадратичные задачи, которые обеспечивают возможность улучшения экстремальных управлений в невыпуклой задаче.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, преобразование и параметризация функционала, выпуклые задачи, улучшение экстремальных управлений.

PARAMETRIC TRANSFORMATION OF NONCONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2025 V. A. SROCHKO, E. V. AKSENYUSHKINA

Abstract. A nonconvex linear-quadratic optimal control problem with indefinite matrices of quadratic forms is considered. The transformation and parametrization of the target functional are performed; this leads to a family of identical problems in the sense of a global solution. Conditions on the parameters that distinguish convex problems are obtained. A parametric optimization procedure is implemented according to the criterion of proximity to the original problem. As a result, convex linear-quadratic problems are constructed, which provide the possibility of improving extremal controls in a nonconvex problem.

Keywords and phrases: linear-quadratic problem, transformation and parameterization of functional, convex problems, improvement of extremal controls.

AMS Subject Classification: 49J15, 49M25

1. Введение. Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления (ЛКЗ) в следующей постановке:

$$
\begin{gathered}
\Phi(u) \to \min, \quad u \in V, \\
\Phi(u) = \langle x(T), Cx(T)\rangle + \int_{t_0}^{T} \langle x(t), Qx(t)\rangle dt, \\
\dot{x} = A(t)x + b(u,t), \quad x(t_0) = x^0, \\
V = \bigl\{u(\cdot) \in PC[t_0,T] : u(t) \in U,\ t \in [t_0,T]\bigr\}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Отметим симметричность $(n \times n)$-матриц C, Q, кусочную непрерывность допустимых управлений $u(t)$ и компактность множества $U \subset \mathbb{R}^m$.

Выделим благоприятное свойство выпуклости задачи (1):

$$C \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\min}(C) \geqslant 0, \qquad Q \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\min}(Q) \geqslant 0.$$

Это условие неотрицательной определенности матриц C, Q в терминологии собственных значений. При этом функционал $\Phi(u)$ представляется выпуклыми квадратичными формами относительно фазовых переменных и называется выпуклым.

Для выпуклой задачи (1) принцип максимума (ПМ) есть необходимое и достаточное условие оптимальности и соответствующие итерационные методы порождают минимизирующие последовательности управлений (см. [1, 3, 5]).

Допустимое управление $u(t)$, удовлетворяющее ПМ в задаче (1) назовем, как обычно, экстремальным. Таким образом, любое экстремальное управление выпуклой задачи является оптимальным.

Предметом рассмотрения в данной статье являются невыпуклые задачи (1) следующей структуры:

$$\lambda_{\min}(C) < 0, \quad \lambda_{\max}(C) > 0; \qquad \lambda_{\min}(Q) < 0, \quad \lambda_{\max}(Q) > 0.$$

Это значит, что C, Q — неопределенные матрицы, а $\Phi(u)$ — невыпуклый функционал. В этом случае ПМ теряет свойство достаточности (любое экстремальное управление подозрительно на оптимальность), задача (1) приобретает многоэкстремальный характер, и возникает проблема ее глобального решения в рамках ключевой операции тестирования экстремального управления на предмет оптимальности и улучшения (см. [4]). При этом улучшение управления $u \in V$ понимается в смысле уменьшения значения функционала $\Phi(u)$.

Наша цель состоит в разработке процедуры преобразования и параметризации невыпуклого функционала $\Phi(u)$, которая приводит к семейству выпуклых функционалов, соответствующих в определенном смысле исходной задаче. Опишем основные этапы этого преобразования.

2. Бивыпуклая декомпозиция функционала. Рассмотрим образующие функционал $\Phi(u)$ матрицы C, Q. Решим полную проблему собственных значений для матрицы C и получим собственные пары (λ_i, x^i), $i = \overline{1,n}$, с ортонормированной системой собственных векторов x^i:

$$Cx^i = \lambda_i x^i, \quad \langle x^i, x^j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

При этом имеет место спектральное разложение

$$C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i, \quad X_i = x^i (x^i)^T$$

(см. [6]), где $X_i \geqslant 0$ — матрицы ранга 1.

Отметим выражение для квадратичной формы

$$\langle x, Cx \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x^i, x \rangle^2.$$

Положим

$$I_+ = \{i = \overline{1,n} : \lambda_i > 0\}, \quad I_- = \{i = \overline{1,n} : \lambda_i < 0\}$$

и сформируем неотрицательно определенные матрицы

$$C_+ = \sum_{i \in I_+} \lambda_i X_i, \quad C_- = \sum_{i \in I_-} |\lambda_i| X_i$$

с собственными значениями

$$\lambda_j(C_+) = \begin{cases} \lambda_j, & j \in I_+, \\ 0, & j \notin I_+, \end{cases} \qquad \lambda_j(C_-) = \begin{cases} |\lambda_j|, & j \in I_-, \\ 0, & j \notin I_-, \end{cases} \qquad j = \overline{1,n}.$$

Возьмем за основу следующее представление для матрицы C:

$$C = C_1 - C_2, \quad C_1 = C_+ + \gamma E, \quad C_2 = C_- + \gamma E. \tag{2}$$

Здесь E — единичная матрица, $\gamma > 0$ — параметр.

Отметим положительную определенность матриц C_1, C_2 и выделим экстремальные собственные значения:

$$\lambda_{\min}(C_1) = \gamma, \quad \lambda_{\max}(C_2) = \max_{j \in I_-} |\lambda_j| + \gamma = |\lambda_{\min}(C)| + \gamma.$$

Аналогичным образом формируется «биположительное» представление для второй матрицы функционала $\Phi(u)$:

$$Q = Q_1 - Q_2, \quad Q_1 = Q_+ + \gamma E, \quad Q_2 = Q_- + \gamma E \tag{3}$$

с положительно определенными матрицами Q_1, Q_2 и экстремальными собственными значениями

$$\lambda_{\min}(Q_1) = \gamma, \quad \lambda_{\max}(Q_2) = |\lambda_{\min}(Q)| + \gamma.$$

Определим соответствующее выражениям (2), (3) представление функционала $\Phi(u)$. Введем выпуклые функционалы

$$\Phi_i(u) = \langle x(T), C_i x(T) \rangle + \int_{t_0}^{T} \langle x(t), Q_i x(t) \rangle dt, \quad i = 1, 2.$$

В результате получаем бивыпуклую декомпозицию исходного функционала:

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u).$$

3. Параметризация функционала и выбор параметров. Определим функционал

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \alpha \Phi_1(u) - \beta \Phi_2(u)$$

с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и образующими матрицами

$$C(\alpha, \beta) = \alpha C_1 - \beta C_2, \quad Q(\alpha, \beta) = \alpha Q_1 - \beta Q_2.$$

Сформулируем задачу с параметрами

$$\Phi_{\alpha,\beta}(u) \to \min, \quad u \in V, \tag{4}$$

которая содержит задачу (1) при $\alpha = \beta = 1$.

Укажем объединяющую характеризацию семейства задач (4). Введем задачу двухкритериальной оптимизации

$$\Phi(u) = \{\Phi_1(u), -\Phi_2(u)\} \to \min, \quad u \in V, \tag{5}$$

и будем рассматривать ее решения в смысле Парето (p-оптимальные решения).

Далее используем известный результат (см. [2]): любое глобальное решение задачи (4) при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ является p-оптимальным в задаче (5).

Таким образом, все задачи семейства (4) на уровне глобального решения являются родственными относительно объединяющей двухкритериальной задачи (5).

Далее естественным образом возникает проблема: выделить из (4) условиями на параметры выпуклые задачи, для которых любое экстремальное управление является оптимальным, т.е. процедура поиска решения реализуется достаточно просто (см. [1, 3, 5]). Свойство выпуклости функционала $\Phi_{\alpha,\beta}(u)$ определяется спектральными условиями

$$\lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) = \lambda_{\min}(\alpha C_1 - \beta C_2) \geqslant 0,$$
$$\lambda_{\min}(Q(\alpha, \beta)) = \lambda_{\min}(\alpha Q_1 - \beta Q_2) \geqslant 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Проведем линеаризацию этих неравенств, используя оценки снизу (см. [6])

$$\lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) \geqslant \alpha \lambda_{\min}(C_1) - \beta \lambda_{\max}(C_2),$$
$$\lambda_{\min}(Q(\alpha, \beta)) \geqslant \alpha \lambda_{\min}(Q_1) - \beta \lambda_{\max}(Q_2).$$

В результате получаем достаточные условия выпуклости в форме линейных неравенств

$$\alpha \geqslant \frac{\lambda_{\max}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_1)} \beta = \frac{|\lambda_{\min}(C)| + \gamma}{\gamma} \beta, \quad \alpha \geqslant \frac{\lambda_{\max}(Q_2)}{\lambda_{\min}(Q_1)} \beta = \frac{|\lambda_{\min}(Q)| + \gamma}{\gamma} \beta.$$

Введем обозначения

$$\mu = \max\big\{|\lambda_{\min}(C)|, |\lambda_{\min}(Q)|\big\}, \quad k(\gamma) = 1 + \frac{\mu}{\gamma}.$$

Тогда достаточное условие выпуклости функционала $\Phi_{\alpha,\beta}(u)$ определяется неравенством

$$\alpha \geqslant k(\gamma)\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

Следующий естественный шаг связан с оптимизацией выбора параметров α, β в смысле расстояния до целевой пары $(1,1)$, выделяющей функционал $\Phi(u)$. Это приводит к элементарной параметрической задаче

$$(\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2 \to \min, \quad \alpha \geqslant k(\gamma)\beta,$$

решение которой $(\alpha(\gamma), \beta(\gamma))$ согласно принципу Лагранжа имеет вид

$$\alpha(\gamma) = k(\gamma)\beta(\gamma), \quad \beta(\gamma) = \frac{1+k(\gamma)}{1+k^2(\gamma)}.$$

Поскольку $k(\gamma) > 1$, то

$$\beta(\gamma) < 1, \quad \alpha(\gamma) = \frac{k(\gamma)+k^2(\gamma)}{1+k^2(\gamma)} > 1.$$

Отметим свойство сходимости к единичной паре $(1,1)$ при увеличении параметра $\gamma > 0$:

$$\alpha(\gamma) \to 1, \quad \beta(\gamma) \to 1, \quad \gamma \to \infty.$$

Найдем приемлемое выражение для функционала $\Phi_{\alpha,\beta}(u)$ при $\alpha = \alpha(\gamma)$, $\beta = \beta(\gamma)$:

$$\Phi(u,\gamma) = \alpha(\gamma)\Phi_1(u) - \beta(\gamma)\Phi_2(u) = \beta(\gamma)(k(\gamma)\Phi_1(u) - \Phi_2(u)) = \beta(\gamma)(\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_1(u)).$$

Введем функционалы

$$\Phi_+(u) = \langle x(T), C_+x(T)\rangle + \int_{t_0}^{T} \langle x(t), Q_+x(t)\rangle dt, \quad \Phi_0(u) = \langle x(T), x(T)\rangle + \int_{t_0}^{T} \langle x(t), x(t)\rangle dt.$$

Тогда $\Phi_1(u) = \Phi_+(u) + \gamma\Phi_0(u)$, и выпуклый функционал $\Phi(u,\gamma)$ принимает вид

$$\Phi(u,\gamma) = \beta(\gamma)(\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_+(u) + \mu\Phi_0(u)).$$

Поскольку $\Phi_1(u) \geqslant 0$, $u \in V$, то нормированный выпуклый функционал $\widehat{\Phi}(u,\gamma) = \Phi(u,\gamma)/\beta(\gamma)$ представляет собой оценку сверху для исходного невыпуклого функционала: $\Phi(u) \leqslant \widehat{\Phi}(u,\gamma)$, $u \in V$.

4. Простейший вариант декомпозиции. Откажемся от решения полной проблемы собственных значений для матриц C, Q и возьмем за основу следующее очевидное представление:

$$C = C_1 - C_2, \quad C_1 = C + \gamma E, \quad C_2 = \gamma E,$$
$$Q = Q_1 - Q_2, \quad Q_1 = Q + \gamma E, \quad Q_2 = \gamma E.$$

Условие $C_1 > 0$ эквивалентно неравенству

$$\lambda_{\min}(C_1) = \lambda_{\min}(C) + \gamma > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > |\lambda_{\min}(C)|.$$

Аналогично

$$Q_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\min}(Q) + \gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma > |\lambda_{\min}(Q)|.$$

В результате получаем общее условие на параметр:

$$\gamma > \mu = \max\left\{|\lambda_{\min}(C)|, |\lambda_{\min}(Q)|\right\}.$$

Образуем матричную комбинацию с одним параметром $\alpha > 0$

$$C(\alpha) = \alpha C_1 - C_2, \quad Q(\alpha) = \alpha Q_1 - Q_2$$

и реализуем условие неотрицательной определенности

$$\lambda_{\min}(C(\alpha)) = \alpha(\lambda_{\min}(C) + \gamma) - \gamma \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geqslant \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_{\min}(C)},$$
$$\lambda_{\min}(Q(\alpha)) = \alpha(\lambda_{\min}(Q) + \gamma) - \gamma \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geqslant \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_{\min}(Q)}.$$

Следовательно, имеет место общая оценка

$$\alpha \geqslant \max\left\{\frac{\gamma}{\gamma+\lambda_{\min}(C)}, \frac{\gamma}{\gamma+\lambda_{\min}(Q)}\right\}.$$

Поскольку $\lambda_{\min}(C) = -|\lambda_{\min}(C)|$, $\lambda_{\min}(Q) = -|\lambda_{\min}(Q)|$, то предыдущее неравенство принимает окончательную форму

$$\alpha \geqslant \frac{\gamma}{\gamma-\mu} = 1 + \frac{\mu}{\gamma-\mu}, \quad \gamma > \mu. \tag{6}$$

Это необходимое и достаточное условие неотрицательной определенности матриц $C(\alpha)$, $Q(\alpha)$ или выпуклости функционала

$$\Phi(u,\alpha) = \langle x(T), C(\alpha)x(T)\rangle + \int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t), Q(\alpha)x(t)\rangle dt.$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ имеем $\Phi(u,1) = \Phi(u)$.

Выделим ближайшее к единице значение α из неравенства (6):

$$\alpha(\gamma) = 1 + \frac{\mu}{\gamma-\mu}.$$

Найдем соответствующее выражение для функционала $\Phi(u,\alpha(\gamma))$. С учетом представлений

$$C(\alpha) = \alpha(C+\gamma E) - \gamma E, \quad Q(\alpha) = \alpha(Q+\gamma E) - \gamma E$$

получаем

$$\Phi(u,\alpha(\gamma)) = \alpha(\gamma)\Phi(u) + (\alpha(\gamma)\gamma - \gamma)\Phi_0(u) = \alpha(\gamma)(\Phi(u) + \mu\Phi_0(u)).$$

Таким образом, нормированный выпуклый функционал $\widetilde{\Phi}(u) = \Phi(u,\alpha(\gamma))/\alpha(\gamma)$ не зависит от γ и представляет собой оценку сверху для исходного невыпуклого функционала: $\Phi(u) \leqslant \widetilde{\Phi}(u)$, $u \in V$.

5. Улучшение экстремальных управлений. Обсудим возможности полученных представлений с фиксированным значением параметра γ для улучшения экстремальных управлений $\overline{u} \in V$ в исходной задаче (1).

Возьмем за основу первую выпуклую задачу оптимального управления:

$$\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_1(u) \to min, \quad u \in V; \tag{7}$$

пусть $u^* \in V$ — ее решение. Напомним, что $\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u)$, причем $\Phi_1(u) \geqslant 0$, $u \in V$, — выпуклый функционал.

Отметим, что управление u^* является Парето-оптимальным в следующей двухкритериальной задаче:

$$S(u) = \{\Phi(u), \Phi_1(u)\} \to min, \quad u \in V.$$

Согласно определению такого решения (см. [2]) управление u^* является оптимальным в следующей задаче:

$$\Phi(u) \to \min, \quad u \in V, \quad \Phi_1(u) \leqslant \Phi_1(u^*).$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Если $\Phi_1(\overline{u}) \leqslant \Phi_1(u^*)$, то $\Phi(u^*) \leqslant \Phi(\overline{u})$.*

Это значит, что управление u^* решает задачу улучшения экстремальных управлений $\overline{u}$ с условием $\Phi_1(\overline{u}) \leqslant \Phi_1(u^*)$.

Следствие 2. *Если управление u^* максимизирует функционал $\Phi_1(u)$, $u \in V$, то оно является оптимальным в исходной задаче* (1).

Более того, с учетом того же определения Парето-оптимальности имеет место утверждение: для любого экстремального управления $\overline{u}$ с условием $S(\overline{u}) \neq S(u^*)$ выполняется по крайней мере одно из двух неравенств

$$\Phi(u^*) < \Phi(\overline{u}), \quad \Phi_1(u^*) < \Phi_1(\overline{u}).$$

Иными словами, оптимальное управление выпуклой задачи (7) улучшает почти любое экстремальное управление исходной задачи (1) по основному функционалу $\Phi(u)$ либо по его выпуклому фрагменту $\Phi_1(u)$.

Наконец, управление u^* обеспечивает нетривиальную оценку сверху для значения задачи (1):

$$\min_{u \in V} \Phi(u) \leqslant \Phi(u^*).$$

Как известно, ключевая проблема глобального решения задачи (1) состоит в конструктивном улучшении экстремальных управлений. Согласно следствию 1 основной интерес в этом плане представляют экстремальные управления $\overline{u}$ с условием $\Phi_1(\overline{u}) > \Phi_1(u^*)$. Это значит, что $\overline{u} \neq u^*$, т.е. управление $\overline{u}$ не является оптимальным в выпуклой задаче (7). Следовательно, с помощью стандартных методов принципа максимума (см. $[1,3,5]$) оно может быть строго улучшено относительно функционала $\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_1(u)$. При этом в рамках итерационного процесса каждое улучшающее управление $\overline{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет по крайней мере одному из неравенств

$$\Phi(\overline{u}_k) < \Phi(\overline{u}), \quad \Phi_1(\overline{u}_k) < \Phi_1(\overline{u}).$$

Первое неравенство приводит к желаемому улучшению экстремального управления $\overline{u}$ в задаче (1), что запускает процедуру поиска следующего управления, удовлетворяющего ПМ. Второе неравенство обеспечивает частичное уменьшение функционала $\Phi(u)$ и предполагает продолжение итераций по индексу $k = 1, 2, \ldots$ с ориентацией на выполнение первого неравенства. Таким образом, выпуклая задача (7) выступает в качестве тестовой для характеризацию и улучшения экстремальных управлений задачи (1).

Отметим, что задача (7) зависит от параметра $\gamma > 0$, поэтому допустима ее коррекция в сторону увеличения γ, что «приближает» выпуклую задачу к исходной по коэффициентам $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$. В полной аналогии рассматривается упрощенная выпуклая задача с функционалом $\Phi(u) + \mu\Phi_0(u)$.

6. Общая схема идентификации выпуклых задач. В заключение рассмотрим общий случай матричной декомпозиции без использования скалярной матрицы γE. Ограничимся преобразованием одной матрицы C с условием $\lambda_{\min}(C) < 0$. Пусть для нее построено представление $C = C_1 - C_2$ с положительно определенными матрицами C_1, C_2. Одна схема такого представления описана, например, в [4]. Образуем положительную комбинацию

$$C(\alpha, \beta) = \alpha C_1 - \beta C_2, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

и обеспечим условие $C(\alpha, \beta) \geqslant 0$, используя оценку

$$\lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) \geqslant \alpha\lambda_{\min}(C_1) - \beta\lambda_{\max}(C_2).$$

Отсюда получаем условие неотрицательной определенности

$$\alpha \geqslant \frac{\lambda_{\max}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_1)}\beta = k_1\beta, \quad \beta > 0.$$

Найдем оценку для коэффициента k_1. Поскольку $C = C_1 - C_2$, то

$$\lambda_{\min}(C) \geqslant \lambda_{\min}(C_1) - \lambda_{\max}(C_2).$$

Отсюда

$$k_1 \geqslant 1 + \frac{|\lambda_{\min}(C)|}{\lambda_{\min}(C_1)}.$$

Полагая, например, $\beta = 1$, получаем наилучшее значение параметра α: $\alpha_* = k_1$. Дальнейшие построения на пути к выпуклой задаче вполне очевидны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аргучинцев А. В., Васильев О. В.* Итерационные процессы принципа максимума и их модификации в системах с распределенными параметрами// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 797–803.
2. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — Москва: Наука, 1982.
3. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — Москва: Физматлит, 2000.
4. *Стрекаловский А. С.* Элементы невыпуклой оптимизации. — Новосибирск: Наука, 2003.
5. *Тятюшкин А. И.* Многометодная технология оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 2006.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — Москва: Мир, 1989.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Срочко Владимир Андреевич (Srochko Vladimir Andreevich)
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: srochko@math.isu.ru

Аксенюшкина Елена Владимировна (Aksenyushkina Elena Vladimirovna)
Байкальский государственный университет, Иркутск
(Baikal State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: AksenyushkinaEV@bgu.ru