ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 92–104
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-92-104

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2025 г. **М. В. ЧИРОВА**

Аннотация. Приведено доказательство существования слабых решений для системы уравнений, описывающей движение вязкой жидкости. Выведен ряд априорных оценок для семейства решений. На основе топологической теории степени вполне непрерывных векторных полей установлено существование слабых решений аппроксимационной задачи. Доказана сходимость решений аппроксимационных задач к решению исходной краевой задачи.

Ключевые слова: уравнения Навье—Стокса, слабая разрешимость.

INVESTIGATION OF THE WEAK SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE NAVIER–STOKES SYSTEM BASED ON THE METHOD OF PARABOLIC REGULARIZATION

© 2025 **M. V. CHIROVA**

Abstract. A proof of the existence of weak solutions for a system of equations describing the motion of a viscous fluid is given. A number of a priori estimates for the family of solutions are derived. Based on the topological theory of the degree of completely continuous vector fields, the existence of weak solutions of the approximation problem is established. The convergence of solutions of approximation problems to the solution of the original boundary-value problem is proved.

Keywords and phrases: Navier–Stokes Equations, weak solvability.

AMS Subject Classification: 35Q30,35B30

1. Введение. Большинство реальных процессов, происходящих в окружающей среде, по причине их сложности, могут быть смоделированы только с помощью нелинейных дифференциальных уравнений, для которых доказывать существование и единственность гладких решений очень трудно. Именно поэтому данная тема является популярной, так как требует поиска новых или доработки старых оптимальных методов изучения таких систем.

В данной работе рассматривается система уравнений Навье—Стокса с особой правой частью. Для доказательства существования слабого решения используется аппроксимационно-топологический метод, предложенный в [2] и развитый в [1, 3, 4, 6]. Путем добавления к исходной задаче нового члена $\varepsilon\Delta^2 u$ вводится аппроксимационная задача, а затем с помощью предельного перехода доказывается разрешимость первоначальной задачи в исходных пространствах.

2. Постановка задачи и основные обозначения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная локально липшицева область. На отрезке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$, рассматривается начально-краевая задача для системы Навье—Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]; \tag{2}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

и краевым условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Искомым решением является вектор-функция скорости u и функция давления $p(x,t)$. Внешние силы определяются функцией $f = f(x,t)$; ν — положительный коэффициент вязкости.

Следующие пространства потребуются для введения понятия слабого решения: $\mathcal{V} = \{u(x) = (u_1, u_2, u_3) \in C_0^\infty(\Omega)^3 : \operatorname{div} u = 0\}$ (пространство соленоидальных функций); V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)^3$; V^1 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^3$. В пространстве

$$W_0 = \Big\{u : \ u \in L_2(0,T;V^1) \cap L_\infty(0,T;V^0), \ u' \in L_{4/3}(0,T;V^{-1}) + L_1(0,T,V^0)\Big\}$$

сформулируем утверждение о слабой разрешимости первоначальной задачи при некоторых условиях на правую часть системы (1), а в пространствах

$$W_1 = \Big\{u : \ u \in L_2(0,T;V^1) \cap L_\infty(0,T;V^0), \ u' \in L_2(0,T;V^{-2}) + L_1(0,T;V^0)\Big\},$$

$$W_2 = \Big\{u : \ u \in L_2(0,T;V^2), \ u' \in L_2(0,T;V^{-2}) + L_1(0,T;V^0)\Big\}$$

будет доказана разрешимость задачи, аппроксимирующей исходную.

3. Определение слабого решения. Аппроксимационная задача. Чтобы ввести понятие слабого решения, рассмотрим пробную функцию $\varphi \in V^1$. Умножив первое уравнение системы (1)–(4) на данную функцию и проинтегрировав, получаем следующее интегральное тождество:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\varphi\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\, dx - \nu \int\limits_\Omega \Delta u\varphi\, dx + \int\limits_\Omega \nabla p\varphi\, dx = \int\limits_\Omega f\varphi\, dx. \tag{5}$$

В дальнейших преобразованиях будет применяться следующее тождество:

$$\int\limits_\Omega u\Delta u\, dt = \int\limits_{\partial\Omega} \nabla u \nabla u \bar{n}\, dS - \int\limits_\Omega \nabla u \nabla u\, dt.$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\varphi\, dx = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u\varphi dx;$$

$$\int\limits_\Omega \Delta u\varphi\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \nabla u : \nabla\varphi\bar{n}\, dS - \int\limits_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\, dx = -\int\limits_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\, dx;$$

$$\int\limits_\Omega \nabla p\varphi\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} p\varphi\bar{n}\, dS - \int\limits_\Omega p\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\, dx = 0;$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\, dx = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3}(u_i\varphi)\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3} u_i\varphi u\bar{n}\, dS - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} u\frac{\partial(u_i\varphi)}{\partial x_i}\, dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} u\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} uu_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} uu_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

Тогда равенство (5) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} u\varphi\,dx - \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3} uu_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_{\Omega}\nabla u : \nabla\varphi\,dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi\,dx.$$

Определение 1. Пусть $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_2(0,T;V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0,T;V^0)$, $a \in V^0$. Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $u \in W_0$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^1$ равенству

$$\langle u',\varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega} u_iu_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_{\Omega}\nabla u : \nabla\varphi\,dx = \langle f,\varphi\rangle \tag{6}$$

при почти всех $t \in (0,T)$ и начальному условию (3).

На первом этапе нужно доказать, что существует слабое решение в пространстве W_1, а далее показать, что полученное решение также принадлежит и W_0.

Теорема 1. *Пусть $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_2(0,T;V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0,T;V^0)$, $a \in V^0$. Тогда начально-краевая задача* (1)—(4) *имеет по крайней мере одно слабое решение $u \in W_0$.*

Чтобы доказать эту теорему, вводится в рассмотрение аппроксимационная задача. К исходной задаче добавляется новый член $\varepsilon\Delta^2 u$, повышающий гладкость решения.

Теорема 2. *Пусть $f_1 \in L_2(0,T;V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0,T;V^0)$, $a \in V^0$. Тогда начально-краевая задача* (1)–(4) *имеет хотя бы одно слабое решение, принадлежащее пространству W_2.*

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu\Delta u + \varepsilon\Delta^2 v + \nabla p = f, \tag{7}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{8}$$

$$u(0) = a, \tag{9}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{10}$$

$$\Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Вывод тождества, которому должно удовлетворять слабое решение аппроксимационной задачи, производится как и в предыдущем разделе. Поэтому получим следующее определение.

Определение 2. Слабым решением начально-краевой задачи (7)–(11) называется такая функция $u \in W_2$, удовлетворяющая начальному условию (3), что равенство

$$\langle u',\varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega} u_iu_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_{\Omega}\nabla u : \nabla\varphi\,dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega}\Delta u : \Delta\varphi\,dx = \langle f,\varphi\rangle \tag{12}$$

выполняется при почти всех $t \in (0,T)$ для любой функции $\varphi \in V^1$.

4. Операторная постановка аппроксимационной задачи. Определим операторы A, B следующим образом:

$$B : L_2(\Omega)^3 \to V^{-1}, \quad \langle B(u),\varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega} u_iu_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\,dx, \quad u \in L_2(\Omega)^3, \quad \varphi \in V^1; \tag{13}$$

$$A : V^1 \to V^{-1}, \qquad \langle Av,\varphi\rangle = \int\limits_{\Omega}\nabla u : \nabla\varphi\,dx, \qquad u \in V^1, \qquad \varphi \in V^1. \tag{14}$$

Так как в (12) рассматривалась произвольная функция $\varphi \in V^1$, то задача (12) и задача, введённая с помощью операторов, эквивалентны. Теперь задача сводится к поиску слабого решения $u \in W_2$ операторного уравнения, которое удовлетворяет условию (3).

Операторное уравнение имеет следующий вид:

$$u' - B(u) + \nu Av + \varepsilon A^2 v = f. \tag{15}$$

Введем также операторы

$$L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-2}) \times V^0, \quad L(u) = \big(u' + \nu Av + \varepsilon A^2 v,\ u\big|_{t=0}\big); \tag{16}$$

$$K : W_2 \to L_2(0,T;V^{-2}) \times V^0, \quad K(u) = (B(u), 0). \tag{17}$$

Тогда операторное уравнение (15) запишется в виде

$$L(u) - K(u) = (f, a), \tag{18}$$

для которого будем искать слабое решения, удовлетворяющее начальному условию.

Будем рассматривать также семейство операторных уравнений, в котором $\lambda \in [0,1]$:

$$L(u) - \lambda K(u) = \lambda(f, a). \tag{19}$$

5. Свойства операторов. В данном разделе докажем свойства введённых операторов.

Лемма 1.

(i) *Оператор $A : V^1 \to V^{-1}$ линеен, непрерывен и удовлетворяет оценке*

$$\|Au\|_{V^1} \leqslant \|u\|_{V^1}. \tag{20}$$

(ii) *Для любой функции $u \in L_2(0,T;V^1)$ функция Au принадлежит пространству $L_2(0,T;V^{-1})$. Оператор $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ линеен, непрерывен и удовлетворяет оценке*

$$\|Au\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|u\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{21}$$

(iii) *Для любой функции $u \in W_2$ функция Au принадлежит пространству $L_2(0,T;V^{-2})$ и справедлива оценка*

$$\|Au\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C_1 \|u\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{22}$$

Доказательство. (i) Несложно убедиться, что оператор A линеен. Действительно,

$$\langle A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) : \nabla\varphi\, dx = \alpha_1 \int\limits_\Omega \nabla u_1 : \nabla\varphi\, dx + \alpha_2 \int\limits_\Omega \nabla u_2 : \nabla\varphi\, dx.$$

Покажем, что оператор ограничен; из этого будет следовать непрерывность:

$$|\langle Au, \varphi\rangle| = \left| \int\limits_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\, dx \right| \leqslant \|u\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1},$$

так что

$$\|Au\|_{V^{-1}} \leqslant \|u\|_{V^1}. \tag{23}$$

Следовательно, оператор непрерывен, и оценка из пункта (i) получена.

(ii) Для функции $u \in L_2(0,T;V^1)$ при почти всех $t \in (0,T)$ справедливо неравенство

$$\|Au(t)\|_{V^{-1}} \leqslant \|u(t)\|_{V^1}.$$

Возведем последнюю оценку в квадрат и проинтегрируем от 0 до T:

$$\|Au(t)\|^2_{V^{-1}} \leqslant \|u(t)\|^2_{V^1} = \int\limits_0^T \|Au(t)\|^2\, dt \leqslant \int\limits_0^T \|u(t)\|^2 dt. \tag{24}$$

Так как $\|u(t)\|_{V^1} \in L_2(0,T)$, то $\|Au(t)\|_{V^{-1}} \in L_2(0,T)$ и $Au \in L_2(0,T,V^{-1})$. Извлекая корень из последней оценки, получаем требуемую оценку (21). Так как оператор ограничен и линеен, то он непрерывен как оператор из $L_2(0,T,V^1)$ в $L_2(0,T,V^{-1})$.

(iii) Из (21) и того факта, что вложение $L_2(0,T;V^{-1}) \subset L_2(0,T;V^{-2})$ непрерывно, следует требуемая в лемме оценка. $\square$

Чтобы доказать некоторые свойства для оператора B, воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3 (см. [5]). *Пусть $X_0 \subset X \subset X_1$ — такие банаховы пространства, что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Пусть M вложено в $L_p(O,T;X_0)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и для всякой $f \in M$ её обобщенная производная в пространстве $D'(0,T;X_0)$ принадлежит $L_r(0,T;X_0)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Пусть множество M ограничено в $L_p(0,T;X_0)$, а множество $\{f' : f \in M\}$ ограничено в $L_r(0,T;X)$. Тогда при $p < \infty$ множество M относительно компактно в $L_p(0,T;X_1)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ относительно компактно в $C([0,T],X_1)$.*

Лемма 2.

(i) *Оператор $B : L_2(\Omega)^3 \to V^{-1}$ непрерывен, причем справедливо неравенство*

$$\|B(u)\|_{V^{-1}} \leqslant C_1\|u\|^2_{L_2(\Omega)^3}. \tag{25}$$

(ii) *Оператор $B : L_2(0,T;L_2(\Omega)^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен.*

(iii) *Оператор $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-2})$ компактен, причем имеет место неравенство*

$$\|B(u)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C_5\|u\|_{L_2(0,T;V^1)}\|u\|_{L_\infty(0,T;V^0)}. \tag{26}$$

Доказательство. Для любых $u \in L_2(\Omega)^3$, $\varphi \in V^1$ имеем

$$|\langle B_1(u),\varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\left|\int_\Omega u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega |u_i||u_j|\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right|\,dx \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u_i\|_{L_2(\Omega)}\|u_j\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u\|_{L_2(\Omega)^3}\|u\|_{L_2(\Omega)^3}\|\,\|\varphi\|_{V^1} \leqslant C_1\|u\|^2_{L_2(\Omega)^3}\|\|\varphi\|_{V^1}.$$

Сравнивая начало и конец, получаем требуемую оценку.

Для проверки непрерывности оператора $B : L_2(\Omega)^3 \to V^{-1}$, $u = B(u)$, рассмотрим произвольные $u^m, u^0 \in L_2(\Omega)^3$:

$$|\langle B(u^m),\varphi\rangle - \langle B(u^0),\varphi\rangle| =$$

$$= \left|\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}u_i^mu_j^m\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}u_i^0u_j^0\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u_i^mu_j^m - u_i^0u_j^0\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u_i^mu_j^m - u_i^0u_j^0\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} \leqslant \|\varphi\|_{V^1}\sum_{i,j=1}^{3}\|u_i^mu_j^m - u_i^0u_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Значит,

$$\|B(u^m) - B(u^0)\|_{V^{-1}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u_i^mu_j^m - u_i^0u_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Далее проведем следующую оценку:

$$\sum_{i,j=1}^{3}\|u_i^mu_j^m - u_i^0u_j^0\|_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{3}\left\|u_i^mu_j^m - u_i^mu_j^0 + u_i^mu_j^0 - u_i^0u_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u_i^m(u_j^m - u_j^0)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{3}\|u_j^0(u_i^m - u_i^0)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\|u_i^m\|_{L_2(\Omega)}\|u_j^m - u_j^0\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{3}\|u_j^0\|_{L_2(\Omega)}\|u_i^m - u_i^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\|u^m\|_{L_2(\Omega)^3}\big\|u^m-u^0\big\|_{L_2(\Omega)^3}+C_2\|u^0\|_{L_2(\Omega)^3}\big\|u^m-u^0\big\|_{L_2(\Omega)^3}=$$
$$=C_2\Big(\|u^m\|_{L_2(\Omega)^3}+\|u^0\|_{L_2(\Omega)^3}\Big)\big\|u^m-u^0\big\|_{L_2(\Omega)^3}.$$

Сравнивая также начало и конец, получаем:

$$\big\|B(u^m)-B(u^0)\big\|_{V^{-1}}\leqslant C_2\big(\|u^m\|_{L_2(\Omega)^3}+\|u^0\|_{L_2(\Omega)^3}\big)\big\|u^m-u^0\big\|_{L_2(\Omega)^3}. \tag{27}$$

При $u^m\to u^0$ в $L_2(\Omega)^3$ отображение $B:L_2(\Omega)^3\to V^{-1}$ непрерывно.

(ii) Рассмотрим функцию $u\in L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)$. Согласно (25) при почти всех $t\in(0,T)$ имеем

$$\|B(u)(t)\|_{V^{-1}}\leqslant C_1\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)^3}.$$

Возведем эту оценку в квадрат и проинтегрируем:

$$\int\limits_0^T\|B(u)(t)\|^2_{V^{-1}}dt\leqslant C_1^2\int\limits_0^T\|u(t)\|^4_{L_2(\Omega)^3}dt=C_1^2\|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}.$$

Поскольку $C_1^2\|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}$ — конечное число, значения интегралов также конечны. Следовательно, $B::L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)\to L_2(0,T;V^{-1})$. Чтобы доказать непрерывность, предположим, что $u^0\in L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)$ является пределом последовательности $u^m\subset L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)$. Для (28) при почти всех $t\in(0,T)$ справедлива оценка

$$\big\|B(u^m)(t)-B(u^0)(t)\big\|_{V^{-1}}\leqslant C_2\left(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3}+\|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}\right)\big\|(u^m-u^0)(t)\big\|_{L_2(\Omega)^3}.$$

Возводя в квадрат, интегрируя и применяя неравенство Гельдера, приходим к следующей оценке:

$$\int\limits_0^T\big\|B(u^m)(t)-B(u^0)(t)\big\|^2_{V^{-1}}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C_2^2\int\limits_0^T\Big(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3}+\|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}\Big)^2\big\|u^m(t)-u^0(t)\big\|^2_{L_2(\Omega)^3}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C_2^2\left(\int\limits_0^T\Big(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3}+\|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}\Big)^4dt\right)^{1/2}\times\left(\int\limits_0^T\big\|u^m(t)-u^0(t)\big\|^4_{L_2(\Omega)^3}dt\right)^{1/2}.$$

Оценим предпоследнее подынтегральное выражение:

$$\int\limits_0^T\Big(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3}+\|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}\Big)^4dt\leqslant 8\int\limits_0^T\Big(\|u^m(t)\|^4_{L_2(\Omega)^3}+\|u^0(t)\|^4_{L_2(\Omega)^3}\Big)dt=$$
$$=8\int\limits_0^T\|u^m(t)\|^4_{L_2(\Omega)^3}dt+8\int\limits_0^T\|u^0(t)\|^4_{L_2(\Omega)^3}dt=8\|u^m\|^4_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}+8\|u^0\|^4_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}.$$

Следовательно,

$$\Big\|B(u^m)(t)-B(u^0)(t)\Big\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{2}C_2^2\big\|u^m-u^0\big\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}\Big(\|u^m\|^4_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}+\|u^0\|^4_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}\Big)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{2}C_2^2\big\|u^m-u^0\big\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}\Big(\|u^m\|^4_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}+\|u^0\|^4_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}\Big).$$

В силу стремления правой части неравенства к нулю при $m\to+\infty$, получаем, что и левая часть стремится к нулю. Следовательно, непрерывность для п. (ii) леммы доказана.

(iii) По лемме, о которой упоминалось ранее, любая функция $u \in W_2$ принадлежит пространству $C([0,T];V^0)$. Значит любая функция, принадлежащая W_2, принадлежит как $L_2(0,T;V^2)$, так и $L_2(0,T;V^2)\cap L_\infty(0,T;V^0)$. Далее, справедливы вложения:

$$L_2(0,T;V^2)\cap L_\infty(0,T;V^0)\subset L_2(0,T;V^1).$$

Следовательно, $W_2\subset X_1=\{u:\ u\in L_2(0,T;V^1),\ u'\in L_2(0,T;V^{-2})\}$. Справедливо компактное вложение $X_1\hookrightarrow L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)$. Запишем отображение B следующим образом:

$$W_2\subset X_1\hookrightarrow L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)\xrightarrow{B} L_2(0,T;V^{-1})\subset L_2(0,T;V^{-2}).$$

Непрерывность отображения $B: L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)\to L_2(0,T;V^{-1})$ доказана ранее в п. (ii). Первое вложение является непрерывным, второе вполне непрерывно; поэтому $B: W_2\to L_2(0,T;V^{-2})$ — вполне непрерывное отображение. Оценим $\|B(u)\|_{L_2(0,T;V^{-2})}$:

$$|\langle B(u),\varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\left|\int_\Omega u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega |u_i||u_j|\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i,j=1}^{3}\|u_i\|_{L_2(\Omega)}\|u_j\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_3\|u\|_{L_2(\Omega)^3}\|\,\|u\|_{V^0}\,\|\varphi\|_{V^2}.$$

Поэтому для любой функции $v\in W_2$ при почти всех $t\in(0,T)$ выполняется неравенство

$$\|B(u)(t)\|_{V^{-2}}\leqslant C_3\|u(t)\|_{L_4(\Omega)^3)}\|u(t)\|_{V^0}.$$

Применим к этой оценке те же действия, что и ранее:

$$\int_0^T\|B(u)(t)\|^2_{V^{-2}}\,dt\leqslant C_3^2\int_0^T\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)^3}\|u(t)\|^2_{V^0}\,dt\leqslant C_3^2\|u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\int_0^T\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)^3)}\,dt=$$
$$=C_3^2\|u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^3)}\leqslant C_3^2C_2\|u|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\|u\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Отсюда следует оценка

$$\|B(u)\|_{L_2(0,T;V^{-2})}\leqslant C_5\|u\|_{L_2(0,T;V^1)}\|u\|_{L_\infty(0,T;V^0)}.$$ □

Следующее утверждение требуется для доказательства леммы 4.

Лемма 3 (см. [7])**.** *Пусть X и Y — гильбертовы пространства, $X\subset Y$ с непрерывным оператором вложения $i: X\to Y$, $i(X)$ плотно в Y. Пусть X — сепарабельное пространство, $A: X\to X^*$ — непрерывный линейный оператор. Предположим, что существует такое положительное α, что*

$$\langle Au,u\rangle\geqslant\alpha\|u\|_X^2\quad\forall u\in X.$$

Если $a\in Y$ и $f\in L_2(0,T;X^*)$, то задача Коши

$$u'(t)+Au(t)=f(t),\quad t\in(0,T),\qquad u(0)=a \tag{28}$$

имеет единственное решение

$$u\in L_2(0,T;X),\quad u'\in L_2(0,T;X^*),$$

непрерывно зависящее f и a.

Лемма 3 обобщается на случай $f=f_1+f_2$, $f_1\in L_2(0,T;V^{-1})$, $f_2\in L_1(0,T;V^0)$.

Лемма 4.

(i) *Оператор $L: W_2\to L_2(0,T;V^{-2})\times V^0$ непрерывно обратим, а обратный оператор L^{-1} : $L_2(0,T;V^{-1})\times V^0\to W_2$ непрерывен.*

(ii) *Оператор $K: W_2\to L_2(0,T;V^{-2})\times V^0$ непрерывен и компактен.*

Доказательство. (i) Рассмотрим оператор $L(u) = \big(u' + \nu Au + \varepsilon A^2 u, u\big|_{t=0}\big)$. Проверим, что для оператора $\nu A + \varepsilon A^2 : V^2 \to V^{-2}$ выполняются условия предыдущей леммы:

$$\langle \nu Au + \varepsilon A^2 u, v\rangle = \langle \nu Au, u\rangle + \langle \varepsilon A^2 u, u\rangle = \nu \int\limits_\Omega \nabla u : \nabla u\,dx + \varepsilon \int\limits_\Omega \Delta u\,\Delta u\,dx = \\ = \nu\|u\|^2_{V^2} + \varepsilon\|u\|^2_{V^2} \geqslant \varepsilon\|u\|^2_{V^2}.$$

Следовательно, $\langle \nu Au + \varepsilon A^2 u, u\rangle \geqslant \varepsilon\|u\|^2_{V^2}$, что удовлетворяет условиям леммы. Таким образом, оператор L является непрерывно обратимым.

(ii) Оператор K, определяемый равенством $K = (B(u), 0)$ будет непрерывным, а так как компактность оператора B доказана в п. (iii) леммы 2, то K вполне непрерывен. □

6. Априорные оценки. Для оценки сходимости на следующих этапах требуется доказать априорные оценки для семейства уравнений

$$u' - \lambda B(u) + \nu Au + \varepsilon A^2 u = \lambda f, \tag{29}$$

$$u(0) = \lambda a, \quad \lambda \in [0,1]. \tag{30}$$

Теорема 4. *Для любого решения $u \in W_2$ семейства* (29) *для некоторого $\lambda \in [0,1]$, справедливы следующие оценки*:

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant C_4 \left(\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0}\right); \tag{31}$$

$$\nu\|u\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_5 \left(\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0}\right); \tag{32}$$

$$\varepsilon\|u\|^2_{L_2(0,T;V^2)} \leqslant C_5 \left(\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0}\right). \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $u \in W_2$ — решение (29), (30) для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим уравнение (12) при $\varphi = u$:

$$\langle u', u\rangle - \lambda\langle B(u), u\rangle + \nu\langle Au, v\rangle + \varepsilon\langle A^2 u, u\rangle = \lambda\langle f, u\rangle.$$

Выполним следующие преобразования:

$$\langle u', u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{V^0};$$

$$\langle B(u), u\rangle = \sum_{i,j=1}^3 \int\limits_\Omega u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dx = \sum_{i,j=1}^3 \int\limits_\Omega u_j \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_i)\,dx = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3 \int\limits_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i u_i\,dx = 0;$$

$$\nu\langle Au, u\rangle = \nu\int\limits_\Omega \nabla u : \nabla u\,dx = \nu\|u\|^2_{V^1}; \quad \varepsilon\langle A^2 u, u\rangle = \varepsilon\int\limits_\Omega \Delta u \Delta u\,dx = \varepsilon\|u\|^2_{V^2}.$$

Итак,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{V^0} + \nu\|u(t)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|u(t)\|^2_{V^2} = \lambda\langle f(t), u(t)\rangle.$$

Теперь оценим сверху правую часть последнего неравенства, воспользовавшись неравенством

$$ab \leqslant \frac{\nu a^2}{2} + \frac{b^2}{2\nu}.$$

Имеем:

$$\big|\lambda\langle f(t), u(t)\rangle\big| \leqslant \lambda\big|\langle f(t), u(t)\rangle\big| \leqslant \\ \leqslant \lambda\big|\langle f_1(t), u(t)\rangle\big| + \lambda\big|\langle f_2(t), u(t)\rangle\big| \leqslant \|f_1(t)\|_{V^{-1}}\|u(t)\|_{V^1} + \|f_2(t)\|_{(V^0)^*}\|u(t)\|_{V^0} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\nu}\|f_1(t)\|^2_{V^{-1}} + \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2_{V^1} + \frac{1}{4}\|f_2(t)\|^2_{(V^0)^*} + \frac{1}{4}\|u(t)\|^2_{V^0}.$$

Следовательно, при почти всех $t \in (0,T)$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{V^0} + \nu\|u(t)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|u(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2\nu}\|f_1(t)\|^2_{V^{-1}} + \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2_{V^1} + \frac{1}{4}\|f_2(t)\|^2_{(V^0)^*} + \frac{1}{4}\|u(t)\|^2_{V^0}$$

Приведя подобные слагаемые, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{V^0} + \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|u(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2\nu}\|f_1(t)\|^2_{V^{-1}} + \frac{1}{4}\|f_2(t)\|^2_{(V^0)^*} + \frac{1}{4}\|u(t)\|^2_{V^0}.$$

Умножив его на 2 и проинтегрировав от 0 до t, получаем:

$$\|u(t)\|^2_{V^0} + \nu\int\limits_0^t \|u(s)\|^2_{V^1}ds + 2\varepsilon\int\limits_0^t \|u(s)\|^2_{V^2}ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\nu}\int\limits_0^t \|f_1(s)\|^2_{V^{-1}}ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|f_2(s)\|^2_{(V^0)^*}ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u(s)\|^2_{V^0}ds + \|a\|^2_{V^0}.$$

Оценим правую часть неравенства сверху:

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_0^t \|f_1(s)\|^2_{V^{-1}}ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|f_2(s)\|^2_{(V^0)^*}ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u(s)\|^2_{V^0}ds + \|a\|^2_{V^0} \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|^2_{V^0} + \frac{1}{\nu}\|f_1(t)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T,V^0)}.$$

Так как каждое слагаемое предыдущего неравенства неотрицательно, получаем три неравенства:

$$\|u(t)\|^2_{V^0} \leqslant \|a\|^2_{V^0} + \frac{1}{\nu}\|f_1(t)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T,V^0)};$$
$$\nu\int\limits_0^t \|u(s)\|^2_{V^2}ds \leqslant \|a\|^2_{V^0} + \frac{1}{\nu}\|f_1(t)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T,V^0)};$$
$$2\varepsilon\int\limits_0^t \|u(s)\|^2_{V^2}ds \leqslant \|a\|^2_{V^0} + \frac{1}{\nu}\|f_1(t)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T,V^0)}.$$

Перейдя к максимуму по t в левой части, получим

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant \|a\|^2_{V^0} + \frac{1}{\nu}\|f_1(t)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T,V^0)};$$
$$\nu\|u\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \|a\|^2_{V^0} + \frac{1}{\nu}\|f_1(t)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T,V^0)};$$
$$\varepsilon\|u\|^2_{L_2(0,T;V^2)} \leqslant \|a\|^2_{V^0} + \frac{1}{\nu}\|f_1(t)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T,V^0)}.$$

Оценка (31) очевидно следует из первого неравенства. Сложив первое неравенство со вторым, получим оценку (32), а при сложении первого с третьим — оценку (33). □

Теорема 5. *Если $u \in W_2$ — решение (29), (30) для какого-либо $\lambda \in [0,1]$, то имеет место оценка*

$$\|u'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant$$
$$\leqslant C_6\|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_6\|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} + C_9\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_6\frac{1}{2}\|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} +$$
$$+ C_5\|a\|^2_{V^0} + \left(\nu C_6 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0}}. \quad (34)$$

Доказательство. Пусть $u \in W_2$ — решение операторного уравнения (29) с начальным условием (30). Выразим из этого уравнения u' и оценим по норме $L_2(0,T;V^{-2})$:

$$\begin{aligned}
&\|u'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} = \|\lambda f + \lambda B(u) - \nu Au - \varepsilon A^2 v\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant \\
&\quad\leqslant \|\lambda f_1\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|\lambda f_2\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|\lambda B(u)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \\
&\qquad\qquad + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \varepsilon\|A^2 u\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant \\
&\quad\leqslant \lambda C_6\|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \lambda C_6\|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} + \lambda\|B(u)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \\
&\qquad\qquad + \nu C_6\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \varepsilon\|A^2 v\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant \\
&\quad\leqslant C_6\|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_6\|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} + C_5\|u\|_{L_2(0,T;V^1)}\|u\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \\
&\qquad\qquad + \nu C_6\|u\|_{L_2(0,T;V^1)} + \sqrt{\varepsilon}\|u\|_{L_2(0,T;V^2)} \leqslant \\
&\quad\leqslant C_6\|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_6\|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} + \\
&\qquad + C_5\left(C_4(\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0})\right) + \\
&\qquad + \nu C_6\sqrt{C_4(\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0})} + \\
&\qquad\qquad + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{C_6(\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{\nu}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0})} = \\
&\quad= C_6\|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_6\|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} + C_9\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_6\frac{1}{2}\|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} + \\
&\qquad + C_5\|a\|^2_{V^0} + \left(\nu C_6 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{\nu}\|f_1\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{1}{2}\|f_2(t)\|^2_{L_1(0,T;(V^0)^*)} + \|a\|^2_{V^0}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку (34). □

7. Разрешимость аппроксимационной задачи. Пусть $u \in W_2$ — решение семейства (19). Из доказанных априорных оценок следует, что норма $\|u\|$ может быть оценена сверху некоторой константой C_7, которая зависит, вообще говоря, от $1/\varepsilon$.

Теорема 6. *Для любых* $\varepsilon \geqslant 0$, $f = f_1 + f_2$, *где* $f_1 \in L_2(0,T;V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0,T;V^0)$, $a \in V^0$ *существует хотя бы одно слабое решение аппроксимационной задачи* (7)–(11).

Доказательство. Докажем разрешимость операторного уравнения (15), так как задача о существовании у него решения $u \in W_2$, равносильна задаче о слабых решениях аппроксимационной задачи (7)–(11).

Решения семейства операторных уравнений лежат в шаре B_R с центром в нуле и радиусом $R = C_7 + 1$. По лемме 4 оператор $K(\cdot)$ является вполне непрерывным, значит оператор $K + (f, a)$ также вполне непрерывен.

Рассмотрим теперь оператор $G(\lambda, u) = \lambda L^{-1}(K(u) + (f, a))$. Он будет вполне непрерывным как композиция вполне непрерывного оператора $K + (f, a)$ и непрерывного оператора L. Переписав (18) с введённым оператором, получим:

$$u - \lambda G(u) = 0. \tag{35}$$

Так как векторное поле $I - \lambda G(\cdot)$ вполне непрерывно, то для него определена степень Лере—Шаудера $\deg_{\mathrm{LS}}(I - \lambda G, B_R, 0)$, и в силу свойства гомотопической инвариантности имеем

$$\deg_{\mathrm{LS}}(I, B_R, 0) = \deg_{\mathrm{LS}}(I - G, B_R, 0) = \deg_{\mathrm{LS}}(I, B_R, 0) = 1,$$

так как $0 \in B_R$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения $u \in W_2$ уравнения (35) при $\lambda = 1$, а следовательно, и существование хотя бы одного решения операторного уравнения (18). □

8. Предельный переход. Вернемся к определению слабого решения аппроксимационной задачи. Оно существует согласно доказанной в разделе 7 теореме. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Тогда для любого ε_n существует решение $u_n \in W_2 \subset W_1$, которое для каждой функции $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенствам

$$\langle u_n', \varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} (u_n)_i (u_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla u_n : \nabla\varphi\, dx + \varepsilon_n \int\limits_{\Omega} \Delta u_n : \Delta\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle \tag{36}$$

и $u_n(0) = a$. В силу оценки (31) последовательность $\{u_n\}$ является ограниченной в $L_\infty(0,T;V^0)$. Следовательно, из u_n можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$u_n \to u * \text{ слабо в } L_\infty(0,T;V^0).$$

Исходя из (32), $u_n \rightharpoonup u$ в $L_\infty(0,T;V^1)$ (без ограничения общности). Значит,

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla u_n : \nabla\varphi\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu \int\limits_{\Omega} \nabla u : \nabla\varphi\, dx.$$

Далее, согласно оценке (33) последовательность $\sqrt{\varepsilon_n} u_n$ является ограниченной в $L_2(0,T;V^2)$. Тогда

$$\sqrt{\varepsilon_n} u_n \to \omega \quad \text{в } L_2(0,T;V^2).$$

Так как $\sqrt{\varepsilon}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, получим

$$\varepsilon_n \int\limits_{\Omega} \Delta u_n \Delta\varphi\, dx = \sqrt{\varepsilon}_n \left(\sqrt{\varepsilon}_n \int\limits_{\Omega} \Delta u_n \Delta\varphi\, dx \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т.е. последнее слагаемое в левой части равенства (37) исчезает. Наконец, в силу последней априорной оценки (34) получаем, что $u_n' \rightharpoonup u'$ в $L_2(0,T;V^{-2})$, т.е.

$$\langle u_n', \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u', \varphi\rangle.$$

Согласно теореме 3 справедливо компактное вложение

$$W_1 \hookrightarrow L_2(0,T;L_4(\Omega)^4).$$

Поэтому имеет место и сильная сходимость последовательности $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ в $L_2(0,T;L_4(\Omega)^4)$. Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} (u_n)_i (u_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.$$

Исследуем характер сходимости в последнем выражении:

$$(u_n)_i \to u_i \quad \text{*-слабо в } L_\infty(0,T;V^0),$$
$$(u_n)_j \to u_j \quad \text{сильно в } L_2(0,T;L_4(\Omega)^4);$$

следовательно, $(u_n)_i(u_n)_j$ сходится слабо в $L_2(0,T;L_{4/3}(\Omega)^4)$.

Далее, $u_n(0) = a$ и $u_n \rightharpoonup u$ в $L_2(0,T;V^1)$, $u_n' \rightharpoonup u'$ в $L_2(0,T;V^{-2})$. Таким образом, $u_n(0) \rightharpoonup u(0)$, $u(0) = a$.

Таким образом, устремив ε к нулю и перейдя к пределу в (36) и соответствующем начальном условии, заключаем, что существует функция $u \in W_1$, удовлетворяющая условиям

$$\langle u', \varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle \tag{37}$$

и $u(0) = a$.

9. Эквивалентность существования решений, принадлежащих двум пространствам. Вернёмся к операторному уравнению

$$u' - B(u) + \nu A u = f. \tag{38}$$

В разделе 8 было доказано существование слабого решения начально-краевой задачи (1)–(4), принадлежащего пространству W_1: для любого $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L_2(0,T;V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0,T;V^0)$, и любого $a \in V^0$ существует функция $u \in W_1$, являющаяся слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4). Иными словами, функция $u \in W_1$, должна удовлетворять равенству (37) и начальному условию $u(0) = a$.

Поскольку в (37) пробная функция $\varphi \in V^2$ произвольна, то слабое решение $u \in W_1$ начально-краевой задачи (1)–(4) должно удовлетворять операторному уравнению

$$u' - B(u) + \nu A u = f \tag{39}$$

и начальному условию $u(0) = a$.

Правая часть f данного равенства по условию принадлежит $L_2(0,T;V^{-1}) + L_1(0,T;V^0)$. Далее, $\nu A v \in L_2(0,T;V^{-1})$. Используя оценку Ладыженской:

$$\|B(u)\|_{L_{4/3}}(0,T;V^{-1}) \leqslant \left(\int_0^T \|B(u(t))\|_{V^{-1}}^{4/3} dt\right)^{3/4} \leqslant C_8 \left(\int_0^T \|u(t)\|_{V^0}^{2/3} \|u(t)\|_{V^1}^2 dt\right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \left(\|u\|_{L_\infty(0,T;V^0)}^{2/3} \int_0^T \|(u(t))\|_{V^1}^2 dt\right) \leqslant C_8 \|u\|_{L_\infty(0,T;V^0)}^{1/2} \|u\|_{L_2(0,T;V^1)}^{3/2},$$

получим, что $B(u) \in L_{4/3}(0,T;V^{-1})$. Таким образом, выражая из (39) функцию u', получим, что

$$u' = f + B(u) - \nu A u \in L_{4/3}(0,T;V^{-1}) + L_1(0,T;V^0).$$

Мы получили, что два функционала из $L_2(0,T;V^{-2})$ равны. Поскольку один из них принадлежит пространству $L_{4/3}(0,T;V^{-1}) + L_1(0,T;V^0)$, то второй также принадлежит этому пространству, а значит, слабое решение начально-краевой задачи (1)–(4) принадлежит и пространству W_0. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Звягин В. Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики// Совр. мат. Фундам. напр. — 2012. — *46.* — С. 92–119.
2. *Звягин В. Г.* On some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids// Тез. докл. Междунар. конф., посв. 75-летию чл.-корр. РАН проф. Л. Д. Кудрявцева «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 1–5 марта 1998 г.). — Москва, 1998. — С. 197.
3. *Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В.* Об одном варианте аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье—Стокса// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2017. — *3.* — С. 104–124.
4. *Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В.* Вариант аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье—Стокса на основе параболической регуляризации// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2017. — *3.* — С. 125–142.
5. *Simon J.* Compact sets in the space $L(0,T;B)$// Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — *146.* — P. 65–96.
6. *Zvyagin V. G.* Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics// J. Math. Sci. — 2014. — *201*, № 6. — P. 830–858.
7. *Zvyagin V., Vorotnikov D.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. — Berlin–New York: de Gruyter, 2008.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Чирова Маргарита Витальевна (Chirova Margarita Vitalievna)
Федеральное казенное предприятие «Научно-производственный центр «Дельта»,
Воронежский филиал, Воронеж
(Federal State Enterprise "Scientific and Production Center 'Delta',"
Voronezh branch, Voronezh, Russia)
E-mail: rita.chirova@yandex.ru