



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 3–10
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-3-10

УДК 519.63

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2025 г. М. А. АНКИЛОВ, А. С. АНДРЕЕВ

Аннотация. На основе простейшей математической модели свободных колебаний упругой пластины разработан численно-аналитический метод исследования ее динамики в случае шарнирного закрепления концов. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого найдено методом Бубнова–Галеркина. Цель исследования — определить погрешность полученного приближенного решения при помощи функционала типа Ляпунова. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность предложенного метода.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика, упругая пластина, метод Бубнова–Галеркина, дифференциальное уравнение в частных производных, функционал Ляпунова.

NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR STUDYING THE DYNAMICS OF HINGED ELASTIC PLATE

© 2025 M. A. ANKILOV, A. S. ANDREEV

ABSTRACT. Based on the simplest mathematical model of free oscillations of an elastic plate, a numerical-analytical method for studying its dynamics in the case of hinged fastening of the ends has been developed. The model is described by a partial differential equation; we search for a solution by the Bubnov–Galerkin method. The purpose of the study is to determine the error of the obtained approximate solution using a Lyapunov-type functional. Numerical experiments have been conducted to confirm the reliability of the proposed method.

Keywords and phrases: mathematical modeling, dynamics, elastic plate, Bubnov–Galerkin method, partial differential equation, Lyapunov functional.

AMS Subject Classification: 35Q74

1. Введение. В строительстве при проектировании и эксплуатации наземных сооружений необходимо учитывать различные силовые нагрузки, воздействующие на деформируемые элементы этих сооружений, например, ветровые и снеговые нагрузки. Любое силовое воздействие может привести к потере устойчивости возникающих при этом колебаний элементов, что приводит к необходимости точных расчетов параметров сооружений. Согласно концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову необходимо определить прочностные и инерционные характеристики деформируемых элементов и величины силовых воздействий на них, при которых малым деформациям элемента в начальный момент времени $t = 0$ будут соответствовать и малые деформации в любой момент времени $t > 0$.

В последние десятилетия исследованиям динамики и устойчивости деформируемых тел с учетом различных силовых воздействий на них уделяется пристальное внимание, как российских, так и зарубежных исследователей, среди которых, например, С. Д. Алгазин, А. С. Андреев, С. М. Белоцерковский, Р. Л. Бисплингхофф, В. В. Болотин, П. А. Вельмисов, А. С. Вольмир,

А. Г. Григолюк, М. А. Ильгамов, А. А. Ильюшин, И. А. Кийко, Б. Ю. Кудрявцев, Р. Е. Лампера, Дж. Майлс, Д. М. Минасян, А. А. Мовчан, Л. И. Могилевич, В. И. Морозов, Ю. Н. Новичков, В. В. Овчинников, Я. Г. Пановко, Б. К. Скрипач, В. Г. Табачников, Г. Фершинг, Я. Ц. Фын, Р. Л. Халфман, Л. Г. Шандаров, Х. Эшли и др. В частности, отметим работы [2–4, 7, 9, 10].

В статье исследуется математическая модель свободных колебаний упругой пластины, для которой произведена разработка численно-аналитического метода исследования ее динамики. Исследуется случай шарнирного закрепления концов упругой пластины. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого отыскивается методом Бубнова—Галеркина (см. [11]). Цель исследования — на основе построения функционала типа Ляпунова определить погрешность полученного приближенного решения. С помощью математической системы Mathematica произведены численные эксперименты, доказывающие на этой простой задаче о свободных колебаниях упругой пластины-полосы достоверность предложенного численно-аналитического метода определения погрешности приближенного решения, полученного с помощью метода Бубнова—Галеркина.

2. Математическая модель. Рассматривается плоская задача о малых колебаниях упругой пластины, динамика которой описывается следующим уравнением (см. [1]):

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \beta_0 w(x, t) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (1)$$

Здесь функция $w(x, t)$ описывает деформацию (прогиб) упругой пластины. Частные производные по координате x и по времени t обозначены штрихом и точкой сверху соответственно. Обозначения коэффициентов уравнения (1): $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — изгибная жесткость пластины; l , h — длина и толщина пластины; $M = h\rho$ — масса пластины; E , ρ — модуль упругости и плотность пластины; β_0 — коэффициент жесткости основания; ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов пластины. Тогда должны выполняться следующие краевые условия:

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0. \quad (2)$$

Начальные условия

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x) \quad (3)$$

должны быть согласованы с краевыми условиями (2).

3. Функционал. Введем функционал типа Ляпунова

$$\Phi(t) = \int_0^l \{M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t)\} dx. \quad (4)$$

Дифференцируя Φ по переменной t , получим

$$\dot{\Phi}(t) = 2 \int_0^l \{M\dot{w}(x, t)\ddot{w}(x, t) + Dw''(x, t)\dot{w}''(x, t) + \beta_0 w(x, t)\dot{w}(x, t)\} dx.$$

Подставим $M\ddot{w}(x, t)$ из уравнения (1):

$$\dot{\Phi}(t) = 2 \int_0^l \{\dot{w}(x, t)(-Dw''''(x, t) - \beta_0 w(x, t)) + Dw''(x, t)\dot{w}''(x, t) + \beta_0 w(x, t)\dot{w}(x, t)\} dx. \quad (5)$$

Интегрируя по частям, с учетом условий (2) получим равенство

$$\int_0^l w''(x, t)\dot{w}''(x, t)dx = \int_0^l w''''(x, t)\dot{w}(x, t)dx. \quad (6)$$

Тогда с учетом (6) равенство (5) примет вид

$$\dot{\Phi}(t) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя (7) от 0 до t , получим:

$$\Phi(t) = \Phi(0). \quad (8)$$

Таким образом, из (3), (4) получим равенство

$$\int_0^l \left\{ M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) \right\} dx = \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx. \quad (9)$$

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega^{IV}(x) = -\lambda\omega''(x), \quad x \in [0, l], \quad (10)$$

с краевыми условиями

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(l) = 0, \quad \omega''(0) = 0, \quad \omega''(l) = 0, \quad (11)$$

соответствующими (2), является самосопряженной и полностью определенной, так как для любых функций $u(x)$ и $v(x)$, имеющих на интервале $(0, l)$ непрерывные производные четвертого порядка, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^l u(x)v^{IV}(x)dx &= \int_0^l v(x)u^{IV}(x)dx, & \int_0^l u(x)v''(x)dx &= \int_0^l v(x)u''(x)dx, \\ \int_0^l u(x)u^{IV}(x)dx &> 0, & -\int_0^l u(x)u''(x)dx &> 0. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство Рэлея (см. [6]) для функции $w(x, t)$ примет вид

$$\int_0^l w(x, t)w^{IV}(x, t)dx \geq -\lambda_1 \int_0^l w(x, t)w''(x, t)dx,$$

где $\lambda_1 = \pi/l$ — наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи (10), (11). После интегрирования по частям это неравенство примет вид

$$\int_0^l w'^2(x, t)dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t)dx. \quad (12)$$

Согласно (12) из (9) получим неравенство

$$\int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + D\lambda_1 w'^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx \leq \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx. \quad (13)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского

$$\left(\int_0^x w'(x, t)dx \right)^2 \leq \left(\int_0^x w'^2(x, t)dx \right) \left(\int_0^x 1dx \right),$$

получим оценку

$$(w(x, t) - w(0, t))^2 \leq x \int_0^x w'^2(x, t)dx \leq l \int_0^l w'^2(x, t)dx.$$

С учетом краевых условий (2), окончательно получим неравенство

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t)dx. \quad (14)$$

Согласно (14) из (13) окончательно получим неравенство

$$\frac{D\lambda_1}{l}w^2(x,t) + \int_0^l \{M\dot{w}^2(x,t) + \beta_0 w^2(x,t)\} dx \leq \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx, \quad (15)$$

на основании которого доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Решение $w(x,t)$ краевой задачи (1), (2) является устойчивым по отношению к возмущениям начальных данных (3) и выполняется неравенство*

$$w^2(x,t) \leq \frac{l^2}{\pi D} \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx. \quad (16)$$

4. Исследование динамики методом Бубнова—Галеркина. Согласно методу Бубнова—Галеркина (см. [11]) решение начально-краевой задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$w_m(x,t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)g_k(x), \quad (17)$$

где функции

$$g_k(x) = \sin \gamma_k x, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

согласуются с краевыми условиями (2), а $a_k(t)$ определим из условия ортогональности невязки уравнения (1) к функциям $g_k(x)$, $k = 1, \dots, m$.

Так как $g_k(x)$ и γ_k являются собственными функциями и собственными значениями краевой задачи (10), (11), то система функций $g_k(x)$ вида (18) ортогональна на $[0, l]$:

$$\int_0^l g_k(x)g_n(x)dx = 0, \quad n \neq k, \quad \int_0^l g_k^2(x)dx = \frac{l}{2}, \quad (19)$$

и любую четырехкратно непрерывно дифференцируемую по переменной x функцию $w(x,t)$ можно разложить в ряд

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)g_k(x), \quad (20)$$

абсолютно и равномерно сходящийся в $(0, l)$.

Из условий ортогональности невязок уравнения (1) и начальных условий (3) к функциям $\{g_n(x)\}_{n=1}^m$ запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $a_n(t)$, $n = 1, \dots, m$ и начальные условия $a_n(0)$, $\dot{a}_n(0)$:

$$M\ddot{a}_n(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t) = 0, \quad n = 1, \dots, m, \quad (21)$$

$$a_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x)g_n(x)dx, \quad \dot{a}_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x)g_n(x)dx. \quad (22)$$

5. Остаточный член метода Бубнова—Галеркина. Рассмотрим остаточный член $R_m(x,t)$ разложения (17):

$$w(x,t) = w_m(x,t) + R_m(x,t). \quad (23)$$

Будем искать $R_m(x,t)$ в виде

$$R_m(x,t) = a_{m+1}(t)g_{m+1}(x), \quad (24)$$

где функция $a_{m+1}(t)$ подбирается так, чтобы функция $w(x, t)$ в виде (23) удовлетворяла уравнению (9), которое в силу ортогональности базисных функций (18) примет вид:

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = - \sum_{k=1}^m (M\dot{a}_k^2(t) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(t)) + \frac{2}{l} \int_0^l \{ M f_2^2(x) + D f_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \} dx. \quad (25)$$

Для согласования левой и правой частей уравнения (25) возьмем следующие начальные условия:

$$a_{m+1}(0) = \sqrt{\frac{\frac{2}{l} \int_0^l \{ D f_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \} dx - \sum_{k=1}^m (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0)}{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}}, \quad (26)$$

$$\dot{a}_{m+1}(0) = \sqrt{\frac{\frac{2}{l} \int_0^l f_2^2(x) dx - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k^2(0)}{M}}. \quad (27)$$

Решая задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (21) с начальными условиями (22), найдем $a_n(t)$, $n = 1, \dots, m$, подставляя которые в нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (25) с начальными условиями (26), (27), найдем $a_{m+1}(t)$.

6. Численный эксперимент. Будем считать, что пластина изготовлена из алюминия; тогда коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность пластины равны $\nu = 0,3$ (безразмерный), $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 2700$ кг·м⁻³.

Возьмем длину и толщину пластины равными $l = 0,02$ м и $h = 0,001$ м. Тогда масса и изгибная жесткость пластины суть $M = h\rho = 2,7$ кг·м⁻², $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2)) \approx 6,6$ Н·м. Пусть коэффициент жесткости основания равен $\beta_0 = 4$ Па·м⁻¹.

Возьмем в качестве начальных условий (в метрах) следующие:

$$w(x, 0) = 10^{10} \cdot x^4 \cdot (l - x)^4, \quad \dot{w}(x, 0) = -10^{10} x^3 \cdot (l - x)^5.$$

На рис. 1, 2 представлены полученные с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica графики функции (17) при $m = 5$ в точке $x_* = l/2$ при $t \in [0; 0,0001]$ и $t \in [0; 0,001]$ соответственно, а на рис. 3 изображены прогибы упругой пластины в моменты времени $t_0 \in \{0; 0,2; 0,5; 1\}$.

7. Оценка погрешности. Решая в системе Mathematica нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (25) с начальными условиями (26), (27), для описанного выше численного эксперимента найдено $a_{m+1}(t)$. Оценивая погрешность метода Бубнова—Галеркина, получим

$$\varepsilon = |w(x, t) - w_5(x, t)| = |R_5(x, t)| \leq |a_6(t)| \leq \sup_t |a_6(t)| \approx 5,734 \times 10^{-11}.$$

Для доказательства достоверности предложенного численно-аналитического метода определения погрешности приближенного решения, полученного с помощью метода Бубнова—Галеркина, найдена разность между пятидесятым и представленным на рис. 1–3 пятым приближениями:

$$\varepsilon_0 = |w_{50}(x, t) - w_5(x, t)| \approx 5,573 \times 10^{-11}.$$

Аналогично, для эксперимента при $m = 10$ найдена оценка $a_{m+1}(t)$:

$$\varepsilon \leq 6,902 \times 10^{-12}.$$

При этом разность между 50-м и 10-м и между 100-м и 10-м приближениями составила

$$\varepsilon_0 = |w_{50}(x, t) - w_{10}(x, t)| \approx 6,103 \times 10^{-12}, \quad \varepsilon_0 = |w_{100}(x, t) - w_{10}(x, t)| \approx 6,143 \times 10^{-12},$$

что показывает эффективность предложенного численно-аналитического метода по определению погрешности приближенного решения, найденного с помощью метода Бубнова—Галеркина.

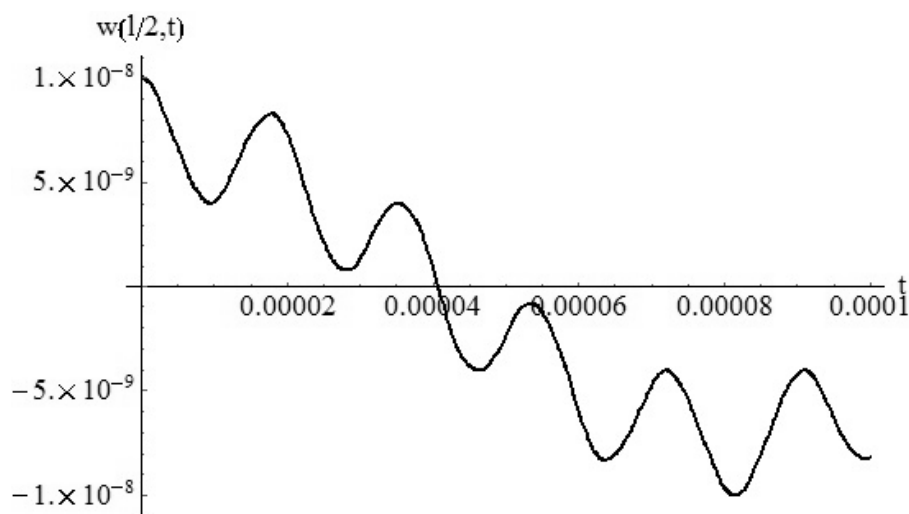


Рис. 1. Деформация пластины $w(x, t)$ в точке $x = l/2$ при $t \in [0; 0,0001]$.

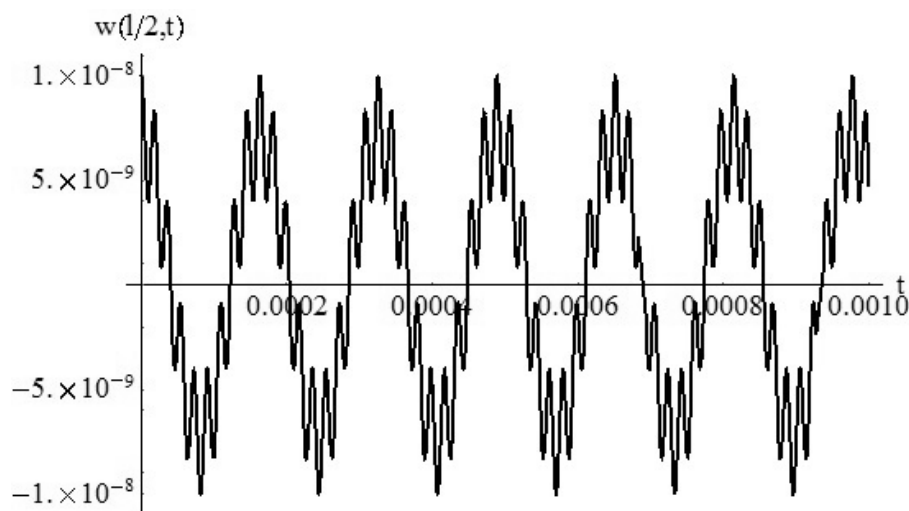


Рис. 2. Деформация пластины $w(x, t)$ в точке $x = l/2$ при $t \in [0; 0,001]$.

8. Заключение. Описанию метода Галеркина и сходимости приближенного решения, полученного этим методом, к точному решению посвящено большое количество научных работ (см., например, [5], [8]). В данной статье на примере простейшей математической модели колебаний шарнирно закрепленной по краям упругой пластины произведена разработка численно-аналитического метода определения погрешности полученного методом Бубнова—Гареркина приближенного решения.

В дальнейшем с помощью предложенного метода определения погрешности планируется найти с заданной точностью решения дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе нелинейных, описывающих колебания упругой пластины. Планируется произвести моделирование с учетом продольных и поперечных составляющих деформации пластины, демпфирования материала пластины, сжимающего или растягивающего пластину продольного усилия, различных силовых воздействий на пластину.

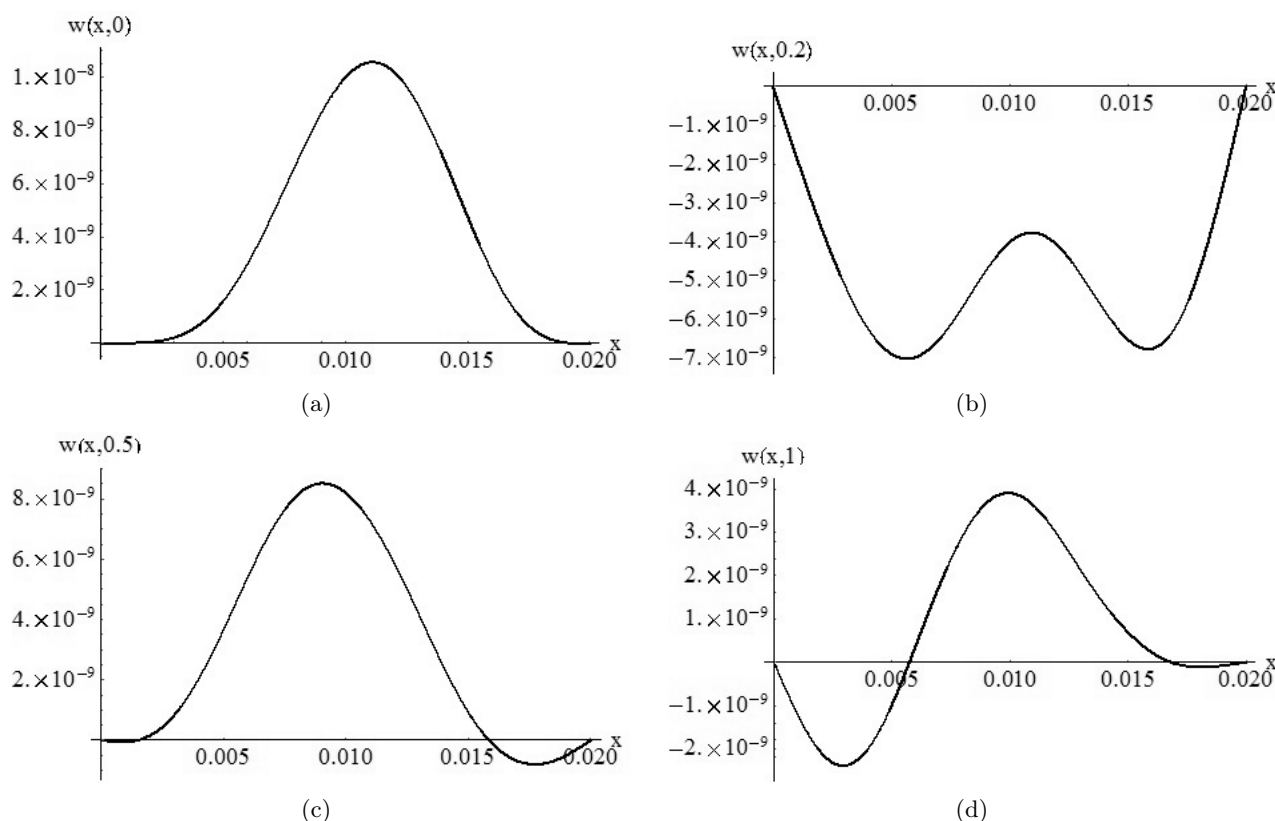


Рис. 3. Прогиб упругой пластины в моменты времени
(a) $t_0 = 0$; (b) $t_0 = 0,2$; (c) $t_0 = 0,5$; (d) $t_0 = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. — М.: Наука, 1968.
2. Божанов Е. Т., Ержанов Ж. С. Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения. — Алматы, 2001.
3. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины, частично заполненной жидкостью // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2023. — 29, № 2. — С. 27–40.
4. Волмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972.
5. Келдыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1942. — 6, № 6. — С. 309–330.
6. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968.
7. Попов В. С., Попова А. А. Динамика взаимодействия пульсирующего слоя вязкой сжимаемой жидкости с пластиной на нелинейно-упругом основании // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2024. — 114, № 3. — С. 45–69.
8. Ретина А. И. Сходимость метода Галеркина решения нелинейной задачи о собственных модах микродисковых лазеров // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2021. — 163, № 1. — С. 5–20.
9. Сулов А. В., Ярославкина Е. Е. Исследование влияния температурных напряжений на собственные колебания пластин // Вестн. Самар. ун-та. Естественнауч. сер. — 2024. — 30, № 2. — С. 45–53.
10. Сухотерин М. В., Сосновская А. А. Потеря устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины // Науч.-тех. вестн. информ. техн. мех. опт. — 2024. — 24, № 4. — С. 629–636.
11. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. — М.: Мир, 1988.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Анкилов Михаил Андреевич (Ankilov Mikhail Andreevich)

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

(Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: mankilov.2000@mail.ru

Андреев Александр Сергеевич (Andreev Aleksandr Sergeevich)

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

(Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: asa5208@mail.ru