ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 11–21
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-11-21

УДК 517.9

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2025 г. **А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Л. Н. КОСТИНА, Н. Б. УСКОВА**

Аннотация. В работе рассматривается применение метода эквивалентных операторов к дифференциальному оператору $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, действующему в однородном пространстве функций $\mathcal{F}$. При этом считается, что оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ есть нормальный оператор с компактной резольвентой в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Приводятся условия его обратимости, оценки нормы обратного в разных пространствах $\mathcal{F}$.

Ключевые слова: метод эквивалентных операторов, оператор с компактной резольвентой, гильбертово пространство, спектр.

THE METHOD OF EQUIVALENT OPERATORS IN THE STUDY OF ONE CLASS OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS WITH CONSTANT OPERATOR COEFFICIENT

© 2025 **A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, L. N. KOSTINA, N. B. USKOVA**

Abstract. In this paper, we consider the application of the method of equivalent operators to the differential operator $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ acting in a homogeneous space of functions $\mathcal{F}$. We assume that the operator $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ is a normal operator with compact resolvent in the Hilbert space $\mathcal{H}$. Conditions for its invertibility and estimates for the norm of the inverse in various spaces $\mathcal{F}$ are given.

***Keywords and phrases*:** method of equivalent operators, operator with compact resolvent, Hilbert space, spectrum.

***AMS Subject Classification*:** 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{H}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, со стандартной нормой. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — нормальный линейный замкнутый оператор с компактной резольвентой. Пусть оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ (см. [25]). В работе рассматривается линейный оператор $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, где через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обозначено одно из функциональных пространств (см. [1]), например, $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. далее раздел 1). Одним из методов изучения таких операторов является метод эквивалентных операторов, который последовательно развивался в [1–9, 26] и окончательно оформился (именно в приложении для рассматриваемого класса операторов) в [8]. Для оператора $\mathcal{L}$ строится ограниченный разностный оператор $\mathcal{D}$ в подходящем пространстве последовательностей, эквивалентный оператору $\mathcal{L}$ (см. определение 3.2), т.е. имеющий совпадающие с $\mathcal{L}$ состояния обратимости (см. определение 3.1). В статье известные результаты из работ [1–9,26] применяются к оператору $\mathcal{L}$, который является именно хорошим модельным примером применения метода эквивалентных операторов, а также к эквивалентному ему оператору $\mathcal{D}$. В частности, приводятся оценки нормы обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ в разных пространствах (при условии его обратимости), или описания спектра Берлинга (см. определение 2.2) элементов ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}$.

2. Основные определения. Перейдем к подробной постановке задачи, для чего сначала введем используемые функциональные пространства. Через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обозначено одно из ниже перечисленных функциональных пространств: $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций; пространство $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций; пространство $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ исчезающих на бесконечности функций $x \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$; пространство Степанова $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty)$, локально суммируемых со степенью p измеримых на $\mathbb{R}$ функций, для которых конечна величина

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^1 \|x(t+s)\|^p \, ds.$$

Отметим, что все эти пространства являются однородными пространствами функций (см., например, [1, определение 2.1] или [26, определение 2.1]). Для функционального пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ введем ассоциированное ему дискретное пространство последовательностей $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ (см. [1]). Для $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ассоциированным является $l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; для $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ассоциированными являются соответственно $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ и $c_0(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$.

Введем также в рассмотрение пространства $L_{\omega,p} = L_{\omega,p}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, с нормой

$$\|x\|_p = \Bigg(\int\limits_0^\omega \|x(\tau)\|^p \, d\tau \Bigg)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in[0,\omega]} \|x(\tau)\|,$$

и $C_\omega = C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Заметим, что C_ω есть замкнутое подпространство ω-периодических функций из C_b, а $L_{\omega,p}$, $p \in [1, \infty)$, — замкнутое подпространство из пространства Степанова S_p. Обозначим через $\mathcal{F}_\omega$ любое из пространств C_ω, $L_{\omega,p}$, $p \in [1, \infty)$.

Так как $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — нормальный оператор с компактной резольвентой, то его спектр допускает представление $\sigma(A) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{J}} \{\lambda_i\}$, где $\mathbb{J}$ — одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, и все собственные значения λ_i, $i \in \mathbb{J}$, имеют конечную кратность.

Далее всюду считается выполненным следующее предположение.

Предположение 2.1. Для всех λ_i из $\sigma(A)$ выполнено неравенство $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, $i \in \mathbb{J}$.

Напомним (см. [27]), что величина $s(A) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda, \ \lambda \in \sigma(A)\}$ называется спектральной границей оператора A. В рассматриваемом случае $s(A) \leqslant 0$.

Пусть $P_i = P(\{\lambda_i\}, A)$, $i \in \mathbb{J}$, — спектральный проектор оператора A (проектор Рисса), построенный по множеству $\{\lambda_i\}$, $i \in \mathbb{J}$. Отметим, что проекторы P_i, $i \in \mathbb{J}$, образуют дизъюнктную систему проекторов, т.е. удовлетворяют следующим условиям: $P_iP_j = 0$, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{J}$; $P_i = P_i^*$, $i \in \mathbb{J}$, ряд $\sum\limits_{m\in\mathbb{J}} P_m x$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ и

$$\|x\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{J}} \|P_m x\|^2;$$

из равенства $P_i x = 0$ для всех $i \in \mathbb{J}$ следует, что вектор x нулевой. Пусть $\mathcal{H}_i = \operatorname{Im} P_i$, $i \in \mathbb{J}$. Подпространства $\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, образуют базис из подпространств в $\mathcal{H}$. Рассматриваемый оператор A является спектральным оператором скалярного типа (см. [17]) и представим в виде

$$A = \sum_{i\in\mathbb{J}} \lambda_i P_i.$$

В силу выполнения предположения 2.1 оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ вида

$$T(t) = \sum_{i\in\mathbb{J}} e^{\lambda_i t} P_i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \mathbb{J}.$$

Следуя работам [1–9, 18, 19, 26], определим в пространстве $\mathcal{F}$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A : \ D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

где функцию x из $\mathcal{F}$ отнесем к $D(\mathcal{L})$, если существует такая функция $y \in \mathcal{F}$, что для почти всех $s \leqslant t$, $s, t \in \mathbb{R}$, верно равенство

$$x(t) = T(t-s)x(s) - \int\limits_s^t T(t-\tau)y(\tau)\,d\tau; \tag{1}$$

при этом полагается $\mathcal{L}x = y$. Заметим, что оператор $\mathcal{L}$ определен корректно, т.е. для каждого $x \in D(\mathcal{L})$ существует единственный $y \in \mathcal{F}$.

Для формулировки некоторых результатов нам понадобится понятие спектра Берлинга (см., например, [26]).

Определение 2.1 (см. [26])**.** Банахово пространство $\mathcal{X}$ называется невырожденным банаховым $L_1(\mathbb{R})$-модулем, если существует билинейное отображение $(f, x) \mapsto fx : L_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, обладающее следующими свойствами:

(i) $(f * g)x = f(gx)$ для всех $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;
(ii) $\|fx\| \leqslant \|f\|_1\|x\|$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;
(iii) равенство $fx = 0$ для всех $f \in L_1(\mathbb{R})$ означает $x = 0 \in \mathcal{X}$.

Рассматриваемые пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H}) = \mathcal{X}$ являются невырожденными банаховыми $L_1(\mathbb{R})$-модулями, причем модульная структура задается формулой

$$(fx)(t) = (f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)x(t-s)\,ds, \in L_1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{F},$$

и она считается ассоциированной с представлением $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{F}$, $S(t)x(s) = x(t+s)$ (см. [26]).

Определение 2.2. ([26]) Спектром Берлинга элемента $x \in \mathcal{X}$ называется множество

$$\Lambda(x) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \quad \text{для любой такой } f \in L_1(\mathbb{R}), \text{ что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0\Big\}.$$

Здесь символом $\widehat{f}(\lambda)$ обозначено преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Спектр Берлинга для $x \in L_2$ совпадает с носителем преобразования Фурье этой функции.

3. Эквивалентные операторы. Введем понятие состояний обратимости абстрактного оператора $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, действующего в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$.

Определение 3.1 (см. [1, определение 1.1])**.** Рассмотрим следующие условия:

1. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, где $\operatorname{Ker} B$ — ядро оператора B;
2. $1 \leqslant n = \dim\operatorname{Ker} B < \infty$;
3. $\dim\operatorname{Ker} B = \infty$;
4. $\operatorname{Ker} B$ — дополняемое подпространство либо в $\mathcal{X}$, либо в $D(B)$ с нормой графика оператора B;

5. $\operatorname{Im} B = \overline{\operatorname{Im} B}$, что эквивалентно условию
$$\gamma(B) = \inf_{x \in D(B) \setminus \operatorname{Ker} B} \frac{\|Bx\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B)},$$
где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B) = \inf\limits_{x_0 \in \operatorname{Ker} B} \|x - x_0\|$;
6. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, $\gamma(B) > 0$;
7. $\operatorname{Im} B$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство;
8. $\operatorname{Im} B$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство конечной коразмерности $1 \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{Im} B = m < \infty$, где $\operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim \mathcal{X} \setminus \operatorname{Im} B$;
9. $\operatorname{Im} B = \mathcal{X}$;
10. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, $\operatorname{Im} B = \mathcal{X}$.

Будем говорить, что оператор B находится в состоянии S, если для него выполнены все условия из совокупности условий $S = \{k_1, \dots, k_l\}$, $1 \leqslant k_l \leqslant 10$.

Через $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(B)$ обозначается множество состояний обратимости оператора B.

Определение 3.2 (см. [8])**.** Линейные операторы $C : D(C) \subset \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_1$ и $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2$ называются эквивалентными, если $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(C) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{E})$.

Основная идея метода эквивалентных операторов состоит в следующем. Для исследуемого оператора строится эквивалентный ему оператор, состояния обратимости которого известны или легко вычисляются. Например, если $C, \mathcal{E} \in B(\mathcal{H})$ и $\mathcal{E} = UCV$, где U, V — обратимые операторы, то известно, что $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{E}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(C)$. Для дифференциальных операторов метод эквивалентных операторов окончательно оформился в [8,9]; он заключается в построении разностного ограниченного оператора, эквивалентного данному, или разностного линейного отношения (см. [1]). Общую схему метода эквивалентных операторов и связь эквивалентных операторов со слабо подобными, подобными операторами и методом операторов преобразования можно найти в [10, 11].

Введем обозначение $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2,\ s \leqslant t\}$. Обычно, как и в [1–8, 26], состояния обратимости, как и определение оператора $\mathcal{L}$, происходит с помощью эволюционного семейства $\mathcal{U} : \Delta \to \operatorname{End} \mathcal{H}$, $s \leqslant t$. При этом предполагается, что выполнены следующие условия:

(i) $\mathcal{U}(t, t) = I$;
(ii) $\mathcal{U}$ сильно непрерывно на множестве Δ;
(iii) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $s, t, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau \leqslant s \leqslant t$;
(iv) $\sup\limits_{0 \leqslant t - s \leqslant 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| \leqslant K < \infty$.

В рассматриваемом случае
$$\mathcal{U}(t, s) = T(t - s) = \sum_{i \in \mathbb{J}} e^{\lambda_i (t - s)} P_i, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant s.$$
Отметим также, что такое эволюционное семейство есть периодическое эволюционное семейство с любым периодом $\omega > 0$, так как $\mathcal{U}(t + \omega, s + \omega) = \mathcal{U}(t, s)$ (см. [9, определение 1]).

Введем в рассмотрение следующие операторы:

(a) полугруппа Хоуленда (см. [29]) $T_{\mathcal{L}} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{F}$, задаваемая формулой (см. также [5]):
$$(T_{\mathcal{L}}(t))x(s) = \mathcal{U}(s, s - t)x(s - t) = T(t)x(s - t), \quad x \in \mathcal{F}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0; \tag{2}$$
(b) операторы $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{D}$, задаваемые формулами
$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_0 x)(s) &= x(s) - T(1)x(s - 1), \quad x \in \mathcal{F}, \quad s \in \mathbb{R}, \\ (\mathcal{D}x)(n) &= x(n) - T(1)x(n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathcal{F}_d. \end{aligned} \tag{3}$$
Согласно [8], оператор $\mathcal{D}$ называется сопровождающим оператором для оператора $\mathcal{L}$. Из результатов [8, 9] следует основная теорема метода эквивалентных операторов.

Теорема 3.1. $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{L}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{D}_0) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{D})$.

Заметим, что применение полугрупп разностных операторов для исследования обратимости оператора $\mathcal{L}$ в $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ использовалось в монографиях [24, 27].

Исследование дифференциальных операторов в весовых пространствах с помощью разностных операторов в ассоциированных пространствах (без введения понятий состояний обратимости и эквивалентных операторов) осуществлялось, например, в [15].

4. Основные результаты. В этом разделе мы применим результаты из [1–9, 26] к рассматриваемым операторам $\mathcal{D}$ и $\mathcal{L}$.

Символом $\mathbb{T}$, как обычно, обозначена единичная окружность. Через $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначена изометрическая группа операторов сдвига на $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (S(t)x)(s) &= x(s+t), \quad x \in \mathcal{F}, \quad s, t \in \mathbb{R}, \\ (S(m)x)(n) &= x(n+m), \quad x \in \mathcal{F}_d, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{D}$, согласно [4], называется оператором взвешенного сдвига с постоянным операторным коэффициентом. Из [4, теорема 7] вытекает условие его обратимости.

Теорема 4.1. *Для того чтобы оператор $\mathcal{D}$ был обратим, необходимо и достаточно выполнения условия $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$.*

Очевидно, что это условие равносильно условию $s(A) < 0$.

Оператор $\mathcal{D}$, заданный формулой (3), можно переписать в виде

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n) - T(1)S(-1)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathcal{F}_d. \tag{4}$$

Из формулы (4) очевидно вытекает следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть $\|T(1)S(-1)\| < 1$ в некотором пространстве $\mathcal{F}_d$. Тогда оператор $\mathcal{D}$ обратим и обратный к нему в $\mathcal{F}_d$ задается формулой*

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} (T(1)S(-1))^n; \tag{5}$$

при этом

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T(1)S(-1)\|}.$$

Отметим очевидные факты. Во-первых, операторы $T(1)$ и $S(-1)$ перестановочны. Во-вторых, так как оператор

$$T(1) = \sum_{i \in \mathbb{J}} e^{\lambda_i} P_i$$

является нормальным, то

$$\|T(1)\| = e^{s(A)}, \quad \|T(1)S(-1)\| \leqslant \|T(1)\| \|S(-1)\| = e^{s(A)}.$$

Таким образом, из $e^{s(A)} < 1$ следует, что $s(A) < 0$. Отметим также следующий результат из [4].

Лемма 4.1. *Спектр $\sigma(T(1)S(-1))$ оператора $T(1)S(-1)$ представим в виде*

$$\sigma(T(1)S(-1)) = \Big\{ \gamma\lambda : \ \gamma \in \mathbb{T}, \ \lambda \in \sigma(T(1)) \Big\}.$$

В [12, 13] было доказано, что спектр ограниченного оператора, действующего в пространствах l_p, $p \in [1, \infty]$, не зависит от пространства l_p. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{D}$ был обратим в любом из пространств l_p, $p \in [1, \infty]$, необходимо и достаточно, чтобы $s(A) < 0$. При этом если $\mathcal{D}$ обратим в одном из пространств l_p, $p \in [1, \infty]$, то он обратим во всех l_q, $q \in [1, \infty]$.*

Заметим, что результаты теоремы 4.3 также можно получить из более общих результатов [4, теоремы 4, 6]. В [4, теорема 7] приведена общая формула вида обратного оператора к $\mathcal{D}$, которая в адаптированном к рассматриваемому оператору A виде, следующая:

$$(\mathcal{D}^{-1}f)(n) = \sum_{m \leqslant n} (T(1))^{n-m} f(m), \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad f \in \mathcal{F}_d. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) одинаковы с учетом того, что $(S(-1))^k = S(-k)$.

Отметим статью [23], в которой утверждение теоремы 4.3 и формула (6) получены при $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Из теорем 3.1 и 4.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть $s(A) < 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}$, определенный формулой* (1), *обратим в пространстве L_p, $p \in [1,\infty]$. При этом если он обратим в одном из пространств L_p, $p \in [1,\infty]$, то он обратим и во всех пространствах L_q, $q \in [1,\infty]$.*

Отметим, что условие $s(A) < 0$, которое является необходимым и достаточным для обратимости оператора $\mathcal{L}$, постулируется в [1–9, 26, 27] (см., например, [1, теорема 1]).

Перейдем далее к непосредственному применению к рассматриваемому оператору $\mathcal{L}$, определенному с помощью (1), и полугруппам $T(t)$, $t \geqslant 0$, и $T_{\mathcal{L}}(t)$, $t \geqslant 0$, результатов работ [1–9, 26, 27], что позволит выписать вид оператора $\mathcal{L}^{-1}$, получить соотношения между нормами операторов $\mathcal{D}^{-1}$, $\mathcal{L}^{-1}$ в различных пространствах, описать ядро оператора $\mathcal{L}$.

Определение 4.1 (см. [26]). Полугруппа $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ называется гиперболической (или допускающей экспоненциальную дихотомию), если $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$.

Так как
$$T(1) = \sum_{i\in\mathbb{J}} e^{\lambda_i} P_i,$$
то $\sigma(T(1)) = \{e^{\lambda_i},\ i \in \mathbb{J}\}$. Следовательно, полугруппа T является гиперболической, если $s(A) < 0$.

Теорема 4.5 (см. [26, теорема 1.1]). *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ обратим*;
(ii) *полугруппа T гиперболическая*;
(iii) *полугруппа Хоуленда $T_{\mathcal{L}}$, определенная формулой* (2), *гиперболическая.*

Заметим, что для $\mathcal{F} \in \{C_0, L_p, p \in [1,\infty)\}$ этот результат доказан в [30].

Из [5, теоремы 1, 2] вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Оператор $\mathcal{L}$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы Хоуленда $T_{\mathcal{L}}$ в любом из банаховых пространств L_p, $p \in [1,\infty)$, C_0. Спектр $\sigma(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ и спектр $\sigma(T_{\mathcal{L}}(t))$, $t \geqslant 0$, связаны соотношением*
$$\sigma(T_{\mathcal{L}}(t)) \setminus \{0\} = \{e^{\lambda t} :\ \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\}.$$

Так как мы рассматриваем оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то можно применить классический результат Герхарда и Прюсса (см. [27, 28, 31]).

Теорема 4.7. *Оператор $\mathcal{L}$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\lambda_j \notin i\mathbb{R}$ для всех $j \in \mathbb{J}$ и резольвента $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ удовлетворяет условию*
$$\gamma(A) = \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}} \|R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Величина $\gamma(A)$ в [21] называлась частотной характеристикой оператора A; она имеет важное значение в оценке нормы обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ в пространстве L_2.

Заметим, что в рассматриваемом случае из выполнения условия $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ следует выполнение условий теоремы 4.7 (см. [26, Corollary 3.4]). В общем случае это неверно.

Теорема 4.8 (см. [2, лемма 4]). *Если оператор $\mathcal{L}$ обратим, то $\|\mathcal{L}^{-1}\|_2 = \gamma(A)$.*

Далее, используя результаты, например, [26], выпишем обратный оператор для $\mathcal{L}$ (при условии его обратимости).

Теорема 4.9. *Пусть $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ обратим, $\mathcal{L}^{-1} \in B(\mathcal{F})$ и*
$$(\mathcal{L}^{-1}y)(t) = -\int_{-\infty}^{t} T(t-\tau)y(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{F}.$$

Основываясь на результатах [10, 11], сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.10. *Пусть оператор $\mathcal{D}$ необратим и $T(1)S(-1)$ — компактный оператор. Тогда* $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{D}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{L}) = \{2, 8\}$.

Вернемся к полугруппе $T : \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$. Напомним, что полугруппа называется экспоненциально устойчивой, если $\|T(t)\| \leqslant Me^{-\gamma_1 t}$, $t \geqslant 0$, а пара (M, γ_1) называется параметрами экспоненциальной устойчивости (см. [7]). Таким образом, полугруппа T экспоненциально устойчива с параметрами $(1, s(A))$. Величина $\omega_0(t)$ называется типом (или постоянной роста) полугруппы T и определяется формулой

$$\omega_0(T) = \inf \Big\{ \omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geqslant 0} e^{-\omega t} \|T(t)\| < \infty \Big\}.$$

Так как T — экспоненциально устойчивая полугруппа, то согласно [7] имеем $\omega_0(T) = (\gamma(A))^{-1}$.

Приведем еще результаты из [2], в адаптированном для рассматриваемых операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}$ виде, позволяющие оценивать нормы $\|\mathcal{L}^{-1}\|$ и $\|\mathcal{D}^{-1}\|$ друг через друга, а также нормы $\|\mathcal{L}^{-1}\|$ в $\mathcal{F}$ через величину $\gamma(A)$ и нормы $\|\mathcal{D}^{-1}\|_p$ через $\|\mathcal{D}^{-1}\|_q$. Отметим, что теоремы 4.11 – 4.14 существенно улучшают общие результаты из [9] для рассматриваемого класса операторов.

Теорема 4.11. *Пусть $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — обратимый оператор. Тогда для оператора $\mathcal{D} : \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}_d$ имеют место оценки*

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leqslant 2 + \|\mathcal{L}^{-1}\|$$

для пространств L_∞, C_b и

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leqslant 1 + 2^{1-1/p}\big(1 + \|\mathcal{L}^{-1}\|\big)$$

для пространств L_p, S^p, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 4.12. *Если разностный оператор $\mathcal{D} \in B(\mathcal{F})$ обратим, то оператор $\mathcal{L}$ также обратим и имеют место оценки*

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leqslant 1 + \|\mathcal{D}^{-1}\|$$

для пространств L_∞, C_b и

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leqslant 2^{1-1/p}\big(1 + \|\mathcal{D}^{-1}\|\big)$$

для пространств L_p, S^p, $1 \leqslant p < \infty$.

Для полноты изложения приведем ниже общую теорему об оценках нормы обратного к $\mathcal{D}$ оператора в разных пространствах.

Теорема 4.13. *Если оператор $\mathcal{D}$ обратим в одном из пространств l_p, $p \in [1, \infty]$, то он обратим и в пространстве l_q, $q \in [1, \infty]$, причем имеет место оценка*

$$\|\mathcal{D}^{-1}\|_q \leqslant 8\|\mathcal{D}^{-1}\|_p^2 - \|\mathcal{D}^{-1}\|_p + 1.$$

Теорема 4.14. *Пусть оператор $\mathcal{L}$ обратим в L_2. Тогда он обратим в $\mathcal{F}$ и норма обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ допускает оценки*

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty \leqslant 1 + \Big(1 + 8\big(1 + \sqrt{2}(1 + \gamma(A))^2\big)\Big),$$

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_p \leqslant 2^{1-1/p}\bigg(1 + \Big(1 + 8\big(1 + \sqrt{2}(1 + \gamma(A))^2\big)\Big)\bigg).$$

При этом вторая оценка верна для пространств L_p и S^p, $p \in [1, \infty)$, а первая — для пространств L_∞, C_0, C_b.

С помощью спектра Берлинга можно описать ядро оператора $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Теорема 4.15 (см. [26, Lemma 3.1])**.** *Пусть $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}$. Тогда*

$$i\Lambda(x) \subseteq \sigma(A) \cap i\mathbb{R}.$$

Теорема 4.16 (см. [26, Lemma 3.8])**.** *Пусть $x \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}x = y$. Тогда*

$$\Lambda(x) \subseteq \Lambda(y) \cup \big\{\lambda \in \mathbb{R} : \ i\lambda \in \sigma(A)\big\}.$$

Теорема 4.17 (см. [26, Lemma 3.6]). *Пусть $\widetilde{S}(f)x = f * x$, $x \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}$. Тогда для всех $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in D(\mathcal{L})$ верно равенство*

$$\mathcal{L}\widetilde{S}(f)x = \widetilde{S}(f)\mathcal{L}x.$$

Определение 4.2 (см. [14, 16]). Число $\mathcal{X}_g(\mathcal{U})$ из $\mathbb{R}$, определенное формулой

$$\mathcal{X}_g(\mathcal{U}) = \varlimsup_{\tau, s \to \infty} \frac{\ln \|\mathcal{U}(\tau + s, \tau)\|}{s}$$

называют верхним генеральным показателем семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}\colon \mathbb{R}^2 \to \operatorname{End} \mathcal{H}$.

В рассматриваемом случае

$$\mathcal{U}(\tau + s, \tau) = T(s), \ s \geqslant 0, \quad \|T(s)\| = e^{s(A)}, \quad \mathcal{X}_g(\mathcal{U}) = s(A).$$

Введем в рассмотрение изометрическую группу линейных операторов $\{V(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ из $\operatorname{End} \mathcal{F}$

$$(V(\lambda)x)(s) = e^{i\lambda s}x(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}$$

(см. [9]). Из результатов статьи [9] вытекает следующий результат.

Теорема 4.18. *Имеют место равенства*

$$V(-\lambda)\mathcal{L}V(\lambda) = \mathcal{L} - i\lambda I, \quad V(-\lambda)T_{\mathcal{L}}(t)V(\lambda) = e^{-i\lambda t}T_{\mathcal{L}}(t),$$
$$V(-\lambda)\mathcal{D}V(\lambda) = e^{-i\lambda}\mathcal{D}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0;$$

в последнем равенстве

$$(V(\lambda)x)(n) = e^{i\lambda n}x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathcal{F}_d.$$

Таким образом, операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L} - i\lambda I$, $\mathcal{D}$ и $e^{i\lambda n}\mathcal{D}$, а также $T_{\mathcal{L}}(t)$ и $T_{\mathcal{L}}(t)e^{-\lambda t}$ подобны.

Отметим еще один результат. Из результатов [9] вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.19. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{L}S(\omega)x = S(\omega)\mathcal{L}x, \quad x \in D(\mathcal{L}), \quad T_{\mathcal{L}}(t)S(\omega) = S(\omega)T_{\mathcal{L}}(t), \quad t \geqslant 0, \quad \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Периодическая, периода $\omega > 0$, сильно непрерывная функция $\mathcal{P} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{H}$, где

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{U}(t, t - \omega) - I = T(\omega) - I, \quad t \in \mathbb{R},$$

называется функцией Пуанкаре (см. [9, 24]). В рассматриваемом случае она является постоянной функцией $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$. Используя результаты статьи [9], сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.20. *Оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t) = T(\omega) - I$. В случае, если оператор $\mathcal{L}$ обратим, то*

$$(\mathcal{L}_\omega)^{-1}(t) = \int\limits_0^\omega G(t, \tau)f(\tau)\,d\tau, \quad f \in \mathcal{F}_\omega,$$

где функция Грина $G : [0, \omega] \times [0, \omega] \to \operatorname{End} \mathcal{H}$ задается формулой

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (T(\omega) - I)^{-1}T(t - \tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ (T(\omega) - I)^{-1}T(t - \tau + \omega), & t < \tau \leqslant \omega. \end{cases}$$

К рассматриваемому оператору $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ или $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$ можно применить и другие результаты статьи [9], так как соответствующее эволюционное семейство $\mathcal{U}(t, s) = T(t-s)$ является ω-периодическим с любым $\omega > 0$.

Имеют место следующие утверждения (см. [9]).

Теорема 4.21. *Оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $T_{\mathcal{L}}$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}_\omega$.*

Теорема 4.22. *Пусть $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$. Тогда $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{L}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{P})$.*

Теорема 4.23. *Полугруппа $T_{\mathcal{L}} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{F}_\omega$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sigma(T_{\mathcal{L}}(\omega)) \setminus \{0\} = \sigma(T(\omega) \setminus \{0\}), \quad \exp(\sigma(\mathcal{L})) = \{\exp \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\} = \sigma(T(\omega)).$$

5. Примеры.

Пример 5.1. Рассмотрим оператор

$$A: D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(u) = x'(u), \ u \in [0,1],$$

и область определения оператора A задается периодическим краевым условием

$$D(A) = \{x \in W_2^1[0,1], \ x(0) = x(1)\}.$$

Символом $W_2^1[0,1]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2[0,1]$ с производными из $L_2[0,1]$. Оператор A является нормальным, его спектр состоит из простых собственных значений $\lambda_n = i2\pi n$, $e_n(t) = e^{i2\pi nt}$, $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом он является генератором сильно непрерывной группы операторов

$$T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi nt} P_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{здесь } s(A) = 0.$$

С помощью формулы (1) можно определить оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. В этом случае группа $T: \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ не является гиперболической, так как $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

Пусть теперь оператор A задается формулой $(Ax)(u) = x'(u) + \alpha x(u)$ с той же областью определения, где $\alpha \in \mathbb{R}_-$, $|\alpha| > 1$. Тогда $\lambda_n = i2\pi n + \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, собственные векторы и спектральные проекторы не изменились. Очевидно, что $s(A) = \alpha$. При этом полугруппа $T(t)$ является гиперболической, например, при $|\alpha| > 1$, и с ее помощью можно не только определить оператор $\mathcal{L}$, но и применить к нему, а также к сопровождающему разностному оператору $\mathcal{D}$ результаты предыдущего раздела. Отметим, что в этом случае оператор $T(1)$ не является компактным.

Пусть

$$A = a^2 \frac{d^2}{du^2}, \quad D(A) = \{x \in W_2^2[0,1]: \ y(0) = y(1) = 0\}.$$

Тогда

$$\sigma(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{-(a\pi n)^2\},$$

соответствующие собственные векторы имеют вид $e_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi nt$, $n \in \mathbb{N}$, и $P_n x = (x, e_n)e_n$. Оператор A является самосопряженным оператором со спектром, лежащим в левой полуплоскости. Отметим, что в рассматриваемом случае полугруппа $T(t)$, $t \geqslant 0$, является гиперболической. Поэтому в рассматриваемом случае к оператору A можно применить теорию предыдущего раздела.

Если изменить граничные условия на $y'(0) = y'(1) = 0$, то $\lambda_n = -(a\pi n)^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, условие $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ не выполнено, полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ не является гиперболической.

Пример 5.2 (см. [20, 22])**.** При моделировании химического процесса катализа (см. [20, 22]) возникает интегро-дифференциальный оператор

$$A: D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(u) = a^2 x''(u) - \alpha x(u) + \alpha^2 \int_0^1 e^{-\alpha(u-s)} x(s)\, ds,$$

с областью определения

$$D(A) = \{x \in W_2^2[0,1]: \ x'(0) = x'(1) = 0\},$$

и в этом случае $\mathcal{H} = L_2[0,1]$. В [22] доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть $\alpha > \ln 2$. Тогда у оператора A есть счетное множество вещественных значений, все они различны и имеют асимптотику*

$$\lambda_k = -(a\pi k)^2 - \alpha + (6a^2\alpha^3 - 7\alpha^3)(\pi k)^{-2} + \mathcal{O}(k^{-4}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

При значениях параметров модели $\alpha = 17{,}5$ и $a^2 = 0{,}004$ (см. [20, 22]) с помощью точных формул из [22] там же приведены первые четыре собственных значения, наибольшим из которых является $\lambda = -7{,}9122$. Таким образом, $s(A) = -7{,}9122$, полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ является гиперболической.

Таким образом, можно определить линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = -d/dt + A$ в функциональном пространстве $\mathcal{F}$, а также к этому оператору и к сопровождающему для него оператору D применить результаты предыдущего раздела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 1 (409). — С. 77–128.
2. *Баскаков А. Г., Синтяев Ю. Н.* Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений// Диффер. уравн. — 2010. — *46*, № 2. — С. 210–219.
3. *Баскаков А. Г.* О дифференциальных и разностных фредгольмовых операторах// Докл. РАН. — 2007. — *416*, № 2. — С. 156–160.
4. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2001. — *42*, № 6. — С. 1231–1243.
5. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов// Функц. анал. прилож. — 1996. — *30*, № 3. — С. 1–11.
6. *Баскаков А. Г.* Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами// Изв. вузов. Мат. — 2001. — № 5. — С. 3–11.
7. *Баскаков А. Г.* Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 8. — С. 23–62.
8. *Баскаков А. Г., Диденко В. Б.* О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — *82*, № 1. — С. 3–16.
9. *Баскаков А. Г., Диденко В. Б.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 3. — С. 323–338.
10. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Костина Л. Н., Ускова Н. Б.* О состояниях обратимости некоторых классов операторов// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2024. — № 2. — С. 27–35.
11. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Костина Л. Н., Ускова Н. Б.* Об эквивалентных операторах// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — *235*. — С. 3–14.
12. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 17–26.
13. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ// Сиб. мат. ж. — 1997. — *38*, № 1. — С. 14–28.
14. *Баскаков А. Г.* Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 6. — С. 811–820.
15. *Бичегкуев М. С.* Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — *75*, № 4. — С. 20.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
17. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
18. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1976. — *40*, № 6. — С. 1380–1408.
19. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
20. *Матрос Ю. Ш., Валко П.* Эффективность гетерогенного катализатора при периодическом изменении температуры исходной смеси// Докл. АН СССР. — 1979. — *248*, № 4. — С. 912–914.
21. *Перов А. И.* Частотные признаки существования ограниченных решений// Диффер. уравн. — 2007. — *43*, № 7. — С. 896–904.
22. *Перов А. И., Глушко Е. Г., Тюленева И. Г.* Собственные значения и собственные функции одного интегро-дифференциального оператора// Диффер. уравн. — 1988. — *24*, № 3. — С. 516–519.
23. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем// Укр. мат. ж. — 1987. — *39*, № 2. — С. 210–215.
24. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
25. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
26. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces// Mediterr. J. Math. — 2016. — *13*. — P. 2443–2462.

27. *Engel K. -J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — New York: Springer, 2000.
28. *Gearhart L.* Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space// Trans. Am. Math. Soc — 1978. — *236.* — P. 385–394.
29. *Howland J. S.* Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians// Math. Ann. — 1974. — *207.* — P. 315–335.
30. *Latushkin Y., Montgomery-Smith S.* Evolutionary semigroups and Lyapunov theorems in Banach spaces// J. Funct. Anal — 1995. — *127.* — P. 173–197.
31. *Prüss J.* On the spectrum of C_0-semigroups// Trans. Am. Math. Soc — 1984. — *284*, № 2. — P. 847–857.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич (Baskakov Anatoly Grigorievich)
Воронежский государственный университет, Воронеж
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `anatbaskakov@yandex.ru`

Гаркавенко Галина Валерьевна (Garkavenko Galina Valerievna)
Воронежский государственный университет, Воронеж
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `g.garkavenko@mail.ru`

Костина Любовь Николаевна (Kostina Lyubov Nikolaevna)
Воронежский государственный университет, Воронеж
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `kostinalubov@bk.ru`

Ускова Наталья Борисовна (Uskova Natalya Borisovna)
Воронежский государственный технический университет, Воронеж
(Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)
E-mail: `nat-uskova@mail.ru`