ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 41–45
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-41-45

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ 3-КАКТУСОВ

© 2025 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. k-Кактус — это связный граф, у которого каждое ребро содержится максимум в k циклах. Получены точные и асимптотические формулы для числа помеченных эйлеровых 3-кактусов с заданным числом вершин.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, эйлеров граф, 3-кактус, асимптотика.

ENUMERATION OF LABELED EULERIAN 3-CACTI

© 2025 **V. A. VOBLYI**

Abstract. k-Cactus is a connected graph in which each edge is contained in a maximum of k cycles. We obtain exact and asymptotic formulas for the number of labeled Eulerian 3-cacti with a given number of vertices.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, Eulerian graph, 3-cactus, asymptotics.

AMS Subject Classification: 05C30

Определение 1. Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 2. Блок — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 3 (см. [8, с. 93]). Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле.

У кактуса каждый блок является ребром или циклом.

Определение 4 (см. [11]). k-Кактус — это связный граф, у которого каждое ребро содержится максимум в k циклах. 1-Кактусы называют просто кактусами.

Определение 5 (см. [11]). k-Тета-графом называется граф, состоящий из k внутренне непересекающихся цепей с одной и той же парой концевых вершин. 3-Тета-граф — это обычный тета-граф.

Лемма 1. *Для числа $T_n(4)$ помеченных n-вершинных 4-тета-графов верна формула*

$$T_n(4) = \frac{n!}{288}(n-3)(n-4)(n+7), \quad n \geqslant 5.$$

Доказательство. Гомеоморфный тип — это общий граф (возможно, содержащий петли или кратные ребра) без вершин степени 2, из которого все графы из заданного класса гомеоморфных графов получаются вставкой вершин степени 2 (см. [7, 10]). Пусть H — гомеоморфный тип с a вершинами, b ребрами, b_0 петлями, b_i — число пучков ребер кратности i, $A(H)$ — порядок вершиннореберной группы автоморфизмов графа H. Тогда число помеченных графов C_n с n вершинами и гомеоморфным типом H равно

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0} A(H)} \mathrm{Coef}_{x^{n-a}} \frac{1}{(1-x)^b} x^{b+b_0-\sum\limits_{i=1}^{b} b_i} \prod_{i=1}^{b} (x + i(1-x))^{b_i}$$

(см. [7, лемма 2]). Для 4-тета-графа имеем $a = 2$, $b = 4$, $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 = 1$, $A(H) = 48$,

$$T_n(4) = \frac{n!}{48} \mathrm{Coef}_{x^{n-2}} \frac{x^3(x + 4(1-x))}{(1-x)^4} = \frac{n!}{48} \left[x^{-1}\right] \left(\frac{x^4}{(1-x)^4} + \frac{4x^3}{(1-x)^2} \right) x^{-n+1}.$$

С учетом разложения

$$(1-z)^{-m-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+m}{m} z^p$$

получим

$$T_n(4) = \frac{n!}{48} \left(\binom{n-3}{3} + 4\binom{n-3}{2} \right) = \frac{n!}{288} (n-3)(n-4)(n+7).$$

Найдем еще производящую функцию и ее производную:

$$f_4(z) = \sum_{n=5}^{\infty} T_n(4) \frac{z^n}{n!} = \frac{z^5(4-3z)}{48(1-z)^4}, \quad f_4'(z) = \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5}. \qquad \square$$

Теорема 1. *Число $ECa(n,3)$ помеченных эйлеровых 3-кактусов с n вершинами при $n \geqslant 3$ равно*

$$ECa(n,3) = \frac{(n-1)!}{n} \left[z^{n-1}\right] \exp\left(n \left(\frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5} \right) \right). \tag{1}$$

Доказательство. Граф является 3-кактусом тогда и только тогда, когда каждый его блок — ребро, цикл, тета-граф или 4-тета-граф (см. [11]). Граф эйлеров тогда и только тогда, когда каждый его блок — эйлеров граф (см. [4]). Так как граф K_2 (блок-ребро) и тета-граф неэйлеровы, а цикл и 4-тета-граф — эйлеровы, то у эйлерова 3-кактуса каждый его блок является циклом или 4-тета-графом.

Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Введем производящую функцию:

$$B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

В [1] автором была получена формула

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} \left[z^{n-1}\right] \exp\left(nB'(z)\right) = \frac{(n-1)!}{n} \left[z^{-1}\right] \exp\left(nB'(z)\right) z^{-n}, \tag{2}$$

где $[z^i]$ — коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [6, с. 11, 25]). Эта формула верна не только для всего класса связных графов, но и для его блочно-устойчивого подкласса (см. [2]). Она используется при перечислении помеченных графов с известной структурой блоков. Класс эйлеровых 3-кактусов является блочно-устойчивым классом графов, так как у эйлеровых 3-кактусов все блоки принадлежат заданному множеству 2-связных графов (см. [2]).

Используем производящую функцию $\bar{B}(z)$ для числа блоков помеченных кактусов (см. [1])

$$\bar{B}(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2} \frac{z^n}{n!}.$$

Вычитая слагаемое производящей функции $z^2/2$ для блоков-ребер и добавляя слагаемое для 4-тета-блоков $f_4(z)$ к $\bar{B}(z)$, для производящей функции $\tilde{B}(z)$ 3-кактусов найдем

$$\tilde{B}(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2} \frac{z^n}{n!} + f_4(z), \quad \tilde{B}'(z) = \frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5}.$$

После подстановки $\tilde{B}'(z)$ вместо $B'(z)$ в формулу (2) получим утверждение теоремы. □

Теорема 2. *Для числа $ECa(n,3)$ помеченных эйлеровых 3-кактусов с n вершинами верна асимптотическая формула*

$$ECa(n,3) \sim c_2 n^{-5/2} a_2^n n!, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

где $c_2 \approx 0{,}06818801111$, $a_2 \approx 5{,}388086206$.

Доказательство. Выражение (1) можно представить в виде

$$ECa(n,3) = \frac{(n-1)!}{n} \left[z^{-1}\right] z \exp\left(n\left(\frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5}\right)\right) z^{-n-1}.$$

Используем слеующую теорему Флажоле и Седжвика.

Теорема (см. [9, теорема VIII.8])**.** *Обозначим*

$$F(N,n) = [z^N]\{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}}.$$

Пусть функции

$$a(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j, \quad b(z) = \sum_{j\geqslant 0} b_j z^j$$

удовлетворяют следующим условиям.

(i) *Функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z=0$, имеют неотрицательные коэффициенты и $b(0) \neq 0$;*

(ii) НОД$\{j \mid b_j > 0\} = 1$;

(iii) *если $R \leqslant \infty$ — радиус сходимости $b(z)$, то радиус сходимости $a(z)$ не меньше R;*

Положим

$$T = \lim_{x \to R-0} \frac{xb'(x)}{b(x)}.$$

Пусть λ — такое положительное число, что $0 < \lambda < T$, и пусть r — единственный действительный корень уравнения $r\dfrac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$. Положим $\sigma = \dfrac{d^2}{dr^2}(\ln b(r) - \lambda \ln r)$. Тогда для целого $N = \lambda n$ при $n \to \infty$ и $N \to \infty$ верно асимптотическое равенство

$$F(N,n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1}\sqrt{2\pi n\sigma}}.$$

В нашем случае $N = n$, $\lambda = 1$,

$$ECa(n,3) = \frac{(n-1)!}{n} F(N,n), \quad a(z) = z, \quad b(z) = \exp\left(\frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5}\right).$$

Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z = 0$, $b(0) = 1$. Радиус сходимости R ряда для $b(z)$ равен 1. Ряд для функции $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $\bar{B}(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. С помощью Maple найдем $b_1 = 5/2 > 0$, $b_2 = 5/2 > 0$, НОД$(1,2) = 1$. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажоле—Седжвика выполнены. Находим

$$\phi(z) = z\frac{b'(z)}{b(z)} = z(\ln(b(z)))' = z\left(\frac{2z - z^2}{2(1-z)^2} + \frac{40z^3 - 45z^4 + 18z^5 - 3z^6}{24(1-z)^6}\right).$$

$$T = \lim_{z \to 1-0} \phi(z) = +\infty.$$

Так как $\lambda = 1$ и $0 < \lambda < T$, то, решая уравнение $\phi(r) = \lambda$ с помощью Maple, видим, что его единственным действительным корнем в круге сходимости функции $b(z)$ является число $r \approx 0{,}4057469937$. Далее,

$$\sigma_2 = \left(\frac{b'(r)}{b(r)}\right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \frac{2r - r^2}{(1-r)^3} + \frac{10r^2 - 5r^3}{2(1-r)^7} + \frac{1}{r^2},$$

так что $\sigma_2 \approx 34{,}22977823$. Также с помощью Maple вычислим

$$a_2 = \frac{b(r)}{r} \approx 5{,}388086206, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \approx 0.{,}06818801111.$$

Окончательно при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$ECa(n,3) = \frac{(n-1)!}{n} F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n! c_2 n^{-5/2} a_2^n. \qquad \square$$

Отметим, что каждый кактус является 3-кактусом. Обозначим через $ECa(n,k)$ число помеченных эйлеровых k-кактусов с n вершинами.

Следствие 1. *Почти все помеченные эйлеровы* 3*-кактусы не являются эйлеровыми кактусами.*

Доказательство. В [3, 5] для числа $ECa(n,1)$ помеченных n-вершинных эйлеровых кактусов найдена асимптотика

$$ECa(n,1) \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!, \quad c_1 \approx 0{,}1079436709, \quad a_1 \approx 2{,}5424753735. \tag{4}$$

С помощью формулы (4), учитывая, что $a_1 < a_2$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ECa(n,1)}{ECa(n,3)} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n = 0.$$

Это значит, что доля эйлеровых кактусов среди всех эйлеровых 3-кактусов при $n \to \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* Об одной формуле для числа помеченных связных графов// Дискр. анал. исслед. опер. — 2012. — *19*, № 4. — С. 48–59.
2. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анал. исслед. опер. — 2019. — *26*, № 1. — С. 20–32.
3. *Воблый В. А.* Об одном подходе к перечислению помеченных связных графов: обзор результатов// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *188*. — С. 106–118.
4. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов// Дискр. анал. исслед. опер. — 2014. — *21*, № 2. — С. 24–32.
5. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов// Мат. XVII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 16-20 июня 2014 г.), 2014. — С. 58–60.
6. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
7. *Степанов В. Е.* О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки// Теор. вероят. примен. — 1987. — *32*, № 4. — С. 633–657.
8. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
9. *Flajolet P., Sedgewick G. E.* Analytic Combinatorics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.
10. *Ford G. W., Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in theory graphs, IV// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1957. — *43*. — P. 163–167.
11. *Zhang L., Huang Y.* On sizes of generalized cactus graphs// Discr. Appl. Math. — 2024. — *348*. — P. 184–191.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`