ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 90–100
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-90-100

УДК 517.95

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С КОМПЛЕКСОМ ДОЛЬБО

© 2025 г. А. А. ШЛАПУНОВ, А. Н. ПОЛКОВНИКОВ

Аннотация. Рассматривается задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений, структурно похожая на классические эволюционные уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости. Основное отличие этой системы состоит в том, что она порождена не стандартными операторами градиента, дивергенции и ротора, а многомерным оператором Коши—Римана, его комплексом совместности (который обычно называется комплексом Дольбо) и его формально сопряженным оператором. Схожесть структуры позволяет доказать для этой задачи теорему существования слабых решений и теорему об открытом отображении на шкале специально построенных пространств Бохнера—Соболева. Кроме того, получен критерий существования «сильного» решения в данных пространствах.

Ключевые слова: комплекс Дольбо, обобщенное уравнение Стокса, обобщенное уравнение Навье—Стокса, эллиптико-параболический оператор.

GENERALIZED NAVIER–STOKES EQUATIONS ASSOCIATED WITH THE DOLBEAULT COMPLEX

© 2025 A. A. SHLAPUNOV, A. N. POLKOVNIKOV

Abstract. We consider the Cauchy problem for a system of nonlinear differential equations structurally similar to the classical evolutional Navier–Stokes equations for an incompressible liquid. The main difference of this system is that it is generated not by the standard gradient, divergence, and curl operators, but by the multidimensional Cauchy–Riemann operator, its the compatibility complex (which is usually called the Dolbeault complex) and its formally adjoint operator. The similarity of the structure makes it possible to prove the theorem of the existence of weak solutions for this problem and the open mapping theorem on the scale of specially constructed Bochner–Sobolev spaces. In addition, a criterion for the existence of a "strong" solution in these spaces is obtained.

Keywords and phrases: Dolbeault complex, generalized Stokes equation, generalized Navier–Stokes equation, elliptic-parabolic operators.

AMS Subject Classification: 35Qxx, 35Kxx, 35Nxx

1. Введение. Уравнения Навье—Стокса (см., например, [1, 2, 22] и библиографию а этих работах) на протяжении многих десятилетий остаются вызовом для как математиков-теоретиков, так и для специалистов по прикладной математике и гидродинамике. В [11] была предложена более общая задача, в рамках теории дифференциальных комплексов, а в [17] эта задача была рассмотрена для комплекса де Рама в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, на шкале специально построенных пространств

Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-02-2024-1429).

Бохнера—Соболева (в первой степени комплекса соответствующая система совпадает с уравнениями Навье—Стокса для несжимаемой жидкости). Комплекс Дольбо на комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ имеет много общих черт с комплексом де Рама, но отличается от него рядом важных особенностей: отсутствием, вообще говоря, конечномерности пространства решений оператора в нулевой степени комплекса и субэллипичности соответствующих задач Неймана (в то время как для комплекса де Рама решения в нулевой степени комплекса суть постоянные, а задачи Неймана эллиптичны).

2. Обобщенные операторы Стокса и Навье—Стокса. Пусть $\overline{\partial}$ обозначает многомерный оператор Коши—Римана в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $n \geqslant 2$, т.е. столбец дифференциальных операторов $\left(\overline{\partial}_1, \dots \overline{\partial}_n\right)^T$, компоненты которого суть одномерные операторы Коши—Римана

$$\overline{\partial}_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \iota \frac{\partial}{\partial x_{j+n}}\right),$$

где ι — мнимая единица. Аналогично оператору градиента в $\mathbb{R}^n$, оператор $\overline{\partial}$ естественным образом порождает комплекс совместности

$$0 \longrightarrow C^\infty_{\Lambda^{0,0}} \xrightarrow{\overline{\partial}^0} C^\infty_{\Lambda^{0,1}} \xrightarrow{\overline{\partial}^1} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}^{n-1}} C^\infty_{\Lambda^{0,n}} \longrightarrow 0,$$

где $C^\infty_{\Lambda^{p,q}}$ — пространство внешних дифференциальных форм бистепени (p,q) с бесконечно гладкими коэффициентами относительно переменных $z = (z_1, \dots z_n)$, $\overline{z} = (\overline{z}_1, \dots \overline{z}_n)$, $z_j = x_j + \iota x_{j+n}$, а $\overline{\partial}^0 = \overline{\partial}$, $\overline{\partial}^{q+1} \circ \overline{\partial}^q = 0$, $0 \leqslant q \leqslant n-1$ (см. [21, § 1.2]). Обозначив через $\left(\overline{\partial}^q\right)^*$ формально сопряженный оператор для $\overline{\partial}^q$, получаем набор сильно эллиптических операторов (обобщенных лапласианов комплекса Дольбо) $\Delta^q = \left(\overline{\partial}^q\right)^* \overline{\partial}^q + \overline{\partial}^{q-1}\left(\overline{\partial}^{q-1}\right)^*$, $0 \leqslant q \leqslant n$, где, по умолчанию, $\overline{\partial}^{-1} = 0$, $\overline{\partial}^n = 0$.

В [11] была предложена конструкция обобщенных уравнений Навье—Стокса, ассоциированных с дифференциальными комплексами. С учетом уточнений [14], в данном контексте мы рассматриваем следующую систему уравнений: по заданным $(0,q)$-дифференциальной форме f на $\mathbb{C}^n \times [0,T)$ и $(0,q)$-дифференциальной форме u_0 на $\mathbb{C}^n$ найти $(0,q)$-дифференциальную форму u и $(0,q-1)$-дифференциальную форму p на $\mathbb{C}^n \times [0,T)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu \Delta^q u + \mathcal{N}^q u + \overline{\partial}^{q-1} p = f & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0,T), \\ \left(\overline{\partial}^{q-1}\right)^* u = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0,T), \\ \left(\overline{\partial}^{q-2}\right)^* p = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0,T), \\ u(z,0) = u_0(z), & z \in \mathbb{C}^n, \\ \sup\limits_{t \in [0,T]} \int\limits_{\mathbb{C}^n} |u(z,t)|^2 dx + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{C}^n} \sum\limits_{j=1}^{2n} \left|\partial_j u(z,t)\right|^2 dx\, dt < +\infty. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь μ, T — фиксированные положительные числа, коэффициенты всех форм зависят от параметра t, а $\mathcal{N}^q$ — подходящий нелинейный оператор. Отметим, что сильная эллиптичность оператора Δ^q означает, что оператор $\partial_t + \mu\Delta^q$ сильно равномерно параболичен по Петровскому. Что касается нелинейности $\mathcal{N}^q$, то мы ограничимся следующим случаем. Зафиксируем два билинейных дифференциальных оператора нулевого порядка с постоянными коэффициентами:

$$M_1^q : C^\infty_{\Lambda^{0,q+1}} \times C^\infty_{\Lambda^{0,q}} \to C^\infty_{\Lambda^{0,q}}, \quad M_2^q : C^\infty_{\Lambda^{0,q}} \times C^\infty_{\Lambda^{0,q}} \to C^\infty_{\Lambda^{0,q-1}}$$

и положим $\mathcal{N}^q u = M_1^q\left(\overline{\partial}^q u, u\right) + \overline{\partial}^{q-1} M_2^q(u,u)$.

Следуя классической схеме изучения уравнений Навье—Стокса, можно получить теорему о существовании слабых решений задачи (1) при дополнительных условиях на форму M_1^q. Именно, пусть $L^r_{\Lambda^{p,q}}$ обозначает пространство дифференциальных форм

$$u = \sum_{\#I=p} \sum_{\#J=q} u_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

бистепени (p,q) на $\mathbb{C}^n$ с компонентами u_{IJ} в $L^r(\mathbb{C}^n)$, снабженное нормой

$$\|u\|_{L^r_{\Lambda^{p,q}}} = \left(\sum_{\#I=p} \sum_{\#J=q} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |u_{IJ}(x)|^r \, dx \right)^{1/r}.$$

Аналогично вводятся пространства форм на $\mathbb{C}^n$ с компонентами класса Соболева $W^{s,r}_{\Lambda^{p,q}}$, $H^s_{\Lambda^{p,q}}$. Для удобства частные случаи введенных пространств для форм бистепени $(0,q)$ будем обозначать соответственно L^r_q, $W^{s,r}_q$ и H^s_q. Далее, обозначим через $\mathcal{V}_{\Lambda^{0,q}}$ подпространство в $C^\infty_{0,\Lambda^{0,q}}$, состоящее из форм, удовлетворяющих условию $\left(\overline{\partial}^{q-1}\right)^* u = 0$ в $\mathbb{C}^n$, а через $\mathbf{H}^s_q$ — замыкание $\mathcal{V}_{\Lambda^{0,q}}$ в H^s_q, $s \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно, $\left(\mathbf{H}^s_q\right)'$ обозначает сильное сопряженное пространство к $\mathbf{H}^s_q$. Кроме того, если $I = [0,T]$, $p \geqslant 1$, а $\mathcal{B}$ — банахово пространство функций на $\mathbb{C}^n$, то через $L^r(I,\mathcal{B})$ обозначим пространство Бохнера измеримых отображений $u : I \to \mathcal{B}$ с нормой

$$\|u\|_{L^r(I,\mathcal{B})} := \big\| \|u(\cdot,t)\|_{\mathcal{B}} \big\|_{L^r(I)}, \quad r \geqslant 1$$

(см., например, [22, гл. III, § 1]). Аналогично вводятся пространства $C(I,\mathcal{B})$, т.е. пространства всех отображений $u : I \to \mathcal{B}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C(I,\mathcal{B})} := \sup_{t \in I} \|u(\cdot,t)\|_{\mathcal{B}}.$$

Следующая теорема показывает, что при дополнительных ограничениях на нелинейное слагаемое $\mathcal{N}^q u$ задача (1) имеет слабое решение.

Теорема 1. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $s \leqslant n \leqslant (s+1)$. Если*

$$\left(M^q_1(\overline{\partial}^q w, v), v \right)_{L^2_q} = 0 \quad \text{для всех } v \in \mathcal{V}_{\Lambda^{0,q}}, \tag{2}$$

то для любой пары $(f,u_0) \in L^2\big(I,(\mathbf{H}^1_q)'\big) \times \mathbf{H}^0_q$ найдется дифференциальная форма $u \in L^\infty(I,\mathbf{H}^0_q) \cap L^2(I,\mathbf{H}^1_q)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u,v)_{L^2_q} + \mu\big(\overline{\partial}^q u, \overline{\partial}^q v\big)_{L^2_{q+1}} = \big\langle f - \mathcal{N}^q u, v \big\rangle_{\Lambda^{0,q}}, \\ u(\cdot,0) = u_0 \end{cases} \tag{3}$$

для всех $v \in \mathbf{H}^s_q$. Кроме того, $\partial_t u \in L^{2/(n+1-s)}\big(I,(\mathbf{H}^s_q)'\big)$.

Доказательство. Доказательство проводится вполне аналогично теореме существовании слабых решений для уравнений Навье—Стокса, основано на энергетических оценках, неравенствах Гальярдо—Ниренберга для $\mathbb{R}^{2n}$ и использует метод Галеркина (см., например, [1,10,22]). □

Ключевым фактором в доказательстве является условие (2), которое выполняется и для нелинейности, возникающей в уравнениях Навье—Стокса, что позволяет доказать существование слабого решения для последних. Как обычно для уравнений типа Навье—Стокса, в этом случае не удается доказать теорему единственности для слабых решений u уравнений (1), т.е. удовлетворяющих (3), а неизвестная форма p идентифицируется (аддитивно, с точностью до формы с постоянными коэффициентами) только в пространстве распределений с помощью информации о когомологиях комплекса Дольбо (ср. [17, 22]). Например, для уравнений Навье—Стокса давно известно, что существование регулярных решений будет следовать из существования так называемого сильного решения, т.е. слабого решения в пространстве Бохнера $L^{\mathfrak{s}}([0,T], L^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^n))$ с числами $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$, удовлетворяющими соотношению $2/\mathfrak{s} + n/\mathfrak{r} = 1$ при $\mathfrak{r} > n$ (см., например, [1, 15, 16] и уточнение [8] для случая $\mathfrak{r} = n = 3$). Для задачи (1) мы можем привести аналогичный критерий существования сильного решения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если решение задачи* (3) *лежит в пространстве* $L^{\mathfrak{s}}(I, L^{\mathfrak{r}}_q)$ *с некоторыми числами* $\mathfrak{r} > 2n$ *и* $\mathfrak{s}$, *удовлетворяющими соотношению* $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$, *то задача* (3) *имеет гладкое решение при гладкой правой части.*

Доказательство следует из неравенств Гальярдо—Ниренберга с применением метода Галеркина и проводится вполне аналогично классическому случаю для уравнений Навье—Стокса (см., например, [1, 15, 16]). □

Заметим, что для $n = 1$ оператор Коши—Римана порождает тривиальный комплекс совместности, состоящий только из одного оператора, а поэтому задача (3) не имеет смысла. При $n > 1$ вещественная размерность пространства $\mathbb{C}^n$ равна $2n > 2$, а это означает, что стандартные неравенства Гальярдо—Ниренберга не могут гарантировать теорему единственности для задачи (3) в этом случае.

Отметим также, что при $q = 1$ имеется естественная нелинейность $\mathcal{N}^q u = \overline{\star}\left(\overline{\star}^1 u \wedge u\right) + \overline{\partial}^0 |u|^2$, структурно соответствующая форме Лэмба нелинейности, входящей в уравнения Навье—Стокса, и удовлетворяющая (2); здесь $\star$ — оператор Ходжа на дифференциальных формах, а $\overline{\star} v := \overline{(\star v)}$.

Для поиска более регулярных решений подобной задачи для комплекса де Рама в [17], была введена в рассмотрение шкала функциональных пространств Бохнера—Соболева, одна из модификаций которой была позднее использована при решении аналогичных задач для эллиптических дифференциальных комплексов на гладких компактных римановых многоообразиях; она годится и для задачи (1). Более точно для $s, k \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$ множество всех «скоростей», т.е. таких $(0,q)$-форм u из $C(I, \mathbf{H}^{k+2s}_q) \cap L^2(I, \mathbf{H}^{k+1+2s}_q)$, что

$$\partial^\alpha_x \partial^j_t u \in C\Big(I, \mathbf{H}^{k+2s-|\alpha|-2j}_q\Big) \cap L^2\Big(I, \mathbf{H}^{k+1+2s-|\alpha|-2j}_q\Big),$$

если $|\alpha| + 2j \leqslant 2s$. Снабдим пространство $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$ естественной нормой

$$\|u\|_{B^{k,s,s}_{\mathrm{vel},q}} := \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|+2j\leqslant 2s} \Big\|\partial^\alpha_x \partial^j_t u\Big\|^2_{i,q,T}\right)^{1/2},$$

где

$$\|u\|_{i,q,T} = \Big(\|\nabla^i u\|^2_{C(I,L^2_{\Lambda^{0,q}})} + \mu \|\nabla^{i+1} u\|^2_{L^2(I,L^2_{\Lambda^{0,q}})}\Big)^{1/2}.$$

Аналогично, для $s, k \in \mathbb{Z}_+$, пусть $B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}$ состоит из всех «внешних сил», т.е. $(0,q)$-форм f из $C(I, H^{2s+k}_q) \cap L^2(I, H^{2s+k+1}_q)$, для которых

$$\partial^\alpha_x \partial^j_t f \in C(I, H^k_q) \cap L^2(I, H^{k+1}_q)$$

при $|\alpha| + 2j \leqslant 2s$. Если $f \in B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}$, то на самом деле

$$\partial^\alpha_x \partial^j_t f \in C(I, H^{k+2(s-j)-|\alpha|}_q) \cap L^2(I, H^{k+1+2(s-j)-|\alpha|}_q)$$

для всех α и j, удовлетворяющих $|\alpha|+2j \leqslant 2s$. Снабдим пространство $B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}$ естественной нормой

$$\|f\|_{B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}} = \left(\sum_{\substack{|\alpha|+2j\leqslant 2s\\ 0\leqslant i\leqslant k}} \big\|\nabla^i \partial^\alpha_x \partial^j_t f\big\|^2_{C(I,L^2_q)} + \big\|\nabla^{i+1} \partial^\alpha_x \partial^j_t f\big\|^2_{L^2(I,L^2_q)}\right)^{1/2}.$$

Наконец, зафиксируем такую функцию $h_0 \in C^\infty_0(\mathbb{C}^n)$, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} h_0(x) dx = 1, \tag{4}$$

и введем пространство $B^{k+1,2s,s}_{\mathrm{pre},q-1}$ для «давления» p, состоящее из всех $(0,q-1)$-форм из $C(I,H^{2s+2+1}_{\mathrm{loc},q-1})\cap L^2(I,H^{2s+k+2}_{\mathrm{loc},q-1})$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} p_{0J}(x)h_0(x)dx=0 \quad \text{для всех } t\in[0,T] \text{ и } \#J=q-1, \tag{5}$$

и таких, что $\overline{\partial}^{q-1}p\in B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}$,

$$\left(\overline{\partial}^{q-2}\right)^*p=0 \qquad \text{в } \mathbb{C}^n\times[0,T], \tag{6}$$

$$\|p\|_{L^2(I,C_{b,\Lambda^{0,q-1}})}<+\infty \qquad \text{при } 2s+k=n+1, \tag{7}$$

$$\|p\|_{L^2(I,C_{b,\Lambda^{0,q-1}})}+\|p\|_{C(I,C_{b,\Lambda^{0,q-1}})}<+\infty \qquad \text{при } 2s+k>n+1; \tag{8}$$

здесь C_b — пространство ограниченных непрерывных функций в $\mathbb{C}^n$ с нормой $\|w\|_{C_b}=\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}|w(z)|$. Данное пространство можно снабдить нормой

$$\|p\|_{B^{k+1,2s,s}_{\mathrm{pre},q-1}}=\begin{cases}\left\|\overline{\partial}^{q-1}p\right\|_{B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}}, & 2s+k\leqslant n,\\ \left\|\overline{\partial}^{q-1}p\right\|_{B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}}+\|p\|_{L^2(I,C_{b,\Lambda^{0,q-1}})}, & 2s+k=n+1,\\ \left\|\overline{\partial}^{q-1}p\right\|_{B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}}+\|p\|_{L^2(I,C_{b,\Lambda^{0,q-1}})}+\|p\|_{C(I,C_{b,\Lambda^{0,q-1}})}, & 2s+k>n+1.\end{cases}$$

Ясно, что $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$, $B^{k,2s,s}_{\mathrm{for},q}$, $B^{k+1,2s,s}_{\mathrm{pre},q-1}$ — банаховы пространства. Кроме того, далее будем рассматривать линеаризацию задачи (1); с этой целью введем обозначение

$$\mathbf{B}_q(w,u)=M_1^q(\overline{\partial}^q w,u)+\overline{\partial}^{q-1}M_2^q(w,u)+M_1^q(\overline{\partial}^q u,w)+\overline{\partial}^{q-1}M_2^q(u,w)$$

для форм u, w бистепени $(0,q)$.

Лемма 1. *Пусть $n\geqslant 2$, $s\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $2s+k>n-1$. Тогда следующие отображения непрерывны:*

$$\overline{\partial}^{q-1}:B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}\to B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}, \quad \Delta:B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}\to B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q},$$
$$\partial_t:B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}\to B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}, \qquad \mathcal{N}^q:B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}\to B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}.$$

Кроме того, если $w\in B^{k+2,2(s-1),s-1}_{\mathrm{vel},q}$, то отображение

$$\mathbf{B}_q(w,\cdot):B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}\to B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q},$$

тоже непрерывно и для всех $u,w\in B^{k+2,2(s-1),(s-1)}_{\mathrm{vel},q}$ выполняется неравенство

$$\left\|\mathbf{B}_q(w,u)\right\|_{B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}}\leqslant c^q_{s,k}\|w\|_{B^{k+2,2(s-1),s-1}_{\mathrm{vel},q}}\|u\|_{B^{k+2,2(s-1),s-1}_{\mathrm{vel},q}}, \tag{9}$$

где $c^q_{s,k}$ — некоторая положительная константа, не зависящая от u, w.

Доказательство. Для линейных операторов $\overline{\partial}$, ∂_t и Δ^q утверждение леммы следует непосредственно из определения пространств, а для операторов $\mathbf{B}_q(w,\cdot)$ и $\mathcal{N}^q$ — из неравенств Гальярдо—Ниренберга (см., например, [17, лемма 3.5]) или [14, теорема 1.4]). □

Далее, обозначим через φ^q фундаментальное решение обобщенного оператора Лапласа Δ^q (см., например, [21]). Рассмотрим проекцию P^q пространства $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}$ на ядро оператора $(\overline{\partial}^{q-1})^*$.

Лемма 2. *Пусть $s,k\in\mathbb{Z}_+$. Для каждого q псевдодифференциальный оператор $\mathrm{P}^q=\varphi^q(\overline{\partial}^q)^*\overline{\partial}^q$ индуцирует такое непрерывное отображение*

$$\mathrm{P}^q:B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}\to B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{vel},q}, \tag{10}$$

что

$$\mathrm{P}^q\circ\mathrm{P}^q u=\mathrm{P}^q u, \quad (\mathrm{P}^q u,v)_{L^2_q}=(u,\mathrm{P}^q v)_{L^2_q}, \quad (\mathrm{P}^q u,(I-\mathrm{P}^q)u)_{L^2_q}=0$$

для всех $u, v \in C^{\infty}_{0,\Lambda^{0,q}}$.

Доказательство. Действительно, пусть $u, v \in C^{\infty}_{0,\Lambda^{0,q}}$. Так как φ^q — фундаментальное решение обобщенного оператора Лапласа, то

$$v = \Delta^q \varphi^q v = \varphi^q \Delta^q v = \varphi^q (\overline{\partial}^q)^* \overline{\partial}^q v + \varphi^q \overline{\partial}^{q-1} (\overline{\partial}^{q-1})^* v. \tag{11}$$

В силу того, что $\overline{\partial}^{q+1} \circ \overline{\partial}^q = 0$, имеем

$$\mathrm{P}^q \circ \mathrm{P}^q u = \Big((\overline{\partial}^q)^* \overline{\partial}^q \varphi^q\Big) \circ \Big((\overline{\partial}^q)^* \overline{\partial}^q \varphi^q\Big) u = \Big((\overline{\partial}^q)^* \overline{\partial}^q \varphi^q (\overline{\partial}^q)^* \overline{\partial}^q \varphi^q\Big) u = (\overline{\partial}^q)^* \overline{\partial}^q \Delta^q \varphi^q u = \mathrm{P}^q u.$$

Далее, из формулы (11) получаем равенство

$$\mathrm{P}^q = I - \overline{\partial}^{q-1} (\overline{\partial}^{q-1})^* \varphi^q$$

на всех функциях с компактным носителем в $\mathbb{R}^{2n}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}^q u, v)_{L^2_q} = B\Big(\mathrm{P}^q u, \mathrm{P}^q v + \overline{\partial}^{q-1} (\overline{\partial}^{q-1})^* \varphi^q v\Big)_{L^2_q} = (\mathrm{P}^q u, \mathrm{P}^q v)_{L^2_q} = \\ = \Big(u - \overline{\partial}^{q-1} (\overline{\partial}^{q-1})^* \varphi^q u, \mathrm{P}^q v\Big)_{L^2_q} = (u, \mathrm{P}^q v)_{L^2_q},\end{aligned}$$

так как $(\overline{\partial}^{q-1})^* \mathrm{P}^q = 0$. С другой стороны,

$$(\mathrm{P}^q u, (I - \mathrm{P}^q) u)_{L^2_q} = (\mathrm{P}^q u, u)_{L^2_q} - (\mathrm{P}^q u, \mathrm{P}^q u)_{L^2_q} = 0.$$

Наконец, непрерывность отображения $\mathrm{P}^q : B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \longrightarrow B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{vel},q}$ следует из леммы 1 и коммутативного равенства $\mathrm{P}^q \partial^j_t = \partial^j_t \mathrm{P}^q$ при $j \leqslant s-1$. □

Лемма 3. *Пусть* $n \geqslant 3$, $1 \leqslant q < n$, $2s + k > n$ *и форма* $F \in B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}$ *удовлетворяет условию* $\mathrm{P}^q F = 0$ *в* $\mathbb{C}^n$. *Тогда существует единственная форма* $p \in B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, *удовлетворяющая условиям* (5) *и*

$$\overline{\partial}^{q-1} p = F \quad \text{в } \mathbb{C}^n \times [0, T]. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Покажем, что $(0, q-1)$-форма $p = (\overline{\partial}^{q-1})^* \varphi^q F$ является решением (12). В самом деле,

$$\overline{\partial}^{q-1} p = \overline{\partial}^{q-1} (\overline{\partial}^{q-1})^* \varphi^q F.$$

Воспользовавшись леммой 2 и равенством (11), видим, что для любой функции $v \in C^{\infty}_{0,\Lambda^{0,q}}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}\big\langle p, (\overline{\partial}^{q-1})^* v\big\rangle_q = \Big\langle (\overline{\partial}^{q-1})^* \varphi^q F, (\overline{\partial}^{q-1})^* v\Big\rangle_q = \Big\langle F, \varphi^q \overline{\partial}^{q-1} (\overline{\partial}^{q-1})^* v\Big\rangle_q = \\ = \langle F, v\rangle_q - \Big\langle F, \varphi^q (\overline{\partial}^q)^* \overline{\partial}^q v\Big\rangle_q = \langle F, v\rangle_q,\end{aligned}$$

так как $\mathrm{P}^q F = 0$. По построению решения имеем $\overline{\partial}^{q-1} p = F$ и $(\overline{\partial}^{q-2})^* p = 0$.

Пусть теперь $p_1, p_2 \in B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$ — два решения уравнения (12). Тогда $p = p_1 - p_2$ тоже является решением, причем $\overline{\partial}^{q-1} p = 0$. В силу того, что $p \in B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, имеем $(\overline{\partial}^{q-2})^* p = 0$, т.е. p на самом деле имеет гармонические коэффициенты в $\mathbb{C}^n$, ограниченные в бесконечно удаленной точке. Тогда по теореме Лиувилля p — постоянный вектор, т.е. «давление» восстаналивается с точностью до константы, как и для случая классических уравнений Стокса. Для обеспечения единственности вектора p воспользуемся тем, что он, по определению пространства $B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, удовлетворяет (5). Поэтому, с учетом (4), заключаем, что $p \equiv 0$. □

Для того чтобы получить теорему об открытом отображении, нужно рассмотреть линеаризацию задачи (1). Именно, пусть даны $(0, q)$-формы f и w с достаточно гладкими коэффициентами в $\mathbb{C}^n \times [0,T]$ и $(0,q)$-форма u_0 в $\mathbb{C}^n$. Требуется найти достаточно гладкие $(0,q)$-форму u и $(0,q-1)$-форму p в полосе $\mathbb{C}^n \times [0,T]$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu\Delta^q u + \mathbf{B}_q(w,u) + \overline{\partial}^{q-1} p = f & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0,T), \\ (\overline{\partial}^{q-1})^* u = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0,T), \\ (\overline{\partial}^{q-2})^* p = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0,T), \\ u(z,0) = u_0(z), & z \in \mathbb{C}^n, \\ \sup\limits_{t\in[0,T]} \int\limits_{\mathbb{C}^n} |u(z,t)|^2 dx + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{C}^n} \sum\limits_{j=1}^{2n} \big|\partial_j u(z,t)\big|^2 dx\, dt < +\infty. \end{cases} \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 2$, $0 \leqslant q < n$, $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $2s+k > n$ и $w \in B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$. Тогда задача* (13) *индуцирует биективное непрерывное линейное отображение*

$$\mathcal{A}^q_w : B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1} \longrightarrow B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q, \tag{14}$$

имеющее непрерывный обратный оператор $(\mathcal{A}^q_w)^{-1}$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3, которая позволяет «восстановить» давление p после применения к задаче (13) оператора проекции P^q, с помощью стандартного метода Галеркина (см., например, [17]). □

Поскольку $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$ непрерывно вложено в пространство $L^{\mathfrak{s}}(I, L^{\mathfrak{r}}_q)$ с любыми числами $\mathfrak{r} > 2n$ и $\mathfrak{s}$, удовлетворяющими соотношению $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$, то на шкалах введенных нами пространств справедлива теорема единственности и для нелинейного случая.

Однако в последние годы усилия научного сообщества были направлены и на поиски доказательства отсутствия теоремы существования для уравнений типа Навье—Стокса в высоких пространственных размерностях (см., например, [2, 3, 13, 20, 22]). Тем не менее, мы получаем теорему об открытом отображении или, иначе, теорему об устойчивости, для задачи (1) на введенной шкале пространств Бохнера—Соболева.

Теорема 4. *Пусть $n \geqslant 2$, $1 \leqslant q < n$, $s \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, $2s+k > n$. Тогда задача* (1) *индуцирует инъективное непрерывное нелинейное открытое отображение*

$$\mathcal{A}^q : B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1} \longrightarrow B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q. \tag{15}$$

Доказательство. Непрерывность оператора $\mathcal{A}^q$ следует из леммы 1. Далее, пусть

$$(u,p) \in B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}, \quad \mathcal{A}^q(u,p) = (f,u_0) \in B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q.$$

Следовательно, u является слабым решением задачи (1), т.е. удовлетворяет (3). Покажем, что задача (1) имеет не более одного решения (u,p) в пространстве $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$. В самом деле, пусть (u',p') и (u'',p'') — два решения задачи (1) в указанных функциональных пространствах, т.е. $\mathcal{A}^q(u',p') = \mathcal{A}^q(u'',p'')$. При этом формы $u = u' - u''$ и $p = p' - p''$ удовлетворяют (1) с нулевыми данными $(f,u_0) = (0,0)$. Отсюда

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2_q} + 2\mu\|\overline{\partial}^q u\|^2_{L^2_{q+1}} = \Big(\big(\mathbf{B}_q(u'',u'') - \mathbf{B}_q(u',u')\big), u\Big)_{L^2_q}.$$

Из неравенства Гординга и леммы Гроноулла (см., например, [12]) следует, что $u \equiv 0$, а из леммы 3 имеем $p' = p''$. Таким образом, мы доказали инъективность оператора $\mathcal{A}^q$.

Наконец, легко увидеть, что производная Фреше $(\mathcal{A}^q_{(w,p_0)})'$ нелинейного отображения $\mathcal{A}^q$ в произвольной точке

$$(w,p_0) \in B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$$

равна непрерывному линейному отображению $\mathcal{A}^q_w$. По теореме 3 оператор

$$\mathcal{A}^q_w : B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1} \longrightarrow B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$$

непрерывно обратим. Таким образом, открытость образа отображения $\mathcal{A}^q$ и непрерывность его локального обратного отображения следуют из теоремы о неявной функции для пространств Банаха (см., например, [9, теорема 5.2.3]) □

В частности, теорема означает, что для любой пары данных, для которой найдется решение в нужном классе, существует окрестность, для всех элементов которой тоже существуют соответствующие решения. Отметим, что для классических уравнений Навье—Стокса в других функциональных пространствах подобное утверждение отмечалось в книге О. А. Ладыженской [1]. Для некоторых других эллиптических комплексов аналогичные теоремы в различных функциональных пространствах были получены в [14, 17].

Кроме того, из теоремы 4 следует, что образ оператора (15) замкнут тогда и только тогда, когда он совпадает со всем пространством $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$.

Недавно для уравнений Навье—Стокса был получен критерий сюръективности образа в пространствах, подобных введенным нами (см. [18]), навеянный соображениями о фредгольмовых нелинейных операторах из [19]. Для нашей задачи мы можем получить аналогичный критерий.

Теорема 5. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а числа $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ удовлетворяют $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$. Отображение* (15) *сюръективно тогда и только тогда, когда из предкомпактности образа $\mathcal{A}^q(S)$ в пространстве $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$ любого подмножества $S = S_{\mathrm{vel},q} \times S_{\mathrm{pre},q-1}$ декартова произведения $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$ следует ограниченность множества $S_{\mathrm{vel},q}$ в пространстве $L^{\mathfrak{s}}(I, L^{\mathfrak{r}}_q)$.*

Доказательство. Доказательство аналогично случаю, когда рассматривается уравнение Навье—Стокса, ассоциированное с комплексом де Рама (см. [18, теорема 3]). Приведем основные шаги доказательства. Пусть отображение (15) является сюръективным. Тогда образ этого отображения замкнут по теореме 4. Зафиксируем такое подмножество $S = S_{\mathrm{vel},q} \times S_{\mathrm{pre},q-1}$ произведения $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, что образ $\mathcal{A}^q(S)$ является предкомпактным в пространстве $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$. Если множество $S_{\mathrm{vel},q}$ неограниченно в пространстве $L^{\mathfrak{s}}(I, L^{\mathfrak{r}}_q)$, то существует такая последовательность $\{(u_k, p_k)\} \subset S$, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^{\mathfrak{s}}(I,L^{\mathfrak{r}}_q)} = \infty. \tag{16}$$

Поскольку множество $\mathcal{A}^q(S)$ является предкомпактным в $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$, приходим к выводу, что соответствующая последовательность данных $\{\mathcal{A}^q(u_k, p_k) = (f_k, u_{k,0})\}$ содержит подпоследовательность $\{(f_{k_m}, u_{k_m,0})\}$, которая сходится к элементу (f, u_0) в этом пространстве. Но образ оператора $\mathcal{A}^q$ замкнут, а значит, для данных (f, u_0) существует единственное решение (u, p) задачи (1) в пространстве $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, и последовательность $\{(u_{k_m}, p_{k_m})\}$ сходится к (u, p) в этом пространстве. Поэтому $\{(u_{k_m}, p_{k_m})\}$ ограничена в $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, а это противоречит (16), поскольку пространство $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$ непрерывно вложено в пространство $L^{\mathfrak{s}}(I, L^{\mathfrak{r}}_q)$ для любой пары $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, удовлетворяющей условиям $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$.

Далее, рассмотрим стандартные априорные оценки для уравнений (1). Пусть элементы рассматриваемых пространств обладают достаточной регулярностью; оценки нужны нам для доказательства сюръективности отображения (15), а не для улучшения регулярности слабых решений.

Лемма 4. *Если $(u, p) \in B^{0,2,1}_{\mathrm{vel},q} \times B^{1,0,0}_{\mathrm{pre},q-1}$ является решением уравнений* (1) *с данными $(f, u_0) \in B^{0,0,0}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^2_q$, то $\|u\|_{0,\mu,T} \leqslant \|(f, u_0)\|_{0,\mu,T}$.*

Доказательство следует из стандартных априорных оценок. □

Наша следующая задача — оценить производные u и p по отношению к x и t.

Лемма 5. *Предположим, что* $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$ *удовлетворяют условию* $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$. *Если функция* $(u,p) \in B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$ *является решением уравнений* (1) *с данными* $(f, u_0) \in B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$, *то для нее справедлива оценка вида*

$$\|(u,p)\|_{B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}} \leqslant c(k, s, (f, u_0), u); \tag{17}$$

константа в правой части зависит от $\|f\|_{B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q}}$, $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{2s+k}_q}$ *и* $\|u\|_{L^{\mathfrak{s}}(I,L^{\mathfrak{r}})}$, *а также от* $\mathfrak{r}$, T, μ *и т. д.*

Доказательство следует из неравенств Гельдера и Гальярдо—Ниренберга. □

Теперь нужно показать, что образ отображения (15) замкнут. Если данное подмножество $S = S_{\mathrm{vel},q} \times S_{\mathrm{pre},q-1}$ декартова произведения $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$ таково, что образ $\mathcal{A}^q(S)$ является предкомпактным в пространстве $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$, то множество $S_{\mathrm{vel},q}$ ограничено в пространстве $L^{\mathfrak{s}}(I, L^{\mathfrak{r}}_q)$ с парой $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, удовлетворяющей $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$.

Пусть пара $(f, u_0) \in B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$ принадлежит замыканию образа оператора $\mathcal{A}^q$. Тогда существует такая последовательность $\{(u_i, p_i)\}$ в $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, что последовательность $\{(f_i, u_{i,0}) = \mathcal{A}^q(u_i, p_i)\}$ сходится к (f, u_0) в пространстве $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$.

Рассмотрим множество $S = \{(u_i, p_i)\}$. Поскольку образ $\mathcal{A}^q(S) = \{(f_i, u_{i,0})\}$ является предкомпактным в $B^{k,2(s-1),s-1}_{\mathrm{for},q} \times \mathbf{H}^{2s+k}_q$, из предположения следует, что подмножество $S_{\mathrm{vel},q} = \{u_i\}$ из $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$ ограничено в пространстве $L^{\mathfrak{s}}(I, L^{\mathfrak{r}}_q)$.

Применяя леммы 4 и 5, приходим к выводу, что последовательность $\{(u_i, p_i)\}$ ограничена в пространстве $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$. По определению $B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$ последовательность $\{u_i\}$ ограничена в $C(I, \mathbf{H}^{k+2s}_q)$ и $L^2(I, \mathbf{H}^{k+2s+1}_q)$, а частные производные $\{\partial^j_t u_i\}$ по времени при $1 \leqslant j \leqslant s$ ограничены в $C(I, \mathbf{H}^{k+2(s-j)}_q)$ и $L^2(I, \mathbf{H}^{k+2(s-j+1)}_q)$. Поэтому существует такая подпоследовательность $\{u_{i_k}\}$ обладающая следующими свойствами:

(i) последовательность $\{\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^j_t u_{i_k}\}$ слабо сходится в $L^2(I, L^2_q)$ при условии, что $|\alpha| + 2j \leqslant 2s$ и $|\beta| \leqslant k+1$;

(ii) последовательность $\{\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^j_t u_{i_k}\}$ сходится *-слабо в $L^\infty(I, L^2_q)$ при условии, что $|\alpha|+2j \leqslant 2s$ и $|\beta| \leqslant k$.

Ясно, что предел u последовательности $\{u_{i_k}\}$ является решением уравнений (1), причем

(i) каждая производная $\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^j_t u$ принадлежит $L^2(I, \mathbf{H}^0_q)$ при условии, что $|\alpha| + 2j \leqslant 2s$ и $|\beta| \leqslant k+1$;

(ii) каждая производная $\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^j_t u$ принадлежит $L^\infty(I, \mathbf{H}^0_q)$ при условии, что $|\alpha| + 2j \leqslant 2s$ и $|\beta| \leqslant k$.

Из энергетических оценок и леммы Гроноулла следует, что такое сильное решение будет единственным (см., например, [22] для уравнений Навье—Стокса). Кроме того, если

$$0 \leqslant j \leqslant s-1, \quad |\alpha| + 2j \leqslant 2s, \quad |\beta| \leqslant k, \tag{18}$$

то $\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^j_t u \in L^2(I, \mathbf{H}^1_q)$ и $\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^{j+1}_t u \in L^2(I, (\mathbf{H}^1_q)')$. Отсюда следует, что $\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^j_t u \in C(I, \mathbf{H}^0_q)$ для всех j и α, β, удовлетворяющих условиям (18). Следовательно, u принадлежит пространству $B^{k+2,2(s-1),s-1}_{\mathrm{vel},q}$. Более того, используя формулу (9) при $w = u$ получаем, что производные $\partial^{\alpha+\beta}_x \partial^j_t \mathcal{N}^q u$ принадлежат $C(I, L^2_q)$ для всех j и α, β, которые удовлетворяют неравенствам (18).

Кроме того, оператор P^q отображает $C(I, L^2_q)$ непрерывно в $C(I, L^2_q)$. Следовательно, поскольку u является решением задачи (1), получаем, что функция

$$\partial^\beta_x \partial^s_t u = \partial^\beta_x \partial^{s-1}_t \mu \Delta u - \partial^\beta_x \partial^{s-1}_t P^q \mathcal{N}^q u + \partial^\beta_x \partial^{s-1}_t P^q f$$

принадлежит $C(I, \mathbf{H}^0_q)$ для всех мультииндексов β, удовлетворяющих условию $|\beta| \leqslant k$. Другими словами, $u \in B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q}$. Наконец, из леммы 3 следует, что существует такое $p \in B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$, что

$$\overline{\partial}^{q-1} p = (I - P^q)(f - \mathcal{N}^q u),$$

т.е. пара $(u, p) \in B^{k,2s,s}_{\mathrm{vel},q} \times B^{k+1,2(s-1),s-1}_{\mathrm{pre},q-1}$ является решением задачи (1).

Таким образом, мы доказали, что образ отображения (15) замкнут. Отсюда следует, что отображение (15) сюръективно. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1961.
2. *Ладыженская О. А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость// Успехи математических наук — 2003. — *58*, № 2(350). — С. 45–78.
3. *Barker T.* Higher integrability and the number of singular points for the Navier-Stokes equations with a scale-invariant bound// Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B — 2024. — *11.* — P. 436-451.
4. *Barker T., Prange C.* From Concentration to Quantitative Regularity: A Short Survey of Recent Developments for the Navier–Stokes Equations// Vietnam Journal of Mathematics — 2024. — *52.* — P. 707–734.
5. *Barker T., Seregin G.* A necessary condition of potential blowup for the Navier–Stokes system in half-space// Mathematische Annalen — 2017. — *369*, № 3-4. — P. 1327–1352.
6. *Barker T., Seregin G.* On stability of weak Navier–Stokes solutions with large $L^{3,\infty}$ initial data// Communications in Partial Differential Equations — 2018. — *43*, № 4. — P. 628–651.
7. *Choe H. J., Wolf J., Yang M.* A new local regularity criterion for suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations in terms of the velocity gradient.// Mathematische Annalen — 2018. — *370*, № 3-4. — P. 629—647.
8. *Escauriaza L., Seregin G. A.* $L^{3,\infty}$-solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness// Russian Mathematical Surveys — 2003. — *58*, № 2. — P. 211–250.
9. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser// Bull. of the AMS — 1982. — *7*, № 1. — P. 65–222.
10. *Lions J. L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. — Berlin et al: Springer-Verlag, 1972.
11. *Mera A., Tarkhanov N., Shlapunov A. A.* Navier-Stokes Equations for Elliptic Complexes// Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys. — 2019. — *12*, № 9. — C. 3–27.
12. *Mitrinović‘ D. S., Pearić J. E, Fink A. M.* Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht: Mathematics and its Applications (East European Series), V. 53, 1991.
13. *Plechác P., Sverák V.* Singular and regular solutions of a nonlinear parabolic system// Nonlinearity — 2003. — *16*, № 6. — P. 2083–2097.
14. *Polkovnikov A. N.* An open mapping theorem for nonlinear operator equations associated with elliptic complexes// Applicable Analysis. — 2023. — *102.* — P. 2211-2233.
15. *Prodi G.* Un teorema di unicitá per le equazioni di Navier-Stokes// Annali di Matematica Pura ed Applicata — 1959. — *48.* — P. 173–182.
16. *Serrin J.* On the interior regularity of weak solutions of the Navie-Stokes equations// Archive for Rational Mechanics and Analysis — 1962. — *9.* — P. 187–195.
17. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N.* An open mapping theorem for the Navier-Stokes type equations associated with the de Rham complex over $\mathbb{R}^n$// Siberian Electronic Math. Reports — 2021. — *18*, № 2. — P. 1433–1466.
18. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N.* Inverse image of precompact sets and regular solutions to the Navier-Stokes equations// Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki — 2022. — *32*, № 2. — P. 278–297.
19. *Smale S.* An infinite dimensional version of Sard's theorem// Amer. J. Math. — 1965. — *87*, № 4. — P. 861–866.
20. *Tao T.* Finite time blow-up for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// J. of the AMS — 2016. — *29.* — P. 601–674.
21. *Tarkhanov N.* Complexes of differential operators. — Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers, 1995.

22. *Temam R.* Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. — Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1979.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-02-2024-1429).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шлапунов Александр Анатольевич (Shlapunov Aleksandr Anatolievich)
Сибирский федеральный университет, Красноярск
(Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia)
E-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru

Полковников Александр Николаевич (Polkovnikov Aleksandr Nikolaevich)
Сибирский федеральный университет, Красноярск
(Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia)
E-mail: paskaattt@yandex.ru