ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 82–91
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-82-91

УДК 517.984

# СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ТРЕХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

© 2025 г. **С. М. ТАШПУЛАТОВ**

Аннотация. Рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и исследуются структура существенного спектра и дискретный спектр системы в $\nu$-мерной решетке $Z^\nu$ с взаимодействием ближайших соседей.

***Ключевые слова*:** модель Гейзенберга, трехмагнонная система, существенный спектр, дискретный спектр.

# STRUCTURE OF THE ESSENTIAL SPECTRUM AND THE DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF THREE-MAGNON SYSTEMS IN THE HEISENBERG MODEL

© 2025 **S. M. TASHPULATOV**

Abstract. We consider the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model and examine the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the system in the $\nu$-dimensional lattice $Z^\nu$ with the coupling nearest neighbors.

***Keywords and phrases*:** Heisenberg model, three-magnon systems, essential spectrum, discrete spectra.

***AMS Subject Classification*:** 62M15, 46L60, 47L90

**1. Введение.** Двухмагнонные системы давно привлекают внимание многих исследователей. Впервые такие системы, были рассмотрены в одномерных целочисленных решетках в работе Бете [5]. Бете доказал, что в этом случае существует не более одного связанного состояния системы.

В [6] также рассматривалась двухмагнонная система в одномерном случае и были потверждены результаты Бете.

М. Уортис [16] рассмотрел двухмагнонную систему на $d$-мерной целочисленной решетке для произвольного $d$. Он доказал, что в этом случае система имеет $0, 1, 2, \ldots, d$ связанных состояний.

Ч. Маюмдар [10] изучал двухмагнонную систему на одномерной целочисленной решетке уже с взаимодействием ближайших и вторых соседей для значения полного квазиимпульса $\Lambda = \pi$ и численно нашел спектр и связанные состояния системы.

В [11] такая система была рассмотрена в одномерном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей для значений $\Lambda = \pi$ и $\Lambda = \pi/2$; были изучены спектр и связанные состояния системы для этих значений $\Lambda$ с помощью численных методов.

И. Г. Гочев рассмотрел двухмагнонную систему в одномерном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей для всех значений польного квазиимпульса системы (см. [1]). Он доказал, что при $\Lambda = \pi$ система имеет единственное связанное состояние ниже области непрерывного спектра для значений $\alpha < 1/2$, а при $\alpha \geqslant 1/2$ такое связанное состояние исчезает ($\alpha$ — отношение параметра обменного билинейного взаимодействия для вторых соседей к параметру обменного билинейного взаимодействие для ближайших соседей, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$). Кроме того, при $\Lambda = \pi/2$ существует единственное связанное состояние системы для всех значений $\alpha$, лежащих ниже области непрерывного спектра оператора, а при $\Lambda = 0$ связанные состояния системы отсутствуют. Для остальных же значений $\Lambda$ $(-\pi < \Lambda < \pi)$ установлено, что существует такое $\alpha$, обозначаемое $\alpha_{\mathrm{cr}}$, что при фиксированном полном квазиимпульсе $\Lambda$ и $0 < \alpha < \alpha_{\mathrm{cr}}$ в системе существует единственное связанное состояние, а при $\alpha \geqslant \alpha_{\mathrm{cr}}$ оно исчезает.

Двухмагнонная система в анизотропной модели Гейзенберга со взаимодействием ближайших соседей была рассмотрена в [2].

В работе автора [4] двухмагнонная система рассматривалась в одномерном анизотропном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей; были изучены спектр и связанные состояния этой системы для всех значений полного квазиимпульса системы.

В [15] трехмагнонная система была рассмотрена в двумерной изотропной и анизотропной ограниченной ферромагнитной решетке; были исследованы спектр и связанные состояния системы с помощью численных методов.

В работе автора [14] трехмагнонная система была рассмотрена в изотропной негейзенберговской ферромагнитной модели со значениями спина 1 с взаимодействием ближайших соседей. Изучена структура существенного спектра системы; были получены верхняя и нижняя оценки для количества трехмагнонных связанных состояний системы.

**2. Гамильтониан системы.** В настоящей работе рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и описывается структура существенного спектра и дискретный спектр системы в целочисленных решетках $Z^\nu$. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = J\sum_{m,\tau}(\overrightarrow{S}_m \overrightarrow{S}_{m+\tau}). \tag{1}$$

Здесь $J < 0$ — параметр билинейного обменного взаимодействия между атомами ближайших соседей в решетке, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ — оператор атомного спина $m$-го узла $\nu$-мерной целочисленной решетки $Z^\nu$, а $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, где $e_j$ — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям.

Положим $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$. Обозначим через $\varphi_0$ вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями

$$S_m^+\varphi_0 = 0, \quad S_m^z\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0, \quad |\varphi_0| = 1.$$

Вектор $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ описывает состояние системы трех магнонов, находящихся в узлах $p$, $q$ и $r$. Замыкание пространства, образованного всевозможными линейными комбинациями этих векторов, обозначим через $\mathcal{H}_3$; оно называется трехмагнонным пространством оператора $H$.

**Теорема 1.** *Подпространство $\mathcal{H}_3$ инвариантно относительно оператора $H$, а сужение $H_3$ оператора $H$ на подпространство $\mathcal{H}_3$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_3$, действующий в пространстве $l_2^{as}$ по формуле*

$$(\overline{H}_3 f)(p,q,r) = J\sum_{\tau}\Bigg[\Big\{\delta_{p,q+\tau} + \delta_{p+\tau,q} + \delta_{p+\tau,r} + \delta_{p,r+\tau} + \delta_{q,r+\tau} + \delta_{q+\tau,r} - 6\Big\}f(p,q,r) -$$
$$-\frac{1}{2}\delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p-\tau,r}f(p-\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{q-\tau,r}f(p,q-\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{q,r-\tau}f(p,q,r-\tau) -$$
$$-\frac{1}{2}\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{p,r-\tau}f(p,q,r-\tau) + f(p-\tau,q,r) + f(p,q-\tau,r) + f(p,q,r-\tau) -$$

$$-\frac{1}{2}\delta_{p+\tau,q}f(p+\tau,q,r)-\frac{1}{2}\delta_{p+\tau,r}f(p+\tau,q,r)-\frac{1}{2}\delta_{q+\tau,r}f(p,q+\tau,r)-\frac{1}{2}\delta_{q,r+\tau}f(p,q,r+\tau)-$$
$$-\frac{1}{2}\delta_{p,q+\tau}f(p,q+\tau,r)-\frac{1}{2}\delta_{p,r+\tau}f(p,q,r+\tau)+f(p+\tau,q,r)+f(p,q+\tau,r)+f(p,q,r+\tau)], \quad (2)$$

*где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Сам оператор $H_3$ действует на вектор $\psi\in\mathcal{H}_3$ по формуле*

$$H_3\psi=\sum_{p,q,r\in Z^\nu}(\overline{H}_3 f)(p,q,r)S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0. \quad (3)$$

*Доказательство.* Подействуем гамильтонианом $H$ на векторы $\psi_3\in\mathcal{H}_3$ с использованием обычных коммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения магнонов в узлах:

$$[S_p^+,S_q^-]=2\delta_{p,q}S_p^z,\quad [S_p^\pm,S_q^z]=-\delta_{p,q}S_p^\pm,\quad S_p^z\varphi_0=\frac{1}{2}\varphi_0,$$

а также учтем, что $S_p^+\varphi_0=\theta$, где $\theta$ — нулевой элемент пространства $\mathcal{H}_3$. Отсюда получается утверждение теоремы. □

**Лемма 1.** *Спектры операторов $H_3$ и $\overline{H}_3$ совпадают.*

*Доказательство.* Так как операторы $H_3$ и $\overline{H}_3$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то из критерия Вейля (см. [12, гл. VII, раздел 3, с. 262-263]) следует существование такой последовательности векторов $\psi_i$, что

$$\psi_i=\sum_{p,q,r}f_i(p,q,r)S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0,\quad \|\psi_i\|=1,\quad \lim_{i\to\infty}\|(H_3-\lambda)\psi_i\|=0, \quad (4)$$

где $\lambda\in\sigma(H_3)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\|(H_3-\lambda)\psi_i\|^2&=\big((H_3-\lambda)\psi_i,\ (H_3-\lambda)\psi_i\big)=\\&=\sum_{p,q,r}\big\|(H_3-\lambda)f_i(p,q,r)\big\|^2\big(S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0,\ S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0\big)=\\&=\sum_{p,q,r}\big\|(\overline{H}_3-\lambda)F_i(p,q,r)\big|^2\big(S_p^+S_q^+S_r^+S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0,\ \varphi_0\big)=\\&=\sum_{p,q,r}\big\|(\overline{H}_3-\lambda)F_i(p,q,r)\big\|^2(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{p,q,r}\big\|(\overline{H}_3-\lambda)F_i(p,q,r)\big\|^2\xrightarrow[i\to\infty]{}0,\end{aligned}$$

где

$$F_i=\sum_{p,q,r}f_i(p,q,r),\quad \|F_i\|^2=\sum_{p,q,r}|f_i(p,q,r)|^2=\|\psi_i\|^2=1.$$

Это означает, что $\lambda\in\sigma(\overline{H}_3)$. Следовательно, $\sigma(H_3)\subset\sigma(\overline{H}_3)$.

Обратно, пусть $\overline{\lambda}\in\sigma(\overline{H}_3)$. Тогда в силу того же критерия Вейля существует такая последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$, что

$$\|F_i\|=1,\quad \lim_{i\to\infty}\big\|(\overline{H}_3-\overline{\lambda})\psi_i\big\|=0.$$

Полагая

$$F_i=\sum_{p,q,r}f_i(p,q,r),\quad \|F_i\|=\left(\sum_{p,q,r}|f_i(p,q,r)|^2\right)^{1/2},$$

имеем

$$\|\psi_i\|=\|F_i\|=1,\quad \big\|(\overline{H}_3-\overline{\lambda})F_i\big\|=\big\|(\overline{H}_3-\overline{\lambda})\psi_i\big\|\xrightarrow[i\to\infty]{}0.$$

Отсюда вытекает, что $\overline{\lambda}\in\sigma(\overline{H}_3)$ и, следовательно, $\sigma(\overline{H}_3)\subset\sigma(H_3)$. Эти два соотношения означают, что $\sigma(H_3)=\sigma(\overline{H}_3)$. □

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F}:l_2((Z^\nu)^3)\to L_2((T^\nu)^3)\equiv\widetilde{\mathcal{H}}_3,$$

где $T^\nu$ — $\nu$-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е. $\lambda(T^\nu)=1$.

Положим $\widetilde{H}_3 = \mathcal{F}\overline{H}_3\mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор $\overline{H}_3$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{symm}}((T^\nu)^3)$, где $L_2^{\mathrm{symm}}$ — подпространство симметричных функций в $L_2((T^\nu)^3)$.

**Теорема 2.** *Преобразование Фурье переводит оператор $\overline{H}_3$ в ограниченный самосопряженный оператор $\widetilde{H}_3 = \mathcal{F}\overline{H}_3\mathcal{F}^{-1}$, действующий в пространстве $L_2^{\mathrm{symm}}((T^\nu)^3)$ по формуле*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}_3\psi_3 = -J\big\{12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma\big\} f(\lambda,\mu,\gamma) + \\
&+ J\int\limits_{T^\nu}\Big[12 + 2\cos(\lambda - s) + 2\cos(\mu - s) - 2\cos s - 2\cos(\lambda+\mu-s) - \\
&\qquad\qquad - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma\Big] f(s,\lambda+\mu-s,\gamma)ds + \\
&+ J\int\limits_{T^\nu}\Big[12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 2\cos(\lambda - s) + 2\cos(\gamma - s) - \\
&\qquad\qquad - 2\cos s - 2\cos(\lambda+\gamma-s)\Big] f(s,\mu,\lambda+\gamma-s)ds + \\
&+ J\int\limits_{T^\nu}\Big[12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma - 2\cos s - 2\cos(\mu+\gamma-s) + \\
&\qquad\qquad + 2\cos(\mu - s) + 2\cos(\gamma - s)\Big] f(\lambda,s,\mu+\gamma-s)ds + \\
&+ J\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\Big[12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 3\cos(\lambda+\mu+\gamma-s-t) + \\
&\qquad + 2\cos(\lambda+\mu-s) + 2\cos(\lambda+\gamma-s) + 4\cos s + 4\cos t + 2\cos(\lambda+\mu-t) + \\
&\qquad + 2\cos(\mu+\gamma-t) + \cos(\lambda+t) + 2\cos(\mu-s-t) + 2\cos(\lambda-s-t) - 8\cos(\lambda-s) - \\
&\qquad - 6\cos(\mu-t) - 8\cos(\lambda+\mu-s-t) - 2\cos(\lambda-t)\Big] f(s,t,\lambda+\mu+\gamma-s-t)\,ds\,dt, \qquad (5)
\end{aligned}$$

*где $L_2^{\mathrm{symm}}$ — подпространство симметричных функций в $L_2((T^\nu)^3)$.*

Следующий факт является важным для последующих исследований спектра оператора $\widetilde{H}_3$. Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x + y + z = \Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x,y,z) : x+y+z = \Lambda\}$. Известно (см. [3]), что оператор $\widetilde{H}_3$ и пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_3$ можно разложить в прямые интегралы

$$\widetilde{H}_3 = \int\limits_{T^\nu}\bigoplus \widetilde{H}_{3\Lambda}d\Lambda, \quad \widetilde{\mathcal{H}}_3 = \int\limits_{T^\nu}\bigoplus \widetilde{\mathcal{H}}_{3\Lambda}d\Lambda$$

операторов $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ и пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_{3\Lambda}$ так, что пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_{3\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\widetilde{H}_{3\Lambda}$.

Спектральные свойства рассматриваемого оператора энергии трехмагнонных систем в изотропной ферромагнитной модели Гейзенберга тесно связаны со спектральными свойствами его двухмагнонных подсистем. Поэтому сначала исследуем спектр и связанные состояния двухмагнонных систем.

**3. Спектр и связанные состояние оператора энергии двухмагнонных систем в модели Гейзенберга.** Гамильтониан двухмагнонных систем также имеет вид (1). Обозначим через $\mathcal{H}_2$ двухмагнонное подпространство оператора $H$, а через $H_2$ — сужение оператора $H$ на подпространство $\mathcal{H}_2$.

**Теорема 3.** *Пространство $\mathcal{H}_2$ инвариантно относительно оператора $H$. Оператор $H_2$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_2$, действующей в пространстве $l_2((Z^\nu)^2)$ по формуле*

$$(\overline{H}_2 f)(p,q) = J\sum_{\tau}\sum_{p,q}\Bigg[\big(\delta_{p,q+\tau}+\delta_{p+\tau,q}-2\big)f(p,q)+\frac{1}{2}f(p-\tau,q)+\frac{1}{2}f(p,q-\tau)- \\ -\frac{1}{2}\delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q)-\frac{1}{2}\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau)+\frac{1}{2}f(p+\tau,q)+\frac{1}{2}f(p,q+\tau)- \\ -\frac{1}{2}\delta_{p+\tau,q}f(p+\tau,q)-\frac{1}{2}\delta_{p,q+\tau}f(p,q+\tau)\Bigg]. \quad (6)$$

*Сам оператор $H_2$ действует на вектор $\psi \in \mathcal{H}_2$ по формуле*

$$H_2\psi = \sum_{p,q}(\overline{H}_2 f)(p,q)S_p^- S_q^- \varphi_0. \quad (7)$$

**Лемма 2.** *Спектры операторов $H_2$ и $\overline{H}_2$ совпадают.*

**Теорема 4.** *Преобразование Фурье переводит оператор $\overline{H}_2$ в ограниченный самосопряженный оператор $\widetilde{H}_2$, действующий в пространстве $\mathcal{H}_2$ по формуле*

$$(\widetilde{H}_2 f)(\lambda,\mu) = -J\big[4-2\cos\lambda-2\cos\mu\big]f(\lambda,\mu)+J\int\limits_{T^\nu}\Big[4-2\cos\lambda-2\cos\mu+ \\ +2\cos(\lambda-s)+2\cos(\mu-s)-2\cos s-2\cos(\lambda+\mu-s)\Big]f(s,\lambda+\mu-s)ds. \quad (8)$$

Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x+y=\Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x,y) : x+y=\Lambda\}$. Известно, что оператор $\widetilde{H}_2$ и пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ можно разложить в прямые интегралы

$$\widetilde{H}_2 = \int\limits_{T^\nu}\bigoplus \widetilde{H}_{2\Lambda}d\Lambda, \quad \widetilde{\mathcal{H}}_2 = \int\limits_{T^\nu}\bigoplus \widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}d\Lambda$$

операторов $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ и пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ так, что пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\widetilde{H}_{2\Lambda}$, а операторы $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ действуют по формуле

$$(\widetilde{H}_{2\Lambda}f_\Lambda)(\lambda) = h_\Lambda(\lambda)f_\Lambda(\lambda)+\int\limits_{T^\nu}h_{1\Lambda}(\lambda,s)f_\Lambda(s)ds, \quad (9)$$

где

$$h_\Lambda(\lambda) = -4J\left[1-\cos\frac{\Lambda}{2}\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-\lambda\right)\right],$$

$$h_{1\Lambda}(\lambda,s) = 4J\left\{1-\cos\frac{\Lambda}{2}\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-\lambda\right)+\left[\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-\lambda\right)-\cos\frac{\Lambda}{2}\right]\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-s\right)\right\};$$

здесь $f_\Lambda(\lambda) = f(\lambda,\Lambda-\lambda)$.

Известно, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}(\lambda)$ не зависит от функции $h_{1\Lambda}(\lambda,s)$ и заполняет весь отрезок $G_\Lambda = \big[-4J(1-\cos(\Lambda/2)),\ -4J(1+\cos(\Lambda/2))\big]$.

**Определение 1.** Собственная функция $\varphi_\Lambda \in L_2(T^\nu)$ оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$, отвечающая собственному значению $z_\Lambda \notin G_\Lambda$, называется связанным состоянием оператора $\widetilde{H}_2$, а величина $z_\Lambda$ — энергией этого связанного состояния.

Положим

$$D_\Lambda^1(z) = z\int\limits_T\frac{ds}{h_\Lambda(s)-z}\left(1+4J\int\limits_T\frac{\left[\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-s\right)-\cos\frac{\Lambda}{2}\right]\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-s\right)ds}{h_\Lambda(s)-z}\right)- \\ -z\int\limits_T\frac{\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-s\right)ds}{h_\Lambda(s)-z}\int\limits_T\frac{4J\left[\cos\left(\frac{\Lambda}{2}-s\right)-\cos\frac{\Lambda}{2}\right]ds}{h_\Lambda(s)-z}.$$

**Лемма 3.** *Число $z = z_0 \notin \sigma_{\rm cont}(\widetilde{H}_{2\Lambda})$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}_2$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $D^1_\Lambda(z)$, т.е. $D^1_\Lambda(z) = 0$.*

*Доказательство.* Пусть число $z = z_0$ — собственное значение оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$, а $\varphi_\Lambda(x)$ — соответствующая собственная функция, т.е.

$$h_\Lambda(x)\varphi_\Lambda(x) - \int\limits_T h_{1\Lambda}(t)\varphi_\Lambda(t)dt = z\varphi_\Lambda(x).$$

Введем обозначение $\psi_\Lambda(x) = [h_\Lambda(x) - z]\varphi_\Lambda(x)$. Тогда

$$\psi_\Lambda(x) - \int\limits_T \frac{h_{1\Lambda}(x,t)}{\varphi_\Lambda(t) - z}dt = 0,$$

т.е. число $\mu = 1$ есть собственное значение оператора

$$(K_\Lambda(z)f_\Lambda)(x) = \int\limits_T \frac{h_{1\Lambda}(x,t)}{h_\Lambda(t) - z}.$$

Отсюда следует, что $D^1_\Lambda(z) = 0$.

Пусть теперь $z = z_0$ является нулем функции $D^1_\Lambda(z) = 0$, т.е. $D^1_\Lambda(z) = 0$. Из теоремы Фредгольма следует, что однородное уравнение

$$\psi_\Lambda(x) - \int\limits_T \frac{h_{1\Lambda}(x,t)}{h_\Lambda(t) - z} = 0$$

имеет нетривиальное решение. Это означает, что число $z = z_0$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$. □

**Теорема 5.**

(a) *Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = \pi$, то непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из единственной точки $-4J$ и оператор имеет единственное собственное значение $z = -2J$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$.*

(b) *Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = 0$, то непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из точки $0$, причем оператор $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ не имеет собственных значений, лежащих ниже области непрерывного спектра.*

(c) *Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \neq \pi/2$ и $\Lambda \neq 0$, то непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из отрезка*

$$\sigma_{\rm cont}(\widetilde{H}_{2\Lambda}) = \left[-4J\left(1 - \cos\frac{\Lambda}{2}\right),\ -4J\left(1 + \cos\frac{\Lambda}{2}\right)\right],$$

*и оператор $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ имеет единственное собственное значение $z = -2J(1 - \cos^2(\Lambda/2))$, лежащее ниже области непрерывного спектра этого оператора.*

*Доказательство.* В одномерном случае, при $\Lambda = \pi$ действие оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ определяется с помощью формулы

$$(\widetilde{H}_{2\Lambda}f_\Lambda)(\lambda) = -4Jf_\Lambda(\lambda) + 4J\int\limits_T \bigl\{1 + \sin\lambda\sin s\bigr\}f_\Lambda(s)ds,$$

а уравнение для собственных значений и собственных функций примет вид

$$(-4J - z)f_\Lambda(\lambda) + 4J\int\limits_T \bigl\{1 + \sin\lambda\sin s\bigr\}f_\Lambda(s)ds = 0. \tag{10}$$

Введем обозначения

$$a=\int\limits_T f_\Lambda(s)ds,\quad b=\int\limits_T \sin s f_\Lambda(s)ds.$$

Тогда

$$f_\Lambda(\lambda)=\frac{-4Ja-4Jb\sin\lambda}{-4J-z}.$$

Для нахождения $a$ и $b$ имеем систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\left(1+\frac{4J}{-4J-z}\right)a+\frac{4J\sin\lambda}{-4Ja-z}b=0,\quad \left(1+\frac{2J}{-4J-z}\right)b=0.$$

Из второго уравнения находим, что $z=-2J$. Утверждение (a) доказано.

Пусть теперь полный квазиимпульс системы $\Lambda=0$. Тогда действие оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ определяется формулой

$$(\widetilde{H}_{2\Lambda}f_\Lambda)(\lambda)=-4J(1-\cos\lambda)f_\Lambda(\lambda)+4J\int\limits_T\big\{1-\cos\lambda-(1-\cos\lambda)\cos s\big\}f_\Lambda(s)ds,$$

а уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$\big[-4J(1-\cos\lambda)-z\big]f_\Lambda(\lambda)+4J\int\limits_T\big\{1-\cos\lambda-(1-\cos\lambda)\cos s\big\}f_\Lambda(s)ds=0.$$

Введем обозначения

$$a=\int\limits_T f_\Lambda(s)\,ds, b=\int\limits_T \cos s f_\Lambda(s)\,ds.$$

Тогда

$$f_\Lambda(\lambda)=\frac{-4J(1-\cos\lambda)a+4J(1-\cos\lambda)b}{-4J(1-\cos\lambda)-z}.$$

Теперь для нахождения $a$ и $b$ получаем систему из двух однородных линейных алгебраических уравнений:

$$-\int\limits_T\frac{ds}{-4J(1-\cos s)-z}\,a+\left(1+z\int\limits_T\frac{ds}{-4J(1-\cos s)-z}\right)b=0,$$

$$-\int\limits_T\frac{\cos s ds}{-4J(1-\cos s)-z}\,a+\left(1+z\int\limits_T\frac{\cos s ds}{-4J(1-\cos s)-z}\right)b=0,$$

имеющую нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее детерминант

$$D_\Lambda^1(z)=\int\limits_T\frac{(1-\cos s)ds}{-4J(1-\cos s)-z}$$

равен нулю. В этом случае уравнение $D_\Lambda^1(z)=0$ имеет решение $z=0$. Утверждение (b) доказано.

Для доказательства утверждения (c). Выразив все интегралы в выражении для $D_\Lambda^1(z)$ через интеграл

$$J^\star(z)=\int\limits_T\frac{ds}{-4J[1-\cos\frac{\Lambda}{2}\cos(\frac{\Lambda}{2}-s)]-z}, \tag{11}$$

получаем, что уравнение $D_\Lambda^1(z)=0$ эквивалентно уравнению

$$J^\star(z)=\frac{1}{-4J(1-\cos^2\frac{\Lambda}{2})-z}. \tag{12}$$

Поскольку функция $1/(h_\Lambda(s)-z)$ непрерывна при $z\notin G_\Lambda$ и

$$[J^\star(z)]'=\int\limits_T \frac{ds}{[h_\Lambda(s)-z]^2}>0,$$

заключаем, что функция $J^\star(z)$ является возрастающей функцией при $z\notin G_\Lambda$. Кроме того,

$$J^\star(z)\xrightarrow[z\to-\infty]{}0,\qquad J^\star(z)\xrightarrow[z\to m_\Lambda-0]{}+\infty,$$
$$J^\star(z)\xrightarrow[z\to+\infty]{}0,\qquad J^\star(z)\xrightarrow[z\to M_\Lambda+0]{}-\infty.$$

В одномерном случае интеграл (11) вычисляется в квадратурах. Вычисляя его и решая уравнение (12), получим утверждение (c). □

**4. Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии трехмагнонных систем.** Сначала определим структуру существенного спектра оператора энергии трехмагнонных систем, а потом найдем оценки для количества трехмагнонных связанных состояний этой системы. Сравнивая формулы (5) и (15), и используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах (см. [13]) и учитывая, что $f(\lambda,\mu,\gamma)$ — симметричная функция, можно убедиться, что оператор $\widetilde{H}_3$ представи́м в виде

$$\widetilde{H}_{3\Lambda}=\widetilde{H}_{2\Lambda_1}\otimes I+I\otimes\big(\widetilde{H}_{2\Lambda_2}+\widetilde{H}_{2\Lambda_3}\big)+K_\Lambda, \tag{13}$$

где $I$ — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}$ и $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}$ — операторы энергии двухмагнонных систем,

$$(\widetilde{H}_{2\Lambda_1}f_{\Lambda_1})(\lambda)=-4J\left[1-\cos\frac{\Lambda_1}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_1}{2}-\lambda\right)\right]f_{\Lambda_1}(\lambda)+$$
$$+4J\int\limits_T\left\{\left[1-\cos\frac{\Lambda_1}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_1}{2}-\lambda\right)\right]+\left[\cos\left(\frac{\Lambda_1}{2}-\lambda\right)-\cos\frac{\Lambda_1}{2}\right]\cos\left(\frac{\Lambda_1}{2}-s\right)\right\}f_{\Lambda_1}(s)ds$$

и $K_\Lambda$ есть оператор конечного ранга

$$(K_\Lambda f_\Lambda)(s,t)=-2J\cos\gamma\int\limits_T f_{\Lambda_1}(s)ds-2J\cos\mu\int\limits_T f_{\Lambda_2}(s)ds-$$
$$-2J\cos\lambda\int\limits_T f_{\Lambda_3}(s)ds+J\int\limits_T\int\limits_T K'_\Lambda(s,t)\,ds\,dt,$$

где

$$K'_\Lambda(s,t)=6-2\cos\lambda-2\cos\mu-2\cos\gamma+2\cos(\lambda+\mu+\gamma-s-t)+2\cos(\lambda+\mu-s)+$$
$$+2\cos(\lambda+\gamma-s)+4\cos s+4\cos t+2\cos(\lambda+\mu-t)+2\cos(\mu+\gamma-t)+2\cos(\lambda+t)-$$
$$-2\cos(\lambda-t)+2\cos(\mu-s-t)-8\cos(\lambda-s)-6\cos(\mu-t)-6\cos(\lambda+\mu-s-t),$$
$$\Lambda=\lambda+\mu+\gamma,\quad \Lambda_1=\lambda+\mu,\quad \Lambda_2=\lambda+\gamma,\quad \Lambda_3=\mu+\gamma.$$

Спектр оператора $A\otimes I+I\otimes B$, где $A$ и $B$ — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в [7–9]. В них даны явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}$ и дискретный спектр $\sigma_{\mathrm{disc}}$ оператора $A\otimes I+I\otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ оператора $A$ и через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{\mathrm{disc}}(B)$ оператора $B$:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(A\otimes I+I\otimes B)=$$
$$=\Big\{\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(A)+\sigma(B)\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(B)\Big\}\setminus\Big\{\big(\sigma_{\mathrm{ess}}(A)+\sigma(B)\big)\cup\big(\sigma(A)+\sigma_{\mathrm{ess}}(B)\big)\Big\}, \tag{14}$$

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A\otimes I+I\otimes B)=\big(\sigma_{\mathrm{ess}}(A)+\sigma(B)\big)\cup\big(\sigma(A)+\sigma_{\mathrm{ess}}(B)\big). \tag{15}$$

Ясно, что

$$\sigma(A\otimes I+I\otimes B)=\big\{\lambda+\mu:\lambda\in\sigma(A),\ \mu\in\sigma(B)\big\}.$$

Теперь, воспользовавшись одним из результатов, полученных при исследовании спектра оператора энергии двухмагнонных систем в модели Гейзенберга представлением (13), можем описать структуры существенного спектра оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ и получить нижние и верхние оценки для количества собственных значений этого оператора.

**Теорема 6.**

(a) *Если* $\nu = 1$ *и полный квазиимпульс системы* $\Lambda = \pi$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из трех точек*: $\sigma_{\rm ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \{-12J, -8J, -10J\}$, *и для числа* $N$ *трехмагнонных связанных состояний имеет место соотношение* $1 \leqslant N \leqslant 10$.

(b) *Если* $\nu = 1$ *и полный квазиимпульс системы* $\Lambda = 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из единственного отрезка* $\sigma_{\rm ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -24j]$, *и для числа трехмагнонных связанных состояний* $N$ *имеет место соотношение* $0 \leqslant N \leqslant 9$.

(c) *Если* $\nu = 1$ *и полный квазиимпульс системы* $\Lambda \neq \pi$ *и* $\Lambda \neq 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ *состоит из объединений трех отрезков:*

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = \Bigg[-4J\left(3 - \cos\frac{\Lambda_1}{2} - \cos\frac{\Lambda_2}{2} - \cos\frac{\Lambda_3}{2}\right),\ -4J\left(3 + \cos\frac{\Lambda_1}{2} + \cos\frac{\Lambda_2}{2} + \cos\frac{\Lambda_3}{2}\right)\Bigg] \cup \\ \cup \Bigg[-8J + 2J\left(2\cos\frac{\Lambda_1}{2} + \cos^2\frac{\Lambda_2}{2} + \cos^2\frac{\Lambda_3}{2}\right),\ -8J - 4J\cos\frac{\Lambda_1}{2} + 2J\cos^2\frac{\Lambda_2}{2} + 2J\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}\Bigg] \cup \\ \cup \Bigg[-10J + 4J\left(\cos\frac{\Lambda_2}{2} + \cos\frac{\Lambda_3}{2}\right) + 2J\cos^2\frac{\Lambda_2}{2},\ -10J - 4J\left(\cos\frac{\Lambda_2}{2} + \cos\frac{\Lambda_3}{2}\right) + 2J\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}\Bigg],\end{aligned} \tag{16}$$

*и число* $N$ *трехмагнонных связанных состояний удовлетворяет неравенству* $1 \leqslant N \leqslant 10$.

*Доказательство.* (a) В одномерном случае при $\Lambda = \pi$ непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из единственной точки $-4J$ и оператор имеет единственное собственное значение $-2J$. Поэтому из представления (13) вытекает, что существенный спектр оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из точек $-12J$, $-8J$ и $-10J$, число $-6J$ принадлежит дискретному спектру оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$, а возмущенный оператор $K_\Lambda$ есть конечномерный оператор. В случае, когда $\nu = 1$ оператор $K_\Lambda$ имеет ранг 9, поэтому, оператор $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более девяти дополнительных собственных значений. Следовательно, дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит не более чем из $9 + 1 = 10$ точек, т.е. оператор $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более десяти связанных состояний. Таким образом, число трехмагнонных связанных состояний $N$ удовлетворяет неравенству $1 \leqslant N \leqslant 10$.

(b) В одномерном случае при $\Lambda = 0$ непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из отрезка $[0, -8J]$ и оператор не имеет собственных значений. Поэтому из представления (13) вытекает, что существенный спектр оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{\rm ess}(\widetilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -24J]$, а оператор $K_\Lambda$ является конечномерным. В случае, когда $\nu = 1$, оператор $K_\Lambda$ имеет ранг 9. Поэтому оператор $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более девяти собственных значений. Следовательно, дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит не более чем из 9 точек, т.е. оператор $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более девяти связанных состояний. Таким образом, число $N$ трехмагнонных связанных состояний удовлетворяет неравенству $0 \leqslant N \leqslant 9$.

(c) В одномерном случае, при полном квазиимпульсе системы $\Lambda \neq \pi$ и $\Lambda \neq 0$, непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из отрезка $\left[-4J\left(1 - \cos\dfrac{\Lambda}{2}\right),\ -4J\left(1 + \cos\dfrac{\Lambda}{2}\right)\right]$, а дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из единственного собственного значения $z = -2J\big(1 - \cos^2(\Lambda/2)\big)$. Поэтому из представления (13) вытекает, что существенный спектр оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединений трех отрезков (16) и число

$$z = -2J\left(3 - \cos^2\frac{\Lambda_1}{2} - \cos^2\frac{\Lambda_2}{2} - \cos^2\frac{\Lambda_3}{2}\right)$$

является собственным значением оператора $\widetilde{H}_{3\Lambda}$. Следовательно, для числа $N$ трехмагнонных связанных состояний имеет место неравенство $1 \leqslant N \leqslant 10$. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гочев И. Г.* Двухмагнонные состояния в одномерной модели Гейзенберга с взаимодействием вторых соседей// Теор. мат. физ. — 1973. — *15.* — С. 402–406.
2. *Гочев И. Г.* Связанные состояния магнонов в линейной анизотропной цепочке.// ЖЭТФ. — 1971. — *61*, № 10. — С. 1674–1678.
3. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
4. *Ташпулатов С. М.* Исследование спектра оператора энергии двухмагнонной системы в одномерном анизотропном ферромагнетике Гейзенберга с взаимодействием вторых соседей// Теор. мат. физ. — 1996. — *107*, № 1. — С. 155–161.
5. *Bethe H. A.* Eigenverte und Eigenfunction der linearen Atom kette// Z. Phys. — 1931. — *71.* — P. 205–226.
6. *Fukuda N., Wortis M.* Bound states in the spin wave problem// Phys. Chem. Solids. — 1963. — *24.* — P. 1675–1677.
7. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 1// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *235.* — P. 75–113.
8. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 2. The approximate point spectrum and Kato essential spectrum// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *237.* — P. 223–254.
9. *Ichinose T.* Tensor products of linear operators. Spectral theory// Banach Center Publ. — 1982. — *8.* — P. 294–300.
10. *Majumdar C. K.* Bound states of two spin waves in the Heisenberg ferromagnet with nearest and next nearest neighbours interactions// J. Math. Phys. — 1969. — *132.* — P. 85.
11. *Ono I., Mikado I. S., Oguchi T.* Two-magnon bound states in a linear Heisenberg chain with nearest and next nearest neighbours interactions// J. Phys. Soc. Jpn. — 1971. — *30.* — P. 358–366.
12. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis. — New York, 1972.
13. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Operator Analysis. — New York: Academic Press, 1982.
14. *Tashpulatov S. M.* Structure of essential spectrum and discrete spectrum of the energy operator of three-magnon systems in the isotropic ferromagnetic non-Heisenberg model with spin one and nearest-neighbor interactions// J. Appl. Math. Phys. — 2019. — *7*, № 4. — P. 874–899.
15. *Van Himbergen J. E., Tjon J. A.* Three-magnon bound states in the two-dimensional isotropic and anisotropic Heisenberg ferromagnet// Phys. A. — 1976.. — *82.* — P. 389–416.
16. *Wortis M.* Bound states of two spin waves in the Heisenberg ferromagnet// Phys. Rev. — 1963. — *132.* — P. 85–97.


## ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА


**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.



Ташпулатов Садулла Мамаражабович (Tashpulatov Sadulla Mamarazhabovich)
Институт ядерной физики
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Республика Узбекистан
(Institute of Nuclear Physics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: `sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru`