

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 232



Москва 2024

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 232 (2024)

Дата публикации 12 февраля 2024 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. С. Бондарев

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

А. В. Овчинников

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

**СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 232

**МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXIV».**

ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2023 г.

Часть 3



Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Применение проекционно-сеточного метода для решения нестационарной задачи (<i>О. П. Барабаш</i>)	3
О задачах граничного управления и оптимального управления распределенной неоднородной колебательной системой с заданными промежуточными условиями на функции состояния (<i>В. Р. Барсегян</i>)	13
Модели охлаждения и замораживания живой биологической ткани плоским линейчатым аппликатором (<i>Б. К. Буздов</i>)	30
Классическое решение третьей смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом (<i>В. И. Корзюк, Я. В. Рудько</i>)	37
Обобщенные формулы Римана решения первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости (<i>Ф. Е. Ломовцев</i>)	50
О преобразовании, двойственном к преобразованию Радона—Киприянова (<i>Л. Н. Ляхов, В. А. Калитвин, М. Г. Лапшина</i>)	70
Общая схема построения определяющей функции в задаче управления для динамической системы в частных производных разного порядка (<i>Е. В. Раецкая</i>)	78
Задачи типа Римана—Гильберта для обобщенного уравнения Коши—Римана с младшим коэффициентом, имеющим особенность в окрестности (<i>А. Б. Расулов, Ю. С. Федоров, А. М. Сергеева</i>)	89
Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида (<i>В. С. Рыжлов</i>)	99
О математических моделях вирусологии, использованных для изучения пандемии Covid-19 (<i>Е. П. Кругова, Е. Е. Букжалёв</i>)	122
Метод глубокого обучения для выявления аномалий в функционировании компьютерных систем (<i>О. Е. Горохов, М. И. Петровский, И. В. Машечкин</i>)	140
Групповой анализ системы McKeon (<i>С. А. Душновский</i>)	153



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-3-12

УДК 517.9, 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

© 2024 г. О. П. БАРАБАШ

Аннотация. Работа посвящена построению приближенного решения параболического дифференциального уравнения с оператором Бесселя. Решение задачи ищется в виде линейной комбинации кусочно непрерывных базисных функций, имеющих компактный носитель. Построение решения осуществляется в два этапа. Первоначально проводится аппроксимация по пространственной переменной с использованием проекционно-сеточного метода Бубнова–Галеркина. Затем конечно-разностным методом проводится приближение по t . Возникающая при этом система уравнений имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.

Ключевые слова: оператор Бесселя, метод Бубнова–Галеркина, финитные функции, проекционно-сеточный метод, конечно-разностный метод.

APPLICATION OF THE PROJECTION-GRID METHOD FOR SOLVING NONSTATIONARY PROBLEMS

© 2024 O. P. BARABASH

ABSTRACT. The work is devoted to constructing approximate solutions of a parabolic differential equation with the Bessel operator. Solutions are sought in the form of a linear combination of piecewise continuous, compactly supported basis functions. The construction of the solution is performed in two stages. Initially, the approximation in a spatial variable is performed by using the Bubnov–Galerkin projection-grid method. Then the approximation in t is carried out by using the finite-difference method. The resulting system of equations is solved by the tridiagonal matrix algorithm.

Keywords and phrases: Bessel operator, Bubnov–Galerkin method, finite functions, projection-grid method, finite-difference method.

AMS Subject Classification: 65M60, 35K67

1. Введение. Проекционно-сеточные методы в настоящее время являются чрезвычайно действенными инструментами решения задач математической физики: теплообмена, гидродинамики, электродинамики, механики твердого деформируемого тела и топологической оптимизации.

Общая теория разностных методов разработана А. А. Самарским [11]. Различные приближенные методы решения краевых задач изложены в монографии Г. И. Марчука [8], также классический вариационный подход описан в книге С. Г. Михлина [9]. Наиболее обширные результаты, полученные при численном решении, относятся к регулярным краевым задачам, порождаемым невырожденными уравнениями с гладкими коэффициентами. Эти исследования опираются на теорию аппроксимаций в функциональных пространствах. Гораздо меньше изучены подобные вопросы для сингулярных уравнений.

В этой связи необходимо отметить работу [10], в которой рассмотрено уравнение

$$-\frac{d}{dx} \left(x^k p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x)$$

для $0 \leq k \leq 5/2$, $p(x) > 0$. В ней указан порядок аппроксимации в энергетическом пространстве, зависящий от k и гладкости функции f .

В работе [6] В. В. Катраховым и А. А. Катраховой изучена сходимость метода Галеркина для краевой задачи

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + qu = f(x, y), \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{\Gamma^+} = 0,$$

где

$$\Gamma^+ = \partial\Omega^+ \{(x, y) : x = 0\}, \quad \Omega^+ \subset R_+^2.$$

Ю. Л. Гусманом и А. А. Оганесяном [3] был развит вариационно-разностный подход для двумерного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + qu = f(x, y),$$

где $0 \leq \mu < 1$. Получены точные по порядку оценки погрешности метода.

Работа [2] посвящена исследованию сингулярных краевых задач в контексте изучения сходимости приближенных методов решения.

Вопрос построения эффективных численных методов для сингулярных и вырождающихся краевых задач, несомненно, является актуальным. В настоящей статье на основе вариационного подхода устанавливается разрешимость сингулярного параболического уравнения, в котором по одной из переменных действует оператор Бесселя. Приводятся оценки погрешности аппроксимации точного решения методом Бубнова–Галеркина.

2. Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{du}{dt} + Lu = f, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_{(0)}, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad u(1) = 0, \tag{2}$$

где $f = f(x, t) \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ для всех t , $x \in \Omega = (0, 1)$, $t \in [0, T]$, $u_{(0)} = u_{(0)}(x)$. Оператор L имеет вид

$$Lu = -x^{-\gamma} \frac{d}{dx} \left(x^\gamma p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u, \\ D(L) = \left\{ v : v \in L_{2,\gamma}, \quad Lv \in L_{2,\gamma}, \quad \frac{dv}{dx} \in L_{2,\gamma}, \quad \frac{dv}{dx}(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

Основы теории уравнений, содержащих подобные операторы, были заложены И. А. Киприяновым и Я. И. Житомирским (см. [5, 7, 12]).

Скалярное произведение и норма в $L_{2,\gamma}(0, 1)$ задаются следующим образом:

$$(u, v)_{L_{2,\gamma}(0,1)} = \int_0^1 x^\gamma u(x)v(x)dx, \quad \|f\|_{L_{2,\gamma}(0,1)} = \left(\int_0^1 x^\gamma f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Будем считать, что $p(x) \in C^1[0, 1]$, $q(x) \in C[0, 1]$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $p_0 = \text{const}$, $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$.

Энергетическое пространство, соответствующее оператору L , будем обозначать H_L . Скалярное произведение в H_L имеет вид

$$[u, v] = \int_0^1 x^\gamma \left(p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + quv \right) dx. \tag{3}$$

Весовые пространства $H_\gamma^m(0, 1)$ (пространства И. А. Киприянова) определяются как замыкание класса $C_{\text{чет}}^\infty([0, 1]) \subset C^\infty([0, 1])$, состоящего из четных функций по норме

$$\|f\|_{m,\gamma} = \left(\sum_{\substack{0 \leq i_1 + 2i_2 \leq m \\ i=0,1}} \int_0^1 x^\gamma |D_x^{i_1} B_x^{i_2} f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $D_x = \frac{d}{dx}$, $B_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}$ — оператор Бесселя.

Произвольно выберем функцию из $v(x, t)$ из пространства $H_\gamma^1((0, 1) \times \Omega)$, удовлетворяющую условию $v(x, T) = 0$. Умножим (1) на $x^\gamma v$, проинтегрируем по области $(0, T) \times \Omega$:

$$\int_0^T \left[\int_0^1 x^\gamma \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \int_0^1 \left(x^\gamma x^{-\gamma} \frac{d}{dx} \left(x^\gamma p(x) \frac{du}{dx} \right) v + x^\gamma q(x) uv - x^\gamma f v \right) dx \right] dt = 0.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^T \left[- \left(u, \frac{\partial v}{\partial t} \right) + [u, v] - (f, v) \right] dt = (u_{(0)}, v(x, 0)), \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_{2,\gamma}(\Omega)}$.

Будем называть обобщенным решением задачи (1)–(2) функцию $u \in L_{2,\gamma}((0, T) \times \Omega)$, которая имеет производную $\partial u / \partial x \in L_{2,\gamma}((0, T) \times \Omega)$ и удовлетворяет уравнению (4) для любой такой функции $v \in H_\gamma^1((0, T) \times \Omega)$, что $\partial v(0, t) / \partial x = v(1, t) = 0$.

Приближение решения при такой постановке можно производить как по переменной x , так и по переменной t в виде рядов с базисными функциями $\phi_i(x)$, $\phi_j(t)$. В этом случае по временной переменной получаются, как правило, неявные схемы, и затруднено использование удобных на практике разностных схем для аппроксимации производной по t .

Пусть такое решение существует и $\partial u / \partial t \in L_{2,\gamma}((0, T) \times \Omega)$. Примем $v(x, t) = w(x) \Psi(t)$, где $w(x) \in H_\gamma^1(\Omega)$, $w(0) = 0$, $d\Psi/dt \in L_{2,\gamma}(0, T)$, $\Psi(T) = 0$. После подстановки $v(x, t)$ в (4) и интегрирования по частям получим

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w \right) + [u, w] - (f, w) \right] \Psi(t) dt + \Psi(0) (u(x, 0) - u_{(0)}, w) = 0.$$

Учтем произвольность $\Psi(t)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w \right) (t) + [u, w](t) = (f, w)(t), \quad (u(x, 0), w) = (u_{(0)}, w). \quad (5)$$

Будем называть обобщенным решением задачи (1)–(2) функцию $u(x, t)$, которая почти при каждом $t \in (0, T)$ принадлежит энергетическому пространству H_L со скалярным произведением вида (3), имеет производную $\partial u / \partial t \in L_{2,\gamma}((0, T) \times \Omega)$ и почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяет равенствам (5) при любом выборе $w(x) \in H_L$. Второе определение обобщенного решения требует наличия производной $\partial u / \partial t \in L_{2,\gamma}((0, T) \times \Omega)$, однако при такой постановке переменную t можно рассматривать как параметр.

3. Построение проекционно-разностной схемы. Для приближенного решения задачи (1)–(2) будем в первую очередь выполнять аппроксимацию по пространственной переменной с помощью проекционно-сеточного метода, а затем приближение по времени t с использованием конечно-разностного метода.

Введем на $[0, 1]$ сетку $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$, $i = 1, \dots, n$, $h = x_i - x_{i-1}$. Для случая, когда $\gamma \neq 1$, базисные функции заданы следующим образом:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}{x_i^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{x_{i+1}^{1-\gamma} - x_i^{1-\gamma}}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (6)$$

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_0, x_1), \\ \frac{x^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{x_2^{1-\gamma} - x_1^{1-\gamma}}, & x \in (x_1, x_2); \end{cases} \quad \phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}{x_n^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}, & x \in (x_{n-1}, x_n), \\ 0, & x \notin (x_{n-1}, x_n). \end{cases} \quad (7)$$

Приближенное решение задачи будем искать в виде

$$u_h = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) \phi_i(x).$$

Тогда коэффициенты, являющиеся функциями от $t \in (0, T)$, будем искать из системы ОДУ, полученной с помощью метода Бубнова—Галеркина из (5):

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi_i \right) (t) + [u_h, \phi_i](t) = (f, \phi_i)(t), \quad (8)$$

$$(u_h(x, 0) - u_{(0)}, \phi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Уравнения (8)–(9) могут быть записаны в матричном виде:

$$\widehat{B} \frac{da}{dt} + \widehat{A}a = F(t), \quad \widehat{B}a(0) = a_{(0)}, \quad (10)$$

где

$$a(t) = (a_1(t), \dots, a_{n-1}(t))^T, \quad F(t) = (F_1(t), \dots, F_{n-1}(t))^T, \quad F_i(t) = (f, \phi_i)(t),$$

$$a_{(0)} = (a_{(0),1}, \dots, a_{(0),n-1})^T, \quad a_{(0),i} = (u_{(0)}, \phi_i), \quad \widehat{B} = (B_{ij}), \quad \widehat{A} = (A_{ij}),$$

$$A_{ij} = A_{ji} = [\phi_i, \phi_j] = \int_{\Omega_{ij}} x^\gamma \left(p \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + q \phi_i \phi_j \right) dx, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$B_{ij} = B_{ji} = (\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega_{ij}} x^\gamma \phi_i \phi_j dx, \quad \Omega_{ij} = (0, 1) \cap \text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j, \quad \Omega_j = (0, 1) \cap \text{supp } \phi_j.$$

$$F_i = \int_{\Omega_j} x^\gamma f(x, t) \phi_i dx, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Поскольку скалярное произведение базисных функций в пространстве $L_{2,\gamma}(\Omega)$ отлично от 0 только для соседних функций, то для матрицы \widehat{A} требуется найти только элементы $A_{j-1,j}$, $A_{j,j}$, $A_{j+1,j}$ (см. [1]) по следующим формулам:

$$A_{j-1,j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma p \frac{d\phi_{j-1}}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma q \phi_{j-1} \phi_j dx, \quad (11)$$

$$A_{j,j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma p \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma q \phi_j \phi_j dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma p \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma q \phi_j \phi_j dx, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & d_{n-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

и применять для решения метод последовательного исключения неизвестных (метод прогонки).

5. Оценки сходимости. Для получения априорной оценки u_h обобщенного решения умножим каждое из уравнений (8) на функцию $a_i(t)$ и просуммируем по всем $i = 1, \dots, n-1$:

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) \phi_i \right) + \left[u_h, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) \phi_i \right] = \left(f, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) \phi_i \right),$$

а затем проинтегрируем по $t' \in (0, t)$:

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt' + \int_0^t [u_h, u_h] dt' = \int_0^t (f, u_h) dt'. \quad (20)$$

Применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt' &= \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial u_h}{\partial t} u_h x^\gamma dt' dx = \left(\int_0^1 u_h x^\gamma u_h dx \right) \Big|_0^1 - \\ &\quad - \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt' = \|u_h\|^2(t) - \|u_h\|^2(0) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt'. \end{aligned}$$

Тогда

$$2 \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt' = \|u_h\|^2(t) - \|u_h\|^2(0).$$

Перепишем равенство (20):

$$\frac{1}{2} \|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' = \int_0^t (f, u_h) dt' + \frac{1}{2} \|u_h\|^2(0).$$

Из (9) вытекает равенство

$$(u_h(x, 0), u_h(x, 0)) = (u_{(0)}, u_h(x, 0)),$$

откуда получаем $\|u_h\|(0) \leq \|u_{(0)}\|$. Тогда

$$\frac{1}{2} \|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' \leq \left(\int_0^t \|f\|^2(t') dt' \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u_h\|^2(t') dt' \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \|u_{(0)}\|^2. \quad (21)$$

Рассмотрим норму в энергетическом пространстве:

$$[u, u] = \int_0^1 x^\gamma \left[p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + q(x) u^2 \right] dx.$$

В последней формуле отбросим неотрицательное слагаемое $q(x)u^2$, а $p(x)$ заменим на p_0 :

$$[u, u] \geq p_0 \int_0^1 x^\gamma \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = p_0 \|u'_x\|^2. \quad (22)$$

Покажем, что справедлива оценка

$$\|u\|_{L_{2,\gamma}}^2 \leq \|u'\|_{L_{2,\gamma}}^2 \frac{1}{2(1+\gamma)}. \quad (23)$$

Запишем с учетом $u(1) = 0$:

$$u(x) = - \int_x^1 u'(\xi) d\xi, \quad u^2(x) = \int_x^1 \left(u'(\xi) \xi^{-\gamma/2} \xi^{\gamma/2} \right)^2 d\xi.$$

С использованием неравенства Коши–Буняковского для $0 \leq x \leq 1$ получаем

$$u^2(x) \leq \left(\int_x^1 (u'(\xi))^2 \xi^\gamma d\xi \right) \left(\int_x^1 \xi^{-\gamma} d\xi \right) \leq \left(\int_0^1 (u'(\xi))^2 \xi^\gamma d\xi \right) \frac{\xi^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_x^1 = \|u'\|_{L_{2,\gamma}}^2 \frac{1-x^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Проинтегрируем от 0 до 1 с весом x^γ :

$$\|u\|_{L_{2,\gamma}}^2 \leq \|u'\|_{L_{2,\gamma}}^2 \int_0^1 \frac{x^\gamma(1-x^{1-\gamma})}{1-\gamma} dx = \|u'\|_{L_{2,\gamma}}^2 \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \|u'\|_{L_{2,\gamma}}^2 \frac{1}{2(1+\gamma)}.$$

Подставим оценку (23) в неравенство (22):

$$[u]^2 \geq 2p_0(1+\gamma)\|u\|^2. \quad (24)$$

С учетом (24) запишем (21):

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' \leq \left(\int_0^t \|f\|^2(t') dt' \right)^{1/2} c \left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' \right)^{1/2} + \frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2,$$

где $c = 2p_0(1+\gamma)$. К последнему соотношению применим ϵ -неравенство $|ab| \leq a^2/(4\epsilon) + \epsilon b^2$:

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' \leq \frac{c}{4\epsilon} \int_0^t \|f\|^2(t') dt' + c\epsilon \left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' \right) + \frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2(0). \quad (25)$$

Примем $\epsilon = c/2$. Имеем

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{c^2}{2} \right) \left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' \right) &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|f\|^2(t') dt' + \|u_{(0)}\|^2 \right), \\ \left(2 - \frac{c^2}{2} \right) \left(\|u_h\|^2(t) + 2 \int_0^t [u_h]^2(t') dt' \right) &\leq \left(\int_0^t \|f\|^2(t') dt' + \|u_{(0)}\|^2 \right), \\ \|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t') dt' &\leq C \left(\int_0^t \|f\|^2(t') dt' + \|u_{(0)}\|^2 \right), \\ \max_{t \in (0,T)} \|u_h\|^2(t) + \int_0^T [u_h]^2(t') dt' &\leq C \left(\int_0^T \|f\|^2(t') dt' + \|u_{(0)}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует непрерывная зависимость приближенного решения u_h задачи от f и $u_{(0)}$.

Оценим скорость сходимости u_h к $u(x, t)$ при $h \rightarrow 0$. Положим $\xi_h = u - u_h$; тогда для любой функции $v_h = \sum_1^{n-1} b_i(t) \phi_i$ имеем

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, v_h \right) (t) + [\xi_h, v_h](t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_h \right) (t) + [u, v_h](t) - \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right) (t) - [u_h, v_h](t),$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right) (t) + [u_h, v_h](t) &= (f, v_h)(t), \\ \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, v_h \right) (t) + [\xi_h, v_h](t) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_h \right) (t) + [u, v_h](t) - (f, v_h)(t) = 0, \\ (\xi_h, v_h) (0) &= 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, \xi_h \right) + [\xi_h, \xi_h] = \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, u - v_h \right) + [\xi_h, u - v_h].$$

Применяя к $\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, \xi_h \right)$ интегрирование по частям, получим

$$\frac{1}{2} \|\xi_h\|^2(t) + \int_0^t [\xi_h]^2 dt' = \int_0^t [\xi_h, u - v_h] dt' + \int_0^t \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, u - v_h \right) dt' + \frac{1}{2} \|\xi_h\|^2(0). \quad (26)$$

Вычислим

$$\int_0^t \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, u - v_h \right) dt' = (\xi_h, u - v_h) (t) - (\xi_h, u - v_h) (0) - \int_0^t \left(\xi_h, \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t} \right) dt'.$$

Для (26) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\xi_h\|^2(t) + \int_0^t [\xi_h]^2 dt' &\leq \int_0^t ([\xi_h]^2 dt')^{1/2} \int_0^t ([u - v_h]^2 dt')^{1/2} + \|\xi_h(t)\| \|u - v_h\|(t) + \\ &+ \|\xi_h(0)\| \|u(0) - v_h(0)\| + \int_0^t (\|\xi_h\|^2 dt')^{1/2} * \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t} \right\|^2 dt' \right)^{1/2} \frac{1}{2} \|\xi_h\|^2(0). \quad (27) \end{aligned}$$

Так как $u_h(x, 0)$ — ортогональная проекция u_0 на H_L , то

$$\|\xi_h(0)\| \leq \|u(0) - v_h(0)\|.$$

Используя неравенство $|ab| \leq a^2/(4\epsilon) + \epsilon b^2$ и оценку (27), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\xi_h\|^2(t) + \int_0^t [\xi_h]^2 dt' &\leq \frac{1}{4\epsilon_1} \int_0^t [\xi_h]^2 dt' + \epsilon_1 \int_0^t [u - v_h]^2 dt' + \|u(0) - v_h(0)\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_2} \|\xi_h(t)\|^2 + \\ &+ \epsilon_2 \|u - v_h\|^2(t) + \frac{c}{4\epsilon_3} \int_0^t [\xi_h]^2 dt' + \epsilon_3 \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t} \right\|^2 dt' + \frac{1}{2} \|u(0) - v_h(0)\|^2(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\epsilon_2} \right) \|\xi_h\|^2(t) + \left(1 - \frac{1}{4\epsilon_1} - \frac{c}{4\epsilon_3} \right) \int_0^t [\xi_h]^2 dt' &\leq \epsilon_2 \|u - v_h\|^2(t) + \\ &+ \epsilon_1 \int_0^t [u - v_h]^2 dt' + \epsilon_3 \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t} \right\|^2 dt' + \frac{3}{2} \|u(0) - v_h(0)\|^2(0). \quad (28) \end{aligned}$$

Пусть $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_1 = 1$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4\epsilon_2} = 1 - \frac{1}{4\epsilon_1} - \frac{c}{4\epsilon_3}$; тогда $\epsilon_3 = \frac{c}{2}$. С учетом введенных значений перепишем (28):

$$\begin{aligned} \|\xi_h\|^2(t) + \int_0^t [\xi_h]^2 dt' &\leq 4\|u - v_h\|^2(t) + 4 \int_0^t [u - v_h]^2 dt' + 2c \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t} \right\|^2 dt' + 6\|\xi_h\|^2(0) \leq \\ &\leq 4\|u - v_h\|^2(t) + \widehat{c} \left(\int_0^t [u - v_h]^2 dt' + \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t} \right\|^2 dt' + \|u_{(0)} - v_h(0)\|^2(0) \right), \\ \max_{t \in (0, T)} \|\xi_h\|^2(t) + \int_0^T [\xi_h]^2 dt' &\leq \\ &\leq 4 \max_{t \in (0, T)} \|u - v_h\|^2(t) + \widehat{c} \left(\int_0^T [u - v_h]^2 dt' + \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t} \right\|^2 dt' + \|u_{(0)} - v_h(0)\|^2 \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Пусть теперь v_h имеет коэффициенты $b_i = u(x_i, t)$. Из (29), учитывая свойства базисных функций, получаем сходимость u_h к u при $h \rightarrow 0$:

$$\max_{t \in (0, T)} \|u - u_h\|^2(t) + \int_0^T [u - u_h]^2 dt' \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

6. Заключение. Рассмотренная в работе форма применения проекционно-сеточного метода для нестационарной задачи объединяет преимущества разностных и проекционных методов. При решении начально-краевых задач целесообразно вводить сетку по оси времени, а затем, после приближения производной по времени, применять схему аппроксимации по пространственной переменной на каждом временном слое. Использование метода Бубнова—Галеркина для аппроксимации по x с финитными базисными функциями приводит к простой вычислительной схеме с достаточно хорошей точностью. Для приближения по t использовалась неявная схема с первым порядком аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барбаш О. П.* Некоторые особенности реализации метода конечных элементов для сингулярного дифференциального уравнения // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2023. — № 2. — С. 27–35.
2. *Виноградова Г. А.* О решении сингулярной задачи вариационным методом // Вестн. фак-та ПММ. — 2015. — № 10. — С. 39–42.
3. *Гусман Ю. А.* Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1965. — № 2. — С. 351–357.
4. *Емельянов В. Н.* Введение в теорию разностных схем. — СПб., 2006.
5. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. — 1955. — 36 (78), № 2. — С. 299–310.
6. *Катрахов В. В.* Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. — 1984. — 279, № 4. — С. 799–802.
7. *Киприянов И. А.* Краевые задачи сингулярных эллиптических операторов в частных производных // Докл. АН СССР. — 1970. — 195, № 1. — С. 32–35.
8. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
9. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука, 1966.
10. *Михлин С. Г.* Некоторые вопросы сеточной аппроксимации и их приложения к вариационно-сеточному методу // в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике (Михлин С. Г., ред.). — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973.
11. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.

12. *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барабаш Ольга Павловна (Barabash Olga Pavlovna)

Воронежский государственный университет

(Voronezh State University, Voronezh, Russia)

E-mail: navyS9@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 13–29
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-13-29

УДК 517.977: 534.112

О ЗАДАЧАХ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ

© 2024 г. В. Р. БАРСЕГЯН

Аннотация. В работе исследуется распределенная неоднородная колебательная система, у которой заданы различные состояния в промежуточные моменты времени. Рассматриваются задачи граничного управления и оптимального граничного управления такой системой. Динамика указанного объекта моделируется одномерным волновым уравнением с кусочно постоянными характеристиками, при этом колебания распространяются в однородных участках за одинаковое время. Критерий качества для задач оптимального граничного управления задан на всем интервале времени. Предложен конструктивный подход построения функции граничного управления и оптимального управления одномерными колебательными неоднородными процессами. Подход исследования базируется на методах разделения переменных, теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. Под действием построенного закона управления волновые колебания из заданного начального состояния переходят в заданное конечное состояние через многоточечные промежуточные состояния.

Ключевые слова: граничное управление колебаниями, оптимальное управление колебаниями, неоднородный колебательный процесс, волновое уравнение, кусочно постоянные характеристики.

ON PROBLEMS OF BOUNDARY CONTROL AND OPTIMAL CONTROL OF A DISTRIBUTED INHOMOGENEOUS OSCILLATORY SYSTEM WITH GIVEN INTERMEDIATE CONDITIONS ON THE STATE FUNCTIONS

© 2024 V. R. BARSEGHYAN

ABSTRACT. In this work, we examine a distributed inhomogeneous oscillatory system, in which various states are specified at intermediate times. Problems of boundary control and optimal boundary control of this system are considered. The dynamics of this object is modeled by a one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics; the oscillations propagate in homogeneous domains areas in the same time. The quality criterion for optimal boundary control problems is specified over the entire time interval. A constructive approach to constructing a boundary control function and optimal control of one-dimensional oscillatory inhomogeneous processes is proposed. The research approach is based on methods of separation of variables, control theory, and optimal control of finite-dimensional systems with multipoint intermediate conditions. Under the influence of the constructed control law, wave oscillations from a given initial state pass into a given terminal state through multipoint intermediate states.

Keywords and phrases: boundary control of oscillations, optimal control of oscillations, inhomogeneous oscillatory process, wave equation, piecewise constant characteristics.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Волновые уравнения, возникающие в задачах управления распределенными колебательными процессами, имеют неизменный теоретический интерес и существенное практическое значение (см. [1–5, 7–9, 11–18, 21, 22]). В задачах математического моделирования часто возникает необходимость генерации желаемой формы колебания или стабилизации колебания. Решение данной проблемы реализуется исследователями, как правило, с помощью задач граничного управления (см. [2, 4, 5, 7–9, 11–18, 21, 22]). Благодаря многочисленным приложениям многоточечные краевые задачи управления и оптимального управления динамикой являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. В этих задачах, наряду с классическими краевыми условиями (начальными и конечными), дополнительно заданы многоточечные условия в промежуточные фиксированные моменты времени.

Задачам управления (в том числе и оптимального) динамикой разнородных составных систем посвящены, в частности, работы [1, 2, 4, 5, 7, 8, 11–18, 26]. Применительно к распределенной колебательной системе, включающей два кусочно однородных участка, эта задача была впервые сформулирована А. Г. Бутковским и исследована в [12]. Серия работ академика В. А. Ильина (см., например, [7, 8]) и работы [4, 5, 11, 13–16, 26] посвящены проблемам граничного управления (оптимального управления) процессами, которые моделируются одномерным волновым уравнением, состоящим из двух участков с разными физическими свойствами. Длины таких участков выбирались исходя из предположения, что время прохождения колебаний по каждому из них является одинаковым. Авторами указанных работ были изучены и выведены формулы типа Даламбера, при этом задачи исследовались методом бегущих волн.

В данной статье рассматривается серия задач граничного управления и оптимального граничного управления динамикой распределенной неоднородной колебательной системы, причем в промежуточные моменты времени известны различные состояния колебательного процесса, который состоит из двух кусочно однородных участков. Считаем, что физические характеристики этих участков удовлетворяют сделанным выше предположениям. Будем осуществлять управление и оптимальное управление за счет смещения одного конца (при закреплённом противоположном конце), а также за счет одновременного смещения обоих концов с заданными условиями: в начальный и конечный моменты времени, а также в разные определенные промежуточные моменты времени. Критерий качества в задачах оптимального граничного управления задан на всем интервале времени.

Сформулированные в данной работе задачи отличаются от существующих постановок тем, что помимо стандартных краевых условий заданы дополнительно многоточечные условия в промежуточные моменты времени, а именно: на функции колебания (прогиба), на их производную (функции скоростей точек), а также одновременно на функции колебания и производную функции колебания. При исследовании этих задач используется метод разделения переменных (метод Фурье).

Цель данной работы состоит в создании аналитического подхода и разработке алгоритма построения функции граничного управления и оптимального управления одномерными колебательными системами, обладающими неоднородными свойствами, динамика которых (под действием сформированного закона управления) за конечный отрезок времени переходит из определенного начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в известное (желаемое) конечное состояние.

2. Постановка задачи. Пусть кусочно однородная среда состоит из двух участков с соответствующими длинами l_1 и l (т.е. $-l_1 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq l$), $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ — скорость прохождения волны по i -му участку, где $\rho_i = \text{const}$ — линейная плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. При этом имеет место равенство

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}, \quad (2.1)$$

так что время прохождения волны по участкам разной длины совпадает. Пусть состояние неоднородной распределенной системы описывается функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, а

отклонения от состояния равновесия можно представить в виде волнового уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, & 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.2)$$

с граничными условиями двух видов:

$$1. \quad Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

$$2. \quad Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.4)$$

Функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — управляющие воздействия (граничные управления) с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0 - 0, t) = Q(0 + 0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (2.5)$$

Распределенный кусочно однородный процесс (2.2) можно охарактеризовать как динамическую систему переменной структуры (см. [19]). Уравнение (2.2) характеризует математическая модель продольных (либо поперечных) колебаний стержня (струны) соответственно, где ρ — плотность, k — модуль упругости (натяжение струны).

Пусть классические условия (начальные и конечные) имеют вид

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (2.6)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (2.7)$$

Пусть также в некоторые определенные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$):

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T,$$

известны промежуточные значения функции колебания (прогиба) и значения ее производной (скоростей точек системы) в следующем виде:

$$A. \quad Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.8)$$

$$B. \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.9)$$

$$C. \quad Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

В промежуточных условиях (2.10) предполагается, что m — четное число.

Замечание 1. Промежуточные значения функции колебания и значения производной функции колебания в условиях (2.10) можно задавать в любой очередности.

Для задач управления с граничными условиями (2.3) будем рассматривать функционал вида

$$\left[\int_0^T \mu^2(t) dt \right]^{1/2}, \quad (2.11)$$

а для задач управления с граничными условиями (2.4) будем рассматривать функционал вида

$$\left[\int_0^T (\mu^2(t) + \nu^2(t)) dt \right]^{1/2}. \quad (2.12)$$

Предполагается, что функция $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, а функции удовлетворяют условиям $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1, l]$ и $\psi_j(x) \in C^1[-l_1, l]$. Кроме того, полагаем, что выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi_0(-l_1), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(-l_1), & \nu(0) &= \varphi_0(l), & \dot{\nu}(0) &= \psi_0(l), \\ \mu(t_i) &= \varphi_i(-l_1), & \dot{\mu}(t_j) &= \psi_j(-l_1), & \nu(t_i) &= \varphi_i(l), & \dot{\nu}(t_j) &= \psi_j(l), \\ \mu(T) &= \varphi_T(-l_1), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(-l_1), & \nu(T) &= \varphi_T(l), & \dot{\nu}(T) &= \psi_T(l), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $i = 2\alpha - 1$, $j = 2\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m/2$.

Для уравнения (2.2) с условиями (2.6) и (2.7) на отрезке $[0, T]$ сформулированы шесть задач граничного управления с граничными условиями (2.3) и (2.4), с заданными различными условиями (2.8)–(2.10) на функцию колебания и ее производную в фиксированные промежуточные значения.

Номером 1 обозначим задачи, в которых управление реализуется за счет перемещения только одного конца (для определенности, левого) при закрепленном другом конце.

Задача 1А. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8).

Задача 1В. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9).

Задача 1С. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10).

Сформулируем перечисленные задачи управления 1А, 1В, 1С с указанными граничными условиями (2.3).

Требуется найти такое граничное управление $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, (см. (2.3)), под влиянием которого колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходят в состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая выполнение следующих значений:

- А. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));
- В. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
- С. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Номером 2 обозначим далее задачи, в которых управление реализуется за счет перемещения обоих концов системы.

Задача 2А. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8).

Задача 2В. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9).

Задача 2С. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10).

Сформулируем перечисленные задачи управления 2А, 2В, 2С с указанными граничными условиями (2.4).

Требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (2.4)), под влиянием которых колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходят в состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая выполнение следующих значений:

- А. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));

- В. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
- С. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Для уравнения (2.2) с начальными (2.6) и конечными (2.7) условиями на отрезке времени $[0, T]$ и функционалами (2.11), (2.12) сформулированы шесть задач оптимального граничного управления с граничными условиями (2.3) и (2.4), с заданными различными условиями (2.8)–(2.10) на функцию колебания и ее производную в определенные промежуточные значения из временного интервала. Сохраняя принятую выше нумерацию задач, отметим задачи оптимального граничного управления дополнительно верхним индексом «0».

Задача 1⁰А. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8) и минимизирующие функционал (2.11).

Задача 1⁰В. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9) и минимизирующие функционал (2.11).

Задача 1⁰С. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10) и минимизирующие функционал (2.11).

Сформулируем перечисленные задачи 1⁰А, 1⁰В, 1⁰С оптимального граничного управления с условиями (2.3).

Требуется найти оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (2.3)) под воздействием которого колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходят в состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая минимум функционала (2.11) и выполнение следующих заданных значений:

- А. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));
- В. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
- С. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Задача 2⁰А. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8) и минимизирующие функционал (2.12).

Задача 2⁰В. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9) и минимизирующие функционал (2.12).

Задача 2⁰С. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10) и минимизирующие функционал (2.12).

Сформулируем перечисленные задачи 2⁰А, 2⁰В, 2⁰С оптимального граничного управления с условиями (2.4).

Требуется найти такие оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (2.4)), под воздействием которых колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) и граничными условиями из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходит в известное состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая минимум функционала (2.12) и выполнение следующих заданных значений:

- А. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));

- В. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
- С. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Замечание 2. Так как во всех задачах управления и оптимального управления в отдельные промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$) заданы или только значения функции колебания, или только значения производной функции колебания (значения скоростей точек), то использовать подход поэтапного исследования задач нецелесообразно.

В данной работе для всех перечисленных задач по единой схеме предлагается конструктивный подход решения, в котором учитывается специфика промежуточных условий.

Схема построения решений сформулированных задач включает следующие шаги:

- Шаг 1. Задачи сводятся к задачам управления с распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями.
- Шаг 2. При помощи метода разделения переменных полученные задачи сводятся к задачам управления и оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями.
- Шаг 3. При помощи методов теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями для произвольного числа первых n гармоник строятся граничные управления и оптимальные граничные управления, которые представляются в явном аналитическом виде.

3. Сведение исходных задач к задачам с нулевыми граничными условиями. Для выполнения шага 1 из схемы построения решения перейдем к новой переменной:

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1}x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (3.1)$$

что позволит реализовать растяжение или сжатие отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (2.1) вместо отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ будем иметь отрезок $-l \leq \xi \leq 0$.

Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

с граничными условиями

$$Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

$$Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4)$$

начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (3.5)$$

промежуточными условиями

$$Q(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.7)$$

$$Q(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (3.9)$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков:

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0+0}. \quad (3.10)$$

Отметим, что для простоты и удобства после замены переменной (3.1) все обозначения функций сохранены.

3.1. Сведение неоднородных граничных условий к нулевым граничным условиям. Поскольку граничные условия (3.3), (3.4) неоднородны, будем строить решение уравнения (3.2) в следующем виде:

$$Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t), \quad (3.11)$$

где $V(\xi, t)$ — требующая определения функция с однородными граничными условиями

$$V(-l, t) = V(l, t) = 0, \quad (3.12)$$

а $W(\xi, t)$ — решение уравнения (3.2) с неоднородными граничными условиями

$$W(-l, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = 0, \quad (3.13)$$

$$W(-l, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = \nu(t). \quad (3.14)$$

Функция $W(\xi, t)$ для условий (3.3) и (3.4) представляется в виде

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2l}(l - \xi)\mu(t), \quad (3.15)$$

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2l}[(l - \xi)\mu(t) + (l + \xi)\nu(t)]. \quad (3.16)$$

Подстановка (3.11) в (3.2) и учет (3.15), (3.16) дают следующее уравнение для $V(\xi, t)$:

$$\frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.17)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2l}(\xi - l)\ddot{\mu}(t), \quad (3.18)$$

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2l}[(\xi - l)\ddot{\mu}(t) - (\xi + l)\ddot{\nu}(t)]. \quad (3.19)$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет условию (3.10) в точке $\xi = 0$. Следует отметить, что согласно (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0(-l_1) &= \varphi_0(-l), & \varphi_i(-l_1) &= \varphi_i(-l), & \psi_0(-l_1) &= \psi_0(-l), \\ \psi_j(-l_1) &= \psi_j(-l), & \varphi_T(-l_1) &= \varphi_T(-l), & \psi_T(-l_1) &= \psi_T(-l). \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2. Сведение начальных, промежуточных и конечных условий к соответствующим условиям для неоднородного уравнения. Учитывая выражения (3.15), (3.16) для функции $W(\xi, t)$ и условия согласования (3.20), из известных начальных (3.5), промежуточных (3.6)–(3.8) и конечных условий (3.9) получим соответствующие условия для функции $V(x, t)$. Для задач граничного управления колебаниями смещением левого конца при закреплённом правом конце, т.е. для функции $V(\xi, t)$, получим следующие условия: начальные

$$V(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_0(-l), \quad \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_0(-l), \quad (3.21)$$

промежуточные

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_i(-l), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_j(-l), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.23)$$

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_i(-l), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_j(-l), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

конечные

$$V(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_T(-l), \quad \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_T(-l). \quad (3.25)$$

Для задач граничного управления колебаниями смещением двух концов для функции $V(\xi, t)$ получим следующие условия: начальные

$$\begin{aligned} V(\xi, 0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_0(-l) + (l + \xi)\varphi_0(l)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\psi_0(-l) + (l + \xi)\psi_0(l)], \end{aligned} \quad (3.26)$$

промежуточные

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_i(-l) + (l + \xi)\varphi_i(l)], \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.27)$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\psi_j(-l) + (l + \xi)\psi_j(l)], \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.28)$$

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_i(-l) + (l + \xi)\varphi_i(l)], \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\psi_j(-l) + (l + \xi)\psi_j(l)], \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

конечные

$$\begin{aligned} V(\xi, T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_T(-l) + (l + \xi)\varphi_T(l)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\psi_T(-l) + (l + \xi)\psi_T(l)]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Итак, приходим к задачам управления колебаниями, моделируемыми уравнением (3.17) с однородными граничными условиями (3.12), которые формулируются следующим образом:

Задачи управления с нулевыми граничными условиями.

1. *Смещение левого конца при закреплённом правом конце.* Требуется найти такое граничное управление $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, которое переводит колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.18) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.21) в конечное состояние (3.25), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: А — (3.22); В — (3.23); С — (3.24).

2. *Смещение двух концов.* Требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$, которые переводят колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.19) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.26) в конечное состояние (3.30), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: А — (3.27); В — (3.28); С — (3.29).

Задачи оптимального управления с нулевыми граничными условиями.

1. *Смещение левого конца при закреплённом правом конце.* Требуется найти такое оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, которое переводит колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.18) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.21) в конечное состояние (3.25), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: А — (3.22); В — (3.23); С — (3.24), и которое минимизирует функционал (2.11).

2. *Смещение двух концов.* Требуется найти такие оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, которые переводят колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.19) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.26) в конечное состояние (3.30), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: А — (3.27); В — (3.28); С — (3.29), и которые минимизируют функционал (2.12).

4. **Решение задачи. Применение метода разделения переменных.** Перейдем к выполнению шагов 2 и 3. Будем искать решение уравнения (3.17) в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi. \quad (4.1)$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ представим в виде рядов Фурье в базисе $\{\sin(\pi k \xi)/l\}$, $k = 1, 2, \dots$. Подставим далее их значения вместе с функцией $V(\xi, t)$ в уравнения (3.17)–(3.19) и в условия (3.21)–(3.30). В результате получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

$$F_k(t) = -\frac{a_2}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t), \quad (4.3)$$

$$F_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\ddot{\nu}(t) \left(2(-1)^k - 1 \right) - \ddot{\mu}(t) \right]. \quad (4.4)$$

Для задач под номером 1 (смещение одного конца при закреплённом другом конце) начальные, промежуточные и конечные условия запишутся в виде

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_0(-l), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_0(-l), \quad (4.5)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_i(-l), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_j(-l), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.7)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_i(-l), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4.8)$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_j(-l), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_T(-l), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_T(-l). \quad (4.9)$$

Здесь $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ и $\psi_k^{(j)}$ — коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$.

Для задач под номером 2 (смещение обоих концов) начальные, промежуточные и конечные условия запишутся в виде

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_0(-l) - \varphi_0(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right], \quad (4.10)$$

$$\dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_0(-l) - \psi_0(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right],$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_i(-l) - \varphi_i(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right], \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.11)$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_j(-l) - \psi_j(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right], \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.12)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_i(-l) - \varphi_i(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right], \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4.13)$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_j(-l) - \psi_j(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right], \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

$$\begin{aligned} V_k(T) &= \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_T(-l) - \varphi_T(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right], \\ \dot{V}_k(T) &= \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_T(-l) - \psi_T(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Общее решение уравнения (4.2) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau. \quad (4.15)$$

Учитывая начальные (4.5) (или (4.10)), промежуточные (4.6)–(4.8) (или (4.11)–(4.13)) и конечные (4.9) (или (4.14)) условия, из (4.15) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять интегральным соотношениям в виде

$$\int_0^T F_k(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{1k}(T), \quad \int_0^T F_k(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}(T), \quad (4.16)$$

$$\int_0^{t_i} F_k(\tau) \sin \lambda_k(t_i - \tau) d\tau = \tilde{C}_{1k}(t_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.17)$$

$$\int_0^{t_j} F_k(\tau) \sin \lambda_k(t_j - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}(t_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.18)$$

$$\int_0^{t_i} F_k(\tau) \sin \lambda_k(t_i - \tau) d\tau = \tilde{C}_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4.19)$$

$$\int_0^{t_j} F_k(\tau) \sin \lambda_k(t_j - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}(T) &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\tilde{C}_{1k}(t_i) = \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_i - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.21)$$

$$\tilde{C}_{2k}(t_j) = \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.22)$$

$$\tilde{C}_{1k}(t_i) = \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_i - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_i, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4.23)$$

$$\tilde{C}_{2k}(t_j) = \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t_j, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

Отметим, что задачам управления и оптимального управления с условиями А соответствуют интегральные соотношения (4.16), (4.17), задачам с условиями В — соотношения (4.16), (4.18), а задачам с условиями С — соотношения (4.16), (4.19). Приведем дальнейшее построение решения (шаг 3 схемы) для задач граничного управления колебаниями, выделяя построение смещением левого конца при закрепленном правом конце и смещением двух концов.

4.1. Построение решения задач граничного управления колебаниями смещением левого конца при закрепленном правом конце. Подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (4.3) в соотношения (4.16)–(4.19) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (2.13), получим из (4.16)

следующие соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \quad (4.24)$$

а из (4.17), (4.18) и (4.19) получим следующие соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau) h_{1k}^{(1)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_1), \quad \int_0^T \mu(\tau) h_{1k}^{(m)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_m), \quad (4.25)$$

$$\int_0^T \mu(\tau) h_{2k}^{(1)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_1), \quad \int_0^T \mu(\tau) h_{2k}^{(m)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_m), \quad (4.26)$$

$$\int_0^T \mu(\tau) h_{1k}^{(i)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4.27)$$

$$\int_0^T \mu(\tau) h_{2k}^{(j)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} \right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} \right], \\ C_{1k}(t_i) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} \right], \quad i = 1, \dots, m; \\ C_{2k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} \right], \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k T, \\ X_{2k} &= \psi_T(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k t_i, \\ X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k t_j, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$h_{1k}^{(i)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_k(t_i - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_i, \\ 0, & t_i < \tau \leq T, \end{cases} \quad h_{2k}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T. \end{cases} \quad (4.29)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k^{(a)}(\tau) = \left(\sin \lambda_k(T - \tau) \quad \cos \lambda_k(T - \tau) \quad h_{1k}^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad h_{1k}^{(m)}(\tau) \right)^T, \quad (4.30)$$

$$C_k^{(a)} = \left(C_{1k}(T) \quad C_{2k}(T) \quad C_{1k}(t_1) \quad \dots \quad C_{1k}(t_m) \right)^T,$$

$$\bar{H}_k^{(b)}(\tau) = \left(\sin \lambda_k(T - \tau) \quad \cos \lambda_k(T - \tau) \quad h_{2k}^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad h_{2k}^{(m)}(\tau) \right)^T, \quad (4.31)$$

$$C_k^{(b)} = \left(C_{1k}(T) \quad C_{2k}(T) \quad C_{2k}(t_1) \quad \dots \quad C_{2k}(t_m) \right)^T,$$

$$\bar{H}_k^{(c)}(\tau) = \left(\sin \lambda_k(T - \tau) \quad \cos \lambda_k(T - \tau) \quad h_{1k}^{(1)}(\tau) \quad h_{2k}^{(2)}(\tau) \quad \dots \quad h_{1k}^{(m-1)}(\tau) \quad h_{2k}^{(m)}(\tau) \right)^T, \quad (4.32)$$

$$C_k^{(c)} = \left(C_{1k}(T) \quad C_{2k}(T) \quad C_{1k}(t_1) \quad C_{2k}(t_2) \quad \dots \quad C_{1k}(t_{m-1}) \quad C_{2k}(t_m) \right)^T.$$

Тогда, с учетом введенных обозначений (4.30)–(4.32), соотношения (4.24)–(4.27) запишутся следующим образом:

$$\int_0^T \bar{H}_k^{(\delta)}(\tau) \mu^{(\delta)}(\tau) d\tau = C_k^{(\delta)}, \quad \delta = a, b, c; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

Здесь в верхнем индексе $\delta = a, b, c$ обозначения соответствуют задачам со смещением левого конца при закрепленном правом конце с условиями А, В и С.

На практике, как правило, выбираются несколько первых n гармоник колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Поэтому

$$H_n^{(\delta)}(\tau) = \left(\bar{H}_1^{(\delta)}(\tau) \quad \bar{H}_2^{(\delta)}(\tau) \quad \dots \quad \bar{H}_n^{(\delta)}(\tau) \right)^T, \quad \eta_n^{(\delta)} = \left(C_1^{(\delta)} \quad C_2^{(\delta)} \quad \dots \quad C_n^{(\delta)} \right)^T \quad (4.34)$$

с размерностями $H_n^{(\delta)}(\tau) - (n(m+2) \times 1)$, $\eta_n^{(\delta)} - (n(m+2) \times 1)$ при всех $\delta = a, b, c$.

Для первых n гармоник соотношение (4.33), с учетом (4.34), запишется в виде

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(\tau) \mu_n^{(\delta)}(\tau) d\tau = \eta_n^{(\delta)}, \quad \delta = a, b, c. \quad (4.35)$$

Из (4.35) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Первые n гармоник системы (4.2), (4.3) с условиями (4.5)–(4.9) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(\delta)}$ (4.34) можно найти управление $\mu_n^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (4.35).*

Для произвольного числа первых n гармоник управляющее воздействие $\mu_n^{(\delta)}(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (4.35), имеет вид (см. [6, 20])

$$\mu_n^{(\delta)}(t) = \left(H_n^{(\delta)}(t) \right)^T \left(S_n^{(\delta)} \right)^{-1} \eta_n^{(\delta)} + f_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a, b, c, \quad (4.36)$$

где $\left(H_n^{(\delta)}(t) \right)^T$ — транспонированная матрица, $f_n^{(\delta)}(t)$ — такая вектор-функция, что

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(t) f_n^{(\delta)}(t) dt = 0, \quad S_n^{(\delta)} = \int_0^T H_n^{(\delta)}(t) \left(H_n^{(\delta)}(t) \right)^T dt, \quad \delta = a, b, c.$$

Здесь $S_n^{(\delta)}$ — известная матрица размерностью $(n(m+2) \times n(m+2))$, $\det S_n^{(\delta)} \neq 0$ при $\delta = a, b, c$.

Из формулы (4.36) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачи граничных управлений.

Учитывая обозначения (4.29), функции управления $\mu_n^{(\delta)}(t)$ представляются в виде

$$\mu_n^{(\delta)}(t) = \begin{cases} \mu_n^{(\delta)1}(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ \mu_n^{(\delta)2}(t), & t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots & \\ \mu_n^{(\delta)m}(t), & t_{m-1} < t \leq t_m, \\ \mu_n^{(\delta)m+1}(t), & t_m < t \leq T. \end{cases} \quad (4.37)$$

Подставляя из (4.36) (или из (4.37)) управление $\mu_n^{(\delta)}(t)$ в (4.3), а найденное для $F_k^{(\delta)}(t)$ выражение — в (4.15), получим функцию $V_k^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (4.1) будем иметь

$$V_n^{(\delta)}(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi,$$

где

$$V_k^{(\delta)}(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(\delta)}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau, \quad (4.38)$$

а функция колебания $Q_n^{(\delta)}(\xi, t)$, $-l \leq \xi \leq l$, для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n^{(\delta)}(\xi, t) = V_n^{(\delta)}(\xi, t) + W_n^{(\delta)}(\xi, t), \quad W_n^{(\delta)}(\xi, t) = \frac{1}{2l}(l - \xi)\mu_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a, b, c. \quad (4.39)$$

Учитывая обозначения (3.1), функция $Q_n^{(\delta)}(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде:

$$Q_n^{(\delta)}(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \mu_n^{(\delta)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n^{(\delta)}(t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad \delta = a, b, c. \quad (4.40)$$

4.2. Построение решения задач граничного управления колебаниями смещением двух концов. Подставим значение функции $F_k(t)$ в виде (4.4) в соотношения (4.16)–(4.19). Интегрируя их по частям с учетом условий согласования (2.11)–(2.13), из (4.16) получим, что функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k должны удовлетворять интегральным соотношениям в виде

$$\int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad (4.41)$$

$$\int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T),$$

а из (4.17), (4.18) и (4.19) получим следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau) h_k^{(i)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k h_k^{(i)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_i), \quad (4.42)$$

$$\int_0^T \mu(\tau) g_k^{(j)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k g_k^{(j)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_j), \quad (4.43)$$

$$\int_0^T \mu(\tau) h_k^{(i)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k h_k^{(i)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4.44)$$

$$\int_0^T \mu(\tau) g_k^{(j)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k g_k^{(j)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k} \right], & C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k} \right], \\ C_{1k}(t_i) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} - (-1)^k Y_{1k}^{(i)} \right], & C_{2k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} - (-1)^k Y_{2k}^{(j)} \right], \\ h_k^{(i)}(\tau) &= \begin{cases} \sin \lambda_k(t_i - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_i, \\ 0, & t_i < \tau \leq T, \end{cases} & g_k^{(j)}(\tau) &= \begin{cases} \cos \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} Y_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k T, & Y_{2k} &= \psi_T(l) - \psi_0(l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(l) \sin \lambda_k T, \\ Y_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k t_i, & Y_{2k}^{(j)} &= \psi_j(l) - \psi_0(l) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(l) \sin \lambda_k t_j. \end{aligned}$$

Отметим, что выражения для $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{1k}(t_i)$, $\tilde{C}_{2k}(t_j)$ совпадают с приведенными в формулах (4.20)–(4.23), а выражения для X_{1k} , X_{2k} , $X_{1k}^{(i)}$, $X_{2k}^{(j)}$ приведены в (4.28).

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k^{(2a)}(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ \cos \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \cos \lambda_k(T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1} h_k^{(1)}(\tau) \\ \dots & \dots \\ h_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1} h_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k^{(2a)}(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \\ \vdots \\ C_{1k}(t_{m-1}) \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

$$\bar{H}_k^{(2b)}(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ \cos \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \cos \lambda_k(T - \tau) \\ g_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(1)}(\tau) \\ \dots & \dots \\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k^{(2b)}(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{2k}(t_1) \\ \vdots \\ C_{2k}(t_m) \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

$$\bar{H}_k^{(2c)}(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ \cos \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \cos \lambda_k(T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1} h_k^{(1)}(\tau) \\ g_k^{(2)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(2)}(\tau) \\ \dots & \dots \\ h_k^{(m-1)}(\tau) & (-1)^{k+1} h_k^{(m-1)}(\tau) \\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k^{(2c)}(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \\ C_{2k}(t_2) \\ \vdots \\ C_{1k}(t_{m-1}) \\ C_{2k}(t_m) \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

$$U^{(\delta)}(\tau) = \begin{pmatrix} \mu^{(\delta)}(\tau) \\ \nu^{(\delta)}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом введенных обозначений (4.46)–(4.48) соотношения (4.41)–(4.44) запишутся следующим образом:

$$\int_0^T \bar{H}_k^{(2\delta)}(\tau) U^{(\delta)}(\tau) d\tau = C_k^{(2\delta)}(t_1, \dots, t_m, T), \quad \delta = a, b, c; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.49)$$

Здесь через $U^{(\delta)}(\tau)$, $\delta = a, b, c$, обозначены вектор-функции управления и оптимального управления для задач смещением двух концов, т.е. для задач 2А, 2В, 2С и 2⁰А, 2⁰В, 2⁰С соответственно.

Таким образом, для поиска функции $U^{(\delta)}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, для всех перечисленных задач получили бесконечные интегральные соотношения, которые представлены в единой записи (4.49). Введем для первых n гармоник следующие обозначения блочных матриц:

$$H_n^{(2\delta)}(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1^{(2\delta)}(\tau) \\ \bar{H}_2^{(2\delta)}(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n^{(2\delta)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n^{(2\delta)} = \begin{pmatrix} C_1^{(2\delta)}(t_1, \dots, t_m, T) \\ C_2^{(2\delta)}(t_1, \dots, t_m, T) \\ \vdots \\ C_n^{(2\delta)}(t_1, \dots, t_m, T) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

размерностей $(n(m+2) \times 2)$ и $(n(m+2) \times 1)$ соответственно. Для первых n гармоник с учетом (4.50) соотношение (4.49) запишется в виде

$$\int_0^T H_n^{(2\delta)}(\tau) U_n^{(\delta)}(\tau) d\tau = \eta_n^{(2\delta)}. \quad (4.51)$$

Из (4.51) следует утверждение, аналогичное теореме 1: первые n гармоник системы (4.2), (4.4) с условиями (4.10)–(4.14) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(2\delta)}$ из (4.50) можно найти управление $U_n^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (4.51).

Для произвольного числа первых n гармоник управляющее воздействие $U_n^{(\delta)}(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (4.51), имеет вид (см. [6, 20])

$$U_n^{(\delta)}(t) = \left(H_n^{(2\delta)}(t) \right)^T \left(S_n^{(2\delta)} \right)^{-1} \eta_n^{(2\delta)} + f_n^{(2\delta)}(t), \quad \delta = a, b, c, \quad (4.52)$$

где $\left(H_n^{(2\delta)}(t) \right)^T$ — транспонированная матрица, $f_n^{(2\delta)}(t)$ — такая вектор-функция, что

$$\int_0^T H_n^{(2\delta)}(t) f_n^{(2\delta)}(t) dt = 0, \quad S_n^{(2\delta)} = \int_0^T H_n^{(2\delta)}(t) \left(H_n^{(2\delta)}(t) \right)^T dt, \quad \delta = a, b, c. \quad (4.53)$$

Здесь $H_n^{(2\delta)}(t) \left(H_n^{(2\delta)}(t) \right)^T$ — внешнее произведение, $S_n^{(2\delta)}$ — известная матрица размерности $(n(m+2) \times n(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n^{(2\delta)} \neq 0$, при $\delta = a, b, c$.

Здесь также из формулы (4.52) следует, что для задач 2А, 2В, 2С существует множество управляющих функций, решающих задачи граничных управлений.

Подставляя из (4.52) величины $\mu_n^{(2\delta)}(t)$ и $\nu_n^{(2\delta)}(t)$ в (4.4), а найденное для $F_k^{(2\delta)}(t)$ выражение — в (4.15), получим функцию $V_k^{(2\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (4.1) будем иметь

$$V_n^{(2\delta)}(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^{(2\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi,$$

где

$$V_k^{(2\delta)}(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(2\delta)}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau, \quad (4.54)$$

а функция колебания $Q_n^{(2\delta)}(\xi, t)$, $-l \leq \xi \leq l$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n^{(2\delta)}(\xi, t) = V_n^{(2\delta)}(\xi, t) + W_n^{(2\delta)}(\xi, t), \quad W_n^{(2\delta)}(\xi, t) = \left[\nu_n^{(2\delta)}(t) - \mu_n^{(2\delta)}(t) \right] \frac{\xi}{l} + \mu_n^{(2\delta)}(t), \quad \delta = a, b, c. \quad (4.55)$$

Учитывая обозначения (3.1), представим функцию колебания $Q_n^{(2\delta)}(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ в следующем виде:

$$Q_n^{(2\delta)}(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k^{(2\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l_1} \right) \mu_n^{(2\delta)}(t) + \left(1 + \frac{x}{l_1} \right) \nu_n^{(2\delta)}(t) \right], & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \sum_{k=1}^n V_k^{(2\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \mu_n^{(2\delta)}(t) + \left(1 + \frac{x}{l} \right) \nu_n^{(2\delta)}(t) \right], & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.56)$$

4.3. О дальнейшем построении решения задач оптимального граничного управления колебаниями. В ходе построения решения задач оптимального граничного управления колебаниями, для первых n гармоник в случае управления смещением левого конца при закреплённом правом конце получено интегральные соотношения в виде (4.35), а в случае управления смещением двух концов — интегральные соотношения (4.51). Ясно, что левая часть соотношения (4.35) или (4.51) — линейная операция, порожденная функцией управления на промежутке времени $[0, T]$, а функционалы (2.11) или (2.12) являются нормой соответствующего нормированного пространства L_2 .

Таким образом, задачу оптимального управления с интегральными условиями (4.35) при функционале (2.11) или с интегральными условиями (4.51) при функционале (2.12) можно рассматривать как проблему моментов, а решение этих задач следует строить с помощью алгоритма решения проблемы моментов (см. [10]).

5. Заключение. Используя методы разделения переменных, теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями, предложен конструктивный подход построения граничного управления и оптимального управления неоднородной колебательной системой с заданными значениями функции колебания и производной функции колебания в разные промежуточные моменты времени. Предложенный для одномерного неоднородного волнового уравнения подход можно распространить на другие одномерные и неоднородные колебательные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.
2. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2023. — 63, № 1. — С. 74–84.
3. Бутковский А. Г. методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.
4. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 1. — С. 85–92.
5. Зверева М. Б., Найдюк Ф. О., Залукаева Ж. О. Моделирование колебаний сингулярной струны // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 2. — С. 111–119.
6. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
7. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 159–163.
8. Ильин В. А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. — 2010. — 435, № 6. — С. 732–735.
9. Корзюк В. И., Козловская И. С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — 19, № 1. — С. 62–70.
10. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
11. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Докл. РАН. — 2012. — 442, № 5. — С. 594–597.
12. Львова Н. Н. Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой // Автомат. телемех. — 1973. — № 10. — С. 22–32.
13. Провоторов В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2012. — 1. — С. 62–71.
14. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. РАН. — 2012. — 444. — С. 488–491.
15. Amara J. Ben, Beldi E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // SIAM J. Control Optim. — 2019. — 57, № 5. — P. 3360–3387.

16. *Amara J. Ben, Bouzidi H.* Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients// *J. Math. Phys.* — 2018. — 59, № 1. — P. 1–22.
17. *Barseghyan V. R.* Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time// *Mech. Solids.* — 2019. — 54, № 8. — P. 1216–1226.
18. *Barseghyan V. R.* The problem of boundary control of displacement at two ends by the process of oscillation of a rod consisting of two sections of different density and elasticity// *Mech. Solids.* — 2023. — 58, № 2. — P. 483–491.
19. *Barseghyan V. R.* On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// *Proc. Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (Moscow, June 1-3, 2016), 2016.* — P. 1–3.
20. *Barseghyan V. R., Barseghyan T. V.* On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions// *Automat. Remote Control.* — 2015. — 76, № 4. — P. 549–559.
21. *Barseghyan V., Solodusha S.* On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate iime// *Mathematics.* — 2022. — 10, № 23. — P. 4444.
22. *Barseghyan V., Solodusha S.* Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection form at an intermediate moment of time// *Axioms.* — 2022. — 11, № 4. — P. 157.
23. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// *Lect. Notes Comp. Sci.* — 2021. — 12755. — P. 299–313.
24. *Barseghyan V., Solodusha S.* On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// *Proc. International Russian Automation Conference (RusAutoCon) (Sochi, September 5-11, 2021).* — Sochi, 2021. — P. 343–349.
25. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021.
26. *Mercier D., Regnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler–Bernoulli beams with interior masses// *Collect. Math.* — 2009. — 60, № 3. — P. 307–334.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович (Barseghyan Vanya Rafayelovich)
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
(Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences
of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia;
Yerevan State University, Yerevan, Armenia)
E-mail: barseghyan@sci.am



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 30–36
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-30-36

УДК 519.711.3

МОДЕЛИ ОХЛАЖДЕНИЯ И ЗАМОРАЖИВАНИЯ ЖИВОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ ПЛОСКИМ ЛИНЕЙЧАТЫМ АППЛИКАТОРОМ

© 2024 г. В. К. ВУЗДОВ

Аннотация. В работе построены новые математические модели охлаждения и замораживания живой биологической ткани плоским, достаточно протяженным линейчатым аппликатором, расположенным на ее поверхности. Модели представляют собой двумерные краевые задачи (в том числе типа Стефана) и имеют приложение в криохирургии. Метод численного исследования поставленных задач, основан на сглаживании разрывных функций и применении к «сглаженным» задачам локально-одномерных разностных схем без явного выделения границы влияния холода и границ фазового перехода.

Ключевые слова: математическая модель, криомедицина, задача типа Стефана.

MODELS OF COOLING AND FREEZING OF LIVING BIOLOGICAL TISSUES WITH A FLAT RULER APPLICATOR

© 2024 В. К. BUZDOV

ABSTRACT. In this work, we construct new mathematical models of cooling and freezing of living biological tissue with a flat, long ruler applicator located on its surface. The models are two-dimensional boundary-value problems (including Stefan-type problems) and have applications in cryosurgery. The method of numerical study of these problems is based on smoothing discontinuous functions and applying locally one-dimensional difference schemes to “smoothed” problems without explicitly identifying the boundaries of the influence of cold and the boundaries of the phase transition.

Keywords and phrases: mathematical model, cryomedicine, Stefan type problem.

AMS Subject Classification: 97M60

1. Введение. Лечение холодом в медицине известно достаточно давно. Использование низких температур для охлаждения и замораживания биологической ткани применяется, в частности, при хранении и консервации биоматериалов, а также при проведении криохирургических операций. В криохирургии используются криогенные температуры в -150°C и более низкие. В отличие от консервации и хранения, цель криохирургии состоит в гибели клеток в локальном, четко ограниченном объеме биоткани, занимаемом злокачественной опухолью. Гибель клеток достигается в результате разрыва мембран, образующегося при криогенном охлаждении кристаллами льда внеклеточной и внутриклеточной воды, а также осмотического разбухания при оттаивании биоткани. Замерзание жидкости в биоткани всегда начинается во внеклеточном пространстве ($0 : -3^{\circ}\text{C}$), а при дальнейшем понижении температуры распространяется и на внутриклеточную жидкость ($-20 : -50^{\circ}\text{C}$). Основная задача криохирургии состоит в контроле за гибелью

всех злокачественных клеток в заданном объеме биологической ткани. Очевидно, что успешное развитие криохирургического метода и прогнозирование его результатов во многом зависит от достоверного описания теплового процесса замораживания биоткани, сопровождающегося фазовым переходом вода-лед. Отличительной особенностью возникающих здесь задач типа Стефана, является пространственная локализация тепла и существование стационарных решений.

Существует большое количество научных публикаций (см., например, обзор литературы в [8]), в которых рассматриваются математические модели охлаждения и замораживания живой биологической ткани. Основой их, как правило, является уравнение Пеннеса (или его незначительные модификации; см. [11]), из которого виден линейный характер зависимости источников тепла биоткани от искомого температурного поля. Такой характер зависимости не позволяет описать реально наблюдаемую пространственную локализацию тепла. Кроме того, модель Пеннеса не учитывает того факта, что замерзание межклеточной жидкости происходит гораздо раньше, чем замерзание внутриклеточной жидкости, и соответствующее этим двум процессам тепло выделяется в разные моменты времени. Известно, что при охлаждении биологической ткани в криомедицине используются криоинструменты с различными формами охлаждающей поверхности. Криоинструменты могут располагаться как на поверхности биоткани (апликаторы), так и полностью внедряться в нее (зонды). С понижением температуры охлаждающей поверхности в ткани возникает нестационарное температурное поле, зависящее в общем случае от трех пространственных координат и времени. Интерес представляют как распределение температурного поля в ткани, так и размеры зон криопоражения, замораживания и влияния холода, а также время выхода на стационар.

В предлагаемой работе построены новые математические модели охлаждения и замораживания живой биологической ткани плоским, достаточно протяженным линейчатым апликатором, располагаемым на ее поверхности. Модели учитывает указанные выше особенности, представляют собой двумерные краевые задачи с нелинейными источниками тепла специального вида и имеют приложение в криохирургии. Предложен метод численного исследования поставленных задач, основанный на сглаживании разрывных функций и применении к «сглаженным» задачам локально-одномерных разностных схем без явного выделения границы влияния холода и границ фазового перехода. Приведены некоторые численные расчеты на ЭВМ.

2. Постановка задачи. Как было сказано выше, биоткань может охлаждаться криохирургическими инструментами различной формы (плоской, цилиндрической и т. д.). Далее рассматриваются математические модели охлаждения и замораживания живой биоткани плоским протяженным линейчатым апликатором. Пренебрегая краевыми эффектами, возникающими вблизи концов, приходим к постановкам двумерных начально-краевых задач типа Стефана в прямоугольной области. Соответствующие уравнения и дополнительные условия будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \\ = -w(u) + P_1 \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_1) + P_2 \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_2), \quad x \in (-a, a), \quad y \in (0, b), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(x, y, z, 0) = \bar{u} = \text{const},$$

$$\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha u = -\alpha u_3, \quad y = 0, \quad x \in [-r_0, r_0], \quad t > 0,$$

$$\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma u = \gamma u_4, \quad y = 0, \quad x \notin [-r_0, r_0], \quad t > 0,$$

$$u(-a, y, t) = \bar{u}, \quad y \in [0, b], \quad t > 0,$$

$$u(a, y, t) = \bar{u}, \quad y \in [0, b], \quad t > 0,$$

$$u(x, b, t) = \bar{u}, \quad x \in [-a, a], \quad t > 0,$$

$$u(x, y_1(x, y), t) = u_1, \quad u(x, y_2(x, y), t) = u_2 \quad (2)$$

Здесь $\lambda(u)$, $c(u)$, $\rho(u)$ — коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности биоткани соответственно; $2r_0$ — ширина плоского криоинструмента, $u_3 = u_3(t)$ — температура его охлаждающей поверхности; u_4 — температура окружающей среды; α — коэффициент теплообмена биоткани с аппликатором на участке $[-r_0, r_0]$; γ — коэффициент теплообмена с окружающей средой; \bar{u} — температура биоткани, до которой еще не дошел холод; u_1 — температура замораживания биоткани, u_2 — температура криопоражения, P_1, P_2 — известные постоянные (их физический смысл описан ниже); $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Определению подлежит функция температуры $u = u(x, y, t)$, пара изотермических поверхностей $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ на которых температура биоткани равна, соответственно, u_1, u_2 ; а также постоянные a, b , характеризующиеся тем, что вне рассматриваемого прямоугольника температура биоткани постоянна и равна \bar{u} . Их приближенные значения можно найти из решения одномерной стационарной задачи (см. [1]).

Будем предполагать, что коэффициенты $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ могут иметь разрывы типа скачка при $u = u_1$ и $u = u_2$ так что

$$c(u) \geq c_{\min} > 0, \quad \rho(u) \geq \rho_{\min} > 0, \quad \lambda(u) \geq \lambda_{\min} > 0.$$

В случае, когда происходит «охлаждение» биоткани ($u_3 > 0$), уравнение (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -w(u), \quad x \in (-a, a), \quad y \in (0, b), \quad t > 0, \quad (3)$$

т.е. слагаемых с «дельта-функциями» не будет. В этом случае в постановке задачи также будут отсутствовать условия (2) на изотермических поверхностях. В остальном модель останется прежней.

3. Метод решения. Далее рассматривается задача для уравнения (1). Для определения приближенных значений температуры $u = u(x, y, t)$ и положения изотермических поверхностей, отвечающих значениям $u = u(x, y, t) = u_1$, $u = u(x, y, t) = u_2$ предлагается следующий алгоритм.

Введем функцию

$$H(u) = \int_0^u c(\xi) \rho(\xi) d\xi + P_1 \eta(u - u_1) + P_2 \eta(u - u_2),$$

которая при $u = u_1$ и $u = u_2$ имеет скачки соответственно P_1 и P_2 ; η — функция Хевисайда. Уравнение (1) теперь можно переписать в виде

$$\frac{\partial H(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + w(u). \quad (4)$$

Далее в (4) проводим сглаживание $H(u)$, $\lambda(u)$ по u на интервалах

$$u_1 - \bar{\delta}_k \leq u \leq u_1 + \bar{\delta}_k, \quad u_2 - \bar{\delta}_k \leq u \leq u_2 + \bar{\delta}_k,$$

где $\bar{\delta}_k \rightarrow 0$ и $\bar{\delta}_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (см. [4]). В результате получаем последовательности ограниченных гладких функций $H^k(u)$, $\lambda^k(u)$, сходящихся при $k \rightarrow +\infty$ и $u \neq u_1$, $u \neq u_2$ соответственно к $H(u)$, $\lambda(u)$, причем $B^k(u) = H_u^k(u) \geq D = \text{const} > 0$.

Задачу Стефана (1), (2) заменяем аппроксимирующей «сглаженной» задачей:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda^k(u^k) \frac{\partial u^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda^k(u^k) \frac{\partial u^k}{\partial y} \right] - B^k(u^k) \frac{\partial u^k}{\partial t} = -w(u), \quad x \in (-a, a), \quad y \in (0, b), \quad t > 0; \quad (5)$$

$$u^k(x, y, t) = \bar{u} = \text{const}, \quad x \in [-a, a], \quad y \in [0, b],$$

$$\lambda^k(u^k) \frac{\partial u^k}{\partial y} - \alpha u^k = \alpha u_3, \quad y = 0, \quad x \in [-r_0, r_0], \quad y > 0,$$

$$\lambda^k(u^k) \frac{\partial u^k}{\partial y} - \gamma u^k = \gamma u_4, \quad y = 0, \quad x \in [-\alpha, r_0] \cup [r_0, a], \quad t > 0,$$

$$u^k(-a, y, t) = \bar{u}, \quad y \in [0, b], \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned} u^k(a, y, t) &= \bar{u}, \quad y \in [0, b], \quad t > 0, \\ u^k(x, b, t) &= \bar{u}, \quad x \in [-a, a], \quad t > 0. \end{aligned}$$

Отметим, что условия (2) на изотермических поверхностях теперь содержатся в уравнении (5). Предполагая, что решение задачи (5) существует и является достаточно гладким, применим к этой задаче локально-одномерный метод, описанный в [9]. Ради простоты приведем схему локально-одномерного метода, когда задача (5) решается в прямоугольной области, хотя его можно использовать и для произвольной области G , используя лишь одно предположение: пересечение с областью G прямой L , проведенной через любую внутреннюю точку G параллельно какой-либо из осей координат, состоит из конечного числа интервалов. Введем произвольную неравномерную сетку:

$$W_h = \left\{ (x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad x_0 = -a, \quad y_0 = 0, \quad x_{N_1} = a, \quad y_{N_2} = b \right\}$$

и обозначим через $\nu_{i,j}^n$ значение искомой функции в точке (x_i, y_j) в момент времени $t_n = n\tau$. Пусть $\nu_i^{n+1/2}$ — значение искомой функции на полуслое. Будем считать, что отрезок $[-r_0, r_0]$ разбит на m узлов. Локально-одномерная схема для задачи (5) будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{2}B(\nu_{ij}^{n+1/2}) \frac{\nu_{ij}^{n+1/2} - \nu_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} + \frac{1}{2}w(\nu_{ij}^{n+1/2}), \quad (x_i, y_j) \in W_h,$$

$$\nu_{ij}^{n+1/2} = \bar{u}, \quad \text{при } i = 0, \quad i = N_1, \quad 0 < j < N_2;$$

$$\Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{h} \left[\lambda(\nu_{i+1/2}^{n+1/2}) \frac{\nu_{i+1/2}^{n+1/2} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{h} - \lambda(\nu_{i-1/2,j}^{n+1/2}) \frac{\nu_{ij}^{n+1/2} - \nu_{i-1,j}^{n+1/2}}{h} \right],$$

$$\frac{1}{2}B(\nu_{ij}^{n+1}) \frac{\nu_{ij}^{n+1} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2}w(\nu_{ij}^{n+1}), \quad (x_i, y_j) \in W_h,$$

$$\nu_{i0}^{n+1} = \frac{\lambda(\nu_{i0}^{n+1})}{\gamma h + \lambda(\nu_{i0}^{n+1})} \nu_{i1}^{n+1} + \frac{\gamma h u_4}{\gamma h + \lambda(\nu_{i0}^{n+1})}, \quad 0 < i < \frac{N_1 - m}{2}, \quad \frac{N_1 + m}{2} < i < N_1,$$

$$\nu_{i0}^{n+1} = \frac{\lambda(\nu_{i0}^{n+1})}{\alpha h + \lambda(\nu_{i0}^{n+1})} \nu_{i1}^{n+1} + \frac{\alpha h u_3}{\alpha h + \lambda(\nu_{i0}^{n+1})}, \quad \frac{N_1 - m}{2} \leq i \leq \frac{N_1 + m}{2},$$

$$\nu_{i0}^{n+1} = \bar{u}, \quad 0 < i < N_1;$$

$$\Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} = \frac{1}{h} \left[\lambda(\nu_{i,j+1/2}^{n+1}) \frac{\nu_{i,j+1}^{n+1} - \nu_{ij}^{n+1}}{h} - \lambda(\nu_{i,j-1/2}^{n+1}) \frac{\nu_{ij}^{n+1} - \nu_{i,j-1}^{n+1}}{h} \right]$$

$\nu_{ij}^0 = \bar{u}$ при $t = 0$, $0 \leq i \leq N_1$, $0 \leq j \leq N_2$. Здесь

$$\nu_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(\nu_{ij} + \nu_{i+1,j}), \quad \nu_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}(\nu_{ij} + \nu_{i,j+1}).$$

Из написанных выше уравнений видно, что для нахождения значения ν (при $t = t_i + 1$) на $(n+1)$ -м временном слое по известному значению на j -м временном слое нужно последовательно решать две серии одномерных задач, соответственно, по координатам x и y . Каждая такая задача представляет собой нелинейную алгебраическую систему с трехдиагональной матрицей, и для ее решения лучше пользоваться методом прогонки совместно с каким-либо итерационным методом. В настоящей работе использовался итерационный метод Ньютона. При определении ν^{n+1} методом итераций коэффициенты s , ρ , λ можно брать на предыдущей итерации (см. [10]).

Отличительной особенностью примененного для счета метода является возможность использования большого шага по времени, что существенно сокращает время счета при решении многомерных задач. Анализ результатов показывает, что область определения сглаживающей функции лучше выбирать так, чтобы охватывалось 2-3 счетные точки. В то же время можно сделать вывод,

что вид самой функции (т.е. порядок сглаживания) слабо влияет на результаты счета. В настоящей работе велся расчет для задачи с кусочно постоянными коэффициентами. Однако, этого требовать вовсе не обязательно, и никаких усложнений методики при этом не возникает.

Итерации, которые применяются для решения указанных выше задач, сходятся быстро (5-7 итераций).

4. Источники тепла. Как и в обычных задачах Стефана, замораживание биоткани сопровождается выделением тепла при кристаллизации сначала внеклеточной, а затем и внутриклеточной воды. Это моделируется разрывностью удельной внутренней тепловой энергии в точках $u = u_1$, $u = u_2$. Величины скачков пропорциональны плотностям внеклеточной ρ_1 и внутриклеточной ρ_2 воды: $P_1 = \rho_1 \Lambda$, $P_2 = \rho_2 \Lambda$, где Λ — удельная теплота кристаллизации воды. Сами источники сосредоточены на подлежащих определению изотермических поверхностях: $u(x, y, z, t) = u_1$, $u(x, y, z, t) = u_2$.

Далее, в связи с тем, что биоткань пронизана разветвленной сетью капилляров, снабжающей кровью охлажденную не замороженную и замороженную, но не криопораженную области биоткани, в ней возникают внутренние источники тепла. По теплофизическому смыслу функциональная зависимость этих источников тепла от температуры должна быть ограниченной, непрерывной и монотонно убывающей в интервале положительных температур, а в интервале отрицательных температур — ограниченной и монотонно возрастающей. Для существования пространственной локализации необходимым является условие $w'(\bar{u}) = -\infty$. Оно имеет следующий физический смысл: при сколь угодно малом возмущении начальной температуры биоткани в ней возникают сколь угодно малые источники, скорость нарастания которых неограниченна (см. [2]). Кроме того, необходимым условием является сходимость интеграла

$$\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \frac{\lambda(u) du}{\left(\int_u^{\bar{u}} w(u) \lambda(u) du \right)^{1/2}} < \infty.$$

Поскольку $\lambda = \lambda(u)$ — строго положительная функция, то достаточно, чтобы

$$\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \frac{du}{\left(\int_u^{\bar{u}} w(u) du \right)^{1/2}} < \infty,$$

где \underline{u} — минимальная температура биоткани.

При проведении численных расчетов на ЭВМ (см. [5–7]) хорошо зарекомендовали себя следующие функции источников тепла:

$$w_1(u) = \begin{cases} w_0(\bar{u} - u)^\beta, & u_1 \leq u < \bar{u}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad w_2(u) = \begin{cases} w_0 \ln(\bar{u} - u), & u_1 \leq u < \bar{u}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$w_3(u) = \begin{cases} w_0(\bar{u} - u)^\beta, & u_1 \leq u < \bar{u}, \\ -\frac{w_0 \bar{u}^\beta}{u_A} (u - u_A), & u_A \leq u < u_1, \\ 0 & u < u_A. \end{cases}$$

Содержащиеся в указанных зависимостях параметры w_0 и $0 < \beta < 1$ должны определяться экспериментально

5. Расчетные данные и результаты численных экспериментов. Расчеты проводились при следующих значениях теплофизических характеристик биоткани (см. [3, 5, 6]):

$$\lambda_1 = 0,56 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2,22 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}, \quad w_0 = 48,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}},$$

$$c_1 \cdot \rho_1 = 3,6 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot \text{°C}}, \quad c_2 \cdot \rho_2 = 2,01 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot \text{°C}}, \quad c_3 \cdot \rho_3 = 1,08 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot \text{°C}},$$

$$P_2 = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}, \quad P_1 = 0,3 \cdot P_2, \quad \alpha = 100 \div 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°C}},$$

$$u_3 = -90, \quad \bar{u} = 36,7.$$

Индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к охлажденной, замороженной и криопораженной области биоткани. Некоторые результаты проведенных расчетов приведены ниже в таблице 1. Расчеты проведены с использованием функции $w_1(u)$, $\beta = 0,5$, $u_4 = 20$.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов

Время (сек)	Радиус зоны криопоражения (мм)	Радиус замороженной зоны (мм)	Радиус зоны влияния холода (мм)
50	9,8	10,5	13,0
100	11,3	13,4	21,1
150	12,5	15,2	26,3
200	13,3	16,1	30,2
250	13,8	16,7	32,7
300	14,0	17,0	34,0

6. Выводы. 1. Результаты проведенных численных расчетов позволили обнаружить наличие реально наблюдаемого на практике эффекта пространственной локализации теплового поля. Кроме того, рассматриваемые модели учитывают тот факт, что замерзание межклеточной и внутриклеточной жидкости происходит при существенно различных температурах и в разные моменты времени.

2. Время выхода решения на стационар приблизительно равно 5-6 минутам.

3. Используемая методика сквозного счета с предварительным сглаживанием разрывных функций применима без изменений для численного исследования задач типа Стефана любой размерности, возникающих в криохирургии.

4. В результате счета обнаружена связь между шагами по пространству и по времени. Этот факт косвенно указывает на то, что построенные разностные схемы являются условно устойчивыми. Кроме того, численные эксперименты показали возможность выбора «большого» шага по времени (примерно на два порядка больше шага по пространству), что особенно важно при решении многомерных задач.

5. Итерационный процесс метода Ньютона сходится достаточно быстро: 5-7 итераций при выборе функций w_1 , w_2 и 3-5 итераций для функции w_3 . Однако факт сходимости не всегда имеет место. В таких случаях итерационный процесс приходится останавливать после нескольких итераций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский А. А. Одномерная локальная задача Стефана плоскопараллельной криодеструкции биологической ткани // в кн.: Задачи теплопроводности с подвижными границами. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1985. — С. 3-8.
2. Березовский А. А. Пространственная локализация криовоздействия на биологические ткани / Препринт № 87.60. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.
3. Березовский А. А., Леонтьев Ю. В. Математическое прогнозирование криовоздействия на биологические ткани // Криобиология. — 1989. — № 3. — С. 7-13.
4. Будаг Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1965. — 5. — С. 828-840.

5. Буздов Б. К. Моделирование криодеструкции биологической ткани // *Мат. модел.* — 2011. — 23, № 3. — С. 22–28.
6. Буздов Б. К. Численное исследование одной двумерной математической модели с переменным коэффициентом теплообмена, возникающей в криохирургии // *Сиб. ж. индустр. мат.* — 2017. — 20, № 4. — С. 22–28.
7. Буздов Б. К. Об одной двумерной краевой задаче типа Стефана, возникающей в криохирургии // *Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз.* — 2019. — 167. — С. 20–26.
8. Жмакин А. И. Физические основы криобиологии // *Усп. физ. наук.* — 2008. — 178, № 3. — С. 243–266.
9. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // *Ж. вычисл. мат. мат. физ.* — 1963. — 3, № 3. — С. 431–466.
10. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // *Ж. вычисл. мат. мат. физ.* — 1965. — 5, № 5. — С. 816–827.
11. Pennes H. H. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm // *J. Appl. Physiol.* — 1948. — 1. — P. 93–102.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буздов Беслан Каральбиевич (Buzdov Beslan Karal'bievich)
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик
(Institute of Informatics and Regional Management Problems
of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russia)
E-mail: beslan.buzdov@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 37–49
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-37-49

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2024 г. В. И. КОРЗЮК, Я. В. РУДЬКО

Посвящается академику Е. И. Моисееву

Аннотация. Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временной полуоси — условие третьего рода (условие Робина). Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегральных уравнений. Проводится исследование разрешимости этих уравнений, а также зависимости от начальных данных и гладкости их решений. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение. При невыполнении условий согласования строится задача с условиями сопряжения, а при недостаточно гладких данных — слабое решение.

Ключевые слова: классическое решение, смешанная задача, условия третьего рода, условия согласования, нелинейное волновое уравнение.

CLASSICAL SOLUTION OF THE THIRD MIXED PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH NONLINEAR POTENTIAL

© 2024 V. I. KORZYUK, J. V. RUDZKO

Dedicated to Academician E. I. Moiseev

ABSTRACT. For a telegraph equation with a nonlinear potential specified in the first quadrant, we consider a mixed problem with Cauchy conditions on the spatial semi-axis and a condition of the third kind (Robin's condition) on the temporal semi-axis. The solution is constructed by the method of characteristics in an implicit analytical form as a solution of some integral equations. The solvability of these equations and the dependence of their solutions on the initial data are examined. For the problem considered, the uniqueness of the solution is proved and existence conditions for classical solutions are obtained. If the matching conditions are not fulfilled, the problem with matching conditions is constructed, and if the data is not sufficiently smooth, a weak solution is constructed.

Keywords and phrases: classical solution, mixed problem, conditions of the third kind, matching conditions, nonlinear wave equation.

AMS Subject Classification: 35A01, 35A02, 35A09, 35C15, 35D99, 35L20, 35L71

1. Введение. Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными уравнениями. Выбор для описания среды линейных или нелинейных уравнений зависит от роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Например, при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля.

Линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведёт к содержательному результату. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные уравнения сохраняют применимость лишь конечное время. Даже если линеаризация нелинейных уравнений математической физики возможна, с точки зрения физики исключительно важны «существенно нелинейные» решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства (см. [12]).

Уравнения гиперболического типа занимают особое место среди нелинейных уравнений с частными производными второго порядка. «Потеря одной производной» при обращении гиперболического оператора второго порядка приводит к принципиальным трудностям при исследовании нелинейных гиперболических уравнений. Даже для создания локальной теории нелинейных гиперболических уравнений и систем потребовалось развитие специальной теории о неявных функциях в нелинейном функциональном анализе, так как классическая теорема о неявной функции из функционального анализа оказалась здесь неприменимой.

Для (существенно) квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка с числом независимых переменных больше двух вопрос о разрешимости в целом не исследован даже для задачи Коши.

Разрешимость в некоторых классах функций в целом задачи Коши, а также некоторых краевых задач установлена для широкого класса слабо нелинейных гиперболических уравнений вида

$$(\partial_t^2 - \Delta)u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \partial_t u(t, \mathbf{x}), \nabla u(t, \mathbf{x})), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

(см. [10]). Но в отличие от первой и второй смешанных задач, третьей смешанной задаче посвящено не так много работ, даже в случае достаточно хорошо изученного линейного волнового уравнения (см. [2, 18, 19, 24]), не говоря уже про нелинейные уравнения. Однако в ряде работ, посвященных третьей смешанной задаче для нелинейного уравнения (см., например [16, 20, 21, 23, 25]), строятся слабые решения, а не классические. Отметим работы [21] и [25], в первой из которых изучается задача управления для классического решения, а во второй — третья смешанная задача в классе бесконечно дифференцируемых начальных данных.

Отметим также, что нелинейные уравнения трудно изучать: почти не существует общих методов, работающих для всех таких уравнений, и обычно каждое отдельное уравнение приходится изучать как отдельную задачу.

В данной статье, используя способ, предложенный ранее в [5, 6], и представляющий собой сочетание метода характеристик с методом последовательных приближений, мы строим решение третьей смешанной задачи для неоднородного гиперболического нелинейного уравнения второго порядка, доказываем единственность и непрерывную зависимость решения от начальных данных, а также выводим условия гладкости данных задачи и необходимые и достаточные условия согласования, при которых решение смешанной задачи будет классическим. При невыполнении однородных условий согласования строится задача с условиями сопряжения на характеристике, причем одно из которых, в отличие от первой смешанной задачи (см. [5, 6]), содержит некоторую произвольную постоянную, обеспечивающую наперед заданный разрыв решения. Это означает, что одной третьей смешанной задаче в обычной формулировке будет соответствовать бесконечное множество третьих смешанных задач с условиями сопряжения на характеристике. Но в каждом конкретном случае будет существовать единственное классическое решение. Если же в задаче присутствуют недостаточно гладкие функции, то строится обобщенное слабое решение. В случае нелипшицевой нелинейности отыскивается локальное решение и доказывается его единственность.

2. Постановка задачи. В области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\square u(t, x) - f(t, x, u(t, x)) = F(t, x), \quad (1)$$

где $\square = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ — оператор Д'Аламбера ($a > 0$ для определённости), F — функция, заданная на множестве \overline{Q} , а f — функция, заданная на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует измеримая функция k ,

заданная на множестве \overline{Q} , что

$$|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2| \quad (2)$$

и такая, что ее вторая степень локально суммируема. К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (3)$$

и граничное условие

$$\partial_x u(t, 0) + \beta(t)u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (4)$$

где φ, ψ, μ и β — функции, заданные на полуоси $[0, \infty)$.

3. Интегральное уравнение. Область Q характеристикой $x - at = 0$ разделим на две подобласти $Q^{(j)} = \{(t, x) | (-1)^j(at - x) > 0\}, j = 1, 2$.

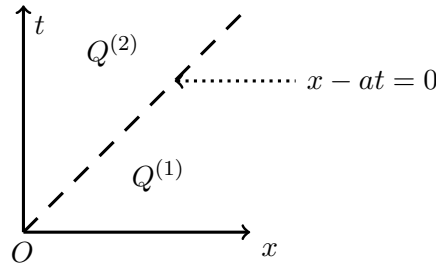


Рис. 1. Разделение области Q характеристикой $x - at = 0$ на две подобласти $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$.

В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения

$$u^{(j)}(t, x) = g^{(1,j)}(x - at) + g^{(2)}(x + at) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x-at} dy \int_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(j)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dz, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, j = 1, 2, \quad (5)$$

где $g^{(1,1)}, g^{(2)}$ и $g^{(1,2)}$ — некоторые функции, первые две из которых заданы на множестве $[0, \infty)$, а последняя — на $(-\infty, 0]$.

Определим на замыкании \overline{Q} области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ интегрального уравнения (5):

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Лемма 3.1. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), F \in C^1(\overline{Q})$. Функция $u^{(1)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(1)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (5) при $j = 1$, функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ в котором из класса $C^2([0, \infty))$.

Лемма 3.2. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), F \in C^1(\overline{Q})$. Функция $u^{(2)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(2)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (5), $j = 2$, функции $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в котором из классов $C^2((-\infty, 0])$ и $C^2([0, \infty))$ соответственно.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), F \in C^1(\overline{Q})$. Функция u принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда она для каждого $j = 1, 2$ является непрерывным решением уравнения (5), функции $g^{(1,1)}, g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в котором

из классов $C^2([0, \infty))$, $C^2((-\infty, 0])$ и $C^2([0, \infty))$ соответственно и выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} g^{(1,1)}(0) - g^{(1,2)}(0) &= 0, & Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) &= 0, \\ D^2g^{(1,1)}(0) - D^2g^{(1,2)}(0) + \frac{1}{a^2} \left(F(0, 0) + f(0, 0, g^{(1,1)}(0) + g^{(2)}(0)) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство лемм 3.1, 3.2 и теоремы 3.1 представлено в [6].

Теорема 3.2. Пусть $F \in L_1^{\text{loc}}(\overline{Q})$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$, что выполняется неравенство (2), и заданы непрерывные функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$. Тогда решения уравнений (5) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.

Замечание 3.1. В теореме 3.1 вместо условия $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ можно потребовать выполнение трех условий:

- (i) функция $f_1: \overline{Q} \ni (t, x) \mapsto f(t, x, z) \in \mathbb{R}$ измерима при любом фиксированном $z \in \mathbb{R}$;
- (ii) функция $f_2: \mathbb{R} \ni z \mapsto f(t, x, z) \in \mathbb{R}$ непрерывна на множестве \mathbb{R} для при почти любой фиксированной точки $(t, x) \in \overline{Q}$;
- (iii) верно неравенство $|f(t, x, z)| \leq \alpha(t, x) + \beta|z|$, где $\alpha \in L_1^{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Доказательства теоремы 3.2 и замечания 3.1 представлены в [5].

4. Построение решения смешанной задачи. Функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ определяем из условий Коши (3). Подставляя соотношение (5) при $j = 1$ в условия (3) получим систему уравнений относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$:

$$u^{(1)}(0, x) = \varphi(x) = g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x), \quad x \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_t u^{(1)}(0, x) = \psi(x) &= -aDg^{(1,1)}(x) + aDg^{(2)}(x) - \\ &- \frac{1}{2a} \int_0^x \left[f\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right)\right) + F\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right) \right] dy, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до x , получим

$$g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x) = \varphi(x), \quad x \geq 0,$$

$$\begin{aligned} -g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x) &= \frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + \frac{1}{2a^2} \int_0^x dz \int_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dy + 2C, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} g^{(1,1)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz - C - \\ &- \frac{1}{4a^2} \int_0^x dz \int_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dy, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

$$g^{(2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz + C +$$

$$+ \frac{1}{4a^2} \int_0^x dz \int_0^z \left[F \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) + f \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)} \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) \right) \right] dy, \quad x \geq 0, \quad (8)$$

где C — произвольная константа из множества действительных чисел. Функцию $g^{(1,2)}$ определяем из граничного условия (4). Подставляя соотношение (5) при $j = 2$ в условия (4) получим уравнение

$$- \frac{1}{2a^2} \int_0^{-at} \left[f \left(\frac{at-y}{2a}, \frac{at+y}{2}, u^{(2)} \left(\frac{at-y}{2a}, \frac{at+y}{2} \right) \right) + F \left(\frac{at-y}{2a}, \frac{at+y}{2} \right) \right] dy + \\ + \beta(t) \left(g^{(1,2)}(-at) + g^{(2)}(at) \right) + Dg^{(1,2)}(-at) + Dg^{(2)}(at) = \mu(t), \quad t \geq 0,$$

относительно функции $g^{(1,2)}$. Сделаем замену $t = -z/a$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для отыскания функции $g^{(1,2)}$

$$- \frac{1}{2a^2} \int_0^z \left[f \left(\frac{-y-z}{2a}, \frac{y-z}{2}, u^{(2)} \left(\frac{-y-z}{2a}, \frac{y-z}{2} \right) \right) + F \left(\frac{-y-z}{2a}, \frac{y-z}{2} \right) \right] dy + \\ + \beta \left(-\frac{z}{a} \right) \left(g^{(1,2)}(z) + g^{(2)}(-z) \right) + Dg^{(1,2)}(z) + Dg^{(2)}(-z) = \mu \left(-\frac{z}{a} \right), \quad z \leq 0. \quad (9)$$

Уравнения (9) относительно $g^{(1,2)}$ вместе с первым условием (7) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Решая эту задачу, получим:

$$g^{(1,2)}(x) = \exp \left(- \int_0^x \beta \left(-\frac{\xi}{a} \right) d\xi \right) \left(\frac{\varphi(0)}{2} - C + \int_0^x \exp \left(\int_0^\xi \beta \left(-\frac{\theta}{a} \right) d\theta \right) \left\{ \mu \left(\frac{\xi}{a} \right) - \right. \right. \\ - \frac{1}{4a^2} \int_0^{-\xi} \left[f \left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(1)} \left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2} \right) \right) + F \left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2} \right) \right] dy - \\ - \beta \left(-\frac{\xi}{a} \right) \left(C + \frac{1}{4a^2} \int_0^{-\xi} dz \int_0^z \left[f \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}, u^{(1)} \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2} \right) \right) + F \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2} \right) \right] dy + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^{-\xi} \psi(z) dz + \frac{\varphi(-\xi)}{2} \right) - \frac{\psi(-\xi)}{2a} - \frac{\varphi'(-\xi)}{2} + \\ \left. \left. + \frac{1}{2a^2} \int_0^\xi \left[f \left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(2)} \left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2} \right) \right) + F \left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2} \right) \right] dy \right\} d\xi \right).$$

Заметим, что, поскольку,

$$\exp \left(- \int_0^x \beta \left(-\frac{\xi}{a} \right) d\xi \right) \left(-C - \int_0^x C \beta \left(-\frac{\xi}{a} \right) \exp \left(\int_0^\xi \beta \left(-\frac{\theta}{a} \right) d\theta \right) d\xi \right) = \\ = -C \exp \left(- \int_0^x \beta \left(-\frac{\xi}{a} \right) d\xi \right) \left(1 + \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\exp \left(\int_0^\xi \beta \left(-\frac{\theta}{a} \right) d\theta \right) \right] d\xi \right) = \\ = -C \exp \left(- \int_0^x \beta \left(-\frac{\xi}{a} \right) d\xi \right) \left(1 + \exp \left(\int_0^x \beta \left(-\frac{\theta}{a} \right) d\theta \right) - 1 \right) = -C,$$

и

$$\int_0^x \exp\left(\int_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right) d\theta\right) \varphi'(-\xi) d\xi = \varphi(0) - \varphi(-x) \exp\left(\int_0^x \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right) d\theta\right) + \\ + \int_0^x \exp\left(\int_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right) d\theta\right) \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right) \varphi(-\xi) d\xi,$$

то функция $g^{(1,2)}$ может быть представлена в виде

$$g^{(1,2)}(x) = -C + \frac{\varphi(-x)}{2} + \exp\left(-\int_0^x \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi\right) \left(\int_0^x \exp\left(\int_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right) d\theta\right) \left\{ \mu\left(\frac{\xi}{a}\right) - \right. \right. \\ - \frac{1}{4a^2} \int_0^{-\xi} \left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(1)}\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right) + F\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right) \right] dy - \\ - \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right) \left(\frac{1}{4a^2} \int_0^{-\xi} dz \int_0^z \left[f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right) + F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right) \right] dy + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2a} \int_0^{-\xi} \psi(z) dz + \varphi(-\xi) \right) - \frac{\psi(-\xi)}{2a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a^2} \int_0^\xi \left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(2)}\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right) + F\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right) \right] dy \right\} d\xi \right). \quad (10)$$

Подставив формулы (8) и (10) в исходные интегральные уравнения (5), получим

$$u^{(1)}(t, x) = K^{(1)}[u^{(1)}](t, x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \\ + \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}},$$

$$u^{(2)}(t, x) = K^{(2)}[u^{(1)}, u^{(2)}](t, x) = \exp\left(-\int_0^{x-at} \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi\right) \left(\int_0^{x-at} \exp\left(\int_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right) d\theta\right) \times \right. \\ \times \left\{ \mu\left(\frac{\xi}{a}\right) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{-\xi} \left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(1)}\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right) + F\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right) \right] dy - \right. \\ - \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right) \left(\frac{1}{4a^2} \int_0^{-\xi} dz \int_0^z \left[f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right) + F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right) \right] dy + \right. \\ \left. \left. + \varphi(-\xi) + \frac{1}{2a} \int_0^{-\xi} \psi(z) dz \right) - \frac{\psi(-\xi)}{2a} + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2a^2} \int_0^\xi \left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(2)}\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right) + F\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right) \right] dy \right\} d\xi \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2a^2} \int_0^\xi \left[f \left(\frac{-\xi - y}{2a}, \frac{y - \xi}{2}, u^{(2)} \left(\frac{-\xi - y}{2a}, \frac{y - \xi}{2} \right) \right) + F \left(\frac{-\xi - y}{2a}, \frac{y - \xi}{2} \right) \right] dy \Big\} d\xi + \\
 & \quad + \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z) dz + \\
 & \quad + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x+at} dz \int_0^z \left[F \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right) + f \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}, u^{(1)} \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right) \right) \right] dy - \\
 & - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x-at} dy \int_{at-x}^{x+at} \left[F \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right) + f \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}, u^{(2)} \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right) \right) \right] dz, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Лемма 4.1. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$, $\beta \in C^1([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция $k \in L_2^{loc}(\overline{Q})$, что выполняется неравенство (2). Тогда решения $u^{(j)}$ ($j = 1, 2$) уравнений (11) существуют, единственны в классе $C^2(\overline{Q^{(j)}})$ и непрерывно зависят от функций φ , ψ и μ .

Лемма 4.1 доказывается аналогично теореме 3.2.

Таким образом, построено кусочно гладкое решение задачи (1) — (4), которое определяется формулами (11) и (6).

5. Анализ решения смешанной задачи. Чтобы функция u принадлежала множеству $C^2(\overline{Q})$, кроме требований гладкости для функций f , F , необходимо и достаточно выполнение равенств (7), согласно теореме 3.1. Вычисляя величины, которые входят в выражения (7), получаем следующие условия согласования

$$\beta(0)\varphi(0) - \mu(0) + \varphi'(0) = 0, \tag{12}$$

$$f(0, 0, \varphi(0)) + F(0, 0) + a(\varphi(0)\beta'(0) + \beta(0)\psi(0) - \mu'(0) + \psi'(0)) = 0. \tag{13}$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$, $\beta \in C^1([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция $k \in L_2^{loc}(\overline{Q})$, что выполняется неравенство (2). Третья смешанная задача (1)–(4) имеет единственное решение u , определенное формулами (6) и (11), из класса $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (12) и (13).

Доказательство теоремы 5.1 вытекает из теоремы 3.1, леммы 4.1 и проведенных выше рассуждений.

6. Неоднородные условия согласования. Теперь, подобно тому как это было сделано в [3–6, 8, 9, 11], рассмотрим задачу (1)–(4) вĖслучае, когда условия согласования (12) и (13) частично или полностью не выполняются. Но в отличие от первой смешанной задачи в третьей смешанной задаче условия согласования можно задать таким образом, что решение будет иметь произвольный наперед заданный разрыв на характеристике $x - at = 0$.

Согласно теореме 3.1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность частных производных функции u . Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 6.1. Если для заданных функций μ , φ , ψ не выполняются однородные условия согласования (12) и (13), то какими бы гладкими ни были функции f , F , β , μ , φ и ψ , задача (1)–(4) не имеет классического решения, определенного на \overline{Q} .

Доказательство утверждения вытекает из теоремы 3.1.

Пусть заданные функции уравнения (1), граничных условий (3), (4) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 5.1: $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$ и $\beta \in C^1([0, \infty))$. Так как условия согласования (12) и (13), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывными производные функции u согласно следующим выражениям:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = C^{(1)},$$

$$\begin{aligned} [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = at) &= \\ &= -a[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-](t, x = at) = a(\mu(0) - \beta(0)\varphi(0) - \varphi'(0)) + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_0^{2at} \left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) \right] dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, x = at) &= \frac{1}{2}(f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at))) - \\ &- a\left(a\beta(0)(\beta(0)\varphi(0) - \mu(0) + \varphi'(0)) + \varphi(0)\beta'(0) + \beta(0)\psi(0) - \mu'(0) + \psi'(0)\right) + \\ &+ \frac{1}{8a} \int_0^{2at} \left\{ \left[\left((\partial_t u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) \partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\left((\partial_t u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) \partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) \right] \right\} dz = \\ &= a^2[(\partial_x^2 u)^+ - (\partial_x^2 u)^-](t, x = at) + (f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at))) = \\ &= -a[(\partial_t \partial_x u)^+ - (\partial_t \partial_x u)^-](t, x = at) + \frac{1}{2}(f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at))), \quad (14) \end{aligned}$$

где $C^{(1)} = 0$. В дальнейшем при рассмотрении задачи с условиями сопряжения будем полагать, что $C^{(1)}$ — некоторая произвольная наперед заданная константа из множества действительных чисел, вообще говоря, не обязательно равная нулю. Здесь было использовано обозначение $()^\pm$ — предельные значения функции u и ее частных производных с разных сторон на характеристике $x - at = 0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^\pm(t, x = at) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta).$$

Введем обозначение $\tilde{Q} = \bar{Q} \setminus \{(t, x) \mid x - at = 0\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$, $\beta \in C^1([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция $k \in L_2^{loc}(\bar{Q})$, что выполняется неравенство (2). Третья смешанная задача (1)–(4) имеет единственное решение \tilde{u} из класса $C^2(\tilde{Q})$, которое представляется в виде

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u^{(1)}(t, x) = K^{(1)}[u^{(1)}](t, x), & (t, x) \in Q^{(1)} \cup \{(0, x) \mid x \in (0, \infty)\}, \\ u^{(2)}(t, x) = K^{(2)}[u^{(1)}, u^{(2)}](t, x) - C^{(1)}, & (t, x) \in Q^{(2)} \cup \{(t, 0) \mid t \in (0, \infty)\}, \end{cases} \quad (15)$$

где функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ заданы формулой (11), тогда и только тогда, когда выполняются условия (14).

Для доказательства теоремы 6.1 следует повторить рассуждения, которые ранее привели нас к теореме 5.1.

Теорема 6.2. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$, $\beta \in C^1([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$, что выполняется неравенство (2). Третья смешанная задача (1)–(4) имеет единственное решение \tilde{u} , определенное формулой (15), из класса $C^2(\tilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (14) и $C^{(1)} = 0$.

Доказательство. Теорема 6.2 следует фактически из теоремы 6.1 и формул (14). Действительно, если $C^{(1)} = 0$, то решение \tilde{u} на множестве $\{(t, x) \mid x - at = 0\}$ является непрерывным в силу (14). Следовательно, кроме того, что решение $\tilde{u} \in C^2(\tilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании \overline{Q} , $\tilde{u} \in C(\overline{Q})$. \square

Теорема 6.3. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$, $\beta \in C^1([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$, что выполняется неравенство (2). Третья смешанная задача (1)–(4) имеет единственное решение \tilde{u} , определенное формулой (15), из класса $C^2(\tilde{Q}) \cap C^1(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (14), $C^{(1)} = 0$ и (12).

Доказательство. Теорема 6.3 легко следует из теорем 6.1, 6.2 и формул (14), так как в этом случае \tilde{u} является непрерывным на множестве \overline{Q} , но в силу (14) имеет непрерывные производные первого порядка. \square

Замечание 6.1. Если заданные функции задачи (1)–(4) не удовлетворяют однородным условиям согласования (12) и (13), то решение задачи (1)–(4) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике $x - at = 0$.

В качестве условий сопряжения могут быть условия (14). Теперь задачу (1)–(4) можно сформулировать, используя условия сопряжения (14) следующим образом.

Задача (1)–(4) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (3), граничным условиям (4), условиям сопряжения (14).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для ее численной реализации.

7. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (1)–(4) в случае, когда функции β , f , F , μ , φ и ψ не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. Функцию u , представимую в виде (6), (11) назовем слабым решением задачи (1)–(4).

Замечание 7.1. Любое классическое решение задачи (1)–(4) является также слабым решением этой задачи.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. Пусть выполняются условия $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\varphi \in C([0, \infty))$, $\psi \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty))$, $\mu \in L_\infty^{\text{loc}}([0, \infty))$, $\beta \in L_\infty^{\text{loc}}([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$, что выполняется неравенство (2). Третья смешанная задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение u из класса $C(\tilde{Q})$.

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (11) и принадлежность их решений классу непрерывных функций фактически следует из теоремы 3.2. Корректность представления (6) следует из того факта, что $u^{(1)}(t, x = at) = u^{(2)}(t, x = at)$ исходя из формул (11). \square

Замечание 7.2. Аналогично предыдущему пункту, можно строить слабое решение задачи с условиями сопряжения.

8. Локальное решение. В предыдущих разделах настоящей работы третья смешанная задача (1) — (4) рассматривалась в предположении, что нелинейность удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори. С одной стороны, во многих разделах теоретической физики нелинейные уравнения часто имеют степенные или экспоненциальные нелинейности (см. [13, 22, 26]). Поэтому весьма важен вопрос о существовании и единственности решений таких уравнений. С другой стороны, известно, что условие типа Липшица—Каратеодори

$$|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$$

нельзя ослабить до условия типа Гёльдера

$$|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|^\alpha,$$

где $\alpha \in (0, 1)$, сохранив при этом однозначную разрешимость задачи (см. [17]). Однако условие типа Липшица—Каратеодори не является единственным допустимым условием для существования и единственности классических решений смешанных задач для нелинейных уравнений. Например, в [14] с помощью априорных оценок и принципа Лере—Шаудера построено классическое решение задачи Коши для обобщенного уравнения Лиувилля (нелинейность экспоненциального роста).

В этом разделе для любой непрерывно дифференцируемой нелинейности покажем, что третья смешанная задача (1)–(4) допускает единственное локальное классическое решение.

Введем обозначения

$$\Omega_T^{(1)} = \text{Conv} \{(0, 0), (T, a^{-1}T), (0, 2a^{-1}T)\}, \quad \Omega_T^{(2)} = \text{Conv} \{(0, 0), (T, a^{-1}T), (2T, 0)\},$$

$$\Omega_{T, T'} = \Omega_T^{(1)} \cup \Omega_{T'}^{(2)}.$$

Лемма 8.1. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\varphi \in C([0, \infty))$, $\psi \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty))$, $\mu \in L_\infty^{\text{loc}}([0, \infty))$ и $\beta \in L_\infty^{\text{loc}}([0, \infty))$. Тогда решения $u^{(j)}$ ($j = 1, 2$) уравнений (11) существуют, единственны в классах $C(\Omega_T^{(1)})$ и $C(\Omega_{T'}^{(2)})$, где $0 < T' \leq T < \infty$, соответственно и непрерывно зависят от функций φ , ψ и μ .

Доказательство. Данную теорему докажем, следуя схеме, изложенной в [7, 15]. Для определённости рассмотрим уравнение (11) для отыскания функции $u^{(1)}$. Введем множество

$$X_{m, T} = \{u \mid u \in C(\Omega_T^{(1)}) \wedge \|u\|_{C(\Omega_T^{(1)})} \leq m\}.$$

Утверждается, что если m достаточно велико, а T достаточно мало, то $K^{(1)}: X_{m, T} \mapsto X_{m, T}$. В самом деле, поскольку f непрерывная функция, то она ограничена и равномерно непрерывна на компакте $\Omega_{m, T}^{(1)} = \Omega_T^{(1)} \times [-m, m]$. Пусть $\Phi = \|f\|_{C(\Omega_{m, T}^{(1)})}$. Легко видеть, что для любых $T' < T$ и $m' < m$ верно неравенство

$$\|f\|_{C(\Omega_{m', T'}^{(1)})} \leq \Phi.$$

Введем обозначение

$$G_T = \sup_{(t, x) \in \Omega_T^{(1)}} \left| \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dy \right|. \quad (16)$$

При уменьшении T без изменения величины G_T в предыдущей формуле знак $=$ заменяется на \geq .

Теперь для $u \in X_{m, T}$ рассмотрим оценку

$$\|K^{(1)}[u^{(1)}]\|_{C(\Omega_T^{(1)})} \leq G_T + \frac{\Phi T^2}{2}.$$

Нам необходимо выполнение неравенства

$$\|K^{(1)}[u^{(1)}]\|_{C(\Omega_T^{(1)})} \leq G_T + \frac{\Phi T^2}{2} \leq m, \quad (17)$$

чтобы $K^{(1)}[u^{(1)}] \in X_{m, T}$. Параметры T и m , таковы, что неравенство (17) будет верным, могут быть найдены согласно следующему алгоритму:

- (i) Присвоить T равным любому действительному положительному числу.
- (ii) Вычислить G_T по формуле (16).
- (iii) Присвоить $m = 2G_T$ и вычислить $\Phi = \|f\|_{C(\Omega_{m,T}^{(1)})}$.
- (iv) Уменьшить T , так чтобы было верно неравенство $\leq G_T + \Phi T^2/2 \leq m = 2G_T$. Заметим, что уменьшение T оставляет в силе предыдущие неравенства.

Поскольку числа T и m выбраны такими, что неравенство (17) выполняется, то $K^{(1)}[u] \in X_{m,T}$, если, например, $u \in X_{m,T}$.

Так как f — непрерывно дифференцируемая функция, то ее частные производные ограничены на компакте $\Omega_{m,T}^{(1)}$, а тогда f удовлетворяет на этом компакте условию Липшица с некоторой постоянной L , и в таком случае верно неравенство

$$\|K^{(1)}[u_1] - K^{(1)}[u_2]\|_{C(\Omega_T^{(1)})} \leq \frac{LT^2}{2} \|u_1 - u_2\|_{C(\Omega_T^{(1)})}, \quad u_1 \in C(\Omega_T^{(1)}), \quad u_2 \in C(\Omega_T^{(1)}).$$

Снова уменьшаем T так, чтобы для любых $u_1, u_2 \in X_{m,T} \subset C(\Omega_T^{(1)})$ выполнялось неравенство

$$\|K^{(1)}[u_1] - K^{(1)}[u_2]\|_{C(\Omega_T^{(1)})} \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{C(\Omega_T^{(1)})}. \quad (18)$$

При этом неравенство (17) останется в силе.

Выберем любое $u_0 \in X_{m,T}$. Если мы рекуррентно определим

$$u_j = K^{(1)}[u_{j-1}], \quad j \in \mathbb{N},$$

то согласно доказательству теоремы Банаха о неподвижной точке (см. [15]) $u_j \rightarrow u$ в пространстве $C(\Omega_T^{(1)})$ и $u = K^{(1)}[u]$. Более того, поскольку $\|u_j\|_{C(\Omega_T^{(1)})} \leq m$, получаем $u \in X_{m,T}$. Единственность следует из неравенства (18).

Непрерывная зависимость решения от начальных данных исследуется аналогично работе [6].

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (11) относительно функции $u^{(2)}$ доказывается аналогично.

Неравенство $T' \leq T$, указанное в формулировке данной теоремы, следует из структуры оператора $K^{(2)}$, так как для определения функции $u^{(2)}$ на множестве $\Omega_{T'}^{(2)}$ необходимо задать функцию $u^{(1)}$ на множестве $\Omega_{T'}^{(1)}$, где $T \geq T'$. \square

Теорема 8.1. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$ и $\beta \in C^1([0, \infty))$. Тогда существуют такие числа $0 < T' \leq T < \infty$, что третья смешанная задача (1)–(4) имеет единственное решение u , заданное на множестве $\Omega_{T,T'}$ и определенное формулами (6) и (11), из класса $C^2(\Omega_{T,T'})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (12) и (13).

Доказательство теоремы 8.1 следует из теоремы 3.1 и леммы 8.1.

Теорема 8.2. Пусть выполняются условия $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\text{loc}}(\bar{Q})$, $\varphi \in C([0, \infty))$, $\psi \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty))$, $\mu \in L_\infty^{\text{loc}}([0, \infty))$, $\beta \in L_\infty^{\text{loc}}([0, \infty))$. Тогда существуют такие числа $0 < T' \leq T < \infty$, что третья смешанная задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение u , заданное на множестве $\Omega_{T,T'}$ и определенное формулами (6) и (11), из класса $C(\Omega_{T,T'})$.

Доказательство теоремы 8.2 следует из теоремы 7.1 и леммы 8.1.

Отметим, что условия гладкости, указанные в теореме 8.2 о существовании и единственности локального слабого решения, сильнее, чем в теореме 7.1 о существовании и единственности глобального слабого решения. Во-первых, это происходит из-за того, что теорема 8.2 не требует выполнения условия типа Липшица—Каратеодори (см. (2)), которое обеспечивает единственность решения. Вместо этого мы пользуемся фактом, что непрерывно дифференцируемая функция на компактном подмножестве евклидова пространства удовлетворяет условию Липшица. Поэтому мы вынуждены полагать $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$. Но с другой стороны, для существования (но не единственности) локального слабого решения не обязательно считать функцию f непрерывно дифференцируемой. Для построения локального слабого можно воспользоваться теоремой Шаудера, как это сделано в [1], и в таком случае функцию f можно полагать непрерывной, но остальные

условия гладкости, указанные в теореме 8.2, должны быть усилены: $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, $\mu \in C([0, \infty))$, $\beta \in C([0, \infty))$. Это связано с тем, что теорема Шаудера требует, чтобы оператор был вполне непрерывным, чего можно добиться, например, потребовав, чтобы операторы $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ переводили непрерывные функции в непрерывно дифференцируемые. Кроме того, в [17] показано, что, вообще говоря, в случае $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}) \wedge f \notin C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ смешанная задача вида (1)–(4) не имеет единственного локального решения.

Замечание 8.1. Аналогично п. 6, можно строить локальное классическое решение задачи с условиями сопряжения.

9. Заключение. В статье были сформулированы достаточные условия, при выполнении которых существует единственное классическое решение третьей смешанной задачи в четверти плоскости для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всей четверти плоскости. В случае невыполнения данных условий рассмотрена задача с условиями сопряжения на характеристиках. В случае недостаточной гладкости исходных данных построено слабое решение начальной задачи и доказана его единственность. Если нелинейность уравнения не является липшицевой, то построено локальное классическое и слабое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джохадзе О. М. Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны // Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 5. — С. 591–606.
2. Корзюк В. И., Козловская И. С. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. — Минск: БГУ, 2017.
3. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2015. — № 1. — С. 7–21.
4. Корзюк В. И., Наумовец С. Н., Сериков В. П. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2020. — 56, № 3. — С. 287–297.
5. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2023. — 43. — С. 48–63.
6. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 2. — С. 174–184.
7. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Локальное классическое решение задачи Коши для полулинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных // Мат. Междунар. науч. конф. «Уфимская осенняя математическая школа». Т. 2 (Уфа, 28 сентября–1 октября 2022). — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 48–50.
8. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 1. — С. 77–88.
9. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования // Докл. НАН Беларуси. — 2019. — 63, № 1. — С. 7–13.
10. Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1982.
11. Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Диффер. уравн. — 2014. — 50, № 10. — С. 1373–1385.
12. Прохоров А. М. Физическая энциклопедия. Т. 3. — М., 1992.
13. Фуцич В. И. Симметрия в задачах математической физики // в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике (Фуцич В. И., ред.). — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1981. — С. 6–28.
14. Харибегашвили С. С., Джохадзе О. М. 2011 // Диффер. уравн. — 47, № 12. — С. 1741–1753.
15. Evans L. C. Partial Differential Equations. — Providence: Am. Math. Soc., 2010.
16. Giai Giang Vo. A semilinear wave equation with a boundary condition of many-point type: Global existence and stability of weak solutions // Abstr. Appl. Anal. — 2015. — 2015. — 531872.
17. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. On the absence and non-uniqueness of classical solutions of mixed problems for the telegraph equation with a nonlinear potential/ arXiv: 2303.17483 [math.AP].

18. *Nesterenko Yu. R.* Mixed problem for the wave equation with Robin boundary conditions// *Dokl. Math.* — 2009. — 79, № 3. — P. 322–324.
19. *Nikitin A. A.* On the mixed problem for the wave equation with the third and first boundary conditions// *Differ. Equations.* — 2007. — 43, № 12. — P. 1733–1741.
20. *Le Thi Phuong Ngoc, Le Huu Ky Son, Nguyen Thanh Long* Existence, blow-up and exponential decay estimates for the nonlinear Kirchhoff–Carrier wave equation in an annular with Robin–Dirichlet conditions// *Kyungpook Math. J.* — 2021. — 61. — P. 859–888.
21. *Li T.* Exact boundary controllability for quasilinear wave equations// *J. Comput. Appl. Math.* — 2006. — 190. — P. 127–135.
22. *Nakayama Y.* Liouville field theory: A decade after the revolution// *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2004. — 19, № 17–18. — P. 2771–2930.
23. *Nguyen Huu Nhan, Le Thi Phuong Ngoc, Tran Minh Thuyet, Nguyen Thanh Long* A Robin–Dirichlet problem for a nonlinear wave equation with the source term containing a nonlinear integral// *Lithuan. Math. J.* — 2017. — 57, № 1. — P. 80–108.
24. *Van Horssen W. T., Wang Y., Cao G.* On solving wave equations on fixed bounded intervals involving Robin boundary conditions with time-dependent coefficients// *J. Sound Vibr.* — 2018. — 424. — P. 263–271.
25. *Wu X., Mei L., Liu C.* An analytical expression of solutions to nonlinear wave equations in higher dimensions with Robin boundary conditions// *J. Math. Anal. Appl.* — 2015. — 426, № 2. — P. 1164–1173.
26. *Xie Y., Tang J.* A unified method for solving sinh-Gordon-type equations// *Nuovo Cim.* — 2006. — 121, № 2. — P. 1373–1385.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Корзюк Виктор Иванович (Korzyuk Viktor Ivanovich)

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь;

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

(Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus);

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)

E-mail: korzyuk@bsu.by

Рудько Ян Вячеславович (Rudzko Jan Viacslavavicz)

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь;

(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)

E-mail: janyucz@yahoo.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 50–69
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-50-69

УДК 517.956.32

ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ РИМАНА РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

© 2024 г. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

Аннотация. Известным методом Римана и новым методом компенсации граничного режима правой частью уравнения получены формулы Римана единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для линейного общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Из постановки смешанной задачи, определения классических решений и установленного критерия гладкости правой части уравнения выведен её критерий корректности по Адамару. Этот критерий корректности состоит из требований гладкости и трёх условий согласования правой части уравнения, граничного и начальных данных. Подтверждена справедливость полученных формул Римана и критерия корректности тем, что доказано их совпадение с известными формулами классического решения и критерием корректности для модельного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: первая смешанная задача, телеграфное уравнение, неявная характеристика, глобальная теорема корректности, требование гладкости, условие согласования.

GENERALIZED RIEMANN FORMULAS FOR THE SOLUTION OF THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE FIRST QUADRANT

© 2024 F. E. LOMOVTSSEV

ABSTRACT. Using the well-known Riemann method and a new method for compensating the boundary regime with the right-hand side of the equation, we obtain the Riemann formulas for the unique and stable classical solution of the first mixed problem for a linear general inhomogeneous telegraph equation with variable coefficients in the first quadrant. From the formulation of the mixed problem, the definition of classical solutions, and the established criterion for the smoothness of the right-hand side of the equation, we obtain a criterion of the well-posedness in the Hadamard sense. This criterion consists of smoothness requirements and three conditions for matching the right-hand side of the equation and the boundary and initial data. The validity of the Riemann formulas and the well-posedness criterion is confirmed by their coincidence with the well-known formulas of the classical solution and the well-posedness criterion for the model telegraph equation.

Keywords and phrases: first mixed problem, telegraph equation, implicit characteristic, global correctness theorem, smoothness condition, consistency condition.

AMS Subject Classification: 35A09, 35L20

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021 г.).

1. Введение. В настоящей работе впервые явно решена и полностью изучена корректность по Адамару (существование, единственность и устойчивость) первой смешанной задачи для линейного общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости для классических решений. Выведены обобщенные формулы типа Римана её единственного и устойчивого классического решения и установлен критерий (необходимые и достаточные условия) её корректности во множестве классических решений (теорема 3.1). Этот критерий корректности состоит из требований гладкости на правую часть уравнения, граничное и начальные данные и трёх условий согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением. В настоящей статье (теорема 4.1) с помощью вычисленной функции Римана доказано, что в случае модельного телеграфного уравнения эти обобщенные формулы типа Римана и критерий корректности первой смешанной задачи из теоремы 3.1 совпадают с уже известными результатами из статьи [5]. В ней ранее автором настоящей работы были получены явные формулы классического решения, часть критерия корректности и доказана теорема существования единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. В теореме 3.1 настоящей работы вывод полного критерия корректности на правую часть телеграфного уравнения с переменными коэффициентами использует критерий корректности из [15, 16]. Результаты из [5] и настоящей работы нами распространены «методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» (см. [6]) на первую смешанную задачу для модельного и общего телеграфных уравнений с переменными коэффициентами в полуполосе плоскости в статьях [17, 18].

В работе автора [5] обобщались результаты кандидатской диссертации [1], в которой первая смешанная задача для однородного уравнения в полуполосе плоскости, периодическими продолжениями исходных данных задачи и коэффициентов уравнения при соответствующих предположениях на них заменяется задачей Коши для него в верхней полуплоскости. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для более общего ($a_1 \neq a_2$) волнового уравнения на отрезке, но с постоянными коэффициентами имеется в [7]. В этой статье введено понятие глобальных теорем корректности линейных краевых задач и с помощью леммы Цорна доказана теорема (см. [7, теорема 1]) о существовании их глобальных теорем корректности. Глобальными называются теоремы корректности краевых задач с критериями (необходимыми и достаточными условиями) их корректности по Адамару. Теорема 1 из [7] утверждает: каждая корректно поставленная линейная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных имеет глобальную теорему её корректной разрешимости по Адамару в соответствующей паре локально выпуклых топологических векторных пространств.

Результаты настоящей работы обобщают работы [3, 12–14], в которых рассматривалась первая смешанная задача для простейшего ($a = \text{const} > 0$, $b = c = 0$, $q = q(x)$) телеграфного уравнения (2.1). В диссертации [14] установлены необходимые и достаточные условия на начальные данные и только достаточные условия на правую часть уравнения для классического решения первой смешанной задачи. Согласно [3, 7] необходимые условия $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$, $t \in [0, T]$, на правую часть $f(x, t) \in C(\overline{Q})$ уравнения колебаний струны из [14] являются лишь одними из достаточных (необязательных) условий корректности первой смешанной задачи. Здесь одними из необходимых (обязательных) условий служат условия согласования $f(0, 0) = f(\pi, 0) = 0$ правой части f с нулевыми начальными и граничными данными. В статьях [12, 13] для волнового уравнения найдена формула и необходимые и достаточные условия на начальные данные для обобщенного (почти классического) решения смешанной задачи, предполагая его единственность. Это решение удовлетворяет уравнению почти всюду по x и t .

2. Постановка основной первой смешанной задачи. В первой четверти \dot{G}_∞ решить и вывести критерий корректности первой смешанной задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) + \\ + q(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

где коэффициенты уравнения a, b, c, q — вещественные функции и исходные данные задачи f, φ, ψ, μ — заданные функции своих переменных x и t . Количеством нижних индексов функций мы обозначаем порядки их соответствующих частных производных.

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве Ω , $C(\Omega)$ — множество непрерывных функций на $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и \mathbb{R}^2 — плоскость.

Определение 2.1. *Классическим решением* смешанной задачи (2.1)–(2.3) называется непрерывная ограниченная функция с непрерывными и ограниченными первыми и вторыми частными производными на $G_\infty = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, т.е. $u \in C^2(G_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (2.1) на \dot{G}_∞ в обычном смысле, а начальным условиям (2.2) и граничному режиму (2.3) в смысле значений пределов $u(\dot{x}, \dot{t})$ и её производной $u_i(\dot{x}, \dot{t})$ по \dot{t} во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, стремящихся к соответствующим граничным точкам (x, t) .

Требуется найти в явном виде классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) на \dot{G}_∞ и установить критерий корректности на правую часть f , начальные φ, ψ и граничное μ данные для ее однозначной везде разрешимости.

Из постановки этой смешанной задачи и определения 2.1 её классических решений сразу вытекают следующие необходимые условия гладкости исходных данных:

$$f \in C(G_\infty), \quad \varphi \in C^2[0, +\infty[, \quad \psi \in C^1[0, +\infty[, \quad \mu \in C^2[0, +\infty[. \quad (2.4)$$

Ниже в теореме 3.1 возьмем дополнительные необходимые и достаточные требования гладкости (3.1) на $f \in C(G_\infty)$ из [15, 16], где ищутся классические решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с минимальной гладкостью правой части.

Полагая $t = 0$ соответственно в граничном режиме (2.3), первой и второй производных по t от граничного режима (2.3), с помощью начальных условий (2.2) при $x = 0$ и уравнения (2.1) при $x = t = 0$ выводим необходимые условия согласования:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \mu(0), \quad \psi(0) = \mu'(0), \\ S \equiv f(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) - b(0, 0)\psi(0) - c(0, 0)\varphi'(0) - q(0, 0)\varphi(0) &= \mu''(0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Количеством штрихов над функциями одной переменной мы обозначаем порядки их обыкновенных производных по этой переменной.

Уравнение (2.1) на G_∞ имеет характеристические дифференциальные уравнения

$$dx = (-1)^i a(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

которым в плоскости \mathbb{R}^2 переменных x и t соответствуют два различных семейства неявных характеристик $g_i(x, t) = C_i, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$. Если коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty$, то переменная t на характеристике $g_1(x, t) = C_1, C_1 \in \mathbb{R}$, строго убывает, а на характеристике $g_2(x, t) = C_2, C_2 \in \mathbb{R}$, строго возрастает вместе с ростом x в правой плоскости Oxt . Поэтому у неявных функций $y_i = g_i(x, t), x \geq 0, t \geq 0$, существуют явные строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i, t\}, t \geq 0$, и $t = h^{(i)}[x, y_i], x \geq 0, i = 1, 2$, для которых на G_∞ выполняются следующие тождества обращения из статьи [5]:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \quad t \geq 0, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Если коэффициент $a \in C^2(G_\infty)$, то функции $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2$ по $x, t, y_i, i = 1, 2$, на G_∞ (см. [1]).

Замечание 2.1. В случае $a(x, t) = a = \text{const} > 0$ ими служат функции $g_1(x, t) = x + at, g_2(x, t) = x - at, h_1\{y_1, t\} = y_1 - at, h_2\{y_2, t\} = y_2 + at, h^{(1)}[x, y_1] = (y_1 - x)/a, h^{(2)}[x, y_2] = (x - y_2)/a$ (см. [10]).

Определение 2.2. Характеристика $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$, в которой $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty$, называется *критической* для уравнения (2.1) в первой четверти плоскости G_∞ .

Критическая характеристика разбивает четверть плоскости G_∞ на два множества

$$G_- = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) > g_2(0, 0)\}, \quad G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) \leq g_2(0, 0)\}.$$

На этих множествах первая смешанная задача (2.1)–(2.3) может иметь разные единственные согласованные классические решения и критерии корректности по Адамару. В отличие от смешанных (начально-граничных) задач, в задаче Коши обычно нет условий согласования.

3. Исследование корректности основной смешанной задачи. Если в уравнении (2.1) продолжить функцию $a(x, t)$ чётным образом на $x < 0$, то характеристики $g_i(x, t) = C_i$, $i = 1, 2$, будут заданы на верхней полуплоскости \tilde{G} плоскости Oxt .

Обобщенные формулы Римана классического решения и критерий корректности описаны в следующей теореме.

Теорема 3.1 (см. [19]). Пусть $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$. Первая смешанная задача (2.1)–(2.3) в области \dot{G}_∞ имеет единственное и устойчивое по φ, ψ, f, μ классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости (2.4),

$$H_i(x, t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

и условия согласования (2.5). Классическим решением задачи (2.1)–(2.3) в \dot{G}_∞ является функция

$$\begin{aligned} u_-(x, t) = & \frac{(auv)(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) + (auv)(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)}{2a(x, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} f(s, \tau)v(s, \tau; x, t) ds, \quad (x, t) \in G_-, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+(x, t) = & \frac{(auv)(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) - (auv)(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)}{2a(x, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; |x|, t) ds + \mu(t) - \\ & - \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; 0, t) ds, \quad (x, t) \in G_+, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где $\check{f}(x, t) = f(x, t) - f_\mu(x, t) + f^{(0)}(x, t)$, $f_\mu(x, t) = \mathcal{L}\mu(t)$, $f^{(0)}(x, t)$ – сужение на G_∞ решения системы (3.27) интегрального уравнения Вольтерра второго рода и соответствующего линейного алгебраического уравнения, а функции Римана $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t)$ – классические решения задач Гурса (3.10), (3.13) в G_- и (3.20), (3.21) в G_+ .

Доказательство. Достаточность. Сначала выведем формулы (3.2) и (3.3) формального решения задачи (2.1)–(2.3) на G_- и G_+ . Затем установим его дважды непрерывную дифференцируемость, единственность и устойчивость в нормах (3.29) и (3.30).

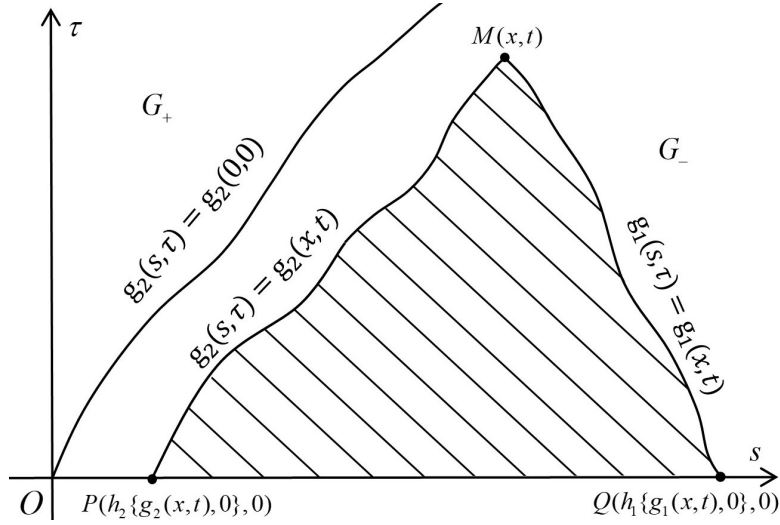


Рис. 1. Криволинейный характеристический треугольник ΔMPQ в G_- .

1. Множество G_- . Уравнение (2.1) для любых функций $u \in C^2(G_-)$ умножаем на любые функции $v \in C^2(G_-)$ и, используя очевидные равенства

$$\begin{aligned} u_{tt}v &= (u_t v)_t - u_t v_t = (u_t v)_t - (u v_t)_t + u v_{tt}, \\ a^2 u_{xx}v &= (u_x a^2 v)_x - u_x (a^2 v)_x = (u_x a^2 v)_x - (u (a^2 v)_x)_x + u (a^2 v)_{xx}, \\ bu_t v &= (ubv)_t - u (bv)_t, \quad cu_x v = (ucv)_x - u (cv)_x, \end{aligned}$$

приходим к тождеству

$$(\mathcal{L}u)v - u(\mathcal{M}v) = \frac{\partial H(u, v)}{\partial t} + \frac{\partial K(u, v)}{\partial x} \quad \forall u, v \in C^2(G_-), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}v &= v_{tt}(x, t) - (a^2(x, t)v(x, t))_{xx} - (b(x, t)v(x, t))_t - (c(x, t)v(x, t))_x + q(x, t)v(x, t), \\ H(u, v) &= u_t v - u v_t + buv = (uv)_t - u[2v_t - bv], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$K(u, v) = -u_x a^2 v + u (a^2 v)_x + cuv = -(a^2 uv)_x + u[2(a^2 v)_x + cv]. \quad (3.6)$$

Дифференциальный оператор \mathcal{M} , который является сопряженным оператором к оператору \mathcal{L} в смысле численнозначных распределений Шварца $\mathcal{D}'(G_-)$ (см. [2, 22]), обычно называют формально сопряженным оператором к оператору \mathcal{L} . В силу левой ориентации плоскости $O\tau s$ на рис. 1 по известной формуле Грина двойной интеграл от тождества (3.4) по характеристическому треугольнику ΔMPQ в G_- с любой вершиной $M(x, t) \in G_-$ и вершинами его основания $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ и $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$ равен

$$\int_{\Delta MPQ} [(\mathcal{L}u)v - u(\mathcal{M}v)] ds d\tau = \int_{\Delta MPQ} \left[\frac{\partial H(u, v)}{\partial \tau} + \frac{\partial K(u, v)}{\partial s} \right] ds d\tau = \int_{l^+} [K(u, v)d\tau - H(u, v)ds], \quad (3.7)$$

где $l^+ = QM \cup MP \cup PQ$ — контур криволинейного треугольника ΔMPQ с положительным направлением обхода.

В криволинейном интеграле (3.7) с помощью выражений (3.5), (3.6), дифференциального уравнения характеристики из (2.6) при $i = 1$ и очевидных равенств

$$(uv)_\tau a = (auv)_\tau - a_\tau uv, \quad (a^2 uv)_s (1/a) = (auv)_s - a^2 uv (1/a)_s = (auv)_s + a_s uv$$

вычисляем интеграл вдоль характеристики QM уравнения $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$:

$$\begin{aligned}
 & \int_Q^M [K(u, v)d\tau - H(u, v)ds] = \\
 & = \int_Q^M [(uv)_\tau a d\tau + (a^2uv)_s(1/a) ds] + \int_Q^M \left(u[2v_\tau - bv] ds + u[2(a^2v)_s + cv]d\tau \right) = \\
 & = \int_Q^M d(auv) + \int_Q^M \left(u[2v_\tau + (a_s - b)v] ds + u[2(a^2v)_s + (c - a_\tau)v]d\tau \right) = \\
 & = (auv)(M) - (auv)(Q) - \int_0^t u\{4av_\tau - [ab - 4a_\tau + c]v\} d\tau. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Здесь на характеристике QM при $i = 1$ мы воспользовались характеристическим дифференциальным уравнением из (2.6) и для функций $w \in C^1(G_\infty)$ новым представлением из

$$w_s(s, \tau) = (-1)^i \frac{w_\tau(s, \tau)}{a(s, \tau)}, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку на каждой из характеристик QM и MP переменные $s = s_i(\tau)$, $\tau = \tau_i(s)$ являются взаимно зависимыми, т.е. соответственно при $i = 1$ и $i = 2$ переменные $s = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$, $\tau = h^{(i)}[s, g_i(x, t)]$ согласно формулам обращения (2.7)–(2.9), то эти представления вытекают из очевидных формул первых частных производных:

$$\begin{aligned}
 w_s(s, \tau(s)) &= w_s(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} + w_\tau(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)}\tau'(s) = w_s(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} + (-1)^i w_\tau(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)}/a(s, \tau), \\
 w_\tau(s(\tau), \tau) &= w_\tau(s, \tau)|_{s=s(\tau)} + w_s(s, \tau)|_{s=s(\tau)}s'(\tau) = w_\tau(s, \tau)|_{s=s(\tau)} + (-1)^i w_s(s, \tau)|_{s=s(\tau)}a(s, \tau),
 \end{aligned}$$

так как $\tau'(s) = (-1)^i/a(s, \tau)$, $s'(\tau) = (-1)^i a(s, \tau)$, $i = 1, 2$, также ввиду формул (2.6). В последнем равенстве (3.8) для сведения криволинейного интеграла второго типа вдоль QM к обыкновенному определенному интегралу мы применили параметрическое представление кривой QM : $s = s_1(\tau) = h_1\{g_1(x, t), \tau\}$, $\tau = \tau$, $0 \leq \tau \leq t$.

Используя характеристическое уравнение из (2.6) при $i = 2$, в (3.7) аналогично берем интеграл вдоль характеристики MP с уравнением $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$:

$$\begin{aligned}
 & \int_M^P [K(u, v)d\tau - H(u, v)ds] = \\
 & = - \int_M^P [(uv)_\tau a d\tau + (a^2uv)_s(1/a) ds] + \int_M^P \left(u[2v_\tau - bv] ds + u[2(a^2v)_s + cv]d\tau \right) = \\
 & = - \int_M^P d(auv) + \int_M^P \left(u[2v_\tau - (a_s + b)v] ds + u[2(a^2v)_s + (c + a_\tau)v]d\tau \right) = \\
 & = (auv)(M) - (auv)(P) - \int_0^t u\{4av_\tau - [ab - 4a_\tau - c]v\} d\tau. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Здесь при $i = 2$ мы применили характеристическое дифференциальное уравнение из (2.6) и указанное выше представление $w_s(s, \tau) = w_\tau(s, \tau)/a(s, \tau)$. В последнем равенстве из (3.9) для сведения криволинейного интеграла второго типа вдоль характеристики MP к обыкновенному

определенному интегралу мы также воспользовались параметрическим представлением кривой MP : $s = s_2(\tau) = h_2\{g_2(x, t), \tau\}$, $\tau = \tau$, $0 \leq \tau \leq t$.

Пусть функция $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t)$ с параметрами (x, t) является классическим решением однородного формально сопряженного дифференциального уравнения

$$\mathcal{M}v(s, \tau) = 0, \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ, \quad (3.10)$$

с условиями на характеристиках QM и MP :

$$\begin{aligned} 4a(s, \tau)v_\tau(s, \tau) - [a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)]v(s, \tau) &= 0, \\ 4a(s, \tau)v_\tau(s, \tau) - [a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)]v(s, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

соответственно из определенных интегралов в (3.8) и (3.9) и условием согласования

$$v(M) = 1. \quad (3.12)$$

Условия (3.11), (3.12) равносильны двум уже согласованным условиям Гурса

$$\begin{aligned} v(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_1(s, \tau) = g_1(x, t), \\ v(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_2(s, \tau) = g_2(x, t), \quad \tau \in [0, t], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(s, \tau) &= \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)\}/4a(s, \tau) \quad \text{на кривой } QM, \\ k_2(s, \tau) &= \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)\}/4a(s, \tau) \quad \text{на кривой } MP. \end{aligned}$$

Общеизвестно, что задача Гурса (3.10), (3.13) с коэффициентами $a \in C^2(G_-)$, $b, c, q \in C^1(G_-)$ всегда имеет единственное классическое решение $v \in C^2(G_- \cap \Delta MPQ)$, которое общепринято называть функцией Римана для задачи Коши (2.1), (2.2) на G_- . В общем случае функция Римана однозначно находится методом последовательных приближений (см. [11, с. 129–135]).

В формуле (3.7) полагаем $\mathcal{L}u(s, \tau) = f(s, \tau)$, $\mathcal{M}v(s, \tau) = 0$ на треугольнике ΔMPQ , и в силу соотношений (3.10)–(3.13) согласно (3.8) и (3.9) получаем формулу решения

$$\begin{aligned} u_-(x, t) &= \frac{(auv)(P) + (auv)(Q)}{2a(x, t)} + \frac{1}{2a(x, t)} \int_P^Q [H(u, v) ds - K(u, v) d\tau] + \\ &+ \frac{1}{2a(x, t)} \int_{\Delta MPQ} f(s, \tau) v(s, \tau; x, t) ds d\tau, \quad (x, t) \in G_-. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь в интеграле по отрезку PQ , где $a \in C^2(G_-)$, $b, c \in C^1(G_-)$ и $d\tau = 0$, подынтегральные функции H и K однозначно определяются начальными условиями (2.2) (см. рис. 1). Если ещё двойной интеграл по треугольнику ΔMPQ записать в виде повторных интегралов, то в (3.14) сумма этих двух интегралов будет равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ + \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} f(s, \tau) v(s, \tau; x, t) ds, \quad (x, t) \in G_-. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Первое слагаемое из (3.14) содержит значения

$$u(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}), \quad u(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\}).$$

Формула (3.14) с интегралами (3.15) вместо двух последних интегралов становится формулой (3.2), которая обобщает формулу Римана из [11, с. 139] со скорости $a = 1$ на скорость $a(x, t)$ волны на полупрямой $x \geq 0$ носителя данных φ и ψ .

Теперь убедимся в дважды непрерывной дифференцируемости функции (3.2) на G_- . Если коэффициенты $a \in C^2(G_-)$, $b \in C^1(G_-)$, то требований $\varphi \in C^2[0, +\infty[$, $\psi \in C^1[0, +\infty[$ из (2.4) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости первых двух слагаемых с интегралом по отрезку PQ в (3.2) на G_- , так как существует единственная функция Римана $v \in C^2(G_- \cap \Delta MPQ)$ (см. [11, с. 129–135]. Для $f \in C(G_\infty)$ достаточность гладкости (3.1) для дважды непрерывной дифференцируемости на G_- последнего интеграла в (3.2) следует, например, из достаточности требований (3.1) на f для существования единственного классического решения задачи Коши (2.1), (2.2) на G_- в теореме 2 из [5].

2. Множество G_+ . Пусть \hat{a} , \hat{b} , \hat{q} , \hat{f} — чётные продолжения и \tilde{c} — нечётное продолжение по x коэффициентов a , b , c , q и правой части f уравнения (2.1) на все $x < 0$. В верхней полуплоскости $\tilde{G} = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ ищем решение \tilde{u} задачи Коши

$$\hat{\mathcal{L}}\tilde{u}(x, t) \equiv \tilde{u}_{tt} - \hat{a}^2(x, t)\tilde{u}_{xx} + \hat{b}(x, t)\tilde{u}_t + \tilde{c}(x, t)\tilde{u}_x(x, t) + \hat{q}(x, t)\tilde{u} = \hat{f}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[, \quad (3.17)$$

где $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ — нечётные продолжения соответственно $\varphi \in C^2[0, +\infty[$, $\psi \in C^1[0, +\infty[$ на $x < 0$,

$$\hat{f}(x, t) = \hat{f}(x, t) - \hat{f}_\mu(x, t) + \hat{f}^{(0)}(x, t), \quad \hat{\mathcal{L}}\mu(t) = \hat{f}_\mu(x, t)$$

и правило выбора чётной по x функции $\hat{f}^{(0)}(x, t)$ будет указано ниже. Если $f \in C(G_\infty)$, то, очевидно, $\hat{f} \in C(\tilde{G})$. В формуле решения u_+ первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) этих продолжений не будет.

Если из обеих частей уравнения (3.16) вычтем слагаемое $\tilde{c}(x, t)\tilde{u}_x(x, t)$, то придём к уравнению вида (3.16) с коэффициентом $\tilde{c}(x, t) \equiv 0$ и новой правой частью

$$\hat{f}(x, t) = \hat{f}(x, t) - \tilde{c}(x, t)\tilde{u}_x(x, t) \in C(G_\infty),$$

в котором вычитаемое $c(x, t)u_x(x, t) \in C^1(G_\infty)$ непрерывно дифференцируемо и поэтому оно удовлетворяет интегральным требованиям гладкости (3.1) на G_∞ . Благодаря линейности этой задачи Коши её решение представимо в виде суммы $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}_0(x, t) + \tilde{u}_1(x, t)$ решения \tilde{u}_0 задачи Коши (3.16), (3.17) при $\hat{f} = 0$, $\tilde{\varphi} \neq 0$, $\tilde{\psi} \neq 0$ и решения \tilde{u}_1 задачи Коши (3.16)–(3.17) при $\hat{f} \neq 0$, $\tilde{\varphi} \equiv 0$, $\tilde{\psi} \equiv 0$. Первая задача Коши на G_∞ с граничным режимом (2.3) при $\mu = 0$ становится первой смешанной задачей (2.1)–(2.3) на G_∞ . С одной стороны, по теореме 2 статьи [5] существует единственное классическое решение $\tilde{u}_0 \in C^2(G_\infty)$ этой первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) на G_∞ . Первая задача Коши на G_∞ равносильна этой первой смешанной задаче на G_∞ , так как решение первой задачи Коши по формуле (4) из [20], т.е. по формуле (3.2) из теоремы 3.1, но с крышками над a , b , v , равно $\tilde{u}_0(0, t) = 0$, $t \geq 0$ (см. [11, с. 68–69]). Ниже перед леммой 3.1 показано, что характеристические треугольники ΔMPQ с вершинами $M(0, t)$, $t \geq 0$, на оси Ot являются «криволинейными» равнобедренными. Следовательно, вершины P и Q основания PQ треугольника ΔMPQ симметричны относительно оси Ot , начальные данные $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ нечётны по x , функции \hat{a} , \hat{b} , \hat{v} чётны по s и поэтому первые два слагаемых в (3.2) обращаются в ноль. Третье слагаемое в формуле (3.2) вида двойного повторного интеграла по ΔMPQ при $f = \hat{f} = 0$ тоже равно нулю.

Из условий согласования (2.5) при $\tilde{c} \equiv 0$, $\hat{f} = 0$, $\mu = 0$ для \tilde{u}_0 на G_∞ выводим условия

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (3.18)$$

Известно, что начальные данные $\varphi \in C^2[0, +\infty[$, $\psi \in C^1[0, +\infty[$ с условиями (3.18) всегда допускают на $x < 0$ гладкие нечётные продолжения $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$. Это следует из [1, лемма 1]. Действительно, из нечётности по x продолжений $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ следует их непрерывность при $x = 0$, так как $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ в (3.18). Производные $\tilde{\varphi}'(x)$, $\tilde{\psi}'(x)$ от этих нечётных начальных данных чётны и, следовательно, непрерывны при $x = 0$. Непрерывность второй производной $\tilde{\varphi}''(x)$ при

$x = 0$ обеспечивает её нечётность по x и значение $\varphi''(0) = 0$ из (3.18). Поэтому, с другой стороны, первая задача Коши для уравнения (3.16)) с $\tilde{c} \equiv 0$ и $\hat{f} \equiv 0$ при начальных данных $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ в (3.17) на \tilde{G} имеет единственное решение $\tilde{u}_0 \in C^1(\tilde{G})$ (см. [20]). Действительно, нечётная по x функция $\tilde{u}_0(x, t)$ непрерывна на \tilde{G} , так как $\tilde{u}_0(0, t) = 0$, и чётная по x её производная $(\tilde{u}_0)_x(x, t)$ всегда непрерывна на \tilde{G} . Для сокращения доказательства теоремы 3.1 можно было бы положить коэффициент $\tilde{c} \equiv 0$ в (3.16).

Другая задача Коши при $\hat{f} \neq 0$, $\tilde{\varphi} \equiv 0$, $\tilde{\psi} \equiv 0$ на \tilde{G} , очевидно, имеет единственным классическим решением двойной интеграл $\hat{u}_1(x, t) = \hat{F}(x, t) \in C^2(G_\infty)$ из [20] при $f = \hat{f}$:

$$\hat{F}(x, t) = \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_{\Delta MPQ} \hat{f}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau) ds d\tau = \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \hat{f}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau) ds,$$

удовлетворяющий однородным начальным данным $\tilde{\varphi} = 0$, $\tilde{\psi} = 0$, потому что этот двойной интеграл и его первая производная по t при $t = 0$ равны $\hat{F}(x, 0) = 0$, $\hat{F}_t(x, 0) = 0$. Чётность по x этого интеграла \hat{F} подтверждается чётностью по x коэффициента \hat{a} , чётностью по s его подинтегральной функции и равнобедренностью «криволинейных» характеристических треугольников ΔMPQ с вершинами $M(0, t)$, $t \geq 0$, на оси Ot . Ниже в лемме 3.1 будет показана чётность по s функции Римана $\hat{v} = \hat{v}(s, \tau)$ на \tilde{G} . Таким образом, четное по x решение $\hat{u}_1(x, t) = \hat{F}(x, t)$ всегда непрерывно по x на \tilde{G} , т.е. $\hat{u}_1 \in C(G_\infty)$. Более того, согласно теореме 2 из [5] при $\varphi = \psi = 0$, $\mu(t) = \hat{F}(0, t) \in C^2[0, +\infty[$ решение \hat{F} дважды непрерывно дифференцируемо в первой четверти $\hat{u}_1(x, t) = \hat{F}(x, t) \in C^2(G_\infty)$, а в силу его четности по x и во второй четверти плоскости (см. ниже предисловие к замечанию 3.1). Здесь применение теоремы 2 на G_∞ из [5] основано на справедливости не только первых двух, но и третьего условия согласования из (2.5) при $\varphi = \psi = 0$, $f = \hat{f} \neq 0$, $c \neq 0$ и $\mu \neq 0$, а также интегральных требований гладкости (3.1) на f . От переноса слагаемого $\tilde{c}\tilde{u}_x$ из левой части уравнения (3.16) в его правую часть это уравнение фактически не меняется. В дальнейшем мы увидим, что на гладкость правой части f уравнения (2.1) дополнительные слагаемые $-f_\mu$, $f^{(0)}$ правой части \hat{f} уравнения (3.16) фактически не влияют, потому что в процессе решения смешанной задачи (2.1)–(2.3) нашим новым методом компенсации они сокращаются (аннулируются).

В итоге, мы нашли суммарное решение $\check{u}(x, t) = \tilde{u}_0(x, t) + \hat{u}_1(x, t) \in C(\tilde{G})$, $C^2(G_\infty)$ вспомогательной задачи Коши (3.16), (3.17) на \tilde{G} . Отсюда и из чётности по x продолжений коэффициентов \hat{a} , \hat{b} , \hat{q} и правой части \hat{f} на все $x < 0$ также следует, что во второй четверти плоскости это классическое решение $\check{u} \in C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$ (см. ниже замечание 3.2).

Интегрируя аналог тождества (3.4) для любых \tilde{u} , $\hat{v} \in C^2(G_\infty)$, $C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$, $C(\tilde{G})$ по треугольнику ΔMPQ с любой вершиной $M(x, t) \in G_+$ в верхней полуплоскости Ost , мы имеем аналог формулы (3.4) решения задачи Коши (3.16), (3.17):

$$\begin{aligned} \check{u}(x, t) = & \frac{(\hat{a}\tilde{u}\hat{v})(P) + (\hat{a}\tilde{u}\hat{v})(Q)}{2\hat{a}(x, t)} + \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_P^Q [H(\tilde{u}, \hat{v}) ds - K(\tilde{u}, \hat{v}) d\tau] + \\ & + \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_{\Delta MPQ} \hat{f}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau; x, t) ds d\tau, \quad (x, t) \in \tilde{G} = \mathbb{R} \times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В силу единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2) на G_- функция (3.19) на G_- равна классическому решению (3.2). Аналогично множеству G_- в криволинейном интеграле по PQ формулы (3.19) подынтегральные функции H и K однозначно определяются начальными данными $\tilde{\varphi} \in C^2(\tilde{G})$, $\tilde{\psi} \in C^2(\tilde{G})$ и функцией Римана \hat{v} (см. рис. 2).

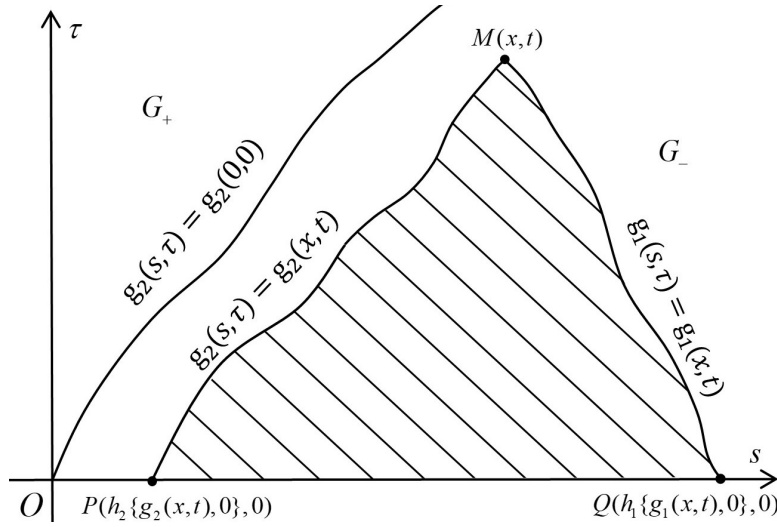


Рис. 2. Криволинейные характеристический и критический треугольники $\triangle MPQ$ и $\triangle Q'PP'$ в \tilde{G} .

Эта функция Римана на G_∞ является решением задачи Гурса:

$$\widehat{M} \hat{v}(s, \tau) \equiv \hat{v}_{\tau\tau}(s, \tau) - (\hat{a}^2(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_{ss} - (\hat{b}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_\tau - (\hat{c}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_s + \hat{q}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau) = 0, \quad (s, \tau) \in \triangle MPQ, \quad (3.20)$$

$$\hat{v}(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau \tilde{k}_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_1(s, \tau) = g_1(x, t),$$

$$\hat{v}(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau \tilde{k}_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_2(s, \tau) = g_2(x, t), \quad \tau \in [0, t], \quad (3.21)$$

аналогичной задаче Гурса (3.10), (3.13) и с функциями $\tilde{k}_1(s, \tau)$ на кривой QM и $\tilde{k}_2(s, \tau)$ на кривой MP , соответственно равными функциям $k_1(s, \tau)$ и $k_2(s, \tau)$, в которых коэффициенты a, b, q заменены на их четные продолжения $\hat{a}, \hat{b}, \hat{q}$, а коэффициент c — на нечетное продолжение \hat{c} по x с $x \geq 0$ на $x < 0$. Формально сопряженный дифференциальный оператор \widehat{M} равен оператору M с коэффициентами $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{q}$ вместо коэффициентов a, b, c, q . Задача Гурса (3.20), (3.21) имеет единственное решение $\hat{v}(s, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t)$, непрерывное на \tilde{G} и дважды непрерывно дифференцируемое на G_∞ (см. [11, с. 129–135] (см. ниже замечание 3.2).

Ввиду (2.6) в каждой фиксированной точке $M(x, t)$ тангенсы углов наклона касательных прямых к характеристикам двух семейств $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$, отличаются лишь противоположными знаками $dx/dt = (-1)^i a(x, t), i = 1, 2$, в силу чётности продолжения \hat{a} по x . Следовательно, для любых вершин $M(0, t), t > 0$, на оси $O\tau$, треугольники $\triangle MPQ$ и, в частности, треугольники $\triangle Q'PP'$ являются криволинейными «равнобедренными». Поэтому на рис. 2 характеристики $g_2(s, \tau) = C_2$ и $g_1(s, \tau) = C_1$ при $s < 0$ соответственно симметричны характеристикам $g_1(s, \tau) = C_1$ и $g_2(s, \tau) = C_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, при $s > 0$ относительно оси $O\tau$.

Покажем, что функция Римана $\hat{v} = \hat{v}(s, \tau)$ является чётной по s функцией в \tilde{G} .

Лемма 3.1. Пусть выполняются предположения теоремы 3.1. Тогда для любой вершины $M(x, t) \in G_+$ характеристического треугольника $\triangle MPQ$ решение $\hat{v}(s, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t)$ задачи Гурса (3.20), (3.21) на $\triangle MPQ$ является чётной по s функцией.

Доказательство. Главные дифференциальные части общего телеграфного уравнения (3.16) и его формально сопряженного уравнения (3.20), а ниже также модельного телеграфного уравнения (4.1) и его формально сопряженного уравнения одинаковые. Поэтому им соответствуют одни

и те же дифференциальные уравнения характеристик (2.6) и, значит, одинаковые семейства характеристик $g_i(x, t) = C_i$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, в \tilde{G} .

Для любой точки $M(x, t) \in G_+$ строим характеристический треугольник $\Delta \widetilde{MP}'\tilde{P}$ с симметричной относительно оси $O\tau$ вершиной $\widetilde{M}(-x, t) \in \tilde{G}$, вершинами основания $P'(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$, $\tilde{P}(h_2\{g_2(-x, t), 0\}, 0)$ и криволинейными сторонами $g_1(s, \tau) = g_1(-x, t)$, $g_2(s, \tau) = g_2(-x, t)$ (см. рис. 2). Докажем симметричность криволинейного треугольника $\Delta \widetilde{MP}'\tilde{P}$ треугольнику ΔMPQ относительно оси $O\tau$ строго математически. Визуально это очевидно из рис. 2. Симметричность этих треугольников относительно $O\tau$ не вызывает сомнений только для прямых характеристик, так как в этом случае симметричность вершины \tilde{P} вершине Q вытекает из замечания 2.1, а вершина P' очевидно симметрична вершине P и для кривых характеристик.

Во-первых, из указанной выше «равнобедренности» криволинейных треугольников с вершинами на оси $O\tau$, $\tau > 0$, следует взаимозаменяемость уравнений сторон-характеристик таких треугольников семейства $g_2(s, \tau) = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, на характеристики семейства $-g_1(-s, \tau) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, и уравнений сторон-характеристик семейства $g_1(s, \tau) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, на характеристики семейства $-g_2(-s, \tau) = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, в верхней полуплоскости \tilde{G} . Характеристику MP уравнения $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$ ищем в виде $-g_1(-s, \tau) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Подставляем сюда координаты точки $M(x, t)$ и находим значение постоянной $-g_1(-s, \tau) = C_1 = -g_1(-x, t)$. Отсюда для характеристик MP , \widetilde{MP}' соответственно имеем два уравнения

$$g_1(-s, \tau) = g_1(-x, t), \quad g_1(s, \tau) = g_1(-x, t),$$

из которых вытекает равенство $g_1(-s, \tau) = g_1(s, \tau)$, $s \geq 0$, т.е. чётность по s функции g_1 . Иначе говоря, характеристика \widetilde{MP}' симметрична характеристике MP относительно оси $O\tau$ в \tilde{G} (см. рис. 2). Согласно уравнениям характеристик MQ и \widetilde{MP} существуют их продолжения до пересечения с осью $O\tau$. Если характеристику MQ уравнения $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ искать в виде $-g_2(-s, \tau) = C_2$, то подставляя сюда координаты точки $M(x, t)$, имеем значение постоянной $-g_2(-s, \tau) = C_2 = -g_2(-x, t)$. Поэтому для характеристик MQ и \widetilde{MP} соответственно имеем два уравнения

$$g_2(-s, \tau) = g_2(-x, t), \quad g_2(s, \tau) = g_2(-x, t).$$

Из них следует равенство $g_2(-s, \tau) = g_2(s, \tau)$, $s \geq 0$, т.е. чётность по s функции g_2 . Итак, характеристика \widetilde{MP} симметрична характеристике MQ относительно оси $O\tau$ в \tilde{G} (см. рис. 2). В итоге, мы обосновали чётность по s характеристик уравнения (3.20) на \tilde{G} :

$$g_1(-s, \tau) = g_1(s, \tau), \quad g_2(-s, \tau) = g_2(s, \tau), \quad s, \tau \geq 0. \quad (3.22)$$

Во-вторых, в (3.21) нечётность \tilde{c} по s меняет знак слагаемого в $\tilde{c}(s, \tau)$ из \tilde{k}_1 на противоположный для выражения $-\tilde{c}(s, \tau)$ из \tilde{k}_2 и наоборот. Взаимная чётность по s одной из функций \tilde{k}_1 , \tilde{k}_2 , указанных после (3.13) (см. уравнения (3.11) и (3.21), по отношению к другой из них, вытекает из чётности \hat{a} , \hat{b} , \hat{q} , нечётности \tilde{c} по s в (3.21) и чётности по s характеристик (3.22) на \tilde{G} :

$$\tilde{k}_1(-s, \tau) = \tilde{k}_2(s, \tau), \quad \tilde{k}_2(-s, \tau) = \tilde{k}_1(s, \tau), \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ. \quad (3.23)$$

Из симметрии характеристик \widetilde{MP} , \widetilde{MP}' соответственно характеристикам MQ , MP относительно оси $O\tau$ ввиду (3.22) и (3.23) имеем чётность по s данных Гурса (3.21).

В-третьих, известен факт: производная от нечётной (чётной) функции является (чётной) нечётной функцией. Если функция \hat{v} чётна по s , то в уравнении (3.20) дифференциальный оператор \widehat{M} чётен по s на верхней полуплоскости \tilde{G} относительно оси $O\tau$, так как его коэффициенты \hat{a} , \hat{b} , \hat{q} чётны, коэффициент \tilde{c} нечётен по s на \tilde{G} и

$$\begin{aligned} (\tilde{c}(-s, \tau)\hat{v}(-s, \tau))_s &= \tilde{c}_s(-s, \tau)\hat{v}(-s, \tau) + \tilde{c}(-s, \tau)\hat{v}_s(-s, \tau) = \\ &= \tilde{c}_s(s, \tau)\hat{v}(-s, \tau) - \tilde{c}(s, \tau)\hat{v}_s(-s, \tau) = \tilde{c}_s(s, \tau)\hat{v}(s, \tau) + \tilde{c}(s, \tau)\hat{v}_s(s, \tau) = \\ &= (\tilde{c}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_s, \quad s > 0, \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Чётность по s уравнения (3.20) и данных Гурса (3.21) влечёт чётность по s единственного достаточно гладкого решения задачи Гурса (3.20), (3.21). Отсутствие чётности решения задачи Гурса (3.20), (3.21) во внутренних точках из ΔMPQ и на основании PQ противоречит чётности

по s уравнения (3.20), а на боковых сторонах MP и MQ — установленной чётности по s данных Гурса (3.21). \square

На рис. 2 в критическом треугольнике $\Delta Q'PP'$ уравнениями пунктирной линии $Q'P'$, симметричной куску характеристики $Q'P$ относительно оси $O\tau$, очевидно, служат уравнения

$$g_1(s, \tau) = g_1(-x, t), \quad s = h_1\{g_1(-x, t), \tau\}.$$

Существуют другие равносильные уравнения кривой $Q'P'$ в терминах g_1 и h_1 . В плоскости Ost неявное уравнение $g_1(s, \tau) = g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$, конечно, описывает кривую $Q'P'$, проходящую через точку Q' (см. рис. 2). Таким образом, по определению обратной функции кривая $Q'P'$ также задается явным уравнением

$$s = h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tau\}, \quad 0 \leq \tau \leq h^{(2)}[0, g_2(x, t)]. \quad (3.24)$$

Отсюда мы находим другой вид тех же координат точек $P'(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)$ и $P(-h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0), 0)$.

Выше показано, что функция (3.19) является решением $\tilde{u} \in C(\tilde{G}), C^2(G_\infty), C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$ задачи Коши (3.16), (3.17), а функция Римана $\hat{v} \in C(\tilde{G}), C^2(G_\infty)$ — чётным по s решением задачи Гурса (3.20), (3.21) на \tilde{G} (см. [11, с. 129–135]). Из её чётности по s следует $\hat{v} \in C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$. Из решения (3.19) задачи Коши на \tilde{G} выведем решение смешанной задачи (2.1)–(2.3) на G_∞ .

В формуле (3.19) за счёт нечетности начального данного $\tilde{\varphi}$ и чётности произведения $\hat{a}\hat{v}$ по s значение произведения $\hat{a}\tilde{u}\hat{v}$ в точке P равно его значению в симметричной точке P' относительно оси $O\tau$, взятому с противоположным знаком. Поэтому согласно (3.24) первое слагаемое из (3.21) совпадает с первым слагаемым формулы (3.3), в котором берутся значения функции

$$\tilde{u}(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\}), \quad \tilde{u}(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) = -\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}),$$

т.е. в первом слагаемом из (3.3) подразумевается значение функции

$$\tilde{u}(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}).$$

В формуле (3.19) интеграл по основанию PQ треугольника равен сумме трёх интегралов по отрезкам PO , OP' и $P'Q$, первые два из которых сокращаются из-за нечетности обоих начальных данных $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$, чётности по s коэффициентов \hat{a}, \hat{b} и, согласно обоснованной выше лемме 3.1, чётности по s функции Римана \hat{v} . Таким образом, интеграл по PQ формулы (3.19) при $d\tau = 0$ равен интегралу по $P'Q$ от $H(\tilde{u}, \hat{v})$ и, следовательно, второе слагаемое из (3.19) становится вторым слагаемым из (3.3) благодаря координатам точки P' из (3.24). Сужением на G_∞ последнего слагаемого из (3.19) с двойным интегралом имеем следующее слагаемое, за указанными выше, решения (3.3), так как двойной интеграл по треугольнику ΔMPQ из (3.19) совпадает с двойным повторным интегралом от произведения правой части \check{f} уравнения (3.16) на функцию Римана v с модулем $|s|$ их первой переменной s . В нём вместо двойного интеграла по треугольнику $\Delta Q'PP'$ от произведения функций \check{f} и v фактически дважды берётся двойной интеграл по треугольнику $\Delta Q'O P'$ из G_+ благодаря их четности по s .

Существование единственного классического решения \check{u} задачи (2.1)–(2.3) на G_∞ и G_+ взято из теоремы 2 статьи [5], где для него обоснована достаточность гладкости на φ, ψ, f, μ из (2.4), (3.1). В доказательстве теоремы 2 из [5] о корректности задачи (2.1)–(2.3) для общего телеграфного уравнения (2.1) используются теорема 1 из [5] для модельного телеграфного уравнения (см. ниже (4.1)), обобщение метода продолжения по параметру Шаудера (см. [4, 8, 21]) и теоремы повышения гладкости сильных решений из [8]. Метод продолжения по параметру основан на том, что линейное общее телеграфное уравнение (2.1) отличается от линейного модельного телеграфного уравнения (4.1) младшими членами, т.е. слагаемыми с первыми производными u_t, u_x и u . Поэтому при коэффициентах $a \in C^2(G_\infty), b, c, q \in C^1(G_\infty)$ гладкости (2.4), (3.1) на φ, ψ, f хватает для дважды непрерывной дифференцируемости решения (3.19) задачи Коши (3.16), (3.17) и первых трех слагаемых из (3.3) на G_+ при $x \geq 0$, так как функция Римана \hat{v} тоже дважды непрерывно дифференцируема на G_+ при $x \geq 0$ (см. [11, с. 129–135] (см. ниже замечание 3.2). В формуле (3.3) классического решения нашей задачи на G_+ отсутствуют значения продолжений $\hat{a}, \hat{b}, \tilde{c}, \hat{q}, \check{f}$ для $x < 0$, потому что эти продолжения оказались формальными благодаря знаку модуля $|s|$ в функциях $\check{f}(|s|, \tau)$ и $v(|s|, \tau)$.

Из установленной выше гладкости решения $\check{u} \in C^2(G_\infty)$ вида (3.19) задачи Коши (3.16), (3.17) на \tilde{G} следует дважды непрерывная дифференцируемость по $t \geq 0$ следа справа $\check{u}(0, t) = \lim_{x \rightarrow +0} \check{u}(x, t)$ решения (3.19) на G_+ при $x \geq 0$. Поскольку решение (3.19) этой задачи Коши на G_∞ совпадает с суммой первых трёх слагаемых из (3.3), то этот след равен

$$\begin{aligned} \check{u}(0, t) = & \frac{(a u v)(h_1\{g_1(0, t), 0\}, 0) - (a u v)(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, t)]\}, 0)}{2a(0, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(0, t)} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, t)]\}, 0}^{h_1\{g_1(0, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ & + \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; 0, t) ds, \quad (x, t) \in G_+. \end{aligned}$$

В этом следе два первых слагаемых обращаются в ноль, потому что в них $h^{(2)}[0, g_2(0, t)] = t$ согласно второй формуле обращения из (3.8) при $i = 2$. Запишем его в виде суммы

$$\check{u}(0, t) = \tilde{\Psi}(t) + \tilde{F}^{(0)}(t), \quad (3.25)$$

где функции

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(t) &= \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} [\hat{f}(s, \tau) - \hat{f}_\mu(s, \tau)] \hat{v}(s, \tau; 0, t) ds, \\ \tilde{F}^{(0)}(t) &= \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \hat{f}^{(0)}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau; 0, t) ds. \end{aligned}$$

В (3.3) в качестве чётной по x функции $\hat{f}^{(0)}$ берем значение оператора $\hat{\mathcal{L}}$ на следе:

$$\hat{\mathcal{L}} \check{u}(0, t) \equiv \check{u}_{tt}(0, t) + \hat{b}(x, t)\check{u}_t(0, t) + \hat{q}(x, t)\check{u}(0, t) = \hat{f}^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}. \quad (3.26)$$

Согласно представлению (3.25) функция $\hat{f}^{(0)}$ должна удовлетворять уравнению

$$\hat{f}^{(0)}(x, t) - \tilde{F}_{tt}^{(0)}(t) - \hat{b}(x, t)\tilde{F}_t^{(0)}(t) - \hat{q}(x, t)\tilde{F}^{(0)}(t) = \hat{\mathcal{L}}\tilde{\Psi}(t), \quad (x, t) \in \tilde{G}.$$

Здесь полагаем

$$\tilde{F}_{tt}^{(0)}(t) = \tilde{Y}(t), \quad \tilde{F}_t^{(0)}(t) = \int_0^t \tilde{Y}(\delta) d\delta, \quad \tilde{F}^{(0)}(t) = \int_0^t (t - \delta)\tilde{Y}(\delta) d\delta$$

и получаем систему интегрального уравнения Вольтерра второго рода и алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t) &= \int_0^t [(\delta - t)\hat{q}(x, t) - \hat{b}(x, t)]\tilde{Y}(\delta) d\delta + \tilde{Z}(x, t), \\ \hat{f}^{(0)}(x, t) - \tilde{Z}(x, t) &= \hat{\mathcal{L}}\tilde{\Psi}(t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Непрерывность функции $\hat{f}^{(0)}$ на \tilde{G} вытекает из уравнения (3.26) и непрерывности его коэффициентов на \tilde{G} . Из теории интегральных уравнений хорошо известно, что для непрерывной $\tilde{Z} \in C(\tilde{G})$ существует единственное непрерывное решение $\tilde{Y} \in C(\tilde{G})$ уравнения Вольтерра второго рода системы (3.27). По значению \tilde{Y} единственным образом выводятся сначала дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{F}^{(0)}(t) \in C^2[0, +\infty[$, как решение задачи Коши для уравнения $\tilde{F}_{tt}^{(0)}(t) = \tilde{Y}(t)$ с очевидными начальными условиями $\tilde{F}^{(0)}(0) = \tilde{F}_t^{(0)}(0) = 0$, и затем

единственная функция $\hat{f}^{(0)} \in C(\tilde{G})$. Находим функцию \tilde{Z} из второго алгебраического уравнения системы (3.27) и имеем её единственное решение $\{\tilde{Y}, \tilde{Z}\}$.

Итак, выше мы преобразовали все слагаемые из (3.19) в первые три слагаемые из (3.3). Вычитаем след формулы (3.19) при $x = 0$ из формулы (3.19), прибавляем граничное данное $\mu \in C^2[0, +\infty[$ и получаем классическое решение исходной задачи (2.1)–(2.3) на G_+ вида

$$u_+(x, t) = \check{u}(x, t) - \check{u}(0, t) + \mu(t) \in C^2(G_+), \quad (3.28)$$

которое совпадает с решением (3.3) на G_+ из теоремы 3.1. Выражение (3.28), очевидно, удовлетворяет уравнению (2.1) и граничному режиму (2.3) на G_+ . Единственные решения краевых задач могут иметь разные виды и формы записи.

Мы убедились в дважды непрерывной дифференцируемости функций (3.2) в G_- и (3.3) в G_+ . В теореме 1 из [5] непрерывность решений на G_- и G_+ и их частных производных до второго порядка включительно на характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ подробно и строго обоснована в случае модельного телеграфного уравнения (см. ниже уравнение (4.1)). В нашей первой смешанной задаче для общего телеграфного уравнения (2.1)–(2.3) достаточность условий согласования (2.5) для дважды непрерывной дифференцируемости функции u_- вида (3.2) в замыкании $\overline{G_-}$ множества G_- и функции u_+ вида (3.3) в G_+ на характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ можно вывести из достаточности условий согласования для модельного уравнения в теореме 1 из [5]. Во-первых, первые два наших условия согласования из (2.5) и теоремы 1 из [5] совпадают. Во-вторых, для общего телеграфного уравнения (2.1), из левой и правой частей которого вычитаем слагаемые

$$a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) + a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t), \quad b(x, t)u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t),$$

записываем третье условие согласования из теоремы 1 статьи [5] для правой части

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) = f(x, t) - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) - a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t) - \\ - b(x, t)u_t(x, t) - c(x, t)u_x(x, t) - q(x, t)u(x, t) \end{aligned}$$

и получаем третье условие согласования из (2.5) для смешанной задачи (2.1)–(2.3):

$$\begin{aligned} \mu''(0) = \tilde{S} \equiv \tilde{f}(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) + a^{-1}(0, 0)a_t(0, 0)\psi(0) + a(0, 0)a_x(0, 0)\varphi'(0) = \\ = f(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) - b(0, 0)\psi(0) - c(0, 0)\varphi'(0) - q(0, 0)\varphi(0) \equiv S. \end{aligned}$$

В доказательстве теоремы 2 статьи [5] единственность классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) на G_∞ обоснована от противного с помощью энергетического неравенства для её обобщенного сильного решения (см. [8]). Более того, в настоящей статье единственность этого классического решения задачи (2.1)–(2.3) также следует из способа получения формул Римана (3.14) и (3.19) также, как в [11, с. 139] (см. замечание 3.2).

Устойчивость классического решения u_- вида (3.1) на G_- и u_+ вида (3.3) на G_+ по φ, ψ, μ, f первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) подробно описана в [5]. При любом $0 < T < +\infty$ решение (3.2) непрерывно зависит в банаховом пространстве $X^{(1)} = C^2(G_T^-)$ от φ, ψ, f в произведении $Y^{(1)}$ банаховых пространств $C^2[0, +\infty[, C^1[0, +\infty[, \hat{C}(G_T^-)$, где множества $G_T^- = G_T \cap G_-$, $G_T = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$, с нормами из [5]:

$$\begin{aligned} \|u_-(x, t)\|_{C^2(G_T^-)} = \sup_{(x, t) \in G_T^-} \sum_{0 \leq p+j \leq 2} \left| \frac{\partial^{p+j} u(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right|, \\ \|\varphi(x)\|_{C^2[0, +\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^2 \left| \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \right|, \quad \|\psi(x)\|_{C^1[0, +\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^1 \left| \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right|, \quad (3.29) \\ \|f(x, t)\|_{\hat{C}(G_T^-)} = \sup_{(x, t) \in G_T^-} \left(|f(x, t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq p+j \leq 1} \left| \frac{\partial^{p+j} H_i(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right| \right). \end{aligned}$$

При любом $0 < T < +\infty$ решение (3.3) непрерывно зависит в банаховом пространстве $X^{(2)} = C^2(G_T^+)$ от φ, ψ, μ, f в произведении $Y^{(2)}$ банаховых пространств $C^2[0, \Upsilon_T], C^1[0, \Upsilon_T], C^2[0, T]$,

$\widehat{C}(G^T)$ с нормами из [5]:

$$\begin{aligned} \|u_+(x, t)\|_{C^2(G_T^+)} &= \max_{(x, t) \in G_T^+} \sum_{0 \leq p+j \leq 2} \left| \frac{\partial^{p+j} u(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right|, \quad \|\varphi(x)\|_{C^2[0, \Upsilon_T]} = \max_{0 \leq x \leq \Upsilon_T} \sum_{m=0}^2 \left| \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \right|, \\ \|\psi(x)\|_{C^1[0, \Upsilon_T]} &= \max_{0 \leq x \leq \Upsilon_T} \sum_{m=0}^1 \left| \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right|, \quad \|\mu(t)\|_{C^2[0, T]} = \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{m=0}^2 \left| \frac{d^m \mu(t)}{dt^m} \right|, \\ \|f(x, t)\|_{\widehat{C}(G^T)} &= \max_{(x, t) \in G^T} \left(|f(x, t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq p+j \leq 1} \left| \frac{\partial^{p+j} H_i(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right| \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_T^+ &= G^T \cap G_+, \quad \Upsilon_T = h_1 \left\{ g_1(h_2\{g_2(0, 0), T\}, T), 0 \right\}, \\ G^T &= \left\{ (x, t) \in G_\infty : g_1(x, t) \leq g_1(h_2\{g_2(0, 0), T\}, T), 0 \leq t \leq T \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того, устойчивость решения $u \in C^2(G_\infty)$ по данным φ, ψ, μ, f вытекает из его существования и единственности в силу теоремы Банаха о замкнутом графике.

Необходимость требований гладкости (2.4) и условий согласования (2.5) установлена нами перед теоремой 3.1. В [5] для зависящих от x и t функций $f(x, t) \in C(G_\infty)$ доказана необходимость (обязательность) гладкости (3.1) для дважды непрерывной дифференцируемости интеграла $F(x, t)$, которым в теореме 3.1 становятся интегралы в третьих слагаемых из (3.2) и (3.3) при функциях $v \equiv a \equiv 1$ на G_∞ . Дважды непрерывная дифференцируемость интегралов из (3.2) и (3.3), содержащих правую часть $f(x, t) \in C(G_\infty)$ не зависит от непрерывно дифференцируемых решений $v \in C^1(G_\infty \cap \Delta MPQ)$ задач Гурса (3.10), (3.13) и (3.20), (3.21) и от дважды непрерывно дифференцируемого коэффициента $a \in C^2(G_\infty)$, $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, и функций $g_i, h_i, h^{(i)}, i = 1, 2$ (см. ниже замечание 3.1). Доказательство того, что для функций $f(x, t) \in C(G_\infty)$ требования (3.1) гарантируют дважды непрерывную дифференцируемость интеграла $F \in C^2(G_\infty)$ имеется в [5]. Поэтому необходимость гладкости (3.1) на непрерывные $f \in C(G_\infty)$ следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $F \in C^2(G_\infty)$ (см. [10, 15, 16]). \square

Для непрерывной правой части $f \in C[0, +\infty[$, зависящей только от x или t , интегральные требования гладкости (3.1) автоматически выполняются (см. [10, 15, 16]).

Следствие 3.1. *Если непрерывная правая часть f зависит только от x или t , то утверждение теоремы 3.1 справедливо без требований гладкости (3.1).*

Исследования автора минимальной гладкости правой части f модельного телеграфного уравнения (см. ниже уравнение (4.1)) для дважды непрерывной дифференцируемости его частного решения $F(x, t)$ в [15, 16] указывают на то, что требования гладкости (3.1) на G_∞ выполняются для непрерывно дифференцируемых $f \in C^1(G_\infty)$ и даже тех непрерывных $f(x, t) \in C(G_\infty)$, у которых частные производные интегралов $\partial H_i(x, t)/\partial x$ по x или $\partial H_i(x, t)/\partial t$ по $t, i = 1, 2$, из (3.1) непрерывны на G_∞ (см. следствие 3.2). Поэтому такая же справедливость гладкости (3.1) распространяется на коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty, a \in C^2(G_\infty)$, функции $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2(G_\infty), i = 1, 2$, и функцию Римана $v(s, \tau) \in C^2(G_\infty)$.

Замечание 3.1. В теореме 3.1 для непрерывной правой части $f \in C(G_\infty)$ гладкость (3.1) равносильна гладкости (см. [5, 15, 16]):

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2. \quad (3.31)$$

Следствие 3.2. *В теореме 3.1 принадлежность интегралов (3.1) и интегралов (3.31) из предыдущего замечания 3.1 множеству $C^1(G_\infty)$ равносильна их принадлежности множеству $C^{(0,1)}(G_\infty)$ или множеству $C^{(1,0)}(G_\infty)$, где $C^{(0,1)}(G_\infty)$ ($C^{(1,0)}(G_\infty)$) – множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по x и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по t функций в первой четверти плоскости G_∞ (см. [15, 16]).*

Замечание 3.2. Используя соответственно чётность и нечётность по x продолжений коэффициентов $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$ уравнения (2.1) и дополнительные предположения $a_x(0, t) = 0$, $b_x(0, t) = 0$, $c(0, t) = 0$, $q_x(0, t) = 0$, $t \geq 0$, можно аналогичными рассуждениями из доказательства теоремы 3.1 показать $\hat{a} \in C^2(\tilde{G})$, $\hat{b} \in C^1(\tilde{G})$, $\hat{c} \in C^1(\tilde{G})$, $\hat{q} \in C^1(\tilde{G})$. При таких коэффициентах вспомогательная задача Коши (3.16), (3.17) имеет единственное классическое решение $\check{u} \in C^2(\tilde{G})$ и задача Гурса (3.20), (3.21) — функцию Римана $\hat{v} \in C^2(\tilde{G})$. Такая гладкость функций \check{u} , \hat{v} избыточна для решения $u \in C^2(G_\infty)$ задачи (2.1)–(2.3) на G_∞ .

4. Модельная первая смешанная задача. Из теоремы 3.1 вывести классическое решение и критерий корректности первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}u(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) - \\ - a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t) = \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \end{aligned} \quad (4.1)$$

при начальных условиях (2.2) и граничном режиме (2.3).

Так же, как и выше, из постановки смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) и определения 2.1 следуют необходимые условия гладкости (2.4) исходных данных и условия согласования:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \mu(0), \quad \psi(0) = \mu'(0), \\ \tilde{S} \equiv \tilde{f}(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) + a^{-1}(0, 0)a_t(0, 0)\psi(0) + a(0, 0)a_x(0, 0)\varphi'(0) = \mu''(0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Найдём формулы классического решения и критерий корректности по Адамару первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) из формул Римана (3.2), (3.3) и критерия корректности первой смешанной задачи (2.1)–(2.3), полученных нами выше в теореме 3.1.

Теорема 4.1. [5]. Пусть коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. Первая смешанная задача (4.1), (2.2), (2.3) в \dot{G}_∞ имеет единственное и устойчивое по φ , ψ , \tilde{f} , μ классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (2.4), (3.1) при $f = \tilde{f}$ и условия согласования (4.2). Этим классическим решением задачи (4.1), (2.2), (2.3) в \dot{G}_∞ является функция

$$\begin{aligned} \hat{u}_-(x, t) = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)} d\nu + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(s, \tau)}{a(s, \tau)} ds, \quad (x, t) \in G_-, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_+(x, t) = \frac{\varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\}) - \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)} d\nu + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds + \mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)]) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} d\tau \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tau\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds, \quad (x, t) \in G_+. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Доказательство. Сначала выведем формулы (4.3), (4.4) формального решения первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) на множествах G_- и G_+ из формул Римана (3.2), (3.3).

1 Множество G_- . В случае модельного телеграфного уравнения (4.1) решением $\hat{v} \in C^2(G_\infty)$, $C(\tilde{G})$, $C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$ соответствующих задач Гурса (3.10), (3.13) на G_- и (3.20), (3.21) на G_+ из теоремы 3.1 служит функция Римана из [9]:

$$\hat{v}(s, \tau) = v(|s|, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t) = \frac{a(|x|, t)}{a(|s|, \tau)}, \quad (s, \tau) \in \tilde{G}.$$

В этом также можно убедиться подстановкой этой функции Римана в телеграфные уравнения (3.10), (3.20) и условия Гурса (3.13), (3.21) при коэффициентах $\hat{b}(s, \tau) = -\hat{a}^{-1}(s, \tau)\hat{a}_\tau(s, \tau)$, $\hat{c}(s, \tau) = -\hat{a}(s, \tau)\hat{a}_s(s, \tau)$ и $\hat{q}(s, \tau) = 0$. Других функций Римана этих задач Гурса не существует, так как решение каждой задачи Гурса единственно и задача Гурса (3.10), (3.13) на G_- — частный случай задачи Гурса (3.20), (3.21) на верхней полуплоскости \tilde{G} .

Подставляем функцию Римана $v(s, \tau) = a(|x|, t)/a(|s|, \tau)$ в решение (3.2):

$$\begin{aligned} & \frac{(auv)(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) + (auv)(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)}{2a(x, t)} = \\ & = \frac{1}{2a(x, t)} \left[a(x, t) \frac{a(s, \tau)}{a(s, \tau)} u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x, t), 0\}} + a(x, t) \frac{a(s, \tau)}{a(s, \tau)} u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x, t), 0\}} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x, t), 0\}} + u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x, t), 0\}} \right] = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})}{2}, \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \psi(s) v(s, 0) ds &= \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \psi(s) \frac{a(x, t)}{a(s, 0)} ds = \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\psi(s)}{a(s, 0)} ds, \\ \frac{-1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\varphi(s) v_\tau(s, 0) - b(s, 0) \varphi(s) v(s, 0)] ds &= \\ &= \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \varphi(s) \left[\frac{a(x, t) a_\tau(s, 0)}{a^2(s, 0)} - \frac{a^{-1}(s, 0) a_\tau(s, 0) a(x, t)}{a(s, 0)} \right] ds = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \tilde{f}(s, \tau) v(s, \tau) ds &= \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \tilde{f}(s, \tau) \frac{a(x, t)}{a(s, \tau)} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(s, \tau)}{a(s, \tau)} ds, \quad (x, t) \in G_-. \end{aligned}$$

Эти равенства указывают на то, что решение (3.2) становится решением (4.3) на G_- .

2. Множество G_+ . Вывод первых трёх слагаемых решения (4.4) из формулы Римана (3.3) аналогичен равенствам (4.5). Согласно нашему выводу формулы Римана (3.3) классического решения u_+ задачи (2.1)–(2.3) на G_+ его последний интеграл, равный значению предпоследнего двойного интеграла по $\triangle MPG$ при $x = 0$, имеет величину

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(x, t) &\equiv -\frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \tilde{f}(|s|, \tau) v(|s|, \tau; 0, t) ds = \\ &= -\frac{1}{2a(0, t)} \left(\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \tilde{f}(|s|, \tau) v(|s|, \tau; x, t) ds \right) \Big|_{x=0}, \quad (x, t) \in G_+, \end{aligned}$$

так как в (3.3) функция $\check{f} = \tilde{f}$, поскольку в [5] решение задачи (4.1), (2.2), (2.3) получено методом характеристик, а не нашим методом компенсации правой частью уравнения. Подставляем

функцию $v(|s|, \tau) = a(|x|, t)/a(|s|, \tau)$ и меняем порядок интегрирования:

$$-\frac{a(0, t)}{2a(0, t)} \left(\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \left(\int_0^t d\tau \int_{h_1\{g_1(x, t), \tau\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds \right) \Big|_{x=0}.$$

Сначала во внешнем повторном интеграле делаем замену переменной интегрирования

$$\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)], \quad \tau \geq 0, \quad (4.6)$$

и приходим к повторному двойному интегралу

$$\mathfrak{U}(x, t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} d\tilde{\tau} \left(\int_{h_1\{g_1(x, t), \tau\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds \right) \Big|_{x=0}, \quad (4.7)$$

так как внешний нижний предел интегрирования равен $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{x=0, \tau=0} = \tau|_{\tau=0} = 0$ по второму тождеству обращения из (2.8) при $i = 2$, внешний верхний предел интегрирования равен $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{\tau=t} = h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$ и из тождества $h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{x=0} = \tau$, $\tau \geq 0$, в (2.8) при $i = 2$ следует равенство

$$d\tilde{\tau} = \frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]}{\partial \tau} \Big|_{x=0} d\tau = d\tau.$$

Здесь производная по τ и след при $x = 0$ коммутируют. В функции $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$ уже $x = 0$, потому что к функции $y_2 = g_2(x, t)$ обратной функцией при $x = 0$ является функция

$$t = h^{(2)}[x, y_2]|_{x=0} = h^{(2)}[0, y_2] = h^{(2)}[0, g_2(x, t)], \quad t \geq 0.$$

Итак, после замены (4.6) в интеграле $\mathfrak{U}(x, t)$ верхний предел интегрирования t внешнего повторного интеграла при $x = 0$ стал равным $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$ в (4.7). Поэтому во внутреннем повторном интеграле из $\mathfrak{U}(x, t)$ замена (4.6) при $x = 0$ равносильна замене t на $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$. Кроме того, во внутреннем повторном интеграле из (4.7) замена (4.6) при $x = 0$ равносильна замене $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{x=0} = \tau$, $\tau \geq 0$, по второй формуле обращения из (2.8) при $i = 2$. В результате этих замен находим

$$\mathfrak{U}(x, t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} d\tilde{\tau} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)], \tilde{\tau}\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tilde{\tau})}{a(|s|, \tilde{\tau})} ds, \quad (x, t) \in G_+, \quad (4.8)$$

так как по первой формуле обращения из (2.8) при $i = 2$ пределы интегрирования равны

$$h_2\{g_2(0, t), \tau\} = h_2\{g_2(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)], \tilde{\tau}\} = h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}, \\ h_1\{g_1(0, t), \tau\} = h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)], \tilde{\tau}\}.$$

В граничном данном $\mu(t)$ формулы (3.3) можно тоже заменить t на $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$, т.е. $\mu(t)$ на $\mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$. Граничное данное $\mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$ для $\mu(t) \in C^2[0, +\infty[$ и интеграл (4.8) служат классическими решениями однородного модельного телеграфного уравнения (4.1) на G_+ , так как они имеют вид слагаемого $\mathfrak{F}_2(g_2(x, t))$ для всех $\mathfrak{F}_2 \in C^2(\mathbb{R})$, общего интеграла уравнения (4.1) при $\tilde{f} = 0$ на G_∞ из [5, 15, 16].

Из теоремы 3.1 следует дважды непрерывная дифференцируемость найденных из общих формул Римана (3.2) и (3.3) решений (4.3) на G_- , (4.4) на G_+ и (4.3), (4.4) на критической характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ для первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3), а также критерий её корректности. Эта гладкость решений (4.3), (4.4) и критерий корректности задачи (4.1), (2.2), (2.3) подробно и конструктивно исследованы в [5]. Теорема доказана. \square

Замечание 4.1. При доказательстве теорем 1 и 2 в [5] была показана только достаточность требований гладкости (3.1). Их необходимость также подтверждают работы автора [15, 16]. В [1] нет формулы (4.4) решения задачи (4.1), (2.2), (2.3) на G_+ .

Следствие 4.1. Если непрерывная правая часть \tilde{f} зависит только от x или t , то утверждение теоремы 4.1 справедливо без требований гладкости (3.1).

Для непрерывной правой части $\tilde{f} \in C[0, +\infty[$, зависящей только от x или t , интегральные требования гладкости (3.1) автоматически выполняются (см. [10, 15, 16]).

Замечание 4.2. В теореме 4.1, где $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, для зависящей от x и t и непрерывной правой части $\tilde{f} \in C(G_\infty)$ гладкость (3.1) равносильна гладкости (3.31) из замечания 3.1 (см. [5, 10, 15, 16]).

Следствие 4.2. В теореме 4.1 принадлежность интегралов (3.1) и равносильных интегралов (3.31) множеству $C^1(G_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множеству $C^{(0,1)}(G_\infty)$ или множеству $C^{(1,0)}(G_\infty)$, где $C^{(0,1)}(G_\infty)$ ($C^{(1,0)}(G_\infty)$) — множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по x и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по t функций в первой четверти плоскости G_∞ ([10, 15, 16]).

5. Заключение. Получены формулы Римана (3.2), (3.3) единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ и критерий (2.4), (2.5), (3.31) корректности по Адамару первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) для общего линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Эти формулы Римана содержат неявные функции характеристик уравнения (2.1). Из формул Римана (3.2), (3.3) и критерия корректности (2.4), (2.5), (3.31) выведены уже известные формулы классического решения (4.3), (4.4) и критерий корректности (2.4), (3.31), (4.2) первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) для неоднородного модельного телеграфного уравнения со специальными переменными коэффициентами в первой четверти плоскости, которые ранее были установлены автором в [5]. Последние результаты служат подтверждением справедливости полученных формул Римана (3.2), (3.3) и критерия корректности (2.4), (2.5), (3.31) настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барановская С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Минск: БГУ, 1991.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976.
3. Корнев В. В. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 403–412.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
5. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2021. — № 1. — С. 18–38.
6. Ломовцев Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны// Тез. докл. Междунар. мат. конф. «VI Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7–10 декабря 2015 г.). — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2015. — 2. — С. 74–75.
7. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости// Весн. Гродз. дзярж. ўн-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. — 2021. — 11, № 1. — С. 68–82.
8. Ломовцев Ф. Е. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов// Диффер. уравн. — 1992. — 28, № 5. — С. 873–886.
9. Ломовцев Ф. Е. Задача Гурса для сопряжённого модельного телеграфного уравнения со скоростью $a(x, t)$ в верхней полуплоскости// Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундам. науки. — 2022. — № 4. — С. 92–102.
10. Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными. — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2017.
11. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 2004.
12. Хромов А. П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Докл. РАН. — 2019. — 484, № 1. — С. 18–20.
13. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 5. — С. 717–731.

14. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / Препринт. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1990.
15. Lomovtsev F. E. Conclusion of the smoothness criterion for the right-hand side of the model telegraph equation with the rate $a(x, t)$ by the correction method // Мат. Междунар. конф. «XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXII» (Воронеж, 3-9 мая 2021 г.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2021. — С. 284–287.
16. Lomovtsev F. E. The smoothness criterion for the classical solution to inhomogeneous model telegraph equation at the rate $a(x, t)$ on the half-line // Тр. 10 Междунар. науч. семина. AMADE-2021 (Минск, 13–17 сентября 2021 г.). — Минск: БГУ, 2022. — С. 43–53.
17. Lomovtsev F. E. Global correctness theorem of the first mixed problem for the model telegraph equation at the rate $a(x, t)$ in the half-strip of the plane // Весн. Гродз. дзярж. ўн-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. — 2021. — 11, № 3. — С. 13–26.
18. Lomovtsev F. E. Global correctness theorem to the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the segment // Пробл. физ. мат. техн. — 2022. — № 1 (50). — С. 62–73.
19. Lomovtsev F. E. Riemann formula of the classical solution to the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line // Тез. докл. Междунар. мат. конф. «VII Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 1-4 июня 2021 г.). — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2021. — С. 201–203.
20. Lomovtsev F. E. Generalized Riemann formula of the classical solution to the Cauchy problem for the general telegraph equation with variable coefficients // Мат. Междунар. конф. «XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXII» (Воронеж, 3-9 мая 2021 г.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2021. — С. 288–289.
21. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung // Math. Z. — 1934. — 38. — P. 257–282.
22. Schwartz L. Theorie des distributions. — Paris: Hermann, 1950–1951.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021 г.).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ломовцев Федор Егорович (Lomovtsev Fedor Egorovich)
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
(Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus)
E-mail: lomovcev@bsu.by



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 70–77
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-70-77

УДК 517.954

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ, ДВОЙСТВЕННОМ К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА—КИПРИЯНОВА

© 2024 г. Л. Н. ЛЯХОВ, В. А. КАЛИТВИН, М. Г. ЛАПШИНА

Аннотация. Преобразование Радона—Киприянова K_γ введено в 1998 г. В теоретических и прикладных исследованиях требуется ввести двойственное (сопряженное) к нему преобразование $K_\gamma^\#$. Доказаны теоремы об ограниченности двойственного преобразования в соответствующем подпространстве Л. Шварца основных функций и $K_\gamma^\#$ -преобразовании свертки функции g с $K_\gamma[f]$ -преобразованием при условии, что обе функции g и f принадлежат соответствующим пространствам основных функций.

Ключевые слова: преобразование Радона, преобразование Радона—Киприянова, обобщенный сдвиг Пуассона, обобщенный сдвиг смешанного типа, обобщенная свертка.

ON THE TRANSFORMATION DUAL TO THE RADON—KIPRIYANOV TRANSFORMATION

© 2024 L. N. LYAKHOV, V. A. KALITVIN, M. G. LAPSHINA

ABSTRACT. The Radon–Kipriyanov transformation K_γ was introduced in 1998. In various theoretical and applied research, the dual transformation $K_\gamma^\#$ is required. We prove theorems on the boundedness of the dual transformation in the corresponding L. Schwarz subspace of test functions and the $K_\gamma^\#$ -transformation of the convolution of a function g with the $K_\gamma[f]$ -transformation, provided that both functions g and f belong to the corresponding spaces of test functions.

Keywords and phrases: Radon transform, Radon–Kipriyanov transform, generalized Poisson shift, generalized mixed type shift, generalized convolution.

AMS Subject Classification: 44A12, 42A38

1. Некоторые представления преобразования Радона—Киприянова. В работе И. А. Киприянова и Л. Н. Ляхова [5] было введено «специальное» преобразование Радона, которое в дальнейшем получило название *преобразование Радона—Киприянова* (обозначение K_γ). Данная работа посвящена нахождению преобразования, двойственного (сопряженного) к K_γ — преобразованию в одномерном и многомерном случаях.

1.1. Определение преобразования Радона—Киприянова K_γ . В евклидовом пространстве точек \mathbb{R}_n рассмотрим полупространство

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, x') : x' = (x_2, \dots, x_n), x_1 > 0\}.$$

Функции $f = f(x)$, определенные на множестве \mathbb{R}_n^+ , для которых возможно четное продолжение по переменной x_1 в \mathbb{R}_n , сохраняющее класс своей принадлежности, назовем x_1 -четными по Киприянову. В случае непрерывно дифференцируемых функций x_1 -четность по Киприянову означает,

что

$$\left. \frac{\partial^{2m-1} f(x)}{\partial x_1^{2m-1}} \right|_{x_1=0} = 0$$

для любого натурального числа m (см. [4, с. 21]).

Через $S_{\text{ev}}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пространства Л. Шварца основных функций, состоящее из x_1 -четных по Киприянову функций.

Следуя [3], будем использовать следующее определение дельта-функции, сосредоточенной на $(n-1)$ -мерной поверхности $P(x) = 0$ в \mathbb{R}_n^+ :

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \delta(P(x)) dx = \int_{P(x)} f(x) d\Gamma,$$

где $d\Gamma$ — элемент поверхности $P(x) = 0$.

Определение 1. Преобразованием Радона–Киприянова функции f , следуя [5], будем называть следующую конструкцию:

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \Pi_{x_1}^\gamma \delta(p - \langle x, \xi \rangle) x_1^\gamma dx, \quad \gamma > 0, \quad (1)$$

где $\langle x, \xi \rangle$ — скалярное произведение n -мерных векторов, и мы полагаем, что ξ — единичный вектор нормали к плоскости (при этом $|p|$ — расстояние от начала координат до плоскости $\langle x, \xi \rangle = p$), а символ $\Pi_{x_1}^\gamma$ обозначает действие оператора Пуассона (см. [6]) по переменной x_1 :

$$\Pi_{x_1}^\gamma g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi g(x_1 \cos \alpha, x_2, \dots, x_n) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha. \quad (2)$$

1.2. *Представление K_γ -преобразования в евклидовом пространстве вращения вокруг весовой оси координат.* Раскрывая действие оператора Пуассона, получим

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) C(\gamma) \int_0^\pi \delta\left(p - \left\langle (x_1 \cos \alpha, x_2, \dots, x_n), (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \right\rangle\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha x_1^\gamma dx,$$

где

$$C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Рассмотрим евклидово полупространство $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \{(z_1, z_2, x_2, \dots, x_n), z_2 > 0\}$, которое получается из исходного полупространства \mathbb{R}_n^+ вращением $x_1 \rightarrow \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ на угол π . Следуя [8], функции $f(x)$, определенной на множестве \mathbb{R}_n^+ , поставим в соответствие функцию от вращения

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_1, z_2, x') = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x_2, \dots, x_n\right),$$

где $z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_{n+1}^+$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Функция $\tilde{f}(z)$ определена в области $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \{z : z_2 > 0\}$. Введем антиполярные координаты

$$z_1 = x_1 \cos \alpha, \quad z_2 = x_1 \sin \alpha;$$

так как $0 < \alpha < \pi$ и $x_1 > 0$, то $-\infty < z_1 < +\infty$, $0 < z_2 < +\infty$. При этом

$$x_1^{\gamma-1} \sin^{\gamma-1} \alpha = z_2^{\gamma-1}, \quad x_1 dx_1 d\alpha dx' = dz.$$

Следовательно,

$$K_\gamma[f](\xi; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \tilde{\xi} \rangle) z_2^{\gamma-1} dz. \quad (3)$$

Здесь $\langle z, \tilde{\xi} \rangle$ — скалярное произведение $(n+1)$ -мерных векторов $z = (z_1, z_2, x')$ и $\tilde{\xi} = (\xi_1, 0, \xi')$, где $\xi' = \xi_2, \dots, \xi_n$, а $p = \langle z, \tilde{\xi} \rangle$ — уравнение гиперплоскости, параллельной координатной оси Oz_2 .

Представление (3) есть представление преобразования Радона—Киприянова в виде специального весового преобразования Радона.

Воспользовавшись определением δ -функции, сосредоточенной на гиперплоскости $p = \langle z, \tilde{\xi} \rangle$, получим

$$K_\gamma[f](\xi; p) = C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \tilde{\xi} \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (4)$$

где $\{ \langle z, \tilde{\xi} \rangle = p \}^+$ — часть гиперплоскости в \mathbb{R}_{n+1}^+ , определяемая неравенством $z_2 > 0$, $d\Gamma(z)$ — элемент этой гиперплоскости. Как обычно (см. [1,2,11]), ориентация гиперплоскости $\{ \langle z, \tilde{\xi} \rangle = p \}^+$ выбрана так, чтобы она являлась границей полупространства $\{ \langle z, \tilde{\xi} \rangle < p \}^+$.

1.3. Представление K_γ -преобразования в локальных координатах касательной плоскости. Важно отметить, что указанное выше вращение евклидова пространства вокруг оси Ox_1 сводит преобразование Радона—Киприянова (1) к весовому преобразованию Радона (3) в \mathbb{R}_{n+1}^+ , представляющему собой интеграл по гиперплоскости параллельной координатной оси Oz_2 .

Принадлежность оси координат Oz_2 гиперплоскости $\langle z, \tilde{\xi} \rangle = 0$ порождает локальную систему координат, в которой одной из координатных осей является ось Oz_2 . Другие оси декартовой системы координат на этой плоскости выберем лежащими в линии пересечения гиперплоскости $z_2 = 0$ с гиперплоскостью $\langle z, \tilde{\xi} \rangle = 0$. Этот набор координатных осей обозначим $y' = (y_2, \dots, y_n)$. Ясно, что гиперплоскость интегрирования является линейным многообразием размерности n в евклидовом пространстве \mathbb{R}_{n+1}^+ . Точки гиперплоскости интегрирования в \mathbb{R}_{n+1}^+ имеют следующие локальные координаты: (z_2, y', p) , $y' = (y_2, \dots, y_n)$, а $|p|$ — расстояние от гиперплоскости до начала координат.

Множество касательных плоскостей к сфере, проходящих через ее центр, называется касательным расслоением сферы. Каждая плоскость касательного расслоения перпендикулярна соответствующему вектору нормали $\tilde{\xi}$, лежащему в координатной гиперплоскости $z_2 = 0$. Мы фиксируем нормаль ξ исходной гиперплоскости интегрирования в определении преобразования Радона—Киприянова (1) и (4) и обозначаем исходную гиперплоскость интегрирования символом ξ^\perp . В евклидовом полупространстве «вращения» \mathbb{R}_{n+1}^+ вектором нормали к плоскости интегрирования является вектор $\tilde{\xi} = (\xi_1, 0, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, 0, \xi')$. В конструкции (4) эту гиперплоскость в \mathbb{R}_{n+1}^+ обозначим тем же символом ξ^\perp .

Итак, имеем следующую систему локальных координат в евклидовом полупространстве \mathbb{R}_{n+1}^+ :

$$y = (z_2, y', p), \quad y_\perp = (z_2, y', 0), \quad \tilde{\xi} = (0, 0, \dots, 0, 1), \quad \tilde{\xi} \cdot p = (0, 0, \dots, p). \quad (5)$$

Используя эти обозначения переменных, формулы (3) и (4) можем записать в виде интеграла по плоскости ξ^\perp , проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $\tilde{\xi}$, в виде

$$K_\gamma[f](\xi, p) = C(\gamma) \int_{\xi^\perp} \tilde{f}(\tilde{\xi}p + y_\perp) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(y_\perp). \quad (6)$$

2. Основные результаты. Оператор, двойственный K_γ , получен интегрированием по \mathbb{R}_1^+ по переменной p (теорема 1) и интегрированием по евклидову полупространству \mathbb{R}_n^+ (теорема 2). Последнее получено дополнительным интегрированием по поверхности сферы в \mathbb{R}_n^+ при условии, что p — радиальная переменная. Двойственное преобразование $K_{\gamma, \xi}^\#$ определено в следующем утверждении.

Теорема 1. Для функций $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\xi, p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\xi, \gamma}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx',$$

где

$$K_{\gamma, \xi}^{\#} g(x) = \Pi_{x_1}^{\gamma} (g(\langle \xi, x \rangle)). \quad (7)$$

Равенство (7) равносильно равенству

$$K_{\gamma, \xi}^{\#} g(x) = \Pi_{\xi_1}^{\gamma} (g(\langle \xi, x \rangle)).$$

Следствие 1. Пусть $f \in S_{\text{ev}}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{\text{ev}}(\mathbb{R}_1^+)$. Тогда

$$\int_{S_1(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma}[f](\xi, p) g(p) dp dS(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma}^{\#} g(x) x_1^{\gamma} dx_1 d dx',$$

где

$$K_{\gamma}^{\#} g(x) = \int_{S_1(n)} \Pi_{x_1} (g(\xi, \langle \xi, x \rangle)) dS(\xi). \quad (8)$$

Равенство (8) эквивалентно равенству

$$K_{\gamma}^{\#} g(x) = C(\gamma) \int_{S_1(n)} \Pi_{\xi_1} (g(\xi, \langle \xi, x \rangle)) dS(\xi). \quad (9)$$

Теорема 2. Для функции f и g , принадлежащих пространству основных функций $S_{\text{ev}}(\mathbb{R}_n^+)$, справедлива следующая формула:

$$K_{\gamma}^{\#} (g * K_{\gamma}[f]) = (K_{\gamma}^{\#} g * f)_{\gamma}. \quad (10)$$

3. Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова.

3.1. Доказательство теоремы 1. Пусть $g = g(p) \in S_{\text{ev}}(\mathbb{R}_1^+)$. Рассмотрим следующую линейную форму от произведения преобразования Радона—Киприянова на функцию $g(p) \in S_{\text{ev}}$, $p \in \mathbb{R}_1^+$:

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} K_{\gamma}[f](\xi, p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1^+} g(p) dp \int_{\xi^{\perp}} \tilde{f}(\tilde{\xi} p + y_{\perp}) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(y_{\perp}); \quad (11)$$

внутренний интеграл записан в локальной системе координат (5). Здесь $\tilde{\xi} p + y_{\perp} = (z_2, y', p) = y - (n+1)$ -мерный вектор. Замена переменных

$$z = \tilde{\xi} p + y_{\perp} \implies p = \langle z, \tilde{\xi} \rangle,$$

имеет якобиан, равный $\frac{D(z)}{D(y_{\perp} + p\tilde{\xi})} = \frac{D(z)}{D(y)} = 1$, и приводит выражение (11) к виду

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} K_{\gamma}[f](\xi, p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\xi^{\perp}} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(y_{\perp}) g(\langle z, \tilde{\xi} \rangle) dp. \quad (12)$$

Учитывая, что гиперплоскость ξ^{\perp} определена в евклидовом полупространстве $x_2 > 0$, выражение (12) запишем в координатах пространства вращений \mathbb{R}_{n+1}^+ (имеются в виду первоначальные координаты $z = (z_1, z_2, x')$), т.е. в следующем виде:

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma}[f](\xi, p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(z) g(\langle \tilde{\xi}, z \rangle) z_2^{\gamma-1} dz_1 dz_2 dx'.$$

Здесь скалярное произведение $(n+1)$ -мерных векторов совпадает со скалярным произведением n -мерных векторов: $\langle \tilde{\xi}, z \rangle = \langle \xi, x \rangle$. Поэтому, введя цилиндрические координаты

$$z_1 = x_1 \cos \alpha, \quad z_2 = x_1 \sin \alpha, \quad x' = x', \quad 0 < \alpha < \pi, \quad dz_1 dz_2 dx' = x_1 dx_1 d\alpha dx',$$

получим

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} K_\gamma[f](\xi, p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \int_0^\pi g\left(\text{Big}\langle \xi, (x_1 \cos \alpha, x') \text{Bnb} \rangle\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha x_1^\gamma dx_1 dx'.$$

Воспользовавшись определением оператора Пуассона (2) и видом константы $C(\gamma)$, это выражение можем записать в сокращенной форме:

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} K_\gamma[f](\xi, p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \Pi_{x_1}^\gamma g(\langle \xi, x \rangle) x_1^\gamma dx_1 dx' = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \Pi_{\xi_1}^\gamma g(\langle \xi, x \rangle) x_1^\gamma dx_1 dx'.$$

Теперь, введя обозначения

$$K_{\gamma, \xi}^\# g(x) = \Pi_{x_1}^\gamma g(\langle \xi, x \rangle) \quad \text{или} \quad K_{\gamma, \xi}^\# g(x) = \Pi_{\xi_1}^\gamma g(\langle \xi, x \rangle),$$

получим (10).

Определение 2. Двойственным оператором к преобразованию Радона—Киприянова в \mathbb{R}_1^+ называется оператор $K_{\gamma, \xi}^\#$.

Доказательство следствия 1. Вернемся к равенству (4). Интегрирование по n -мерной сфере $S_1(n) = \{\xi : |\xi| = 1\}$ приведет к равенству

$$\int_{S_1(n)} \int_{\mathbb{R}_1^+} K_\gamma[f](\xi, p) g(p) dp dS(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \Pi_{x_1}^\gamma \left(\int_{S_1(n)} g(\langle \xi, x \rangle) dS(\xi) \right) x_1^\gamma dx_1 dx'.$$

Остается воспользоваться обозначением (8) или (9). \square

Определение 3. Двойственным оператором к преобразованию Радона—Киприянова в \mathbb{R}_n^+ называется оператор $K_\gamma^\#$.

4. $K_\gamma^\#$ -Преобразование свертки функций с K_γ -преобразованием. Свертка радиальных функций в евклидовом пространстве \mathbb{R}_n определяется по формуле (см. [7, 9])

$$(f * g)(|x|) = \int_{\mathbb{R}_n} f(|y|) g(|x - y|) dy = |S_1(n)| \int_{\mathbb{R}_1} f(r) T^r g(\rho) \rho^{n-1} d\rho, \quad r = |x|, \quad \rho = |y|,$$

где $|S_1(n)|$ — площадь поверхности единичной сферы в \mathbb{R}_n , T^x — обобщенный сдвиг Пуассона:

$$T^\rho v(r) = C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi g\left(\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \beta}\right) \sin^{n-2} \beta d\beta.$$

Для произвольного числа $\gamma > 0$ обобщенной сверткой Пуассона (сверткой Пуассона) называется выражение (см. [4, 6])

$$(u * v)_\gamma(\rho) = \int_{\mathbb{R}_1^+} u(r) T^\rho v(r) r^\gamma dr, \quad \gamma > 0,$$

где

$$T^\rho v(r) = C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi g\left(\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \beta}\right) \sin^{\gamma-1} \beta d\beta.$$

Для цели наших исследований мы используем обобщенный сдвиг смешанного типа, определенный при $\gamma > 0$ в [4] формулой

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 \cos \alpha}, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha.$$

Преобразование Радона—Киприянова обобщенной свертки основных функций S_{ev} определено в [8] следующим равенством:

$$K_\gamma[(f * g)_\gamma](\xi, p) = \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\xi, t) K_\gamma[g](\xi, p - t) dt.$$

Таким образом, преобразование Радона—Киприянова свертки Пуассона оказывается одномерной (и обычной) сверткой преобразований Радона—Киприянова свертывателей. Похожее свойство проявляется для преобразования двойственного к преобразованию Радона—Киприянова.

4.1. *Доказательство теоремы 2.* Пусть функции f и g принадлежат пространству основных функций $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Докажем справедливость равенства (10), т.е.

$$(K_\gamma^\# g * f)_\gamma = K_\gamma^\# (g * K_\gamma[f]).$$

Воспользуемся представлением действия оператора $K_\gamma^\#$ по формуле (8). Имеем

$$(K_\gamma^\# * f)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} T_y^x K_\gamma^\# \left[\Pi_{\xi_1}^\gamma g(\xi; \langle y, \xi \rangle) \right] f(y) y_1^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} \int_{S_1(n)} T_y^x \Pi_{\xi_1}^\gamma g(\xi; \langle y, \xi \rangle) dS(\xi) \cdot f(y) y_1^\gamma dy.$$

Здесь оператор обобщенного сдвига и оператор Пуассона действуют по разным переменным, поэтому, воспользовавшись перестановочностью обобщенного сдвига в весовой билинейной форме с показателем веса x^γ , имеем

$$(K_\gamma^\# g * f)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} K_\gamma^\# g(y) T^x f(y) y_1^\gamma dy.$$

Согласно определению (9) оператора $K_\gamma^\#$ получим

$$\begin{aligned} (K_\gamma^\# g * f)_\gamma &= \int_{\mathbb{R}_n^+} T^x f(y) \left(\int_{S_1(n)^+} \Pi_{y_1}^\gamma g(\xi, \langle y, \xi \rangle) dS(\xi) \right) y_1^\gamma dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}_n^+} T^x f(y) \int_{S_1(n)^+} G(\xi, \langle y, \xi \rangle) dS(\xi) y_1^\gamma dy, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$G(\xi, \langle y, \xi \rangle) = \Pi_{y_1}^\gamma g(\xi, \langle y, \xi \rangle).$$

Каждая из функций f и g принадлежат основному классу функций, поэтому можно применить теорему Лебега о перестановке пределов интегрирования. В результате получим равенство

$$(K_\gamma^\# g * f)_\gamma = \int_{S_1(n)^+} \int_{\mathbb{R}_n^+} G(\xi, \langle y, \xi \rangle) T^x f(y) y_1^\gamma dy dS(\xi).$$

Учитывая действие оператора Пуассона (2), запишем

$$G(\xi, \langle y, \xi \rangle) = C(\gamma) \int_0^\pi g(\xi, y_1 \xi_1 \cos \beta + y_2 \xi_2 + \dots, y_n \xi_n) \sin^{\gamma-1} \beta d\beta. \quad (13)$$

Как в доказательстве теоремы 1, воспользуемся процедурой вращения. При этом учтем, что

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 \cos \alpha} = \sqrt{(x_1 - y_1 \cos \alpha)^2 + y_1^2 \sin^2 \alpha},$$

и векторы размерности $n - 1$, участвующие в скалярном произведении $\langle y, \xi \rangle$, транслируются в векторы размерности n и имеют следующие координаты:

$$y \rightarrow \tilde{z} = (z_1, 0, y'), \quad \xi \rightarrow \tilde{\xi} = (\xi_1, 0, \xi').$$

В результате получим

$$(K_\gamma^\# g * f)_\gamma(x) = \int_{S_1(n)^+} \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(\tilde{x} - z) G(\xi, \langle z, \tilde{\xi} \rangle) z_2^{\gamma-1} dz dS(\xi),$$

где $z = (z_1, z_2, y')$, $\tilde{x} = (x_1, 0, x_2, \dots, x_n)$ и поэтому $\tilde{x} - z = (x_1 - z_1, z_2, x' - y')$. Введем n -мерные локальные координаты

$$\tilde{\xi} = (0, 0, \dots, 1), \quad \tilde{\xi} \cdot p = (0, 0, \dots, p), \quad y_\perp = (z_2, y', 0), \quad y = (z_2, y', p).$$

Произведем замену переменных

$$z = \tilde{x} - \zeta - s\tilde{\xi}, \quad \tilde{x} - z = s\tilde{\xi} + \zeta, \quad \text{где } \zeta = (\zeta_1, z_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n) \in \tilde{\xi}^\perp.$$

Якобиан этой замены равен $\frac{D(z)}{D(p, \zeta)} = 1$, и мы имеем

$$(K_\gamma^\# g * f)_\gamma(x) = \int_{S_1(n)^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\tilde{\xi}^\perp} \tilde{f}(s\tilde{\xi} + \zeta) z_2^{\gamma-1} d\zeta G(\xi, \langle \tilde{x}, \tilde{\xi} \rangle - s) ds dS(\xi).$$

Здесь внутренний интеграл есть преобразование Радона—Киприянова, записанное в виде интеграла по касательной плоскости $\tilde{\xi}^\perp$ (см. формулу (6)). Следовательно,

$$\begin{aligned} (K_\gamma^\# g * f)_\gamma(x) &= \int_{S_1(n)^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} K_\gamma[f](\xi, s) G(\xi, p - s) ds dS(\xi) = \\ &= \int_{S_1(n)^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(K_\gamma[f](\xi, s) \Pi_{x_1}^\gamma g(\xi, p - s) \right) ds dS(\xi). \end{aligned}$$

В последнем равенстве воспользовались обозначением (13). Но $\langle \tilde{x}, \tilde{\xi} \rangle = \langle x, \xi \rangle$, поэтому внутренний интеграл представляет собой классическую свертку по переменной p . В результате

$$(K_\gamma^\# g * f)_\gamma(x) = \int_{S_1(n)^+} \Pi_{x_1}^\gamma \left(K_\gamma[f](\xi, p) * g(\xi, p) \right) dS(\xi).$$

Полученное выражение есть двойственный оператор к преобразованию Радона—Киприянова от свертки функций по переменной p , т.е.

$$(K_\gamma^\# g * f)_\gamma(x) = K_\gamma^\# \left(K_\gamma(\xi, p) * g(\xi, p) \right).$$

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2007.
2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
3. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я. Однородные функции и их приложения // Усп. мат. наук. — 1955. — 10, № 3. — С. 3–70.
4. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.

5. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. АН СССР. — 1998. — 360, № 2. — С. 157–160.
6. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2 (42). — С. 102–143.
7. Ляхов Л. Н. О преобразовании Радона—Киприянова сферически симметричных функций// Докл. РАН. — 2008. — 419, № 3. — С. 315–319.
8. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова—Радона// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — 248. — С. 144–152.
9. Ляхов Л. Н. Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена—Никольского для j -бесселевых интегралов Фурье// Тр. Моск. мат. о-ва. — 2015. — 76, № 1. — С. 67–84.
10. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха// Мат. заметки. — 2023. — 113, № 4. — С. 527–537.
11. Хелгасон С. Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ляхов Лев Николаевич (Lyakhov Lev Nikolaevich)

Воронежский государственный университет;

Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского (Voronezh State University, Voronezh, Russia;

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia)

E-mail: levnya@mail.ru

Калитвин Владимир Анатольевич (Kalitvin Vladimir Anatolievich)

Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского (Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia)

E-mail: kalitvin@gmail.com

Лапшина Марина Геннадьевна (Lapshina Marina Gennadievna)

Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского (Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia)

E-mail: marina.lapsh@ya.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 78–88
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-78-88

УДК 517.977.1

ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. Е. В. РАЕЦКАЯ

Аннотация. Для системы управления в частных производных выведен критерий полной управляемости системы. Исследование ведется методом каскадной декомпозиции, которая заключается в пошаговом эквивалентном переходе от исходной системы к редуцированным системам в подпространствах. Получена функция, принадлежащая подпространству минимальной размерности, определяющая вид решения задачи программного управления — функций состояния и управления в аналитическом виде. Установлены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции, приведена схема ее построения. Найдены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции в полиномиальном, экспоненциальном, дробно-рациональном видах; приведены формулы для построения функций такого вида. Для исходной системы построено решение задачи программного управления.

Ключевые слова: динамическая система с частными производными, полная управляемость, программное управление, метод каскадной декомпозиции.

GENERAL SCHEME FOR CONSTRUCTING THE DETERMINING FUNCTION IN A CONTROL PROBLEM FOR A DYNAMICAL SYSTEM WITH PARTIAL DERIVATIVES OF DIFFERENT ORDERS

© 2024 E. V. RAETSKAYA

ABSTRACT. For a control system with partial derivatives, a criterion for the complete controllability is derived by using the cascade decomposition method based on the transition from the original system to reduced systems in subspaces. We obtain a function, which belongs to a subspace of minimal dimension and determines the type of solution of the program control problem, i.e., the state and control functions in the analytical form. Necessary and sufficient conditions for the existence of the determining function are established and a scheme of its construction is given. Necessary and sufficient conditions for the existence of a determining function in the polynomial, exponential, and fractional-rational forms are found; formulas for constructing such functions are proposed. For the original system, a solution of the program control problem is constructed.

Keywords and phrases: dynamical system with partial derivatives, complete controllability, program control, cascade decomposition method.

AMS Subject Classification: 93B05

1. Введение. Рассматривается динамическая система в частных производных

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = B \frac{\partial x^k(t, s)}{\partial s^k} + Du(t, s) \quad (1)$$

с условиями

$$x(0, s) = \alpha(s), \quad x(T, s) = \beta(s), \quad (2)$$

где $t \in [0, T]$, $s \in [0, S]$; $x(t, s) \in \mathbb{R}^n$; $u(t, s) \in \mathbb{R}^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Систему (1) называют полностью управляемой, если существует функция управления $u(t, x)$, под воздействием которой система переводится из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние (см. (2)) за время $[0, T]$ для любого $T > 0$.

Изучению управляемости, как одного из важнейших свойств динамической системы, посвящено огромное количество работ, например, ставшие классическими (см. [1, 2, 6–8, 12]).

Наряду с выявлением возможности управления системой актуальной задачей является именно построение функции управления и функции состояния, отвечающей заданным условиям. Однако данное направление на данный момент разработано недостаточно широко и полно. Наиболее общим подходом является применение методов, позволяющих строить искомые функции в приближенном виде, что не всегда отвечает запросам практики и затрудняет более полное исследование свойств функций состояния и управления. Потребность в развитии методов построения функций управления и состояния в аналитической форме весьма велика.

В данной работе для системы (1)–(2) ставятся следующие задачи управления:

- (a) выявление свойств матричных коэффициентов B и D , влекущих полную управляемость системы (1);
- (b) установление свойств функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, в условиях (2) достаточных для реализации управляемого процесса;
- (c) построение функции управления $u(t, s)$ и соответствующей функции состояния $x(t, s)$ для полностью управляемой системы. Именно процедура построения указанных функций занимает в данной работе центральное место.

Решение поставленной задачи ведется методом каскадной декомпозиции, разработанным в [9] для исследования полной управляемости классической системы управления и примененным позже в [4, 10, 13, 14] для исследования свойств робастности, инвариантности, наблюдаемости, управляемости, а также при решении задач управления для ряда динамических систем (см. [5, 11, 15–19]). Именно такой подход позволяет получить решение задачи управления в аналитическом виде.

Метод каскадной декомпозиции базируется на свойстве нетеровости матричного коэффициента при функции управления в системе (1), позволяющем проводить пошаговое расщепление функции состояния на компоненты из сужающихся подпространств. Компонента состояния из самого узкого подпространства, названная здесь определяющей функцией, будет определять вид аналитического решения задачи управления. Основной целью данной работы является выявление необходимых условий существования определяющей функции, а также разработка общей схемы ее построения в различных формах.

Каскадная декомпозиция включает три этапа:

- (i) прямой ход, подразумевающий поэтапную редукцию системы (1) и выявление ее полной управляемости или неуправляемости; на данном этапе выявляются и свойства функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, достаточные для реализации управляемого процесса;
- (ii) центральный этап: построение определяющей функции для полностью управляемой системы (1);
- (iii) обратный ход, подразумевающий сначала пошаговое восстановление функции состояния $x(t, s)$, удовлетворяющей заданным условиям (2); затем построение соответствующей функции управления $u(t, s)$.

Таким образом, решается задача программного управления, которая, для полностью управляемой системы (1), предполагает сначала построение функции состояния $x(t, s)$; затем построение

соответствующей функции $u(t, s)$, которая и будет обеспечивать такое управление системой (1), что траектория системы пройдет через заданные точки (2) за время $[0, T]$ для любого $T > 0$.

2. Теоретическая база исследования. Метод каскадной декомпозиции базируется на свойстве нетеровости матричного коэффициента $D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, которому соответствуют разложения пространств в прямые суммы

$$\mathbb{R}^m = \text{Coim } D \dot{+} \text{Ker } D, \quad \mathbb{R}^n = \text{Im } D \dot{+} \text{Coker } D, \quad (3)$$

где $\text{Ker } D$ — ядро D ; $\text{Im } D$ — образ D ; $\text{Coker } D$ — дефектное подпространство, $n_0 = \dim \text{Coker } D$; $\text{Coim } D$ — прямое дополнение к $\text{Ker } D$ в \mathbb{R}^m ; при этом сужение \tilde{D} оператора D на $\text{Coim } D$ имеет обратный \tilde{D}^{-1} . Проекторы на подпространства $\text{Ker } D$ и $\text{Coker } D$ обозначаются через P и Q , соответственно. Оператор $\tilde{D}^{-1}(I - Q)$ называется полуобратным к D и обозначается D^- (через I здесь и далее обозначен тождественный оператор в соответствующем пространстве). Здесь операторы и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково.

Лемма 1 (см. [3]). *Соотношение*

$$Du = v, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

эквивалентно системе

$$u = D^-v + Pu, \quad Qv = 0. \quad (5)$$

Выражения (5) суть решение уравнения (4) для u , найденное с точностью до произвольного элемента Pu из подпространства $\text{Ker } D$, и условие корректности системы (4).

Следует заметить, что в случае $n = n_0$ система (1) вида

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = B \frac{\partial x^k(t, s)}{\partial s^k}$$

является неуправляемой. Здесь рассматривается случай $n > n_0 > 0$.

3. Прямой ход декомпозиции. Нетеровость матричного коэффициента D позволяет расщепить коэффициенты и функции в уравнении (1) на коэффициенты и функции из подпространств. Так функция состояния $x(t, s)$ расщепляется на компоненты $Qx(t, s) \in \text{Coker } D$ и $(I - Q)x(t, s) \in \text{Im } D$, которые будем обозначать $x_1(t, s)$ и $u_1(t, s)$, и называть функциями псевдосостояния и псевдоуправления соответственно. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_1 &= QBQ, \quad D_1 = QB(I - Q), \quad G_1 = QB, \\ \alpha_{10}(s) &= Q\alpha(s), \quad \alpha_{11}(s) = G_1 \frac{\partial^k \alpha(s)}{\partial s^k}, \\ \beta_{10}(s) &= Q\beta(s), \quad \beta_{11}(s) = G_1 \frac{\partial^k \beta(s)}{\partial s^k}, \\ x_1(t, s) &= Qx(t, s), \quad u_1(t, s) = (I - Q)x(t, s), \end{aligned}$$

Описанные выше свойства нетеровости матричного коэффициента D обуславливают на первом шаге расщепления эквивалентный переход от системы (1) к иерархически структурированной совокупности систем первого и второго уровней, а именно, системе первого (верхнего) уровня — системе для построения функции управления

$$u(t, s) = D^- \left(\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} - B \frac{\partial x^k(t, s)}{\partial s^k} \right) + Pu(t, s), \quad (6)$$

с неизвестной пока функцией состояния $x(t, s)$, с произвольным элементом $Pu(t, s) \in \text{Ker } D$ и, с учетом расщепления

$$x(t, s) = x_1(t, s) + u_1(t, s), \quad (7)$$

системе второго (нижнего) уровня

$$\frac{\partial x_1(t, s)}{\partial t} = B_1 \frac{\partial x_1^k(t, s)}{\partial s^k} + D_1 \frac{\partial u_1^k(t, s)}{\partial s^k}. \quad (8)$$

Кроме того, на первом шаге декомпозиции производится эквивалентный переход от условий (2) к условиям

$$x_1(0, s) = \alpha_{10}(s), \quad x_1(T, s) = \beta_{10}(s), \quad (9)$$

$$\frac{\partial x_1(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \alpha_{11}(s), \quad \frac{\partial x_1(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \beta_{11}(s). \quad (10)$$

Лемма 2. При выполнении условий $\alpha(s) \in C^k[0, S]$, $\beta(s) \in C^k[0, S]$, в случае $n > n_0$, система (1) с условиями (2) эквивалентна иерархически структурированной совокупности соотношений первого шага: системе (6) первого уровня, выражению (7) и системе (8) второго уровня с условиями (9)–(10).

Исследование свойств системы (8) базируется на описанных выше свойствах нетеровости матричного коэффициента $D_1 : \text{Im } D \rightarrow \text{Coker } D$.

Обозначим $n_1 = \dim \text{Coker } D_1$. В случае $n_0 > n_1 > 0$, при выполнении условий k -кратной дифференцировании функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$, реализуется эквивалентный переход от системы (8) к иерархически структурированной совокупности систем второго шага. Следует заметить, что система нижнего уровня второго шага — система относительно функции псевдосостояния $x_2(t, s) \in \text{Coker } D_1$ и функции псевдоуправления $u_2(t, s) \in \text{Im } D_1$, будет иметь вид, аналогичный системе (8) с заменой индекса 1 на 2.

Кроме того, в точках $t = 0$ и $t = T$ появятся по одному дополнительному условию

$$\frac{\partial^2 x_2(t, s)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \alpha_{22}(s), \quad \frac{\partial^2 x_2(t, s)}{\partial t^2} \Big|_{t=T} = \beta_{22}(s).$$

Таким образом, в случае $n_0 > n_1 > \dots > n_{i-1} > n_i > 0$ при выполнении условий $\alpha(s) \in C^k[0, S]$, $\beta(s) \in C^k[0, S]$, общий вид иерархически структурированной совокупности соотношений i -го шага имеет вид:

$$\frac{\partial u_{i-1}^k(t, s)}{\partial s^k} = D_{i-1}^- \left(\frac{\partial x_{i-1}(t, s)}{\partial t} - B_{i-1} \frac{\partial x_{i-1}^k(t, s)}{\partial s^k} \right) + f_{i-1}(t, s), \quad (11)$$

$$x_{i-1}(t, s) = x_i(t, s) + u_i(t, s), \quad (12)$$

$$\frac{\partial x_i(t, s)}{\partial t} = B_i \frac{\partial x_i^k(t, s)}{\partial s^k} + D_i \frac{\partial u_i^k(t, s)}{\partial s^k}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^j x_i(t, s)}{\partial t^j} \Big|_{t=0} = \alpha_{ij}(s), \quad \frac{\partial^j x_i(t, s)}{\partial t^j} \Big|_{t=T} = \beta_{ij}(s), \quad j = \overline{0, i}, \quad (14)$$

Здесь

$$B_i = Q_{i-1} B_{i-1} Q_{i-1}, \quad D_i = Q_{i-1} B_{i-1} (I - Q_{i-1}), \quad G_i = Q_{i-1} B_{i-1}, \quad (15)$$

$$\alpha_{i0}(s) = Q_{i-1} \alpha_{i-10}(s) = Q_{i-1} Q_{i-2} \dots Q_1 Q \alpha(s), \quad (16)$$

$$\beta_{i0}(s) = Q_{i-1} \beta_{i-10}(s) = Q_{i-1} Q_{i-2} \dots Q_1 Q \beta(s), \quad (17)$$

$$\alpha_{ij}(s) = G_i G_{i-1} \dots G_2 G_1 \frac{\partial^{j \cdot k} \alpha(s)}{\partial s^{j \cdot k}} = G_i \frac{\partial^{j \cdot k} \alpha_{i-1}(s)}{\partial s^{j \cdot k}}, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (18)$$

$$\beta_{ij}(s) = G_i G_{i-1} \dots G_2 G_1 \frac{\partial^{j \cdot k} \beta(s)}{\partial s^{j \cdot k}} = G_i \frac{\partial^{j \cdot k} \beta_{i-1}(s)}{\partial s^{j \cdot k}}, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (19)$$

$$x_i(t, s) = Q_{i-1} x_{i-1}(t, s), \quad u_i(t, s) = (I - Q_{i-1}) x_{i-1}(t, s). \quad (20)$$

Система (11) первого уровня — это система для нахождения функции псевдоуправления $u_{i-1}(t, s)$ с неизвестной пока функцией псевдосостояния $x_{i-1}(t, s)$ и с произвольной функцией $f_{i-1}(t, s) \in \text{Ker } D_{i-1}$.

Система (13) второго уровня аналогична по виду системе (8) первого шага, но относительно компонент $x_i(t, s)$ из еще более узкого подпространства $\text{Coker } D_{i-1}$.

В силу конечномерности исходного пространства \mathbb{R}^n , возможны лишь два следующих случая:

- (i) $n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} = n_p$;

(ii) $n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} > n_p = 0$.

При выполнении условий $\alpha(s) \in C^k[0, S]$, $\beta(s) \in C^k[0, S]$ прямой ход полностью реализуется за p шагов ($n \geq p \geq 0$) переходом к иерархической структуре: системе первого уровня p -го шага

$$\frac{\partial u_{p-1}^k(t, s)}{\partial s^k} = D_{p-1}^- \left(\frac{\partial x_{p-1}(t, s)}{\partial t} - B_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}^k(t, s)}{\partial s^k} \right) + f_{p-1}(t, s),$$

с неизвестной пока функцией псевдосостояния $x_{p-1}(t, s)$, с произвольной функцией $f_{p-1}(t, s) \in \text{Ker } D_{p-1}$ и, с учетом расщепления

$$x_{p-1}(t, s) = x_p(t, s) + u_p(t, s), \quad (21)$$

к системе второго уровня p -го шага

$$\frac{\partial x_p(t, s)}{\partial t} = B_p \frac{\partial x_p^k(t, s)}{\partial s^k} + D_p \frac{\partial u_p^k(t, s)}{\partial s^k}, \quad (22)$$

с условиями

$$\left. \frac{\partial^j x_p(t, s)}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \alpha_{pj}(s), \quad j = 0, 1, \dots, p, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial^j x_p(t, s)}{\partial t^j} \right|_{t=T} = \beta_{pj}(s), \quad j = 0, 1, \dots, p, \quad (24)$$

где коэффициенты и функции определяются по формулам (12), (15)–(20), с заменой индекса i на p .

Лемма 3. При выполнении условий $\alpha(s) \in C^{p-k}[0, S]$, $\beta(s) \in C^{p-k}[0, S]$, в случае $n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} > 0$, система второго уровня первого шага (8) с условиями (9), (10) эквивалентна цепочке иерархически структурированных систем (11)–(13), $i = 1, 2, \dots, p$, с условиями (23), (24).

В случае (i) $n_{p-1} = n_p$, т.е. $\dim \text{Coker } D_{p-1} = \dim \text{Coker } D_p$, что означает $D_p = (0)$, система (22) принимает вид

$$\frac{\partial x_p(t, s)}{\partial t} = B_p \frac{\partial x_p^k(t, s)}{\partial s^k} \quad (25)$$

и является неуправляемой, так как функция псевдосостояния $x_p(t, s)$, найденная как решение дифференциального уравнения (25), в общем случае не будет удовлетворять всем условиям (23), (24). Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 4. В случае $D_p = 0$ система (22) с условиями (23), (24) не является управляемой.

Неуправляемость системы (22) с условиями (23), (24) влечет неуправляемость всех систем (13) с условиями (14) с $i = p-1, p-2, \dots, 2, 1$, что влечет и неуправляемость исходной системы (1).

Лемма 5. В случае $D_p = (0)$ система (1) с условиями (2) не является управляемой.

В случае (ii) $n_p = 0$, т.е. $\text{Coker } D_p = 0$; таким образом, матрица D_p является сюръективной. Можно построить функцию $x_p(t, s)$, удовлетворяющую всем условиям (23), (24) в произвольной форме, например, в виде линейной комбинации линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$ с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$. Построение функции

$$x_p(t, s) = \sum_{i=1}^{2(p+1)} \varphi_{pi}(s) \cdot \psi_{pi}(t), \quad (26)$$

удовлетворяющей всем $2(p+1)$ условиям (23), (24), затем подстановка ее в выражение

$$F_p(t, s) = \frac{\partial x_p(t, s)}{\partial t} - B_p \frac{\partial x_p^k(t, s)}{\partial s^k}, \quad (27)$$

позволяют найти функцию $u_p(t, s)$, как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_p^k(t, s)}{\partial s^k} = D_p^- F_p(t, s) + f_p(t, s) \quad (28)$$

с произвольной функцией $f_p(t, s) \in \text{Ker } D_p$, которая может быть взята нулевой.

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Лемма 6. *В случае сюръективной матрицы D_p система (22) с условиями (23), (24) является полностью управляемой.*

Таким образом, прямой ход каскадной декомпозиции завершается выявлением свойства НУ или полностью управляемой системы (22). В случае сюръективной матрицы D_p осуществляется переход ко второму этапу каскадной декомпозиции.

4. Центральный этап декомпозиции. Построение определяющей функции. Содержание центрального этапа декомпозиции составляет построение функции псевдосостояния $x_p(t, s)$ вида (26), который определяется выбором функций $\psi_{pi}(t)$. При этом функция $x_p(t, s)$ должна удовлетворять всем условиям (23), (24).

Определение 1. Минимальный набор линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$, выбранных для построения функции $x_p(t, s)$ вида (26), называется базисным набором

$$w(t) = (\psi_{p1}(t), \psi_{p2}(t), \dots, \psi_{pr}(t)). \quad (29)$$

Сами функции $\psi_{pi}(t)$, $i = 1, \dots, r$, называются базисными функциями. Число r , равное минимальному количеству базисных функций, определяется количеством условий (23), (24) и называется размерностью базисного набора: $r = \dim w(t) = 2(p + 1)$.

В зависимости от вида функций $\alpha_{pj}(s)$, $\beta_{pj}(s)$ в условиях (23), (24), которые, в свою очередь, определяются видом функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ в условиях (2), или от пожеланий исследователя, возможен выбор базисных функций в виде степенных функций, в экспоненциальном виде, в виде дробно-линейных функций и т. д. Очевидно, форма функции $x_p(t, s)$ определяется видом базисного набора $w(t)$. Вид функции $x_p(t, s)$, в свою очередь, определяет вид функций состояния $x(t, s)$ и управления $u(t, s)$, т.е. определяет вид аналитического решения задачи управления для полностью управляемой системы (1) с условиями (2).

Определение 2. Построенная для выбранного базисного набора (29) функция $x_p(t, s)$ вида (26), удовлетворяющая всем условиям (23), (24), называется определяющей функцией.

4.1. Общая схема построения определяющей функции. Подстановка определяющей функции (26) в условия (23), (24) приводит к системе

$$\varphi_{pi}(s) \cdot \left. \frac{\partial^j \psi_{pi}(t)}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \alpha_{pj}(s), \quad j = 0, 1, \dots, p, \quad (30)$$

$$\varphi_{pi}(s) \cdot \left. \frac{\partial^j \psi_{pi}(t)}{\partial t^j} \right|_{t=T} = \beta_{pj}(s), \quad j = 0, 1, \dots, p, \quad (31)$$

относительно векторных коэффициентов $\varphi_{pi}(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$. Введем в рассмотрение определитель вида

$$W(t_1, t_2) = \det \begin{pmatrix} w(t_1), \\ w'(t_1), \\ w''(t_1), \\ \dots, \\ w^p(t_1), \\ w(t_2), \\ w'(t_2), \\ w''(t_2), \\ \dots, \\ w^p(t_2) \end{pmatrix} \quad (32)$$

где $w^j(t_i)$ — производные j -го порядка от компонент базисного набора $w(t)$, вычисленные в точках t_i , $j = 0, 1, \dots, p$, $i = 1, 2$. Определитель (32) размера $r \times r$, где $r = 2(p+1)$, состоит из двух блоков: первые $p + 1$ строк — это первые $p + 1$ строк вронскиана, составленного из функций базисного

набора $w(t)$ в точке t_1 ; последние $p+1$ строк — это первые $p+1$ строк вронскиана, составленного из функций базисного набора $w(t)$ со значениями в точке t_2 .

Определение 3. Определитель $W(t_1, t_2)$ вида (32), построенный для базисного набора $w(t)$ вида (29), называется двухточечным псевдовронскианом.

Функции $\varphi_{pi}(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, образующие решение системы (30), (31) находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \frac{1}{W(0, T)} \cdot W_i(s, 0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (33)$$

где $W(0, T)$ — значение двухточечного псевдовронскиана, вычисленное для значений $t_1 = 0$, $t_2 = T$; $W_i(s, 0, T)$ — определитель полученный из $W(0, T)$, с заменой i -го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Теорема 1. Для базисного набора $w(t)$ вида (29) существует определяющая функция $x_p(t, s)$ вида (26) тогда и только тогда, когда двухточечный вронскиан $W(t_1, t_2)$, определяемый выражением (32) удовлетворяет условию

$$W(0, T) \neq 0. \quad (34)$$

При условии (34) векторные коэффициенты определяющей функции $\varphi_{pi}(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, находятся по формулам (33).

Далее к рассмотрению предлагается построение определяющей функции в различных формах: полиномиальной, экспоненциальной, дробно-линейной. Верхние индексы pl, exp, dr в формулах будут соответствовать выбору базисных функций полиномиального, экспоненциального, дробно-рационального вида.

4.2. Построение определяющей функции в полиномиальном виде. В случае выбора базисных функций в форме

$$\psi_{pi}(t) = t^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

базисный набор имеет вид

$$w^{pl}(t) = (1, t, t^2, \dots, t^{r-1}, t^{i-1}). \quad (35)$$

Разложение по формуле Тейлора функции $W(t, T)$ (в окрестности точки $t = T$) имеет вид

$$W^{pl}(t_1, T) = \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!} W^{pl(j)}(t, T)|_{t=t_1} (T - t_1)^j \quad (36)$$

с $W^{pl(j)}(t, T) = \frac{d^{(j)} W^{pl}(t, T)}{dt^{(j)}}$, и при $t_1 = 0$ вычисляется по формуле

$$W^{pl}(0, T) = (T^{(p+1)}) \cdot \prod_{i=1}^p (i!)^2. \quad (37)$$

Векторные коэффициенты определяющей функции полиномиального вида находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \frac{1}{\left(T^{(p+1)} \cdot \prod_{i=1}^p (i!) \right)^2} \cdot W_i^{pl}(s, 0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (38)$$

где $W_i^{pl}(s, 0, T)$ — определитель, полученный из выражения (36) для $W^{pl}(0, T)$, заменой i -го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Теорема 2. Для базисного набора (35) существует определяющая функция

$$x_p(t, s) = x_p^{pl}(t, s) = \sum_{i=1}^r \varphi_{pi}(s) \cdot t^{i-1},$$

с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$ вида (38).

4.3. *Построение определяющей функции в экспоненциальном виде.* В случае выбора базисных функций

$$\psi_{pi}(t) = e^{(i-1)t}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

базисный набор имеет вид

$$w^{\text{exp}}(t) = (1, e^t, e^{2t}, \dots, e^{(r-2)t}, e^{(r-1)t}) \quad (39)$$

и значение двухточечного псевдовронскиана, вычисленное при $t_1 = 0, t_2 = T$, определяется формулой

$$W^{\text{exp}}(0, T) = \exp\left(T \cdot \left(\sum_{k=1}^p k\right)\right) \cdot W^{\text{pl}}(0, T), \quad (40)$$

где $W^{\text{pl}}(0, T)$ вычисляется формулой (37). Векторные коэффициенты определяющей функции экспоненциального вида находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \frac{1}{\exp\left(T \cdot \left(\sum_{k=1}^p k\right)\right) \cdot \left(T^{(p+1)} \cdot \prod_{i=1}^p (i!)\right)^2} \cdot W_i^{\text{exp}}(s, 0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (41)$$

где $W_i^{\text{exp}}(s, 0, T)$ — определитель, полученный из $W^{\text{exp}}(0, T)$ вида (40) заменой i -го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Теорема 3. *Для базисного набора экспоненциальных функций (39) существует определяющая функция экспоненциального вида*

$$x_p(t, s) = x_p^{\text{exp}}(t, s) = \sum_{i=1}^r \varphi_{pi}(s) e^{(i-1)t}$$

с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$, определяемыми формулой (41).

4.4. *Построение определяющей функции в дробно-рациональном виде.* Для базисных функций

$$\psi_{pi}(t) = \frac{1}{(t - t_0)^{(i-1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

с $t_0 \in (0, T)$, базисный набор имеет вид

$$w^{\text{dr}}(t) = \left(1, \frac{1}{(t - t_0)}, \frac{1}{(t - t_0)^2}, \dots, \frac{1}{(t - t_0)^{(r-2)}}, \frac{1}{(t - t_0)^{(r-1)}}\right) \quad (42)$$

и значение двухточечного псевдовронскиана, вычисленное при $t_1 = 0, t_2 = T$, определяется формулой

$$W^{\text{dr}}(0, T) = \left(\frac{T^{(p+1)} \cdot \prod_{i=1}^p (i!)}{\prod_{i=2}^{p+2} (t_0(T - t_0))^{(i-1)}}\right)^2. \quad (43)$$

Векторные коэффициенты определяющей функции дробно-рационального вида находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \left(\frac{\prod_{i=2}^{p+2} (t_0(T - t_0))^{(i-1)}}{T^{(p+1)} \cdot \prod_{i=1}^p (i!)}\right)^2 \cdot W_i^{\text{dr}}(s, 0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (44)$$

где $W_i^{\text{dr}}(s, 0, T)$ — определитель, полученный из $W^{\text{dr}}(0, T)$ заменой i -го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Для базисного набора (42) существует определяющая функция дробно-рационального вида

$$x_p(t, s) = x_p^{\text{др}}(t, s) = \sum_{i=1}^r \varphi_{pi}(s) \frac{1}{(t - t_0)^{(i-1)}},$$

с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$, определяемыми формулой (44).

Построением определяющей функции завершается центральный этап декомпозиции. Далее реализуется этап восстановления функции состояния $x(t, s)$.

5. Обратный ход декомпозиции. Наличие определяющей функции $x_p(t, s)$ позволяет найти функцию $F_p(t, s)$ вида (27). Интегрирование k — раз правой части уравнения (28) с этой найденной функцией $F_p(t, s)$ приводит к выражению для $u_p(t, s)$ — функции псевдоуправления p -го шага

$$u_p(t, s) = D_p^- \int_0^s \int_0^{\tau_{k-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} F_p(t, \tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{k-2} d\tau_{k-1} + h_p(t, s)$$

с последним слагаемым вида

$$h_p(t, s) = \sum_{i=1}^k h_{pi}(t) \cdot s^{i-1}.$$

Функции $h_{pi}(t)$ подбираются таким образом, чтобы удовлетворялись условия

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^j h_{pi}(t)}{\partial s^j} \right|_{t=0} &= (I - Q_{p-1}) \alpha_{p-1j}(0), \quad j = 0, 1, \dots, p-1, \\ \left. \frac{\partial^j h_{pi}(t)}{\partial s^j} \right|_{t=T} &= (I - Q_{p-1}) \beta_{p-1j}(0), \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Функция псевдосостояния $(p-1)$ -го шага $x_{p-1}(t, s)$, с учетом выражений (21) и (26) восстанавливается в виде

$$x_{p-1}(t, s) = \sum_{i=1}^{2(p+1)} \varphi_{pi}(s) \cdot \psi_{pi}(t) + u_p(t, s). \quad (45)$$

Подстановка выражения (45) в формулу (27) с заменой индекса p на $p-1$, затем k -кратное интегрирование правой части уравнения (28) с заменой индекса p на $p-1$ с найденной функцией $F_{p-1}(t, s)$ приводит к следующему выражению для функции псевдоуправления $(p-1)$ -го шага:

$$u_{p-1}(t, s) = D_{p-1}^- \int_0^s \int_0^{\tau_{k-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} F_{p-1}(t, \tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{k-2} d\tau_{k-1} + h_{p-1}(t, s),$$

с последним слагаемым вида

$$h_{p-1}(t, s) = \sum_{i=1}^k h_{p-1i}(t) \cdot s^{i-1}.$$

Функции $h_{p-1i}(t)$ подбираются таким образом, чтобы удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^j h_{p-1i}(t)}{\partial s^j} \right|_{t=0} &= (I - Q_{p-2}) \alpha_{p-2j}(0), \quad j = 0, 1, \dots, p-2, \\ \left. \frac{\partial^j h_{p-1i}(t)}{\partial s^j} \right|_{t=T} &= (I - Q_{p-2}) \beta_{p-2j}(0), \quad j = 0, 1, \dots, p-2. \end{aligned}$$

Затем восстанавливается функция псевдосостояния $p-2$ -го шага $x_{p-2}(t, s)$ и так далее.

Далее последовательно (с $i = p - 1, p, \dots, 1$) используется цепочка формул

$$\begin{aligned} x_i(t, s) &= x_{i+1}(t, s) + u_{i+1}(t, s), \quad F_i(t, s) = \frac{\partial x_i(t, s)}{\partial t} - B_i \frac{\partial x_i^k(t, s)}{\partial s^k}, \\ u_i(t, s) &= D_i^- \int_0^s \int_0^{\tau_{k-1}} \dots \int_0^{\tau_1} F_i(t, \tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{k-2} d\tau_{k-1} + h_i(t, s), \end{aligned} \quad (46)$$

где функции $u_i(t, s)$ находятся из (11). Функции

$$h_i(t, s) = \sum_{l=1}^k h_{il}(t) \cdot s^{l-1}$$

подбираются таким образом, чтобы удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^j h_i(t)}{\partial s^j} \right|_{t=0} &= (I - Q_{i-1}) \alpha_{i-1j}(0), \quad j = 0, 1, \dots, i-1, \\ \left. \frac{\partial^j h_i(t)}{\partial s^j} \right|_{t=T} &= (I - Q_{i-1}) \beta_{i-1j}(0), \quad j = 0, 1, \dots, i-1. \end{aligned}$$

Таким образом, за p шагов обратного хода восстанавливается функция состояния системы (1) в виде

$$x(t, s) = x_p(t, s) + \sum_{i=1}^p u_i(t, s) \quad (47)$$

с функциями $x_p(t, s)$ и $u_i(t, s)$, построенными по формулам (46) и (26).

Завершающим этапом является построение функции управления системы (1), а именно, подстановка функции $x(t, s)$ вида (47) в правую часть равенства (6) приводит к следующему выражению для функции $u(t, s)$:

$$u(t, s) = D^- \left(\left(\frac{\partial x_p(t, s)}{\partial t} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial u_i(t, s)}{\partial t} \right) - B \left(\frac{\partial x_p(t, s)}{\partial t} + \sum_{i=1}^p F_i(t, s) \right) \right) + Pu(t, s). \quad (48)$$

с произвольным элементом $Pu(t, s) \in \text{Ker } D$.

Теорема 5 (критерий полной управляемости системы (1)). *При выполнении условий $\alpha(s)$, $\beta(s) \in C_{[0, S]}^{k \cdot p}$ система (1) с условиями (2) является полностью управляемой тогда и только тогда, когда существует такое p , $0 \leq p \leq n$, что D_p — сюръективная матрица.*

6. Заключение. С применением метода каскадной декомпозиции решена задача программного управления для динамической системы (1). Выявлены свойства матричных коэффициентов B и D , влекущих полную управляемость системы (1). Выведен критерий полной управляемости системы (1).

Установлены свойства функций в условиях (2) а именно: условия $(k \cdot p)$ -кратной дифференцируемости функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ достаточны для реализации управляемого процесса.

Выделена компонента функции состояния из подпространства минимальной размерности — определяющая функция $x_p(t, s) \in \text{Coker } D_{p-1}$. Форма $x_p(t, s)$ определяет вид аналитического решения задачи программного управления, т.е. вид функций состояния $x(t, s)$ и управления $u(t, s)$.

Установлены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции $x_p(t, s)$ и разработана общая схема для ее построения.

Кроме того, установлены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции в различных видах. Приведены формулы для построения определяющей функции в полиномиальном, экспоненциальном, дробно-рациональном видах.

В аналитическом виде построено решение задачи программного управления: рассчитана удовлетворяющая заданным условиям (2) функция состояния вида (47) с определяющей функцией $x_p(t, s)$ общего вида (26) и построена функция управления вида (48), под воздействием которой система (1) переводится из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние (см. (2)) за время $[0, T]$ для произвольного $T > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
2. Zubov V. I. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
3. Zubova S. P. Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом// Докл. РАН. — 2012. — 447, № 6. — С. 599–602.
4. Zubova S. P., Raetskaya E. V. Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2010. — 25, № 6. — С. 1678–1679.
5. Zubova S. P., Raetskaya E. V. Построение управления для получения заданного выхода в системе наблюдения// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2015. — 20, № 5. — С. 1400–1400.
6. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
7. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.
9. Раецкая Е. В. Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж, 2004.
10. Раецкая Е. В. Исследование сингулярно возмущенной системы управления// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2018. — 23, № 122. — С. 303–307.
11. Раецкая Е. В. Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных// Модел. сист. проц. — 2023. — 16, № 1. — С. 93–104.
12. Уонем М. Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980.
13. Zubova S. P., Raetskaya E. V. Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations// J. Math. Sci. — 2013. — 188, № 3. — P. 218–226.
14. Zubova S. P., Raetskaya E. V. A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space// J. Math. Sci. — 2015. — 208, № 1. — P. 119–124.
15. Zubova S. P., Raetskaya E. V. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition// Automat. Remote Control. — 2017. — 78, № 7. — P. 1189–1202.
16. Zubova S. P., Raetskaya E. V. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — 44, № 15. — P. 11998–12009.
17. Zubova S. P., Raetskaya E. V. Construction of control providing the desired output of the linear dynamic system// Automat. Remote Control. — 2018. — 79, № 5. — P. 774–791.
18. Zubova S. P., Raetskaya E. V., Trung L. H. Control problem for dynamical systems with partial derivatives// J. Math. Sci. — 2021. — 249, № 6. — P. 941–953.
19. Zubova S. P., Trung L. H., Raetskaya E. V. On polynomial solutions of the linear stationary control system// Automat. Remote Control. — 2008. — 69, № 11. — P. 1852–1858.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Раецкая Елена Владимировна (Raetskaya Elena Vladimirovna)

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

(Voronezh State University of Forestry and Technologies

named after G. F. Morozov, Voronezh, Russia)

E-mail: raetskaya@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 89–98
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-89-98

УДК 517.548

ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА С МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ, ИМЕЮЩИМ ОСОБЕННОСТЬ В ОКРУЖНОСТИ

© 2024 г. А. Б. РАСУЛОВ, Ю. С. ФЕДОРОВ, А. М. СЕРГЕЕВА

Аннотация. Целью работы является построение общего решения обобщенного уравнения Коши—Римана, коэффициент которого допускает особенность первого порядка на окружности, содержащейся в области, и исследование краевой задачи, объединяющей элементы задач Римана—Гильберта и линейного сопряжения.

Ключевые слова: уравнения Коши—Римана, особенность в коэффициенте, оператор Помпейю—Векуа, краевая задача.

RIEMANN—HILBERT-TYPE PROBLEMS FOR THE GENERALIZED CAUCHY—RIEMANN EQUATION WITH A LEADING COEFFICIENT HAVING A SINGULARITY IN A CIRCLE

© 2024 А. В. RASULOV, Yu. S. FEDOROV, A. M. SERGEEVA

ABSTRACT. In this work, we construct a general solution of the generalized Cauchy—Riemann equation whose coefficient admits a first-order singularity on a circle contained in the domain, and study a boundary-value problem that combines elements of the Riemann—Hilbert problem and the linear conjugation problem.

Keywords and phrases: Cauchy—Riemann equations, singularity in the coefficient, Pompeiu—Vekua operator, boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 30E20

1. История вопроса. В конечной области $0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + au + b\bar{u} = f, \quad (1_0)$$

с комплекснозначными функциями $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$, заданными в ограниченной области D , причем коэффициенты a , b этих уравнений могут допускать в множестве $l \in D$ степенные особенности по z .

Обозначим через $C_\lambda(\bar{D}, 0)$, $\lambda < 0$, пространство всех непрерывных в $\bar{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с точечной особенностью $z = 0$ и с поведением $O(|z|^\lambda)$ при $z \rightarrow 0$. Оно снабжается нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{z \in D} |z|^{-\lambda} |\varphi(z)|,$$

относительно которой указанное пространство является банаховым.

Классическая теория И. Н. Векуа обобщенных аналитических функций (см. [3]) охватывает случай, когда коэффициенты и правая часть уравнения (1_0) принадлежат пространству $L^p(D)$

с показателем $p > 2$ (везде далее считаем это условие выполненным). Коэффициенты таких систем могут допускать слабые особенности с требованием их p -интегрируемости в области D . Уравнения с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, $\alpha \geq 0$, и $b \in C_{-1}$ не удовлетворяют этому условию.

В монографии Л. Г. Михайлова [5] решение уравнения (1₀) с коэффициентами $a, b \in C_{-1}(\overline{D}, 0)$ ищется в классе $C_{-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. Разрешимость интегрального уравнения, к которому сводится уравнение (1₀), доказывается при определенных условиях малости этих коэффициентов.

З. Д. Усмановым [11] построена теория уравнения (1₀) при $a = 0$, $b(z) = \bar{z}^{-1} \beta e^{ik\varphi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Однако случай, когда $b(z) = \bar{z}^{-1}(\beta_1 e^{ik\varphi} + \beta_2 e^{im\varphi})$, где $\beta_1 \neq \beta_2$, приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, исследование которой представляет собой весьма нетривиальную проблему и ранее не проводилось. Также показано, что для случая $a = 0$, $b = \lambda|z|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, существуют решения уравнения (1₀) в виде рядов Фурье, коэффициенты которых определяются через функции Бесселя и Макдональда.

На необходимость изучения уравнений с коэффициентами, допускающими особенности не ниже первого порядка, впервые было указано И. Н. Векуа [3] и А. В. Бицадзе [2]. Понятие же сверхсингулярной особенности принадлежит Н. Р. Раджабову [8].

В последнее время исследованию уравнения (1₀), а также других аналогичных уравнений с сингулярными коэффициентами были посвящены многочисленные работы (см., например, [8, 12, 14] и др.).

В [13] изучалась разрешимость задачи Римана—Гильберта для уравнения

$$w_{\bar{z}} = \frac{Q(z)}{P(z)}w(z) + a(z)w + b(z)\bar{w}, \quad |z| < 1.$$

где полином $P(z)$ внутри круга $|z| \leq 1$ имеет простые корни, $a(z), b(z) \in L^p(D)$. Показано, что число непрерывных решений зависит не только от индекса, но и от места расположения и типа особенностей.

В настоящей статье изучен эффект влияния неизолированных особенностей в младшем коэффициенте (т.е. когда младший коэффициент имеет особенность по замкнутой линии l , лежащей внутри области) уравнения (1₀) [ниже уравнение (1)] на постановку краевых задач. Оказывается, условие задачи Римана—Гильберта по границе области недостаточно для ее корректной постановки. Естественной постановкой задачи является объединение элементы задач Римана—Гильберта на границе области и задачи линейного сопряжения на окружности — носителе сингулярности коэффициента лежащего внутри области.

2. Интегральное представление решения. Пусть область D ограничена простым ляпуновским контуром Γ , ориентированным против часовой стрелки, содержит окружность $l = \{z : |z| = R\}$, и $D_0 = D \setminus (\{0\} \cup l)$. Кроме того, для связных компонент открытого множества D_0 используем обозначения $D_1 = \{z : |z| < R\}$, $D_2 = D \cap \{|z| > R\}$.

В открытом множестве D_0 рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{za_0(z)}{|z|(|z| - R)}u + \frac{b_0(z)}{|z|^m}\bar{u} = f(z), \quad (1)$$

где функции $a_0, b_0 \in C(\overline{D})$. Относительно правой части f предполагаем, что она принадлежит классу $L^p(G_0)$, в каждой подобласти $G_0 \subseteq D_0$, лежащей вне некоторой окрестности точке $z = 0$ и границы Γ .

Напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенной в [1, 3].

Пусть в некотором открытом множестве Q на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{\text{loc}}(Q)$, $p > 2$, т.е. принадлежат $W^{1,p}(Q_0)$ в любой ограниченной области Q_0 , лежащей в Q вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. [3]) любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{\text{loc}}(Q)$ и удовлетворяют рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\overline{Q_0})$ с показателем $\mu \leq (p - 2)/p$. Этот факт был

доказан И. Н. Векуа в [3]. В соответствии с этим в дальнейшем функция $u(z) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, называется его *регулярным* решением.

Рассмотрим сначала случай

$$u_{\bar{z}} - au = f \quad (2)$$

с коэффициентом

$$a(z) = \frac{a_* z}{|z|(|z| - R)} + A_0(z), \quad a_* \in \mathbb{C}, \quad A_0(z) \in L^p(D).$$

При построении общего решения уравнения (2) и его описания существенную роль играет интегральный оператор Помпейю—Векуа:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, которая обладает свойством $(Tf)_{\bar{z}} = f$. Здесь и ниже $d_2 \zeta$ означает элемент площади.

Лемма 1. *Одним из решений уравнения $\Omega_{\bar{z}} = a$ в множестве D_0 является функция*

$$\Omega(z) = 2a_* \ln |z| - R + (TA_0)(z), \quad z \in D_0. \quad (3)$$

Доказательство непосредственно получится из равенств $(\ln |z| - R)_{\bar{z}} = z(|z|(|z| - R))^{-1}$ и $(TA_0)_{\bar{z}} = A_0$.

Теорема 1. *Пусть функция $\Omega(z)$ имеет вид (3) и $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$. Тогда общее решение уравнения (2) в классе $C(\overline{D} \setminus l)$ дается формулой*

$$u = e^{\Omega} [\phi + T(e^{-\Omega} f)],$$

где $\phi \in C(\overline{D} \setminus l)$ — произвольная аналитическая функция в открытом множестве $D \setminus \{l\}$.

Утверждение показывает, что $u(z) = O(1)(|z| - R)^{2a_*}$ при $|z| \rightarrow R$. Используя обозначение $f_0 = e^{-\Omega} f$, уравнение (1) с ненулевыми $a_0(z)$ и $b_0(z)$ с помощью леммы 1 по отношению к функции $\varphi = e^{-\Omega} u \in L^p(D)$ можно свести к уравнению

$$\varphi_{\bar{z}} + b_0 c \bar{\varphi} = f_0,$$

которое эквивалентным образом редуцируется к интегральному уравнению

$$\varphi + T(b_1 \bar{\varphi}) = \phi + Tf_0, \quad (4)$$

где $b_1 = b_0 c$, $c(z) = e^{-2i \text{Im} \Omega(z)}$, функция $\phi \in H(\overline{D})$ аналитична в D . Для исследования уравнения (4) необходимо предварительно изучить действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(K_0 \varphi)(z) = \int_D \frac{\varphi(\zeta) d_2 \zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha}, \quad z \in D,$$

где положительные m , α удовлетворяют условиям

$$0 < m < 1 \leq \alpha < \frac{3 - m}{2},$$

так что $0 < 3 - m - 2\alpha < 1$.

Лемма 2 (см. [15]). *Пусть*

$$p > \frac{2}{3 - m - 2\alpha}, \quad \mu = 3 - m - 2\alpha - \frac{2}{p}.$$

Тогда оператор $K_0 : L^p(D) \rightarrow C^\mu(\overline{D})$ ограничен.

Из леммы 2 следует, что при $m + \mu + 2/p < 1$ оператор $Tb_1 : L^p(D) \rightarrow C^\mu(\overline{D})$ ограничен и компактен в каждом из пространств $L^p(D)$, $C^\mu(\overline{D})$, принадлежащих классу C^μ в каждой из компонент связности множества D_0 . Согласно (4) в представлении общего решения уравнения (2) важную роль играет линейный интегральный оператор $K\varphi = Tb_1\overline{\varphi}$, а также связанное с ним уравнение Фредгольма $\varphi + K\varphi = f$.

Теорема 2.

- (а) Однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ в классе $C(\overline{D})$ имеет конечное число линейно независимых (над полем \mathbb{R}) решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H(\overline{D})$ и существуют такие линейно независимые суммируемые функции h_1, \dots, h_n , что условия ортогональности

$$\operatorname{Re} \int_D f(\zeta) h_j(\zeta) d_2\zeta = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (5)$$

являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$.

- (б) При выполнении условий (5) любое решение уравнения $\varphi + K\varphi = f$ дается формулой $\varphi = f + Pf$, с оператором

$$(Pf)(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{[p_1(z, \zeta)f(\zeta) + p_2(z, \zeta)\overline{f(\zeta)}] d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha}, \quad (6)$$

где $1 \leq \alpha < (3 - m)/2$, который действует из пространства $C(\overline{D})$ в пространство $H(\overline{D})$.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 любое решение u уравнения (1) с правой частью $f_0 = e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ представимо в виде

$$u = e^\Omega \left[\phi + Tf_0 + P(\phi + Tf_0) + \sum_1^n \xi_j \varphi_j \right] \quad (7)$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, и функция $\phi(z) \in H(\overline{D})$, аналитическая в области D , удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \int_D (\phi + Tf_0)(\zeta) h_j(\zeta) d_2\zeta = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Схемы доказательства теорем 2, 3 приведены в [15].

3. Постановка краевой задачи. Для уравнения (2), исследуем краевую задачу, объединяющую элементы задач Римана—Гильберта на Γ и линейного сопряжения на l .

Задача R. Найти регулярное решение уравнения (2) в классе $e^{-\Omega} u \in H(\overline{D}_j)$, $j = 1, 2$, по краевым условиям

$$\operatorname{Re} G(t)u \Big|_\Gamma = g(t), \quad t \in \Gamma; \quad (A)$$

$$(e^{-\Omega} u)^+(t) - G_1(t)(e^{-\Omega} u)^-(t) = g_1(t), \quad t \in l, \quad (B)$$

где знаки $+$ и $-$ указывают на граничные значения со стороны D_1 и D_2 .

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на ее данные:

- (i) $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$;
- (ii) коэффициенты $G(t) \in H(\Gamma)$, $G_1(t) \in H(l)$ всюду отличны от нуля, причем $\ln G_1 \in H(l)$;
- (iii) правые части краевых условий удовлетворяют условиям $g(t) \in H(\Gamma)$, $g_1(t) \in H(l)$.

Предварительно напомним хорошо известные результаты относительно классической задачи Римана—Гильберта в монографиях Н. И. Мусхелишвили [6] и Ф. Д. Гахова [4]:

Классическая задача Римана—Гильберта. Найти аналитическую в области D функцию $\phi(z) \in H(\overline{D})$, которая на границе $\Gamma = \partial D$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} G\phi \Big|_{\Gamma} = g, \quad (8)$$

где функция $G = G_1 + iG_2 \in H(\Gamma)$ всюду отлична от нуля, H — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем (см. [6]).

В дальнейшем воспользуемся компактным изложением А. П. Солдатова относительно решения задачи Римана—Гильберта (8) и вкратце приведем некоторые факты о разрешимости этой задачи в случае единичного круга \mathbb{D} с границей $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$. С этой целью функцию ϕ продолжим в область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{|z| > 1\}$, полагая, что она удовлетворяет условию $\phi = \phi_*$, где ϕ_* определяется с помощью инверсии $\phi_*(z) = \overline{\phi(1/\overline{z})}$. Операция $\phi \rightarrow \phi_*$, являющаяся линейной, над полем \mathbb{R} инволютивна, т.е. $(\phi_*)_* = \phi$. Видно, что $\phi_*^\pm(t) = \overline{\phi^\mp}$, $t \in \mathbb{T}$. Очевидно, задачу (8) с коэффициентом G можем представить в форме

$$\phi^+ - \tilde{G}\phi^- = \tilde{g} \quad (9)$$

по отношению к коэффициенту $\tilde{G} = -\overline{G}/G$ и правой части $\tilde{g} = 2g/G$.

Исследование последней задачи с коэффициентом $\tilde{G} = -\overline{G}/G$ осуществляется с помощью так называемой \tilde{G} -канонической функции. По определению под ней понимается функция $X(z)$, которая аналитична в каждой связной компоненте \mathbb{D} , $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и продолжается по непрерывности на ее замыкание $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}}$ и всюду отлична от нуля, включая ее граничные значения X^\pm , вместе с $X^{-1}(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+ = \tilde{G}X^-.$$

Лемма 3. Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma G$, так что функция $\theta(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t \in H(\mathbb{T})$, и пусть

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2\varkappa}, & |z| > 1, \end{cases} \quad \Theta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\pi - 2\theta(t)}{t - z} dt.$$

Тогда функция

$$X(z) = R(z)e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$$

является \tilde{G} -канонической и обладает свойством

$$X_*(z) = X(z)z^{-2\varkappa}.$$

Теорема 4. В условиях леммы 3 все решения задачи (8) в классе $H(\overline{\mathbb{D}})$ описываются формулой

$$\phi(z) = Ig(z) + X(z)p(z), \quad p \in P_{-2\varkappa}^0, \quad Ig(z) \equiv \frac{X(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z}, \quad (10)$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\varkappa-2}^0, \quad (11)$$

где P_k^0 — класс многочленов степени k .

Доказательство. Как уже отмечалось, при дополнительном условии $\phi = \phi_*$ задача (8) эквивалентна задаче (9). Последняя представляет собой задачу линейного сопряжения по отношению к $\tilde{G} = -\overline{G}/G$ и $g = f/G$. Следовательно, мы приходим к теореме 4.

Очевидно, при $\varkappa \leq 0$ размерность пространства $P_{-2\varkappa}^0$ над полем \mathbb{R} равна $-2\varkappa + 1$. Аналогично, при $\varkappa \geq 0$ размерность пространства $P_{2\varkappa-2}^0$ равна $2\varkappa - 1$. Во всех случаях индекс задачи (8) равен $-2\varkappa + 1$ и, в частности, всегда отличен от нуля.

Остановимся еще на граничном значении функции

$$A(z) = \Theta(z) - \Theta(0)/2, \quad z \in \mathbb{D},$$

фигурирующей в представлении канонической функции $X(z)$. В явном виде

$$A(z) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t) dt}{t-z} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t, \quad A(0) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t.$$

По формуле Сохоцкого—Племеля отсюда

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - ia(t_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t) dt}{t-t_0} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t.$$

Полагая $e^{2i\beta} = t_0/t$, можем записать

$$\frac{dt}{t-t_0} = \frac{id_1 t}{1-e^{2i\beta}} = \frac{i - \operatorname{ctg} \beta}{2} d_1 t,$$

так что

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - ia(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} [\theta(t) \operatorname{ctg} \beta] d_1 t.$$

Следовательно, функцию A можем однозначно определить по условиям

$$\operatorname{Im} A^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \operatorname{Re} A(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t. \quad (12)$$

Доказательство завершено. \square

Обратимся к общему случаю односвязной области D . Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$; тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг \mathbb{D} принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная удовлетворяет условию $\omega' \in H(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$; по условию $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 5. Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind}_{\Gamma} G$, так что $\theta(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t \in H(\Gamma)$, и пусть $X(z) = e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$, где функция $\Theta \in H(\overline{D})$ определяется как решение задачи Дирихле

$$\operatorname{Im} \left(\Theta - \frac{1}{2} \Theta(0) \right)^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \operatorname{Re} \Theta(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \theta(t) |\omega'(t)| d_1 t. \quad (13)$$

Тогда все решения задачи (8) в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{\omega'(t) dt}{\omega(t) - \omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P_{-2\varkappa}^0, \quad (14)$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)] \omega'(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\varkappa-2}^0. \quad (15)$$

Доказательство почти очевидно.

4. Решение задачи R. Решения задачи **R** рассмотрим в двух случаях: (а) область D является единичным кругом \mathbb{T} ; (б) D — произвольная конечная область, ограниченная гладким замкнутым контуром Γ .

Случай (а). Рассмотрим задачу **R** в случае единичного круга \mathbb{T} ; тогда $l = \{z : |z| = R < 1\}$. Рассмотрим задачу (B). Пусть $G_1(t) = 1$, $g_1(t) = 0$ для всех $t \in l$. Тогда она примет вид

$$(e^{-\Omega} u)|_l^+ = (e^{-\Omega} u)|_l^-, \quad (B_0)$$

где $\Omega(z) = 2a_* \ln ||z| - R| + (TA_0)(z)$. Из формулы $u = e^{\Omega} [\phi + T(e^{-\Omega} f)]$ теоремы 1 видно, что аналитическая функция ϕ определяется по u однозначно и восстанавливается по формуле

$$\phi = e^{-\Omega} u - T e^{-\Omega} f.$$

Соответствие между решением $e^{-\Omega}u \in H(\overline{\mathbb{T}})$ уравнения (2) и аналитической в \mathbb{T} функцией $\phi \in H(\overline{\mathbb{T}})$ является взаимно однозначным. Так как $f_0 = e^{-\Omega}f \in L^p$, $p > 2$, то $(Tf_0)^\pm(t) \in H(\overline{\mathbb{T}})$ и $(Tf_0)^+(t) = (Tf_0)^-(t)$, $t \in l$. Следовательно, задача (B_0) в данном случае сводится к эквивалентной задаче: $\phi^+(t) = \phi^-(t)$, $t \in l$, где через $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ соответственно обозначены предельные значения функций $\phi^+(z)$ и $\phi^-(z)$ соответственно из областей D_1 и D_2 .

Известно, что условие $\phi^+ = \phi^-$ на l определяет аналитическую функцию в области $D_1 \cup D_2 \cup l$. Этот факт позволяет нам переходить к изучению краевой задачи A и перевести ее к краевой задаче Гильберта со следующими данными:

$$\operatorname{Re} G_0 \phi|_\Gamma = g_0,$$

с коэффициентом $G_0 = G(e^\Omega)|_\Gamma$ и правой частью

$$g_0 = f - \operatorname{Re} [G(e^\Omega T e^{-\Omega} f)|_\Gamma],$$

и сформулировать ее решение в виде теоремы 5 в рассмотренном случае (а).

Переходим к второму случаю, когда $G_1(t) \neq 1$, $g_1(t) \neq 0$ для всех $t \in l$.

Теорема 6. При выполнении условий теоремы 1 задача \mathbf{R} является фредгольмовой в классе

$$\{u : e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})\} \quad (16)$$

и ее индекс равен

$$\operatorname{Ind} R = 1 - 2\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)|_\Gamma.$$

Более точно, все решения задачи \mathbf{R} в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой

$$u = e^\Omega [\phi + T(e^{-\Omega} f)],$$

где функция $\phi(z)$ определяется по формуле

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_l \frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t-z} + X(z)p(z), \quad p \in P_{-2\kappa}^0, \quad (17)$$

где каноническая функция X фигурирует в теореме 4 и функция g_1^* удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_\Gamma \frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)} p(t) dt = 0, \quad p \in P_{2\kappa-2}^0, \quad (18)$$

причем $g_1^* = g - \operatorname{Re} [\alpha e^\Omega (Tf_0)|_\Gamma] - \operatorname{Re} [GX_1\psi]|_\Gamma$,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{g_2(t)}{X_1^+(t)(t-z)} dt, \quad g_2 = g_1 - (1 - G_1)(Tf_0)|_l.$$

По теореме 1 общее решение u уравнения (2) в классе (16) представимо в виде

$$u = e^\Omega [\phi + T(e^{-\Omega} f)],$$

где аналитическая в $D \setminus l$ функция ϕ принадлежит $H(D_1 \cup D_2)$. Кроме того, в силу леммы 1, имеем $\Omega \in H(\Gamma)$. Поэтому, подставляя данное представление в (A) и (A), в результате для ϕ получим краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0 \phi|_\Gamma = g_0, \quad (\phi^+ - G_1 \phi^-)|_l = g_2, \quad (19)$$

с коэффициентом $G_0 = G(e^\Omega)|_\Gamma$ и правыми частями

$$g_0 = f - \operatorname{Re} [G(e^\Omega Tf_0)|_\Gamma], \quad g_2 = g_1 - (1 - G_1(t)f_0)|_l.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \arg G_0|_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \arg G|_\Gamma = \kappa. \quad (20)$$

Согласно хорошо известным свойствам интеграла типа Коши (см. [6]) функция

$$X_1(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\ln G_1(t)(t) dt}{t-z} \right), \quad z \in D_0 = D_1 \cup D_2, \quad (21)$$

принадлежит классу $H(\overline{D}_j)$, $j = 1, 2$, причем ее граничные значения $\ln X_1^\pm \in H(l)$ на окружности l удовлетворяет краевому условию $X_1^+ = G_1 X_1^-$. Поэтому второе краевое условие в (19) можно записать в виде

$$\frac{\phi^+}{X_1^+} - \frac{\phi_1^-}{X_1^-} = \frac{g_2}{X_1^+}.$$

Функция

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{g_2(t)}{X_1^+(t)(t-z)} dt$$

принадлежит классу $H(\overline{D}_j)$, $j = 1, 2$, и удовлетворяет краевому условию

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = \frac{g_2(t)}{X_1^+(t)}.$$

Следовательно, разность

$$\phi_1(z) = \frac{\phi(z)}{X_1(z)} - \psi(z) \quad (22)$$

аналитична в области D и принадлежит классу $H(\overline{D})$. В результате подстановки (22) в первое условие (18) приводит к эквивалентной задаче Римана–Гильберта

$$\operatorname{Re}(\alpha_1 \phi_1)|_\Gamma = f_1,$$

где $\alpha_1 = G_0 X_1|_\Gamma$ и $f_1 = f_0 - \operatorname{Re}[G_0 X_1 \psi]|_\Gamma$. Нетрудно видеть, что равенство (19) сохраняется и для G_1 . Положим

$$g_1^* = g - \operatorname{Re}[G(e^{\Omega T} e^{-\Omega} f)|_\Gamma] - \operatorname{Re}[G X_1 \psi]|_\Gamma, \quad (23)$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{g_2(t)}{X_1^+(t)(t-z)} dt, \quad g_2 = g_1 - (1 - G_1(t))[T(e^{-\Omega} f)]|_l.$$

Обратимся к общему случаю односвязной области D . Пусть простой контур $\Gamma \in C^{1,\mu}$; тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг \mathbb{D} принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ по условию $\omega(z_0) = 0$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. При выполнении условий теоремы 1 задача \mathbf{R} является фредгольмовой в классе

$$\{u : e^{-\Omega} u \in H(\overline{D})\}$$

и ее индекс

$$\operatorname{Ind} R = 1 - 2\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)|_\Gamma.$$

Более точно, в обозначениях теоремы 6 и (21), (23) все решения задачи \mathbf{R} в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой

$$u = e^{\Omega}(\phi + T f_0), \quad \phi(z) = X_1(z) \left[\frac{X(z)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{\omega'(t) dt}{\omega(t) - \omega(z)} + \psi(z) + X(z)p[\omega(z)] \right],$$

где $p \in P_{-2\kappa}^0$, а функции q, g_1^* удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_\Gamma \frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)] \omega'(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\kappa-2}^0.$$

5. Краевая задача для уравнения (1). Теперь рассмотрим выше рассмотренную задачу для общего уравнения (1).

Задача R₁. Найти регулярное решение u уравнения (1) в классе

$$e^{-\Omega}u \in H(\overline{D_j}), \quad j = 1, 2,$$

по краевым условиям

$$\operatorname{Re} G(t)u|_{\Gamma} = g(t), \quad t \in \Gamma; \tag{A}$$

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) = (e^{-\Omega}u)^-(t), \quad t \in l, \tag{B_0}$$

где знаки $+$ и $-$ указывают на граничные значения со стороны D_1 и D_2 .

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на ее данные:

- (i) $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$;
- (ii) коэффициент $G(t) \in H(\Gamma)$ всюду отличен от нуля;
- (iii) правая часть краевого условия удовлетворяет условию $g(t) \in H(\Gamma)$.

Для решения этой задачи используем теорему 3 об интегральном представлении решений уравнения (1).

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $f_0 = e^{-\Omega}f \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда задача **R** является фредгольмовой в классе $\{u, e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})\}$ и ее индекс равен $1 - 2\kappa$. Другими словами, однородная задача имеет конечное число m линейно независимых решений, неоднородная задача разрешима при выполнении некоторого числа m' условий ортогональности на правую часть f уравнения (1) и правой части g задачи **R₁**, причем $m - m' = 1 - 2\kappa$.

Доказательство. Подставляя представление (7) в задачу **R₁**, для аналитической функции ϕ вместе с дополнительными условиями

$$\operatorname{Re} \int_D (\phi + Tf_0)(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = 0, \quad 1 \leq j \leq n,$$

получим краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0(\phi + R\phi)|_{\Gamma} + \sum_1^n \xi_j \operatorname{Re}(G_0\varphi_j)|_{\Gamma} = g_0, \quad [(1 + P)\phi]^+ - [(1 + P)\phi]^- = g_1 \tag{24}$$

с коэффициентом $G_0 = Ge^h|_{\Gamma}$ и правыми частями

$$g_0 = g - \operatorname{Re} [G_0(f_0 + Pf_0)]|_{\Gamma}, \quad g_1 = [(1 + P)f_0]^+ - [(1 + P)f_0]^-.$$

Неизвестными в этой задаче вместе с ϕ являются и вещественные числа ξ_j .

Из теоремы 3 следует, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $P : C(\overline{D}) \rightarrow C^\varepsilon(\overline{D})$ ограничен, функция $f_0 \in H(\overline{D})$, а функция $\phi(z) \in H(\overline{D})$ аналитична в области D . Отсюда следует, что второе условие задачи (24) эквивалентно к $\phi^+(t) = \phi^-(t)$, $t \in l$. Это позволяет нам записать соотношения (24) в следующем операторном виде:

$$R^0\phi + P^0\phi + \sum_1^n \xi_j\varphi_j^0 = g^0, \quad \operatorname{Re} \int_D \phi(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = \eta_j, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{25}$$

где

$$R^0\phi = \operatorname{Re} G_0\phi|_{\Gamma}, \quad P^0\phi = \operatorname{Re} G_0(P\phi)|_{\Gamma}, \quad \varphi_j^0 = \operatorname{Re} G_0\varphi_j|_{\Gamma}, \quad g^0 = g_0, \quad \eta_j = -\operatorname{Re} \int_D f_0(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta.$$

Обозначим X банахово пространство функций ϕ , которые аналитичны в D и принадлежат $H(\overline{D})$. Пусть $Y^0 = H(\Gamma)$ — пространство вещественных функций. Тогда при достаточно малом показателе Гельдера μ оператор $R^0 : X \rightarrow Y^0$ ограничен, а с учетом теоремы 3 оператор $P^0 : X \rightarrow Y^0$ компактен. Как видно из теоремы 8, оператор $R^0 : X \rightarrow Y^0$ фредгольмов и его индекс равен $1 - 2\kappa$, поэтому на основании известных свойств (см. [7, 10]) фредгольмовых операторов это же

верно и для оператора $N = (R^0 + P^0)$. С другой стороны, оператор системы (25) можно рассматривать как ограниченный оператор $\tilde{N} : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow Y^0 \times \mathbb{R}^n$, главная часть которого совпадает с N . Поэтому (см. [7, 10]) оператор \tilde{N} также фредгольмов и его индекс $\text{Ind } \tilde{N} = \text{Ind } N = 1 - 2\kappa$. Остается заметить (см. [6]), что система (25) эквивалентна исходной задаче \mathbf{R}_1 . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берс Л., Джонс Ф., Шефтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
3. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
5. Михайлов Л. Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе, 1963.
6. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
7. Пале Р. Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
8. Раджабов Н. Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
9. Солдатов А. П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — 43, № 1. — С. 184–202.
10. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63, № 1. — С. 1–189.
11. Усманов З. Д. Обобщенные системы Коши—Римана с сингулярной точкой. — Душанбе: Изд-во АН Тадж. ССР, 1993.
12. Abdymanapov S. A., Tungatarov A. B. Some classes of elliptic systems in the plane with singular coefficients. — Almaty: Nauka, 2005.
13. Begehr H., Dao-Qing Dai. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equations. — 2004. — 196. — P. 67–90.
14. Mezzani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex Var. Ellipt. Equations. — 2008. — 53. — P. 1111–1130.
15. Rasulov A. B. Representation of the general solution of an equation of the Cauchy–Riemann type with a supersingular circle and a singular point // Differ. Equations. — 2017. — 53. — P. 809–817.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Расулов Абдурауф Бабаджанович (Rasulov Abdurauf Babadzhanovich)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(Russian National Research University “Moscow Power Engineering Institute,” Moscow, Russia)
E-mail: rasulzoda55@gmail.com, RasulovAB@mpei.ru

Федоров Юрий Сергеевич (Fedorov Yurii Sergeevich)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(Russian National Research University “Moscow Power Engineering Institute,” Moscow, Russia)
E-mail: FedorovYS@mpei.ru

Сергеева Анна Марковна (Sergeeva Anna Marksovna)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(Russian National Research University “Moscow Power Engineering Institute,” Moscow, Russia)
E-mail: hmelevs@ya.ru, HmelevsAM@mpei.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 99–121
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-99-121

УДК 517.958, 517.956.32,

ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА

© 2024 г. В. С. РЫХЛОВ

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача в полуполосе для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с ненулевым потенциалом. Рассматриваемое уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматриваются общие начальные условия (ненулевой профиль струны и ненулевая начальная скорость точек струны) и закрепленные концы (условия Дирихле). Сформулированы теоремы о существовании и единственности решения и получены формулы для решения.

Ключевые слова: уравнение с частными производными, ненулевой потенциал, волновое уравнение, гиперболическое уравнение, смешанная производная, обобщенное решение.

GENERALIZED SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE AND A GENERAL POTENTIAL

© 2024 V. S. RYKHLOV

ABSTRACT. We study the initial-boundary-value problem in a half-strip for a second-order inhomogeneous hyperbolic equation with constant coefficients and a nonzero potential containing a mixed derivative. The equation considered is the equation of transverse vibrations of a moving finite string. The problems with general initial conditions (nonzero string profile and nonzero initial velocity of string points) and fixed ends (Dirichlet conditions) are examined. Theorems on the existence and uniqueness of a solution are formulated and formulas for the solution are obtained.

Keywords and phrases: partial differential equation, nonzero potential, wave equation, hyperbolic equation, mixed derivative, generalized solution.

AMS Subject Classification: 35L20

1. Постановка задачи, история вопроса, определения и вспомогательные результаты. Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (1.3)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, все функции, входящие в (1.1)–(1.3), комплекснозначные.

Рассматривается случай волнового или гиперболического уравнения (1.1), т.е. выполняется условие

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) в области Q при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т.е. на функции $\varphi(x), \psi(x), f(x, t)$.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад (см. [50–52]).

Излагаемые в данной статье результаты получены с использованием резольвентного и аксиоматического методов решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуплоскости плоскости, предложенных А. П. Хромовым и наиболее просто описанных в [38, 39]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [1, 2, 4–7, 9, 28–35, 40–48]. Этот подход использует идеи А. Н. Крылова [8] об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера [49] о расходящихся рядах.

Аналогичный подход решения начально-граничных задач в полуплоскости плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [10–14].

Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [15–20].

Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [21, 22].

В зависимости от того, как будет пониматься решение задачи (1.1)–(1.3), накладываются различные требования на функции $\varphi(x), \psi(x)$ и $f(x, t)$.

Далее будем говорить, что функция $f(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$ есть функция класса \mathcal{Q} , если $f(x, t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$, и будем кратко писать $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Определение 1.1. Классическим решением задачи (1.1)–(1.3) называется функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая

- (а) непрерывна вместе с частными производными $\partial u(x, t)/\partial x$ и $\partial u(x, t)/\partial t$, при этом $\partial u(x, t)/\partial x$ и $\partial u(x, t)/\partial t$ абсолютно непрерывны и по x , и по t , и почти всюду (п.в.) в Q выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x}; \quad (1.4)$$

- (б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q .

Отметим, что необходимость в условии (1.4) обусловлена тем, что в случае, когда $\partial^2 u(x, t)/\partial x \partial t$ и $\partial^2 u(x, t)/\partial t \partial x$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры (см. [36]).

Определение 1.2. Задачу (1.1)–(1.3), в которой ищется классическое решение, будем называть *классической начально-граничной задачей*.

Для классической задачи (1.1)–(1.3) по необходимости должны выполняться следующие условия (условия (N)):

- (N_1) гладкость: $\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)$ абсолютно непрерывны, функция $f(x, t)$ класса \mathcal{Q} ;
 (N_2) согласование: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Если условия (N) не выполняются, то речь о классическом решении уже не может идти. Возникает вопрос, как понимать эту задачу и ее решение.

Определение 1.3. Задачу (1.1)–(1.3), в которой $f(x, t) \in \mathcal{Q}$, а $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, будем называть обобщённой начально-граничной задачей.

Определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3) будет дано далее в разделе 2.

Обобщённая начально-граничная задача (1.1)–(1.3) является одним из наиболее сильных обобщений классической начально-граничной задачи. Внешний вид ее такой же, как и у классической задачи, но смысл совсем другой. В случае, когда $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in \mathcal{Q}$, задача (1.1)–(1.3) понимается чисто формально, так как ни о каком удовлетворении решения уравнению (1.1), граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3) речь уже не может идти.

С задачей (1.1)–(1.3) тесно связана спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \tag{1.5}$$

порожденная оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой следующим дифференциальным выражением с параметром λ :

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \tag{1.6}$$

и краевыми условиями типа Дирихле:

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \tag{1.7}$$

Пусть R_λ — резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ — её функция Грина. Обозначим через $R_{1\lambda}$ интегральный оператор с ядром $G_\xi(x, \xi, \lambda)$.

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ рассмотрим систему решений

$$y_1(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ (см. [23] имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega_1} & e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1}; \tag{1.8}$$

его корни, очевидно, равны

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1.9}$$

и $\lambda_0 = 0$. Эти числа, кроме точки λ_0 , являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число λ_0 , как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \tag{1.10}$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{1.11}$$

В случае (1.10) соответствующая спектральная задача (1.5) является регулярной по Биркгофу (см. [23, с. 66–67]), а в случае (1.11) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (1.10). Нерегулярный случай рассмотрен, в частности, в [25, 26].

2. Определение обобщённого решения и формула для него. Для того, чтобы дать определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3), сформулируем теорему о единственности классического решения и представлении решения в виде ряда (см. [27]).

Теорема 2.1. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1.1)–(1.3), выполняются условия (N), (1.10) и дополнительное условие: $u_{tt}(x, t) \in \mathcal{Q}$, то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \tag{2.1}$$

в которой ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Так как ряд справа в формуле (2.1) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$, то этот ряд равен сумме рядов, соответствующих каждому слагаемому суммы, стоящей во внутренних круглых скобках. Ряды в формуле (2.1), соответствующие первому и второму слагаемым, обозначим $u_{11}(x, t)$ и $u_{12}(x, t)$ соответственно. Пусть $u_1(x, t) = u_{11}(x, t) + u_{12}(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1.1)–(1.3), в которой $\psi(x) \equiv 0$ и $f(x, t) \equiv 0$. Ряд, соответствующий третьему слагаемому во внутренних скобках формулы (2.1), обозначим $u_2(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1.1)–(1.3), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ и $f(x, t) \equiv 0$. Ряд в формуле (2.1), соответствующий четвертому слагаемому, обозначим $u_3(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1.1)–(1.3), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$. Следовательно, классическое решение $u(x, t)$ можно представить в виде

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t). \quad (2.2)$$

Из теоремы 2.1 следует, что задача (1.1)–(1.3) и ряд справа в (2.1) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (2.1). При этом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны удовлетворять условиям (N). Следуя методу, используемому в [38, 39], расширим понятие этой связи.

Ряд справа в (2.1) имеет смысл для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in \mathcal{Q}$, хотя теперь он может и не быть сходящимся, т.е., вообще говоря, расходящимся. Будем считать, что он является формальным решением задачи (1.1)–(1.3), но понимаемой теперь чисто формально. Эта задача (1.1)–(1.3) в случае $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, в определении 1.3 была названа обобщенной начально-граничной задачей. Введём понятие обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3).

Определение 2.1. В случае $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ будем называть ряд справа в (2.1) обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3).

Найти обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) — значит найти «сумму» ряда справа в (2.1) (слово «сумма» в кавычках означает, что это сумма понимается именно как сумма расходящегося ряда).

Трактуя ряд справа в формуле (2.1) изначально как расходящийся и соответствующим образом определяя (или, другими словами, назначая) «сумму» этого ряда можно, как и в [38, 39], значительно сократить выкладки при получении конечных формул для обобщенного решения и при этом не накладывать никаких дополнительных ограничений на $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$, предполагая лишь, что $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Понятия, касающиеся расходящихся рядов, а именно, как понимать их суммы (можно их определять по-разному), каким естественным свойствам эти суммы должны удовлетворять, чтобы с их помощью можно было получать «правильные» результаты, как использовать расходящиеся ряды в математике и приложениях, а также другие связанные с этим явлением понятия активно обсуждали еще во времена Эйлера (см. [49]), который является основоположником теории суммирования таких рядов. Сведения об этом можно найти в [37].

Для получения конечных формул для обобщённого решения важнейшую роль играют введенные в [37, с. 19] естественные аксиомы для преобразования расходящихся рядов:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \sum a_n = s \implies \sum k a_n = k s; \\ \text{(B)} \quad & \sum a_n = s, \sum b_n = t \implies \sum (a_n + b_n) = s + t; \\ \text{(C)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0. \end{aligned}$$

В [33] показано, что с использованием этих аксиом ряд справа в (2.1) сводится к сумме конечного числа рядов вида

$$\sum_k a_k e^{2k\pi i x}, \quad \text{где} \quad a_k = \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi, \quad (2.3)$$

а функция $f(x) \in L_1[0, 1]$ выражается по простым формулам через функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$ и суммируема в том и только в том случае, когда суммируемы функция $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Таким образом, чтобы найти формулу для обобщённого решения, необходимо определить «сумму» ряда (2.3). Наиважнейшую роль в этом играет [24, теорема 3] об интегрировании тригонометрического ряда. Эта теорема потребуется далее в следующей формулировке.

Теорема 2.2. Пусть на промежутке $[0, 1]$ задана суммируемая функция $f(x)$, имеющая ряд (2.3) своим рядом Фурье. Если $[A, B] \subset [0, 1]$, то

$$\int_A^B f(x) dx = \sum_k \int_A^B a_k e^{2k\pi i x} dx.$$

После формулировки этой теоремы в [24, с. 277] отмечено: «Иначе говоря, ряд Фурье суммируемой функции можно почленно интегрировать. Этот факт весьма замечателен, поскольку сам этот ряд может и не сходиться».

По сути эта теорема разрешает для тригонометрического ряда переставлять суммирование и интегрирование, даже если ряд расходится. Ввиду этого, в [38, 39] было предложено дополнить сформулированные выше три аксиомы для расходящихся рядов еще одной аксиомой:

(D) $\int \sum = \sum \int$, где \int — определенный интеграл.

Используя теорему 2.2 (или иначе аксиому **(D)**), можно определить «сумму» расходящегося ряда (2.3). Справедливо следующее простое утверждение, полученное в [38, 39].

Теорема 2.3. Если (2.3) — ряд Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ и его сумма есть функция $g(x) \in L_1[0, 1]$, то п.в. на $[0, 1]$ $g(x) = f(x)$.

Как указано в [37, с. 6-7], расходящиеся ряды не имеют суммы в обычном смысле (по Коши, как предела его частичных сумм), однако можно дать новое определение «суммы» ряда (иными словами, назначить «сумму»), применимое как ко всем сходящимся рядам, так и к некоторым расходящимся рядам. При этом от определения нужно требовать, чтобы для сходящихся рядов новая «сумма» совпадала с обычной (по Коши), т.е. определение «суммы» должно быть *регулярным*.

Из теоремы 2.3 следует, что функцию $f(x)$ можно назначить «суммой» ряда (2.3), которая очевидно является регулярной. Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 2.2. Если (2.3) — ряд Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$, то эту функцию будем называть «суммой» ряда (2.3).

Это вполне согласуется с идеей Л. Эйлера (см. [49, с. 101]), что «сумма» некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого вытекает этот ряд.

На основании аксиом **(A)**, **(B)** получаем, что для обобщенного решения (2.1) справедливо представление (2.2). Более того, для каждого ряда в сумме справа в (2.2) можно найти его «сумму» и, тем самым, получить конечную формулу для обобщённого решения (2.1).

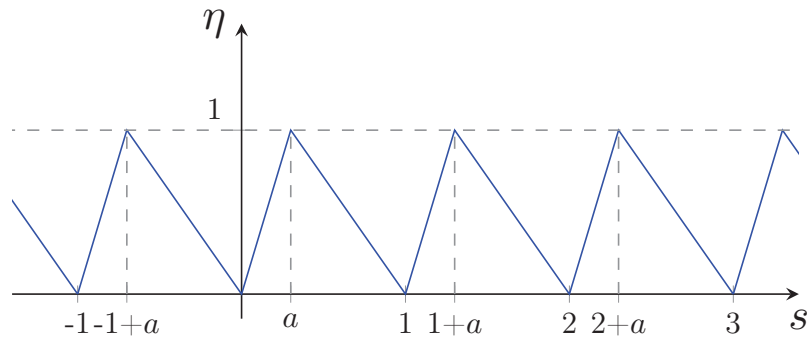
Приведем конечную формулу для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3), полученную в [33, 34], которая потребуется в дальнейшем изложении. Чтобы сформулировать этот результат, введем необходимые обозначения:

$$\Psi(x) := \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad F(x, t) := \int_0^x f(\xi, t) d\xi, \tag{2.4}$$

$$a := \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \alpha \equiv \alpha(x, t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta \equiv \beta(x, t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1},$$

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \begin{cases} \omega_2 \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \omega_1 \varphi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} \quad \widetilde{\Psi}(\xi) := \begin{cases} \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} \tag{2.5}$$

$$v(x, t) := \zeta(\{\alpha(x, t)\}) - \zeta(\{\beta(x, t)\}), \quad \zeta(x) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} (\widehat{\varphi}(x) - \omega_1 \omega_2 \widetilde{\Psi}(x)); \tag{2.6}$$

Рис. 1. Функция $\eta(s)$.

здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Теперь можно сформулировать теорему о конечной формуле для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3). Формула для решения дана в удобном для дальнейшего применения виде.

Теорема 2.4. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ и пусть выполняется условие (1.10). Тогда для обобщённого решения $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3) имеет место следующая формула для п.в. $(x, t) \in Q$:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} f(\xi, \tau) d\xi, \quad (2.7)$$

где

$$\eta(s) = \frac{\{s\}}{a} \chi(a - \{s\}) + \frac{1 - \{s\}}{1 - a} \chi(\{s\} - a) \quad (2.8)$$

является непрерывной кусочно линейной функцией при $s \in (-\infty, +\infty)$ (см. рис. 1) и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \eta(s) \leq 1. \quad (2.9)$$

3. Обобщённые решения в случае ненулевого потенциала. В данном разделе будут рассмотрены две начально-граничные задачи с потенциалом q . Первая задача с потенциалом $q = q(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = q(x)u(x, t), \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3.3)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; функции, входящие в (3.1)–(3.3), комплекснозначные, $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x) \in L_1[0, 1]$ и $q(x)u(x, t) \in \mathcal{Q}$, а вторая задача с потенциалом $q = q(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t)u(x, t), \quad (3.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (3.5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3.6)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; функции, входящие в (3.4)–(3.6), комплекснозначные, $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x, t) \in \mathcal{Q}$ и $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Как понимается обобщённое решение задач (3.1)–(3.3) и (3.4)–(3.6), будет пояснено далее.

3.1. *Обобщённое решение в случае потенциала $q(x)$.* В этом разделе будем рассматривать начально-граничную задачу (3.1)–(3.3). Применим к решению задачи подход, предложенный для потенциала $q = q(x)$ в [5, 38, 39] (в случае $p_1 = 0$), и обобщённый затем в [31, 33] (в случае $p_1 \neq 0$). Так же, как и в [5, 31, 33, 38, 39], будем считать правую часть $q(x)u(x, t)$ в уравнении (3.1) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.4 от задачи (3.1)–(3.3) приходим к интегральному уравнению:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi)u(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.7)$$

Отметим, что такой подход к построению обобщённого решения задачи (3.1)–(3.3) при наших предположениях относительно исходных данных задачи, состоящий в сведении задачи (3.1)–(3.3) к интегральному уравнению типа (3.7) и затем решения этого уравнения методом последовательных подстановок, был впервые использован в [5].

Таким образом, задача (3.1)–(3.3) и интегральное уравнение (3.7) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (3.7) функции $v(x, t)$ и $q(x)$ могут быть самого общего вида. А именно, $v(x, t)$ может быть функцией класса \mathcal{Q} , что верно при самых общих предположениях $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, и функция $q(x)$ также может быть самого общего вида, т.е. $q(x) \in L_1[0, 1]$, но при условии, что произведение $q(x)u(x, t) \in \mathcal{Q}$. Естественно дать следующее определение.

Определение 3.1. Будем называть решение $u(x, t)$ интегрального уравнения (3.7), в котором $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$, но при этом $q(x)u(x, t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (3.1)–(3.3), а саму задачу (3.1)–(3.3) — *обобщённой начально-граничной задачей*.

Решим уравнение (3.7). Для этого введем оператор

$$(\mathcal{B}f)(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi)f(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.8)$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{B}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Очевидно оператор \mathcal{B} есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ будем обозначать B . С использованием этого оператора уравнение (3.7) кратко можно записать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + (Bu)(x, t). \quad (3.9)$$

Лемма 3.1. *Оператор B является линейным ограниченным оператором из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ и при $n \geq 1$ имеют место оценки*

$$|(B^n f)(x, t)| \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!} \quad \forall (x, t) \in Q_T; \quad (3.10)$$

$$\|(B^n f)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T \|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!}, \quad (3.11)$$

где $\omega_* = \min\{|\omega_1|, \omega_2\}$.

Доказательство. Линейность оператора B очевидна. Далее, если $f(x, t) \in C(Q_T)$, то из формулы для оператора \mathcal{B} и его сужения на $C(Q_T)$ непосредственно следует, что функция $(Bf)(x, t)$ также непрерывна.

Неравенства (3.11) являются прямым следствием неравенств (3.10). Поэтому, достаточно установить лишь неравенства (3.10). Воспользуемся принципом математической индукции.

При $n = 1$ из определения оператора B будем иметь

$$|(Bf)(x, t)| \leq \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi)| |f(\xi, \tau)| d\xi \right|.$$

Учитывая неравенства (2.9) для функции $\eta(s)$ и определение ω_* , далее получим при $(x, t) \in Q_T$

$$|(Bf)(x, t)| \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |f(\xi, \tau)| d\xi \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right) \frac{1}{1!}.$$

Это и есть оценка (3.10) при $n = 1$, из которой непосредственно вытекает оценка (3.11) при $n = 1$, а это означает, что оператор B является ограниченным в $C(Q_T)$.

Предположим, что оценка (3.10) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что она выполняется и при $n + 1$. В самом деле, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |(B^{n+1}f)(x, t)| &= |B(B^n f)(x, t)| = \\ &= \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \left| \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) (B^n f)(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |(B^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \int_0^t \frac{\tau^n}{n!} d\tau \int_0^1 |q(\xi)| d\xi = \\ &= \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}; \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.10) в случае $n + 1$. Тем самым, оценка (3.10), а следовательно, и оценка (3.11), установлены для всех $n \geq 1$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.2. Если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, то и $\zeta(x) \in L_1[0, 1]$ и выполняется оценка

$$\|\zeta(x)\|_{L_1[0,1]} \leq C_T \left(\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]} \right), \quad (3.12)$$

где постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. На основании формулы (2.6) имеет место оценка

$$\|\zeta(x)\| \leq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\|\widehat{\varphi}(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\widetilde{\Psi}(x)\|_{L_1[0,1]} \right). \quad (3.13)$$

Далее, из определений (2.5) функции $\widehat{\varphi}(x)$ и функции $\widetilde{\Psi}(x)$ получаем соотношения

$$\|\widehat{\varphi}(x)\|_{L_1[0,1]} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_2 - \omega_1} \|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]}, \quad \|\widetilde{\Psi}(x)\|_{L_1[0,1]} = \|\Psi(x)\|_{L_1[0,1]} \leq \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.14)$$

Из (3.13)–(3.14) тогда следует утверждение леммы (3.13). Тем самым лемма 3.2 установлена. \square

Введем теперь пока чисто формально функцию

$$w(x, t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) v(\xi, \tau) d\xi (= (\mathcal{B}v)(x, t)). \quad (3.15)$$

Ввиду специальной структуры этой функции справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3. Если $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$, то $w(x, t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$ и выполняется оценка

$$\|w(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \left(\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]} \right), \quad (3.16)$$

где постоянная C_T не зависит от $q(x), \varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Из леммы 3.2 в случае, если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, следует, что $\zeta(x) \in L_1[0, 1]$. Далее, с учетом формулы (2.6) для $v(x, t)$ можно получить следующее представление для $w(x)$:

$$\begin{aligned} w(x, t) &:= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) \left(\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) - \zeta(\{\beta(\xi, \tau)\}) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} (K_1(x, t) - K_2(x, t)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Проведем дальнейшие рассуждения только для $K_1(x, t)$, так как для $K_2(x, t)$ рассуждения аналогичны. Итак, докажем непрерывность функции

$$K_1(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) d\xi \quad (3.18)$$

в области Q_T . Так как $\eta(s)$ — непрерывная функция (теорема 2.4), а $\alpha(x, t - \tau)$ и $\beta(x, t - \tau)$ — линейные функции своих аргументов, то область интегрирования $Q(x, t)$ в интеграле (3.18) является измеримым множеством при всех $(x, t) \in Q_T$ и ее мера Лебега есть непрерывная функция по x и t . Таким образом, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301]), чтобы доказать непрерывность функции $K_1(x, t)$, достаточно установить суммируемость функции $q(\xi)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T .

Лемма 3.4. Функция $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ есть измеримая функция в Q_T .

Доказательство. Обозначим $\check{\zeta}(s) := \zeta(\{s\})$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) \equiv \check{\zeta}(\alpha(\xi, \tau)).$$

Так как $(\xi, \tau) \in Q_T$, то

$$0 \leq \alpha(\xi, \tau) \equiv \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \leq \frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} =: b_T.$$

Поскольку из определения (2.6) видно, что $\zeta(s)$ — измеримая функция на $[0, 1]$ (ввиду измеримости функций $\hat{\varphi}(x)$ и $\tilde{\Psi}(x)$), то и функция $\check{\zeta}(s)$ также будет измеримой функцией на любом конечном отрезке, в частности на $[0, b_T]$. Это следует из того, что $\check{\zeta}(s)$ есть 1-периодическая функция на всей вещественной оси и на каждом промежутке $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, совпадает с измеримой функцией $\zeta(s - k)$. Следовательно, по определению измеримой по Лебегу функции измеримыми будут линейные (или, что то же самое, одномерные) множества

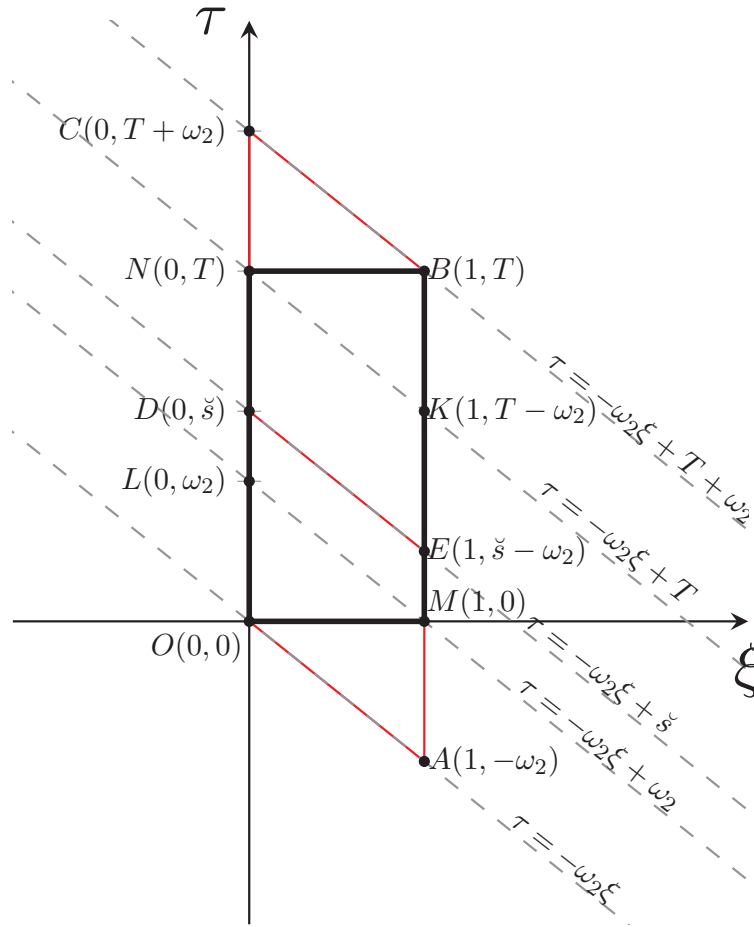
$$Y_{Tc} := \{s \in [0, b_T] \mid \check{\zeta}(s) < c\} \quad (3.19)$$

при любом $c > 0$. Зафиксируем T и c и для краткости обозначим $Y := Y_{Tc}$. Таким образом, для доказательства измеримости по Лебегу в Q_T функции двух переменных $\check{\zeta}(\alpha(\xi, \tau))$ нужно доказать измеримость по Лебегу плоского (или, что то же самое, двумерного) множества

$$\mathcal{Y} := \mathcal{Y}_{Tc} = \left\{ (\xi, \tau) \in Q_T \mid \check{\zeta}\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) < c \right\}.$$

С учетом (3.19) это множество можно представить в виде

$$\mathcal{Y} = \left\{ (\xi, \tau) \in Q_T \mid \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} = s, s \in Y \right\} = \left\{ (\xi, \tau) \in Q_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in \check{Y} := (\omega_2 - \omega_1)Y \right\}.$$

Рис. 2. Множества Q_T и \check{Q}_T .

Ясно, что множество $\check{Y} \subset [0, T + \omega_2]$ есть измеримое линейное множество, так как измеримо множество Y .

Докажем прежде измеримость не множества \mathcal{Y} , а множества

$$\check{Y} = \{(\xi, \tau) \in \check{Q}_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in \check{Y}\},$$

где множество \check{Q}_T — параллелограмм $OABC$ на рис. 2. На этом же рисунке изображено множество Q_T — прямоугольник $OMBN$.

По определению измеримого по Лебегу линейного множества (см. [24, с. 68]) и определения внутренней меры μ_{1*} , внешней меры μ_1^* и просто линейной меры Лебега μ_1 (см. [24, с. 65]) справедливы соотношения

$$\sup_{F \subset \check{Y}} \mu_1 F = \mu_{1*} \check{Y} = \mu_1 \check{Y} = \mu_1^* \check{Y} = \inf_{G \supset \check{Y}} \mu_1 G, \quad (3.20)$$

где \inf берется по всевозможным замкнутым ограниченным множествам F , а \inf — по всевозможным открытым ограниченным множествам G . Следовательно, существуют такие последовательность замкнутых множеств

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots \subset \check{Y}$$

и последовательность открытых множеств

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots \supset \check{Y}$$

что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 F_n = \mu_1 \check{Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 G_n. \quad (3.21)$$

Введем множества

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \{(\xi, \tau) \in \text{cl } \check{Q}_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in F_n\}, \\ \mathcal{G}_n &= \{(\xi, \tau) \in \text{int } \check{Q}_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in G_n\}, \end{aligned}$$

которые являются соответственно замкнутыми и открытыми и для которых справедливы вложения

$$\check{\mathcal{F}}_1 \subset \check{\mathcal{F}}_2 \subset \dots \subset \check{\mathcal{F}}_n \subset \dots \subset \check{Y}, \quad \check{\mathcal{G}}_1 \supset \check{\mathcal{G}}_2 \supset \dots \supset \check{\mathcal{G}}_n \supset \dots \supset \check{Y}.$$

Ясно (см. рис. 2), что наряду с точкой $\check{s} \in \check{Y} \subset [0, T + \omega_2]$ плоскому множеству \check{Y} принадлежит и весь отрезок DE прямой $\tau = -\omega_2 \xi + \check{s}$, для точек которого $(\xi, \tau) \in \check{Q}_T$. Аналогично обстоит дело и для плоских множеств \mathcal{F}_n и \mathcal{G}_n , определяемых линейными множествами F_n и G_n соответственно.

Учитывая формулу для подсчета площади параллелограмма и тот факт, что по построению замкнутые множества \mathcal{F}_n и открытые множества \mathcal{G}_n суть объединения некоторого количества замкнутых и открытых параллелограммов, имеющих единичные высоты, получим

$$\mu_2 \mathcal{F}_n = \mu_1 F_n \cdot 1 = \mu_1 F_n, \quad \mu_2 \mathcal{G}_n = \mu_1 G_n \cdot 1 = \mu_1 G_n,$$

где μ_2 обозначает плоскую меру Лебега. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \mathcal{F}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 F_n = \mu_1 \check{Y}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \mathcal{G}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 G_n = \mu_1 \check{Y}.$$

Но тогда

$$\mu_1 \check{Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \mathcal{F}_n \leq \sup_{\mathcal{F} \subset \check{Y}} \mu_2 \mathcal{F} = \mu_{2*} \check{Y} \leq \mu_2^* \check{Y} = \inf_{\mathcal{G} \supset \check{Y}} \mu_2 \mathcal{G} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \check{\mathcal{G}}_n = \mu_1 \check{Y};$$

следовательно, \check{Y} есть измеримое по Лебегу плоское множество.

Измеримость множества \mathcal{Y} является следствием того, что $\mathcal{Y} = \check{Y} \cap Q_T$, т.е. является пересечением измеримых множеств (см. [3, с. 257]). Итак, измеримость функции $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T установлена и лемма 3.4 доказана. \square

Если $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ измерима в Q_T , то произведение $q(\xi)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ — также измеримая функция в Q_T как произведение измеримых функций (см. [3, с. 283]).

Справедливы неравенства

$$|K_1(x, t)| \leq \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi \right| \leq \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi =: K_{1T}'. \quad (3.22)$$

Далее, имеют место равенства

$$\begin{aligned} K_{1T}'' &:= \int_0^1 d\xi \int_0^T |q(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \\ &= \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_0^T |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Делая в интеграле по τ замену переменной интегрирования

$$s = \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \longrightarrow d\tau = (\omega_2 - \omega_1) ds,$$

получим, учитывая 1-периодичность функции $\check{\zeta}(s)$,

$$\begin{aligned}
K''_{1T} &= (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_{\frac{\omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{T + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \\
&\leq 2\omega^* \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_0^{\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq 2\omega^* \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \int_0^{\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1} |\check{\zeta}(s)| ds = \\
&= 2\omega^* \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1 \right) \int_0^1 |\zeta(s)| ds \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \|\zeta(x)\|_{L_1[0,1]}, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

где $\omega^* := \max\{|\omega_1|, \omega_2\}$, а $[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$. Используя полученную в лемме 3.2 оценку (3.12), будем иметь

$$K''_{1T} \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.24)$$

Отсюда на основании теоремы Фубини (см. [24, теорема 2, с. 235]) следует суммируемость функции $q(\xi)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T и справедливость равенства $K'_{1T} = K''_{1T}$. С учетом (3.22) и (3.24), получим

$$|K_1(x, t)| \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.25)$$

Следовательно, функция $q(\xi)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ суммируема в Q_T , а из этого следует непрерывность функции $K_1(x, t)$, как уже было отмечено, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301]). Аналогичными рассуждениями устанавливается непрерывность функции $K_2(x, t)$ и аналогичная (3.25) оценка

$$|K_2(x, t)| \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.26)$$

Следовательно, на основании представления (3.17) отсюда получаем непрерывность функции $w(x, t)$ в любом Q_T .

Из оценок (3.25)–(3.26) на основании формулы (3.17) вытекает оценка (3.16). Лемма 3.3 полностью доказана. \square

Так как $w(x, t) \in C(Q_T)$ по лемме 3.3, то можно образовать ряд

$$W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (B^n w)(x, t). \quad (3.27)$$

Определение 3.2. Будем говорить, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится не медленнее γ -экспоненциального ряда ($\gamma > 0$), если при некоторой константе $C > 0$ и при всех n будет $|a_n| \leq C^n / (n!)^\gamma$. 1-экспоненциальный ряд — это обычный экспоненциальный ряд.

Теорема 3.1. Если $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (1.10), то ряд (3.27) сходится абсолютно и равномерно в пространстве $C(Q_T)$ к непрерывной функции $W(x, t)$, при этом сходимость ряда не медленнее экспоненциального, и функция

$$u(x, t) = v(x, t) + W(x, t) \quad (3.28)$$

является единственным обобщённым решением задачи (3.1)–(3.3).

Доказательство. В доказательстве используются основные идеи доказательства аналогичного результата (см. [39, теорема 5]). Из оценок (3.11) следует, что ряд (3.27) с непрерывными членами абсолютно и равномерно сходится в Q_T , причем сходимость ряда не медленнее экспоненциально. Следовательно, $W(x, t)$ есть непрерывная функция в Q_T .

Рассмотрим функцию (3.28). Учитывая определение (3.27) функции $W(x, t)$, определение (3.15) функции $w(x, t)$, линейность операторов \mathcal{B} и B , а также ограниченность B на основании леммы 3.1, получим

$$\begin{aligned} u &= v + \sum_{n=0}^{\infty} B^n w = v + w + \sum_{n=1}^{\infty} B^n w = v + \mathcal{B}v + B \sum_{n=0}^{\infty} B^n w = \\ &= v + \mathcal{B}v + \mathcal{B} \sum_{n=0}^{\infty} B^n w = v + \mathcal{B} \left(v + \sum_{n=0}^{\infty} B^n w \right) = v + \mathcal{B}(v + W) = v + \mathcal{B}u, \end{aligned}$$

т.е. функция $u(x, t)$ вида (3.28) является решением уравнения (3.9).

Уравнение (3.9) нельзя рассматривать в пространстве $C(Q_T)$, так как $v(x, t)$ не является, вообще говоря, непрерывной функцией. Удобнее перейти к эквивалентному уравнению, действующему в $C(Q_T)$.

Лемма 3.5. *Функция $u(x, t)$ является решением интегрального уравнения (3.9) в том и только том случае, когда функция $r(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$ является решением интегрального уравнения*

$$r(x, t) := w(x, t) + (\mathcal{B}r)(x, t). \quad (3.29)$$

Доказательство. Докажем необходимость утверждения леммы. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (3.9). Положим $r(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$. Тогда справедливо представление

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x, t). \quad (3.30)$$

С учетом (3.30) уравнение (3.9) можно записать в виде

$$r(x, t) := (\mathcal{B}(v + r))(x, t),$$

а учитывая (3.15), отсюда получим, что $r(x, t)$ является решением уравнения (3.29).

Докажем теперь достаточность утверждения леммы. Пусть $r(x, t)$ — решение уравнения (3.29). Прибавим к обеим частям этого уравнения функцию $v(x, t)$ и, учитывая (3.30), в результате получим

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + (\mathcal{B}r)(x, t),$$

или

$$u(x, t) = v(x, t) + (\mathcal{B}v)(x, t) + (\mathcal{B}r)(x, t),$$

В силу линейности оператора \mathcal{B} отсюда найдем

$$u(x, t) = v(x, t) + (\mathcal{B}(v + r))(x, t).$$

Учитывая теперь представление (3.30), получим, что функция $u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$ является решением уравнения (3.9). Таким образом, лемма (3.5) доказана. \square

Так как $w(x, t) \in C(Q_T)$ в силу леммы (3.3), то рассматриваем уравнение (3.29) в пространстве $C(Q_T)$. Иными словами, $r(x, t)$ является решением уравнения

$$r(x, t) := w(x, t) + (Br)(x, t). \quad (3.31)$$

Это уравнение имеет решение $W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n w$. В самом деле, поскольку B есть линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$, то

$$(BW)(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B^n w)(x, t).$$

Отсюда следует, что функция $W(x, t)$ является решением уравнения (3.31).

Покажем, что решение уравнения (3.31) единственно. Допустим, что кроме $W(x, t)$ есть еще другое решение $\check{W}(x, t)$ этого уравнения. Тогда $z(x, t) := W(x, t) - \check{W}(x, t)$ — решение уравнения

$z(x, t) = (Bz)(x, t)$, а, значит, $z(x, t) = (B^n z)(x, t)$ при любом натуральном n . Тогда из (3.11) следует оценка

$$\|z(x, t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^n z)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|z(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T \|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получим $\|z(x, t)\|_{C(Q_T)} = 0$ или $W(x, t) \equiv \check{W}(x, t)$, т.е. единственным решением уравнения (3.31) является функция $W(x, t)$. Учитывая лемму 3.5, получаем, что уравнение (3.9) имеет единственное решение (3.28). Теорема 3.1 полностью доказана. \square

3.2. Обобщённое решение в случае потенциала $q(x, t)$. В этом разделе будем рассматривать начально-граничную задачу (3.4)–(3.6). Применим к решению этой задачи подход, предложенный в [7] для потенциала $q = q(x, t)$ (в случае $p_1 = 0$). Излагаемый далее результат анонсирован в [35]. Так же, как и в [7], будем считать правую часть $q(x, t)u(x, t)$ в уравнении (3.4) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.4 от задачи (3.4)–(3.6) приходим к интегральному уравнению

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.32)$$

Таким образом, задача (3.4)–(3.6) и интегральное уравнение (3.32) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (3.32) функции $v(x, t)$ и $q(x, t)$ могут быть самого общего вида, а именно, $v(x, t)$ может быть функцией класса \mathcal{Q} , что верно при самых общих предположениях относительно $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0, 1]$, и функция $q(x, t)$ также может быть функцией класса \mathcal{Q} , но при условии, что произведение $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{Q}$. Естественно дать следующее определение по аналогии с определением 3.1.

Определение 3.3. Будем называть решение $u(x, t)$ интегрального уравнения (3.32), в котором $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x, t) \in \mathcal{Q}$, но при этом $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (3.4)–(3.6), а саму задачу (3.4)–(3.6) — *обобщённой начально-граничной задачей*.

Решим уравнение (3.32). Для этого введем оператор

$$(\mathcal{D}f)(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.33)$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{D}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$. Очевидно, оператор \mathcal{D} есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ будем обозначать D . С использованием этого оператора уравнение (3.32) кратко можно записать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + (Du)(x, t). \quad (3.34)$$

Далее будут фигурировать два предположения относительно потенциала $q(x, t)$ для п.в. $(x, t) \in Q_T$ при любом фиксированном $T > 0$:

$$(i) \quad |q(x, t)| \leq q_T(x) \in L_1[0, 1]; \quad (ii) \quad |q(x, t)| \leq \check{q}(t) \in L_p[0, T], \quad p > 1. \quad (3.35)$$

Лемма 3.6. В случае выполнения условия (i) оператор D является линейным ограниченным оператором из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ и при $n \geq 1$ имеют место оценки

$$|(D^n f)(x, t)| \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!} \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad (3.36)$$

$$\|(D^n f)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!}. \quad (3.37)$$

Доказательство. Линейность оператора D очевидна. Далее, если $f(x, t) \in C(Q_T)$, то из формулы для оператора \mathcal{D} и его сужения D на $C(Q_T)$ непосредственно следует, что функция $(Df)(x, t)$ также непрерывна. Неравенства (3.37) являются прямым следствием неравенств (3.36). Поэтому достаточно установить лишь неравенства (3.36). Воспользуемся принципом математической индукции.

При $n = 1$ из определения оператора D будем иметь

$$|(Df)(x, t)| \leq \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \right|.$$

Учитывая неравенства (2.9) для функции $\eta(s)$, предположение (i) в (3.35) для $q(x, t)$ и определение ω_* , получим при $(x, t) \in Q_T$

$$\begin{aligned} |(Df)(x, t)| &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 q_T(\xi) d\xi \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right) \frac{1}{1!}. \end{aligned}$$

Это и есть оценка (3.36) при $n = 1$. Из этой оценки непосредственно вытекает оценка (3.37) при $n = 1$, а это означает, что оператор D является ограниченным в $C(Q_T)$.

Предположим, что оценка (3.36) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что она выполняется и при $n + 1$. В самом деле, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |(D^{n+1}f)(x, t)| &= |D(D^n f)(x, t)| = \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \left| \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) (D^n f)(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 q_T(\xi) |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \int_0^t \frac{\tau^n}{n!} d\tau \int_0^1 q_T(\xi) d\xi = \\ &= \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}; \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.36) в случае $n + 1$. Тем самым оценка (3.36) установлена для всех $n \geq 1$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.7. В случае выполнения условия (ii) оператор D является линейным ограниченным оператором из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ и при $n \geq 1$ имеют место оценки

$$|(D^n f)(x, t)| \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0,T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}}, \quad \forall (x, t) \in Q_T; \quad (3.38)$$

$$\|(D^n f)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0,T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}}, \quad (3.39)$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Доказательство. Линейность оператора D очевидна. Если $f(x, t) \in C(Q_T)$, то из формулы для оператора \mathcal{D} и его сужения D на $C(Q_T)$ непосредственно следует, что функция $(Df)(x, t)$ также непрерывна. Неравенства (3.39) являются прямым следствием неравенств (3.38). Поэтому достаточно установить лишь неравенства (3.38). Воспользуемся принципом математической индукции.

При $n = 1$ из определения оператора D будем иметь

$$|(Df)(x, t)| \leq \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \right|.$$

Учитывая неравенства (2.9) для функции $\eta(s)$, предположения (ii) в (3.35) для $q(x, t)$ и определение ω_* , далее получим при $(x, t) \in Q_T$, применив в конце неравенство Коши—Буняковского,

$$\begin{aligned} |(Bf)(x, t)| &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 |\check{q}(\tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t 1 \cdot \check{q}(\tau) d\tau \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t^{1/p'} \|q(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right) \frac{1}{(1!)^{1/p'}}; \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.38) при $n = 1$. Из этой оценки непосредственно вытекает оценка (3.39) при $n = 1$, а это означает, что оператор D является ограниченным в $C(Q_T)$.

Предположим, что оценка (3.38) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что она выполняется и при $n + 1$. В самом деле, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |(D^{n+1}f)(x, t)| &= |D(D^n f)(x, t)| = \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \left| \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) (D^n f)(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}} \int_0^t \tau^{n/p'} \check{q}(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]} t^{(n+1)/p'} \frac{1}{(n+1)^{1/p'}} = \\ &= \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right)^{n+1} \frac{1}{((n+1)!)^{1/p'}}; \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.36) в случае $n + 1$. Тем самым оценка (3.36) установлена для всех $n \geq 1$. Лемма 3.7 доказана. \square

Введем пока чисто формально функцию

$$\mathfrak{w}(x, t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau) d\xi = (\mathcal{D}v)(x, t). \quad (3.40)$$

Ввиду специальной структуры функции $\mathfrak{w}(x, t)$, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.8. Если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x, t) \in \mathcal{Q}$ и выполняется условие (i) или (ii) в (3.35), то $\mathfrak{w}(x, t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$. При этом в случае (i) выполняется оценка

$$\|\mathfrak{w}(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}), \quad (3.41)$$

где постоянная C_T не зависит от $q_T(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а в случае (ii) — оценка

$$\|\mathfrak{w}(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq C_T \|\check{q}(t)\|_{L_p[0,T]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}), \quad (3.42)$$

где постоянная C_T не зависит от $\check{q}(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Доказательство леммы повторяет во многом доказательство аналогичной леммы 3.4. Из леммы 3.2 в случае, если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, следует, что $\zeta(x) \in L_1[0, 1]$. Далее, с учетом формулы (2.6) можно получить следующее представление функции $\mathfrak{w}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}(x, t) &:= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) \left(\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) - \zeta(\{\beta(\xi, \tau)\}) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} (L_1(x, t) - L_2(x, t)). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Проведем дальнейшие рассуждения только для $L_1(x, t)$, так как для $L_2(x, t)$ рассуждения аналогичны. Итак, докажем непрерывность функции

$$L_1(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) d\xi \quad (3.44)$$

в области Q_T . Так как $\eta(s)$ есть непрерывная функция (теорема 2.4), а $\alpha(x, t - \tau)$ и $\beta(x, t - \tau)$ — линейные функции своих аргументов, то область интегрирования $Q(x, t)$ в интеграле (3.44) является измеримым множеством при всех $(x, t) \in Q_T$ и ее мера Лебега есть непрерывная функция по x и t . Таким образом, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301], чтобы доказать непрерывность функции $L_1(x, t)$, достаточно установить суммируемость функции $q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T .

В лемме 3.4 установлено, что функция $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ измерима в Q_T . Следовательно, $q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ — также измеримая функция в Q_T как произведение измеримых функций (см. [3, с. 283]). Справедлива оценка

$$|L_1(x, t)| \leq \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi, \tau)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi \right| \leq \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi. \quad (3.45)$$

Далее рассмотрим по отдельности два случая (i) и (ii) (см. (3.35)).

Пусть имеет место случай (i). Тогда из (3.45) получим

$$|L_1(x, t)| \leq \int_0^T d\tau \int_0^1 |q_T(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi =: L'_{1T}. \quad (3.46)$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\begin{aligned} L''_{1T} &:= \int_0^1 d\xi \int_0^T |q_T(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \\ &= \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_0^T |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_0^T \left| \check{\zeta}\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) \right| d\tau, \end{aligned}$$

где, как и раньше, $\check{\zeta}(s) := \zeta(\{s\})$, $s \in \mathbb{R}$. Делая в интеграле по τ замену переменной интегрирования

$$s = \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \longrightarrow d\tau = (\omega_2 - \omega_1) ds,$$

получим, учитывая 1-периодичность функции $\check{\zeta}(s)$,

$$\begin{aligned} L''_{1T} &= (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_{\frac{\omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{T + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \\ &\leq 2\omega^* \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_0^{\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq 2\omega^* \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} \int_0^{\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1} |\check{\zeta}(s)| ds = \\ &= 2\omega^* \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \right] + 1 \right) \int_0^1 |\zeta(s)| ds \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} \|\zeta(x)\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.47) \end{aligned}$$

С учетом оценки (3.12) из (3.47) следует

$$L''_{1T} \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.48)$$

Применяя теперь теорему Фубини (см. [24, теорема 2, с. 235]), отсюда получим, что функция $q(\xi, \tau)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ при выполнении условия (i) суммируема в Q_T и справедливо равенство $L'_{1T} = L''_{1T}$. На основании (3.46) и (3.47), будем иметь оценку

$$|L_1(x, t)| \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.49)$$

Из суммируемости функции $q(\xi, \tau)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T следует непрерывность функции $L_1(x, t)$, как уже было отмечено, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301]). Аналогичными рассуждениями устанавливаются оценка (3.49) для функции $L_2(x, t)$ и непрерывность $L_2(x, t)$ в Q_T . Таким образом, на основании представления (3.43) отсюда следует непрерывность функции $\mathfrak{w}(x, t)$ в любом Q_T .

Пусть теперь имеет место случай (ii). Тогда из (3.45) получим

$$\begin{aligned} |L_1(x, t)| &\leq \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi \leq \\ &\leq \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 |\check{\zeta}(\alpha(\xi, \tau))| d\xi = \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 \left| \check{\zeta}\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) \right| d\xi. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Делая в интеграле по ξ замену переменной интегрирования

$$s = \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \longrightarrow d\xi = \frac{1}{a} ds,$$

получим, учитывая 1-периодичность функции $\check{\zeta}(s)$, предположение $\check{q}(x) \in L_p[0, T]$ и неравенство Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned}
 |L_1(x, t)| &\leq \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_{\frac{\tau}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{\tau + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^{\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \\
 &\leq \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^{\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1} |\check{\zeta}(s)| ds = \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1 \right) \int_0^1 |\zeta(s)| ds \leq \\
 &\leq \frac{T^{1/p'}}{a} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]} \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1 \right) \|\zeta(s)\|_{L_1[0, 1]} \leq C_T \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]} \|\zeta(s)\|_{L_1[0, 1]}, \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

где постоянная C_T не зависит от $\check{q}(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Учитывая оценку (3.12) в (3.51), получим для всех $(x, t) \in Q_T$

$$|L_1(x, t)| \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0, 1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0, 1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0, 1]}). \quad (3.52)$$

На основании теоремы Фубини отсюда следует, что функция $q(\xi, \tau)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ при выполнении условия (ii) суммируема в Q_T . Из суммируемости этой функции следует непрерывность функции $L_1(x, t)$, как уже было отмечено, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Аналогичными рассуждениями устанавливаются оценка (3.52) для функции $L_2(x, t)$ и непрерывность $L_2(x, t)$ в Q_T . Следовательно, на основании представления (3.43) отсюда получаем непрерывность функции $\mathfrak{w}(x, t)$ в любом Q_T и при выполнении условия (ii). Лемма 3.8 полностью доказана. \square

Так как $\mathfrak{w}(x, t) \in C(Q_T)$ согласно лемме 3.8, то можно образовать ряд

$$\mathcal{W}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n \mathfrak{w})(x, t). \quad (3.53)$$

Теорема 3.2. *Предположим, что $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, выполняется условие (1.10), $q(x, t) \in \mathcal{Q}$ и удовлетворяет условиям (i) или (ii). Тогда ряд (3.53) сходится абсолютно и равномерно в пространстве $C(Q_T)$ к непрерывной функции $\mathcal{W}(x, t)$, при этом сходимость ряда в случае (i) не медленнее экспоненциального, а в случае (ii) не медленнее $1/p'$ -экспоненциального, и функция*

$$u(x, t) = v(x, t) + \mathcal{W}(x, t) \quad (3.54)$$

является единственным обобщённым решением задачи (3.4)–(3.6).

Доказательство. Повторяем рассуждения, которые использовались в доказательстве теоремы (3.1) в случае потенциала $q(x)$ с небольшими изменениями. Из оценок (3.37) и (3.39) следует, что ряд (3.53) с непрерывными членами абсолютно и равномерно сходится в Q_T , причем сходимость ряда в случае (i) не медленнее экспоненциального, а в случае (ii) не медленнее $1/p'$ -экспоненциального. Следовательно, $\mathcal{W}(x, t)$ — непрерывная функция в Q_T .

Рассмотрим функцию (3.54). Учитывая определение (3.53) функции $\mathcal{W}(x, t)$, определение (3.40) функции $\mathfrak{w}(x, t)$, линейность операторов \mathcal{D} и D , а также ограниченность D в $C(Q_T)$ на основании лемм 3.6 и 3.7, получим и в случае (i), и в случае (ii)

$$\begin{aligned}
 u &= v + \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathfrak{w} = v + \mathfrak{w} + \sum_{n=1}^{\infty} D^n \mathfrak{w} = v + \mathcal{D}v + D \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathfrak{w} = \\
 &= v + \mathcal{D}v + \mathcal{D} \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathfrak{w} = v + \mathcal{D} \left(v + \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathfrak{w} \right) = v + \mathcal{D}(v + \mathcal{W}) = v + \mathcal{D}u,
 \end{aligned}$$

т.е. функция $u(x, t)$ вида (3.54) является решением уравнения (3.34).

Уравнение (3.34) нельзя рассматривать в пространстве $C(Q_T)$, так как $v(x, t)$ не является, вообще говоря, непрерывной функцией. Удобнее перейти к эквивалентному уравнению, действующему в $C(Q_T)$.

Лемма 3.9. Функция $u(x, t)$ является решением интегрального уравнения (3.34) в том и только том случае, когда функция $\mathbf{r}(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$ является решением интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(x, t) := \mathbf{w}(x, t) + (D\mathbf{r})(x, t). \quad (3.55)$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 3.5. \square

Так как $\mathbf{w}(x, t) \in C(Q_T)$ согласно лемме (3.8), то рассматриваем уравнение (3.55) в пространстве $C(Q_T)$. Иными словами, $\mathbf{r}(x, t)$ является решением уравнения

$$\mathbf{r}(x, t) := \mathbf{w}(x, t) + (D\mathbf{r})(x, t). \quad (3.56)$$

Это уравнение имеет решение $\mathcal{W}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathbf{w}$. В самом деле, поскольку D есть линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$, то

$$(D\mathcal{W})(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (D^n \mathbf{w})(x, t).$$

Отсюда следует, что функция $\mathcal{W}(x, t)$ является решением уравнения (3.56).

Покажем, что решение уравнения (3.56) единственно. Допустим, что кроме $\mathcal{W}(x, t)$ есть еще другое решение $\dot{\mathcal{W}}$ этого уравнения. Тогда $\mathfrak{z}(x, t) := \mathcal{W}(x, t) - \dot{\mathcal{W}}(x, t)$ — решение уравнения $\mathfrak{z}(x, t) = (D\mathfrak{z})(x, t)$, а, значит, $\mathfrak{z}(x, t) = (D^n \mathfrak{z})(x, t)$ при любом натуральном n . Тогда в случае (i) из оценки (3.37) следует неравенство

$$\|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^n z)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!},$$

а в случае (ii) из оценки (3.39) следует неравенство

$$\|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^n z)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0,T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}}.$$

Отсюда в силу произвольности n и в случае (i), и в случае (ii) будем иметь $\|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} = 0$ или $\mathcal{W}(x, t) \equiv \dot{\mathcal{W}}(x, t)$, т.е. единственным решением уравнения (3.56) является функция $\mathcal{W}(x, t)$. Учитывая лемму 3.9, получаем, что уравнение (3.56) имеет единственное решение (3.54). Теорема 3.2 полностью доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. — 2014. — 458, № 2. — С. 138–140.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — 55, № 2. — С. 229–241.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
4. Корнев В. В. О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения // Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения—XXXIII» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 132–137.
5. Корнев В. В., Хромов А. П. О классическом и обобщённом решении смешанной задачи для волнового уравнения // Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач», посв. 90-летию акад. В. А. Ильина. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения—XXIX» (Москва, 3-5 мая 2018 г.). — М., 2018. — С. 132–133.
6. Корнев В. В., Хромов А. П. Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 172. — С. 119–133.
7. Корнев В. В., Хромов А. П. Использование резольвентного подхода и расходящихся рядов при решении смешанных задач // в кн.: Математика. Механика. Т. 23. — Изд-во Саратов. ун-та, 2021. — С. 18–24.

8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2020. — 20, № 4. — С. 444–456.
10. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.
11. *Ломов И. С.* Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 199. — С. 66–79.
12. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения// Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 178–180.
13. *Ломов И. С.* Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы// Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 11. — С. 1471–1483.
14. *Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
15. *Ломовцев Ф. Е.* Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — № 3. — С. 38–52.
16. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости// Весн. ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне. — 2021. — 11, № 1. — С. 68–82.
17. *Ломовцев Ф. Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — 1. — С. 18–38.
18. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке// Пробл. физ. мат. техн. — 2022. — 1, № 50. — С. 62–73.
19. *Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н.* Весн. МДУ імя Куляшова А. А. Сер. В. Прырод. навукі: Мат. Фіз. Біялогія. — 2021. — 2, № 58. — С. 28–55.
20. *Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косою производной в граничном условии// Докл. РАН. — 2014. — 459, № 5. — С. 544–549.
21. *Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М.* О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны// Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — 28, № 4. — С. 472–485.
22. *Муравей Л. А., Романенков А. М.* Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна// Сб. мат. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (Белгород, 25–29 октября 2021 г.). — Белгород, 2021. — С. 194–196.
23. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
24. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
25. *Рыхлов В. С.* Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения при отсутствии полноты собственных функций// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 200. — С. 95–104.
26. *Рыхлов В. С.* Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 204. — С. 124–134.
27. *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2023. — 23, № 2. — С. 183–194.
28. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// Мат. 21 Междунар. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов: Изд-во Саратова. ун-та, 2022. — С. 252–255.

29. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения–XXXIII» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж: ВГУ, 237–240.
30. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной// в кн.: Математика. Механика. Т. 24. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 53–58.
31. *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и ненулевым потенциалом// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения–XXXIV» (Воронеж, 3-9 мая 2023 г.). — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 343–345.
32. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 226. — С. 89–107.
33. *Рыхлов В. С.* Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной// Совр. мат. Фундам. напр. — 2023. — 69, № 2. — С. 342–363.
34. *Рыхлов В. С.* Обобщенное решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// Тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2023. — С. 207–208.
35. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида// Сб. трудов XVI Междунар. Казанской школы-конф. «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 22–27 августа 2023 г.). — Казань, 2023. — С. 205–207.
36. *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — 24 (66), № 1. — С. 27–51.
37. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951.
38. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения// Мат. 21 Междунар. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов: СГУ, 2022. — С. 319–324.
39. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2022. — 22, № 3. — С. 322–331.
40. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — 56, № 2. — С. 239–251.
41. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: Математика. Механика. — 2019. — 21. — С. 62–67.
42. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2019. — 19, № 3. — С. 280–288.
43. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения–XXX» (Воронеж, 3-9 мая 2019 г.). — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
44. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// Мат. 20 Междунар. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января — 1 февраля 2020 г.). — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
45. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача// в кн.: Математика. Механика. Т. 23. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та., 2021. — С. 63–67.
46. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 2. — С. 286–300.
47. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — 27, № 4. — С. 215–238.
48. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача, не допускающая разделения переменных// Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2021. — 60. — С. 325–328.
49. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. — М., Л.: ГИТТЛ, 1949.

50. *Archibald F. R., Emslie A. G.* The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — 25, № 1. — P. 347–348.
51. *Mahalingam S.* Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — 8, № 4. — P. 145–148.
52. *Sack R. A.* Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — 5, № 6. — P. 224–226.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Рыхлов Виктор Сергеевич (Rykhlov Viktor Sergeevich)
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
(Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia)
E-mail: rykhlovvs@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 122–139
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-122-139

УДК 517.958

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВИРУСОЛОГИИ, ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19

© 2024 г. Е. П. КРУГОВА, Е. Е. БУКЖАЛЁВ

Аннотация. Представлен обзор отечественных и зарубежных работ, посвященных построению и исследованию математических моделей вирусологии, использованных при изучении пандемии новой коронавирусной инфекции COVID-19.

Ключевые слова: вирусология, эпидемиология, математическая модель, дробная производная, вероятностные методы, статистические методы, компьютерные методы.

ON THE MATHEMATICAL MODELS OF VIROLOGY USED TO STUDY THE COVID-19 PANDEMIC

© 2024 E. P. KRUGOVA, E. E. BUKZHALEV

ABSTRACT. A review of domestic and foreign works devoted to the construction and study of mathematical models of virology used in the study of the pandemic of the new coronavirus infection COVID-19 is presented.

Keywords and phrases: virology, epidemiology, mathematical model, fractional derivative, probabilistic methods, statistical methods, computer methods.

AMS Subject Classification: 92D30

Завершившаяся пандемия COVID-19 оказала влияние на все стороны жизни и нашла отражение в научных публикациях по самым разнообразным наукам. Не остались в стороне и математические науки. Публикации, посвященные математическим моделям вирусологии COVID-19, начинают появляться в научной печати в 2020 г. При этом используются разнообразные математические методы. Так, различными авторами строились модели, основанные преимущественно на методах математического анализа: это обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, уравнения с дробными производными, уравнения с частными производными, вариационные методы. Поскольку построенные уравнения чаще всего не решаются аналитически, многие статьи содержат помимо аналитической модели также и численные расчеты (см., например, [4, 63]). В значительном числе работ применялись вероятностные и статистические методы: стохастические дифференциальные уравнения, анализ временных рядов и др. Ряд статей посвящен статистике пандемии коронавируса в отдельных странах (см., например, [8]) и сравнению протекания пандемии в разных странах (см., например, [56, 82]). Имеются статьи, опирающиеся на методы теории исследования операций и посвященные изучению организации логистики в условиях нехватки ресурсов (аппаратов ИВЛ, палат и персонала в больницах и т. п.; см. [79]), а также управление темпами развития пандемии с помощью немедикаментозных мер (социального дистанцирования, масочного режима) и вакцинации (см., например, [96]). Наконец, много статей посвящено компьютерным методам самой разнообразной тематики: от вычисления математических моделей эпидемий на суперкомпьютерах до обнаружения симптомов коронавируса на снимках легких в компьютерной томографии. Конечно, указанное деление по тематике в

большой степени условно, поскольку для моделирования распространения пандемии чаще всего используются комбинированные методы, или проводится сравнение разных методов моделирования (например, аналитических и стохастических).

Обсудим модели, использованные для изучения различных аспектов эпидемии. По сравнению с обычной моделью SIR («восприимчивый — инфицированный — устраненный») в статьях про COVID-19 встречается великое множество различных модификаций. Это связано с особенностями протекания COVID-19: большое количество бессимптомных зараженных, при этом неизвестно, насколько они заразны сами; очень разная степень тяжести протекания: от самой легкой до смертельно опасной, когда требуется искусственная вентиляция легких с помощью аппарата ИВЛ. Кроме того, особенно в начале пандемии, тестирование было весьма неточным, что тоже учитывается в некоторых стохастических моделях.

COVID-19 — новый вирус, и было неизвестно, насколько вероятно повторное заражение, поэтому первые модели вовсе не учитывали его возможность. Вскоре, однако, стало ясно, что иммунитета хватает примерно на 4 месяца, вакцины вовсе не защищают от заражения (а лишь защищают от тяжелого течения болезни), и стали появляться модели, учитывающие повторные заражения, и статьи, посвященные волнам пандемии (см., например, [55]). Кроме того, за время развития пандемии появлялись новые штаммы, обладающие своими особенностями; например, когда появился штамм омикрон (с преимущественно легким протеканием болезни), стало важно различать количество инфицированных и количество госпитализированных.

Базовые модели обозначаются аббревиатурами, буквы в которых чаще всего (но не всегда — в зависимости от авторов работы) обозначают следующие доли изучаемой популяции:

- A — ailing (заболевшие) или asymptomatic (бессимптомные);
- C — confirmed (подтвержденные);
- D — diagnosed (диагностированные) или deceased [dead] (умершие);
- E — exposed (инфицированные) или extinct (умершие);
- H — hospitalized (госпитализированные) или healed (выздоровевшие);
- I — infectious (заразные);
- Q — quarantine (находящиеся в карантине);
- R — recovered (выздоровевшие) или removed (выбывшие из исследования);
- S — susceptible (восприимчивые);
- Si — sick (больные);
- T — threatened (находящиеся под угрозой заражения);
- U — unidentified infected (невыявленные инфицированные);
- V — vaccinated (вакцинированные).

Базовые математические модели эпидемий учитывают следующие доли популяции:

- SIS (susceptible — infected — susceptible: восприимчивые — зараженные — восприимчивые);
- SIR (susceptible — infected — removed: восприимчивые — зараженные — выбывшие (устраненные) из исследования);
- SIRD (susceptible — infected — recovered — dead: восприимчивые — зараженные — выздоровевшие — умершие, т.е. в этой модели уточняется причина выбытия индивида из исследования);
- SEIR (susceptible — exposed — infectious — removed: восприимчивые — зараженные — заразные — выбывшие).

Взаимное перемещение индивидов между этими категориями описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, причем происходит по сложным схемам (см., например, [19] и рис. 1).

Приведем перечень наиболее распространенных моделей:

- | | | | | |
|--------------------|---------------|--------------|--------------|-------------|
| SEIR [49, 76, 85]; | SQEIR [10]; | SEAIHR [96]; | SEIHR [67]; | SEIQR [33]; |
| SIRD [43, 52]; | SQAIRD [8]; | SIQD [64]; | SIDR [55]; | SQIR [83]; |
| SEIR-HCD [6]; | SEIRD [3, 4]; | SUC [53]; | SEIRS [98]; | vSIRS [61]; |
| SIDARTHE [40]; | SEAIR [18]; | SEIRA [27]; | SIHRDP [56]; | SEIS [87]. |

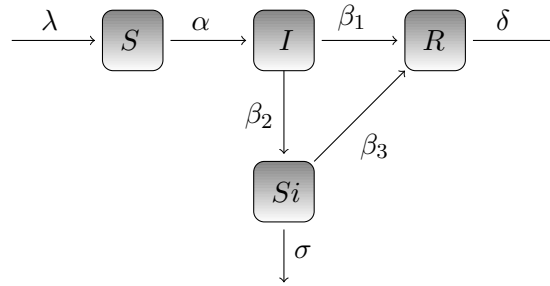


Рис. 1. Переходы между различными категориями популяции (схема из [19]).

Уже само это разнообразие моделей говорит о том, что нет хорошего понимания, как распространяется COVID-19 и какие именно параметры наиболее значимы для моделей.

Часто обыкновенные дифференциальные уравнения каким-либо образом обобщаются: например, превращаются в соответствующие уравнения с производными дробного порядка или в стохастические дифференциальные уравнения.

Рассмотрим, например, как отражены эти особенности протекания COVID-19 в двух работах Н. И. Еремеевой [3, 4]. В [4] автор указывает, что «SEIRD-модель относится к классу дифференциальных математических моделей, что дает возможность оперативно проводить эксперименты для прогнозирования распространения заболевания и расчета степени влияния на развитие процесса определенных параметров». Это замечание применимо и к большинству указанных выше моделей — параметры подбираются на основе экспериментальных данных в той или иной стране, области и т. п. В этой работе автор приходит к выводу о том, что недостаточно долгий карантин дает только временный эффект, что приводит в конце концов к новому пику заболеваемости. При этом важную роль играет «популяционный иммунитет». Жесткие меры не всегда эффективны, лучше действуют более длительные и более мягкие меры. В [3] автор указывает особенности модели, пригодные для изучения именно COVID-19:

- (i) в отличие от базовой модели, учитывается, что латентные носители COVID-19 являются в некоторой степени заразными;
- (ii) у существенного количества инфицированных болезнь протекает бессимптомно;
- (iii) выявленные больные изолируются (госпитализируются), и вероятность заражения от них резко уменьшается;
- (iv) карантинные меры имеют массовый характер, учитывается как степень их жесткости, так и момент введения;
- (v) зависимость между скоростью изменения относительного числа заболевших и относительным количеством заразных и восприимчивых может быть нелинейной.

Аналитические модели с дробными производными. При распространении пандемии COVID-19 постепенно стали проявляться ее особенности, и стало понятно, что обычные модели работают не очень хорошо из-за того, что не обладают эффектом памяти. Более подходящим средством исследования стали считать модели с дробными производными разных видов. Среди аналитических моделей таких моделей большинство в нашей выборке (см., например, [11, 14, 15, 30, 40, 43, 46, 51, 54, 59, 62, 69, 77, 78, 85, 90, 101] и др.).

В качестве примера аналитической модели с применением вероятностных методов упомянем работу [43], в которой тесно переплетены самые разные аспекты и методы:

- (i) впервые используются переменные индексы памяти в SIRD-модели;
- (ii) применяется дробная SIRD-модель с несоизмеримыми дробными порядками (с производной Капуто);
- (iii) идентификация универсальной эволюции COVID-19 по регионам;
- (iv) немарковский процесс (т.е. процесс с долгой памятью, зависящий не только от непосредственно предшествующего состояния);
- (v) масштабирование по степенному закону;

- (vi) временные ряды 23 стран изучаются с помощью фрактального формализма;
- (vii) используются динамические системы с эффектом памяти.

Стохастический процесс $X(t)$ называется *мультимасштабным*, если это процесс со стационарными приращениями и

$$E(|X(t)|^\alpha) = c(\alpha)t^{\tau(\alpha)+1} \quad \forall t \in \mathcal{F}, \quad \alpha \in \mathcal{L},$$

где \mathcal{F}, \mathcal{L} — интервалы в \mathbb{R} , $\tau(\alpha)$ — функция масштаба. Статистическая эволюция временного ряда имеет вид

$$K_\alpha(\tau) = \frac{\langle |X(t+\tau) - X(t)|^\alpha \rangle}{\langle |X(t)|^\alpha \rangle},$$

обобщенный показатель Хёрста

$$H(\alpha) : K_\alpha \sim \left(\frac{\tau}{\theta}\right)^{\alpha H(\alpha)}, \quad \tau \in (\theta; \tau_{\max}). \quad (1)$$

Если $H(\alpha) \equiv \text{const}$, то мультимасштабности нет. Временной ряд может меняться по степенному закону, если спектральная плотность $s(f) \propto f^{-\beta}$.

При применении этой модели страны разделились на группы с похожим числом Хёрста $H(2)$:

- (i) Латинская Америка (Чили, Эквадор, Аргентина, Перу, Бразилия, Колумбия, Мексика);
- (ii) Россия, Турция, Саудовская Аравия, Иран, Индия;
- (iii) Европа (европейские страны).

Модель может быть описана следующим образом. Сначала рассматривается система связанных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -rS(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= rS(t)I(t) - (a + d)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \alpha I(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} &= dI(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где r, a, d — скорости заражения, выздоровления и смерти. Скорость заражения — параметр системы, который меняется в зависимости от t^* :

$$r(t) = r_0(1 - \zeta)e^{-(t-t^*)/2} + \zeta r_0, \quad \zeta \in [0, 1].$$

Система (2) представляет марковский процесс, когда предыдущие состояния не влияют на текущие условия. Чтобы приблизить ее к реальности, авторы ее преобразуют в систему, зависящую от времени:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -r \int_{t_0}^t \varkappa(t-t')S(t')I(t')dt', \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \int_{t_0}^t \varkappa(t-t')[rS(t')I(t') - (a + d)I(t')]dt', \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \alpha \int_{t_0}^t \varkappa(t-t')I(t')dt', \\ \frac{dD(t)}{dt} &= d \int_{t_0}^t \varkappa(t-t')I(t')dt', \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\varkappa(t-t') = \frac{1}{\Gamma(q-1)}(t-t')^{q-2}, \quad 0 < q \leq 1.$$

Если взять такое ядро \varkappa , то получится модель дробного порядка

$$\begin{aligned} {}^C_{t_0}D_t^q S(t) &= -rS(t)I(t), \\ {}^C_{t_0}D_t^q I(t) &= rS(t)I(t) - (a+d)I(t), \\ {}^C_{t_0}D_t^q R(t) &= \alpha I(t), \\ {}^C_{t_0}D_t^q D(t) &= dI(t) \end{aligned} \tag{4}$$

с дробной производной Капуто:

$${}^C_{t_0}D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau, \quad 0 < q \leq 1.$$

Производная Капуто взята потому, что она имеет степенное ядро, где скорость затухания непосредственно зависит от дробных порядков. Когда дробный порядок меняется, соответственно меняется и «длина памяти». При $q = 1$ получается «система без памяти». Пусть q зависит от времени:

$$\begin{aligned} q(t, \varphi) &\triangleq q(t) && \text{— зависимость только от времени,} \\ q(t, \varphi) &\triangleq q(\varphi) && \text{— память прошлого слаба,} \\ q(t, \varphi) &\triangleq q(t - \varphi) && \text{— память прошлого сильна.} \end{aligned}$$

Оказалось, что в разных странах это происходит по-разному; кроме того, нужно рассматривать разные временные интервалы. Далее авторы находят *неустойчивую* точку равновесия численно и подбирают параметры на основе реальных данных с помощью формулы

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T (I_{\text{rd}} - I_{\text{ap}})^2 + (R_{\text{rd}} - R_{\text{ap}})^2 + (D_{\text{rd}} - D_{\text{ap}})^2 \right)},$$

где RMSE — корень из среднеквадратичной погрешности, «rd» — реальные данные, «ap» — аппроксимация, I, R, D — количества инфицированных, поправившихся и умерших соответственно.

В статьях по теме COVID-19 используются и другие виды дробных производных. Особенно удобной является дробно-фрактальная производная Атангана — Балеану (или Атангана — Балеану — Капуто), специально разработанная для моделирования естественных процессов (см. [9, 16, 32, 47, 58, 72]).

Определение производной Атангана — Балеану — Капуто можно найти в [51], где рассматривается модель с несингулярной дробной производной

$${}^{ABC}_0D_t^\gamma \Theta(x, t) \frac{B(\gamma)}{n-\gamma} \int_0^t \frac{\partial^n \Theta(x, w)}{\partial w^n} \times E_\gamma \left[\frac{-\gamma}{n-\gamma} (t-w)^\gamma \right] dw, \quad n-1 < \gamma \leq n,$$

с ядром Миттаг-Леффлера

$$E_\gamma(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j\gamma + 1)}.$$

Затем получена аппроксимация для ${}^{ABC}_0D_t^\gamma (y-a)^l$ с помощью разложения по обобщенным многочленам Лежандра

$$\Psi_i(y) = \sum_{l=0}^i \binom{l}{i} \binom{l+i}{i} \left(\frac{y-a}{a} \right)^i,$$

что позволяет получить нелинейную систему алгебраических уравнений, которая затем решается численно с помощью метода коллокации. В этой статье рассматривается модель SEAIR

(susceptible — exposed — infected — asymptotically infected — recovered: восприимчивые — инфицированные — бессимптомные инфицированные — выздоровевшие).

В [56] рассматривается модель SIHRDP (восприимчивые — зараженные, но не госпитализированные — госпитализированные — выздоровевшие — умершие — изолированные) с длительной памятью и вакцинацией для описания многоволновых пиков. Подгонка параметров модели была произведена по данным Франции, Индии, США и Аргентины; обнаружено, что нелокальная модель имеет лучший эффект подгонки, чем классическая. Разные параметры в разных странах получаются из-за разных стратегий вакцинации, принятых в этих странах.

Основная цель статьи [56] — дать прогноз для указанных стран, насколько поможет вакцинация при применяемых стратегиях. Утверждается, что во Франции вакцинация не поможет совсем, в Индии будет много госпитализаций, но вакцинация существенно поможет, в США и Аргентине вакцинация будет эффективной.

В [30] рассматривается модель, основанная на дробных производных Капуто (в том числе несоизмеримых порядков). При этом учитываются ежедневные новые случаи, ежедневные дополнительные тяжелые случаи и ежедневные смерти. Эта модель исследуется с помощью бифуркационных диаграмм, показателей Ляпунова, временных рядов и фазовых портретов. Порядки дробных производных могут меняться с течением времени. Оказалось, что количество новых случаев, новых тяжелых случаев и смертей характеризуются хаотическим поведением без какой-либо возможности эффективно контролировать болезнь.

В [37] рассматривается комбинированная модель передачи инфекции COVID-19: локальное распространение моделируется с помощью члена реакции-диффузии, добавленного к обыкновенным дифференциальным уравнениям, моделирующим распространение инфекции по сети с узлами (где узлы — это, например, города, когда люди путешествуют за короткое время на дальние расстояния).

Одной из довольно популярных тем статей про COVID-19 является исследование совместного распространения COVID-19 с другими болезнями (например, вместе с туберкулезом; см. [69]). В [68] рассматривается модель дробного порядка для совместной динамики коронавируса, лихорадки денге и ВИЧ. Существование и единственность решения построенной модели находится с помощью принципа сжимающих отображений Банаха; кроме того, изучается устойчивость решения в смысле Хайерса—Улама. Авторы применяют метод разложения Лапласа—Адомяна для исследования модели с помощью трех различных дробных производных: Капуто, Капуто—Фабрицио и Атангана—Балеану. Также проводится анализ устойчивости итерационных схем. Делается вывод о том, что усилия по сдерживанию распространения коронавируса на низком уровне существенно снизят совместную инфекцию коронавируса и денге и коронавируса и ВИЧ.

В целом модели с дробными производными проявили себя лучше, чем модели с производными целого порядка. В [100] проведен анализ временных рядов COVID-19 в Китае до 22.03.2020 и сделан вывод, что уравнениями с дробными производными при моделировании COVID-19 надо пользоваться с осторожностью, поскольку конкретные особенности распространения в конкретной местности могут не обнаруживать нелокального поведения. Это может быть связано с быстрым совершенствованием систем здравоохранения, которое поможет устранить эффект памяти в случае распространения COVID-19.

Двумя существенными недостатками для точности прогнозов являются неизвестные доли незадокументированных случаев COVID-19 и уровни немедикаментозных вмешательств, которые очень неоднородны в разных местах в разное время. Поэтому в [28] разработан метод, позволяющий оценить уровень неоднородности занижения данных в разных муниципалитетах Бразилии. Пандемия происходила во всем мире и наложилась на местные традиционные особенности разных народов и их менталитет.

Вероятностные методы и модели течения пандемии. При изучении пандемии COVID-19 используются различные вероятностные методы и модели.

Статья [86] посвящена вероятностным прогнозам смертности от COVID-19 в США. Для оптимального принятия решений (о планировании действий правительства и распределении ресурсов) требуется не просто точечный прогноз, а прогноз вероятностного распределения или интервальный прогноз. Вероятностные прогнозы были предоставлены несколькими группами прогнозистов,

а затем объединены. Используется набор данных, опубликованный в Центре прогнозов COVID-19. Оказалось, что доступность прогнозов от разных участников сильно различается в течение 40 недель исследования. Для оценки точности методов комбинирования прогнозов используются разные вероятностные методы. Оказалось, что в первые недели пандемии медиана была очень полезна; затем предпочтительнее было простое среднее, а на длительных сроках лучше всего себя зарекомендовала модель комбинирования с весами, обратно пропорциональными исторической точности отдельных групп прогнозирования.

В [87] изучаются стохастические модели эпидемий. Получена эпидемиологическая эквивалентность состояний между немарковской моделью SEIS и марковской моделью SIS: при некоторых соотношениях между параметрами процесса стационарные решения в немарковской модели SEIS можно найти из марковской SIS. При этом уменьшается вычислительная сложность и определяется эпидемиологический порог SEIS.

Обсудим более подробно основные идеи этой статьи. Время, чтобы индивид стал заразным после контакта с больным, меняется от одного индивида к другому, поскольку для этого требуется, чтобы воспроизвелось большое количество вируса, а каждый организм индивидуален. Поэтому наиболее адекватной моделью кажется немарковская модель SEIS (восприимчивый — инфицированный — заразный — восприимчивый). Для нее вводятся следующие параметры: $b(\tau)$ — проявившиеся за день, $B(\tau)$ — проявившиеся ко дню τ (за все предыдущие дни), $\gamma(\tau)$ — поправившиеся за день, $\Gamma(\tau)$ — поправившиеся ко дню τ (за все предыдущие дни). Далее осуществляется переход от дискретной к непрерывной форме немарковской модели и отмечается, что любая марковская SIS-модель в сложных сетях может быть представлена как немарковская SEIS.

Марковская модель SIS среднего поля с дискретным временем задается уравнениями

$$p_i^I(t+1) = (1 - p_i^I(t)) \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_j^I a_{ij} \beta) \right) + (1 - \gamma) p_i^I(t), \quad (5)$$

где $(a_{ij}) = A$ — матрица смежности графа (сети, по которой все передается) — это так называемый «подход микроскопической марковской цепи». В непрерывной форме модель имеет вид

$$\frac{dp_i^I(t)}{dt} = (1 - p_i^I(t)) \beta^M \sum_{j=1}^N a_{ij} p_j^I(t) - \gamma^M p_i^I(t). \quad (6)$$

Предполагается, что заразиться можно только от одного соседа, поэтому произведение преобразуется в сумму.

В немарковской модели подвергшийся воздействию может стать заразным за разное время (так называемое кумулятивное проявление):

$$B(\tau) = \int_0^{\tau} b(\tau') d\tau', \quad \int_0^T b(\tau) d\tau < 1.$$

Наряду с этим в статье рассматривается и случайное проявление:

$$B(\tau) = b(\tau), \quad 0 \leq b(\tau) \leq 1, \\ \Gamma(\tau) = \int_0^{\tau} \gamma(\tau') d\tau', \quad \int_0^T \gamma(\tau) d\tau = 1, \quad \bar{\Gamma}(\tau) = 1 - \Gamma(\tau).$$

В дискретном случае модель SEIS имеет вид

$$p_i^E(t+1) = \sum_{\tau=0}^{T-1} (1 - p_i^E(t-\tau)) \bar{\Gamma}(\tau) \mathcal{P}_i(t-\tau), \\ p_i^I(t+1) = \sum_{\tau=0}^{T-1} (1 - p_i^E(t-\tau)) B(\tau) \bar{\Gamma}(\tau) \mathcal{P}_i(t-\tau), \quad (7)$$

где

$$\mathcal{P}_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - p_j^I(t) a_{ij} \beta).$$

В марковской модели $p_i^S(t) + p_i^E(t) + p_i^I(t) = 1$. В немарковской ($I \subset E$) $p_i^S(t) + p_i^E(t) = 1$ (потому что не известно, кто заразен, а кто нет). В марковской модели вероятность переходов $E \rightarrow I$, $E \rightarrow S$, $I \rightarrow S$, $S \rightarrow E$ постоянна в любой момент.

В непрерывном случае уравнения преобразуются следующим образом:

$$1 - \prod_{j=1}^N (1 - p_j^I(t - \tau) a_{ij} \beta \Delta\tau) = \sum_{j=1}^N p_j^I(t - \tau) a_{ij} \beta \Delta\tau + O(\Delta\tau^2),$$

и для достаточно малого $\Delta\tau$ членом $O(\Delta\tau^2)$ пренебрегают. Таким образом получается система уравнений, которая может быть преобразована в систему для непрерывного случая:

$$\begin{aligned} p_i^E(t+1) &= \int_0^T (1 - p_i^E(t-\tau)) s(\tau) \sum_{j=1}^n p_j^I(t-\tau) \bar{\Gamma}(\tau) \alpha_{ij} \beta d\tau, \\ p_i^I(t+1) &= \int_0^T (1 - p_i^E(t-\tau)) s(\tau) \sum_{j=1}^n p_j^I(t-\tau) B(\tau) \bar{\Gamma}(\tau) \alpha_{ij} \beta d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где $s(\tau)$ — функция Хевисайда. В дальнейшем $\Gamma(\tau)$ и $B(\tau)$ считаются непрерывными в окрестности τ (т.е. функция $s(\tau)$ не требуется). Дальнейшие преобразования системы позволяют обнаружить эпидемический порог. Пусть $[p_i^E(t), p_i^I(t)] = (0, 0)$ — начало эпидемического процесса. Матрица A для связного графа неотрицательна и неприводима. Глобально асимптотически устойчивая точка получается при условии

$$\frac{1}{\beta \lambda_1(A)} > \int_0^T B(\tau) \bar{\Gamma}(\tau) d\tau,$$

где $\lambda_1(A)$ — максимальное собственное значение матрицы A .

Стационарное состояние немарковского процесса распространения SEIS можно получить из марковской модели SIS с помощью соотношения

$$\frac{\beta^M}{\gamma^M} = \beta^{NM} \int_0^T B(\tau) \bar{\Gamma}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Эпидемический порог для марковской модели SIS равен

$$\lambda_1(A) = \frac{\gamma}{\beta}. \quad (10)$$

Численный анализ модели проводится методом Монте-Карло, граф содержит около 1000 узлов и 4000–6000 однонаправленных связей (в статье рассматривается несколько примеров). Вероятности вычисляются с помощью генератора случайных чисел Бернулли с вероятностью $a_{ij}\beta$. В некоторых примерах получилась большая погрешность модели. Авторы объясняют это тем, что в реальной жизни совместные события не всегда независимы (как требуется для корректного действия применяемых законов из теории вероятности). Размеры погрешности оказались больше в областях с низкой инфицированностью, а в областях со средней и высокой инфицированностью получается хорошее приближение.

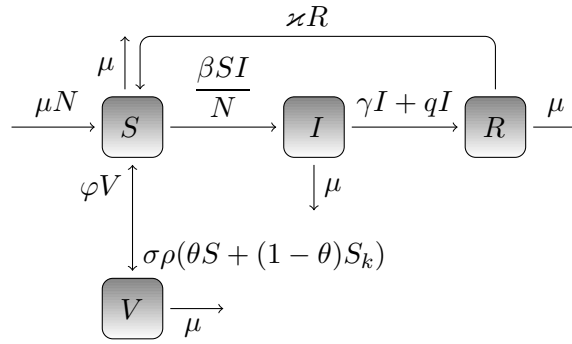


Рис. 2. Переходы между различными категориями популяции (схема из [35]).

Модели, связанные с управлением течением эпидемии. Во многих статьях рассматриваются модели, связанные с теми или иными способами контроля распространения заболевания. Особенно это стало актуально с появлением в широком употреблении вакцин от коронавируса, когда появились новые возможности такого контроля.

В [35] рассматриваются так называемые вакцинные игры: в рассматриваемой ситуации часть населения подвергается обязательной вакцинации (это те слои, которые подвержены наибольшему риску заражения и могут стать распространителями: врачи, учителя, водители общественного транспорта и т. п.), а остальная (большая) часть населения принимает решение о вакцинации самостоятельно. При принятии решения о вакцинации эта часть населения ориентируется на накопленную информацию о протекании пандемии (ежедневное количество новых случаев); функция отклика при этом нелинейна. При этом оптимизируются затраты: с одной стороны, цена вакцины и доставки, а с другой — цена лечения в случае болезни. Учитывается и то, что вакцин может не хватать на все население. Кроме того, учитывается возможность того, что вакцинация не помогла (не была успешной в отдельных случаях), и то, что срок действия вакцины ограничен, иммунитет со временем затухает, т.е. возможно повторное инфицирование.

В статье рассматривается модель SIRVS (восприимчивые — острая инфекция — поправившиеся — вакцинированные — восприимчивые), и для них получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N - \sigma\rho(\theta S + (-\theta)Sx) - \frac{\beta SI}{N} + \varphi V + \kappa R - \mu S, \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - qI - \mu I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I + qI - \mu R - \kappa R, \\
 \frac{dV}{dt} &= \sigma\rho(\theta S + (-\theta)Sx) - \varphi V - \mu V,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где параметры имеют следующие значения: θ — доля тех, кто вакцинирован обязательно, потому что их работа связана с повышенным риском; x — доля тех, кто вакцинировался добровольно; σ — эффективность вакцины; φ — скорость затухания иммунитета; β — эффективная скорость передачи; γ — скорость выздоровления; $q = q_0 \cdot \gamma_2$, где q_0 — карантин, γ_2 — лечение после карантина; ρ ($0 < \rho < 1$) — ограничение поставок вакцины. Переходы между категориями в популяции указаны на рис. 2.

Далее делается замена переменных $s = S/N$, $v = V/N$, $r = R/N$, $i = I/N$, уравнения элементарным образом преобразуются для них, и уравнение для R исключается (потому что $s + i + r + v = 1$). К полученной системе еще следует добавить уравнения, связанные с принятием решения о вакцинировании, что и делается в статье дальше.

Параметр x (число вакцинированных добровольно) меняется в зависимости от поведения в связи с принятием решения о вакцинировании в динамической игре принятия решения (когда индивиды наблюдают ежедневное количество новых заражений). Здесь возникают следующие

параметры и переменные: c_v — цена вакцинации; c_i — цена инфекции (лечения и смерти); βI — скорость передачи инфекции; риск инфекции для не вакцинированных $\beta i \cdot c_i$; риск заражения для неуспешно вакцинированных $(1 - \sigma)\beta i \cdot c_i$; риск заражения для людей с временным отводом от вакцинации $\sigma\varphi \cdot \beta i \cdot c_i$. Полная система для рисков имеет следующий вид

$$\begin{aligned} f_v &= -c_v - (1 - \sigma)\beta i \cdot c_i - \sigma\varphi \cdot \beta i \cdot c_i, & (\text{риск вакцинированных}), \\ f_n &= -\beta i \cdot c_i, & (\text{риск не вакцинированных}), \end{aligned} \quad (12)$$

$g_1(t) = f_v - f_n$ — первая информационная функция (цена вакцинации), $g_2(t) = \beta N s i$ — количество новых случаев в день, в зависимости от которого меняется значимость заражений,

$$g(t) = mg_1(t) + (1 - m)g_2(t) \quad \text{— общая цена,} \quad (13)$$

m — вес: если $m = 1$, то все зависит от цены вакцинации; если $m = 0$, то все зависит от распространения инфекции. На основе этих переменных строится уравнение о принятии решения о вакцинировании на основе настоящего и прошлого (с экспоненциальным затуханием значимости, как это обычно принято в разных моделях поведенческой экономики):

$$M(t) = \varepsilon g(t) + \int_{t-\tau}^t g(\eta) \alpha e^{-\alpha(t-\eta)} d\eta. \quad (14)$$

К нему добавляется уравнение для изменения поведения:

$$\frac{dx}{dt} = \nu x(1 - x) \left(\frac{1}{1 + e^{-bM(t)}} - \frac{1}{2} \right). \quad (15)$$

Эти два уравнения добавляются к первоначальной системе и ищутся равновесия полной получившейся системы: равновесие без болезни без добровольной вакцинации

$$E_1 = \left(\frac{\varphi + \mu}{\varphi + \mu + \sigma\rho\theta}, 0, \frac{\sigma\rho\theta}{\varphi + \mu + \sigma\rho\theta}, 0 \right);$$

равновесие без болезни с полностью добровольной вакцинацией

$$E_2 = \left(\frac{\varphi + \mu}{\varphi + \mu + \sigma\rho}, 0, \frac{\sigma\rho}{\varphi + \mu + \sigma\rho}, 0 \right).$$

Вычислительными методами находится число воспроизводства $R_0 = \beta/(\gamma + q + \mu)$, и с его учетом получают еще две точки граничного равновесия E_3, E_4 . Изучаются условия их устойчивости. Показано, что точка E_2 всегда неустойчива, а точки E_1, E_3, E_4 могут быть при определенных условиях локально асимптотически устойчивыми. При некоторых условиях имеется также еще одна внутренняя точка равновесия, и в ней может происходить бифуркация Хопфа.

Эта модель применима к разным эпидемиям, и в последнем разделе статьи авторы конкретизируют ее для коронавируса. Там же рассматривается зависимость скорости передачи инфекции и эффективности вакцин от вариантов коронавируса ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho$). Оказалось, что для варианта омикрон $R_0 = 6,0076$, и даже если все население будет вакцинировано двумя дозами вакцины Pfizer, $R_v^0 = R_v^1 = 1,3206 > 1$, и сдержать распространение инфекции не получится, поэтому авторы в качестве дополнительной меры предлагают установить карантин.

Максимальная эффективность бустерной дозы в Великобритании (против штамма альфа) 75%, что даже лучше, чем наилучшая вакцинная эффективность первых двух доз (которая указана в статье для разных стран и варьируется около 60%). Обращает на себя внимание обстоятельство и добросовестность авторов: они не указывают нереальные значения эффективности вакцин (например, Pfizer), которые декларировались в начале их использования: более 90%.

В игре, рассмотренной в статье, участвуют (принимают решение) отдельные индивиды, но производится она в интересах государств: надо, чтобы вакцинированных было достаточно для «коллективного иммунитета». В нашей стране параметры в «вакцинационной игре» иные: в России вакцины поставлялись по госзакупкам, для населения они были бесплатными, значит, «цена вакцинации» не имела бы значения. Вакцин было достаточно, проблем с количеством поставок тоже не возникало. Дело в том, что вакцины от такой новой инфекции в принципе не могут быть безопасными: для корректного тестирования вакцин требуется период 5–10 лет, а за это время

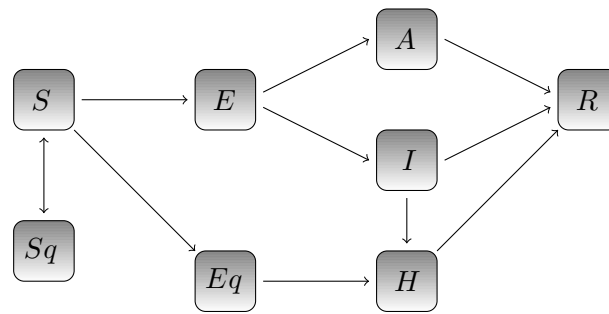


Рис. 3. Переходы между различными категориями популяции (схема из [96]).

пандемия закончилась естественным путем (соображение, неприменимое к другим, давним и хорошо проверенным вакцинам и другим эпидемиям «общего вида», рассматриваемым в статье). Поэтому наше население выбирало между конкурирующими рисками: умереть от коронавируса или пострадать от вакцины (например, получить инвалидность); пострадать от вакцины — или потерять работу, потому что решение о степени общности вакцинации было оставлено руководителям предприятий на местах, и некоторые из них принимали решение о поголовной вакцинации, несмотря на противопоказания и на тот факт, что многие уже переболели (как было, например, в Казани: местные власти запретили невакцинированным пользоваться общественным транспортом, хотя формально вакцинация считалась добровольной).

Кроме того, очень скоро стало ясно, что вакцины слабо защищают от распространения инфекции, и важна только защита от тяжелого течения болезни и от смерти (поэтому количество новых случаев за день вряд ли было бы определяющим при принятии людьми решения о вакцинации, особенно в случае легко протекающего заболевания, вызванного штаммом омикрон; скорее имело бы значение количество ежедневных госпитализаций и смертей).

В [96] рассматривается оптимальная политика управления пандемией с учетом количества заражений среди населения и экономических последствий. Производится многоцелевая оптимизация с помощью генетического алгоритма. В статье используется модель SEAIHR (восприимчивые — инфицированные — бессимптомные зараженные — инфицированные с симптомами — госпитализированные — поправившиеся), и далее приведена схема переходов между ними:

При этом используются следующие параметры: c — частота контактов, β — вероятность передачи при контакте, q — доля выявленных на карантине, θ — коэффициент, показывающий, во сколько раз меньше инфекция передается от бессимптомных. Эта модель относится к достаточно раннему этапу пандемии, когда еще ничего не было известно о повторных заражениях и не было вакцин. Для многоцелевой оптимизации берутся два веса и две функции цены: J_1 для снижения количества зараженных и J_2 для снижения негативных последствий для экономики:

$$J_1 = \sum E(t) + A(t), \quad J_2 = -\eta_1(c_0 + c_j) + \eta_2 q,$$

Имеется значительное количество статей, где оптимизируются разные параметры и аспекты пандемии. Например, в [52] делается прогноз оптимального периода карантина для трехфазной модели SIRD; в [10] осуществляется проектирование оптимального управления импульсными моделями SQEIAR.

Многие работы связаны с оптимизацией ресурсов и логистикой во время пандемии. В [79] предлагается осуществлять назначение некоторых машин скорой помощи только для обслуживания больных, инфицированных COVID-19, чтобы снизить вероятность заражения персонала и снизить вероятность простоя машин и уменьшить время реагирования. Это делается в два этапа: сначала производится оптимизация групп скорой помощи с максимальным охватом экстренных вызовов, а затем решается приближительная модель очереди гиперкубов (АНQM) для оценки производительности первого этапа. Это хорошо известная модель; авторы приспособливают ее к особенностям течения пандемии коронавируса. Сделаны следующие выводы: 1) время реагирования (в Мюнхене) не уменьшается из-за низкого количества вызовов и низкой вероятности

заражения; 2) однако при длительном времени изоляции и высокой вероятности заражений все рассмотренные аспекты (снижение вероятности заражения персонала, снижение простоя машин и снижение времени реагирования) будут улучшаться.

В [95] рассматривается оптимизация ресурсов, в частности, оптимизируется распределение аппаратов ИВЛ. Особенности модели включают неопределенность непроверенных бессимптомных инфекций и краткосрочную миграцию людей. Скорость передачи вируса меняется в пространстве и времени в зависимости от немедикаментозных мер — масок, социального дистанцирования и изоляции. Минимизируется общее ожидаемое число новых инфицированных и умерших людей. Находится компромисс между потерями (с весом) и рисками катастрофических сценариев.

В [86] указано, что вероятностные (краткосрочные) прогнозы требуются для эффективного распределения ресурсов.

Наконец, среди моделей поведенческой экономики можно отметить статью [29] о влиянии домашних животных на субъективное благополучие людей во время пандемии. В ней производится многомерный анализ данных 215 владельцев домашних животных в США на основе теории основных потребностей (как людей, так и животных): в автономии, родстве и компетентности. Оказалось, что поддержка потребностей домашних животных повышает субъективное благополучие и уменьшает стресс и одиночество людей, вызванные социальной изоляцией во время пандемии COVID-19. Кроме того, психологический стресс снижает субъективное благополучие, а ощущение одиночества во время COVID-19 — нет.

Компьютерные вычислительные модели. Во многих моделях вычисления столь громоздки, что они должны производиться на мощных компьютерах; кроме того, для некоторых моделей разработаны специфические компьютерные методы (например, основанные на искусственном интеллекте, обучении нейросетей и т. п.). В частности, это касается статистических моделей временных рядов.

В [57] используется серая модель Ричардса $GERM(1, 1, e^{at})$. Она рассчитывается с помощью генетического алгоритма и показывает, по мнению авторов, лучшие результаты, чем семь других пороговых моделей. Модель Ричардса является моделью роста и предсказывает ежедневное число подтвержденных случаев заражения.

Список наиболее употребительных таких моделей также приведен в [57]:

GM(1, 1) — модель «серый ящик» с одной переменной и одним уравнением первого порядка;

Verhulst — модель «серый ящик» Ферхюльста;

ARGM(1, 1) — авторегрессионная модель «серый ящик»;

ONGM(1, 1) — оптимизированная модель NGM(1, 1, k, c);

ENGM(1, 1) — точная неоднородная модель «серый ящик»;

ARIMA — авторегрессионная проинтегрированная модель подвижного среднего;

NGBM(1, 1) — нелинейная модель «серый ящик» Бернулли;

GRM(1, 1) — модель «серый ящик» Ричардса;

GERM(1, 1, e^{at}) — расширенная (extend) модель «серый ящик» Ричардса.

В классической модели роста используется уравнение Ферхюльста

$$C'(t) = rC(t) \left(1 - \frac{C(t)}{K} \right), \quad (16)$$

где $C(t)$ — кумулятивное число заражений. Логистическая модель Ричардса является его обобщением:

$$C'(t) = rC(t) \left(1 - \left(\frac{C(t)}{K} \right)^\alpha \right). \quad (17)$$

В результате дальнейшего обобщения авторы приходят к расширенной серой модели Ричардса $GERM(1, 1, e^{at})$:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = (be^{at} + c)(x^{(1)}(t))^\gamma; \quad (18)$$

если $\gamma = 0$, то $\text{GERM}(1, 1, e^{at}) \rightarrow \text{GM}(1, 1, e^{at})$, $y^{(1)}(t) := (x^{(1)}(t))^{1-\gamma}$, уравнение примет вид

$$\frac{dy^{(1)}(t)}{dt} + (1-\gamma)ay^{(1)}(t) = (1-\gamma)(be^{at} + c); \quad (19)$$

его решение

$$y^{(1)}(t) = \left(y^{(0)}(1) - \frac{b(1-\gamma)}{(1-\gamma)^{a+1}} - \frac{c}{a} \right) e^{-(1-\gamma)a(t-1)} + \frac{b(1-\gamma)}{(1-\gamma)^{a+\alpha}} e^{at} + \frac{c}{a};$$

отсюда получается

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1).$$

На основе этого строится численная схема решения по методу трапеций, а затем оптимизируются параметры, входящие в уравнение, на основе реальных данных (с помощью разных метрик, в частности, RMSE и др.). Этот метод хорошо работает даже для небольших выборок, а для больших выборок лучше подходит процесс ARIMA.

В [82] с помощью агентного моделирования изучается модель SEIR для 57 наций, рассматривающая кинетику смерти и процесс от заражения до смерти. Данные взяты из базы до 26.04.2020 г. Модель SEIR не дает хороших долгосрочных прогнозов из-за неопределенности параметров. Для каждой страны производились статистическое усреднение и численная оптимизация: оптимизируется разница между предсказаниями модели с реальными данными из базы. Было построено две модели и проведено сравнение между ними.

Краткий обзор других тем компьютерных моделей. Модели эпидемии COVID-19 работают не очень хорошо: обнаруживаются разброс прогнозов, заниженные прогнозы, что затрудняет принятие решений и выработку политики. Поэтому в [41] предлагается еще одна модель, рассматривающая отношение числа заражений к смертности (вероятно, речь идет о выявленных заражениях). В указанной работе уже говорится о переходе COVID-19 к сезонности, т.е. к зависимости от окружающей температуры.

В [41] строится причинно-следственная связь по Грейнджеру и производится регрессионный анализ по следующим переменным: температура, осадки, солнечная радиация, относительная влажность, «реакция на COVID-19» для 36 стран 5 континентов. Вычисления производились с помощью обучения случайного леса. Самым важным параметром оказалась температура воздуха (некоторые другие параметры вовсе оказались незначимыми) — в 24 странах из 36. Сильнее всего она влияет на рассматриваемое отношение числа заражений к смертности в тропических странах, так что прогнозы будут точнее, если включать в них температуру воздуха.

В [7, 12, 24, 42] рассматриваются модели, построенные на основе рентгеновских снимков. В частности, в [7] изучается построение прогноза на основе теории вероятностей. Прогнозируются вероятности возникновения и продолжительность периодов развития болезни, а фактическими данными служат рентгеновские снимки грудной клетки больных. Они обрабатываются с помощью нейросети. В [24] рассматривается сегментация рентгеновских изображений с помощью машинного обучения.

Имеются также исследования, связанные с соцсетями, социальными отношениями. Например, в [23] изучается влияние процесса нагнетания паники со стороны средств массовой информации и соцсетей на общество в связи с распространением пандемии COVID-19, а в [65] производится классификация историй о коронавирусе на сайтах проверки фактов. Пандемия COVID-19 затронула все стороны жизни, в том числе и вызвала страхи и появление фейковых новостей.

Некоторые статьи посвящены запретительным мерам на перемещение в связи с распространением COVID-19 и их осуществлению и контролю с помощью информационных технологий. Так, в [33] на основе модели SEIQR рассматривается протокол отслеживания контактов при чрезмерном распространении COVID-19. В [45] производится моделирование с помощью эволюционной игры для пограничного контроля в условиях пандемии.

В [80] рассматриваются передача инфекции и профилактика в мегаполисах. Для транспортных потоков строится соответствующая система реакции-диффузии. На процесс реакции-диффузии влияют ограничение передвижения, социальное дистанцирование и тестирование. При этом получаются следующие выводы: ограничение передвижения между пригородными регионами оказывается полезным только тогда, когда там имеются разные числа воспроизводства. Социальное

дистанцирование снижает пик заражения в пригородах. В мегаполисе пик заражений снижается, если в пригородах — рассеивается (т.е. некоторые меры приводят не к улучшению ситуации в целом, а к перераспределению случаев заражения). Эффективность тестирования тоже с трудом поддается оценке, поскольку сильно зависит от мест размещения бригад, производящих тестирование, и здесь получаются сильно неоднозначные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виницкий С. И., Гусев А. А., Дербов В. Л., Красовицкий П. М., Пеньков Ф. М., Чулуунбаатар Г.* Редуцированная модель SIR пандемии COVID-19// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — 61, № 3. — С. 400–412.
2. *Гузев М. А., Никитина Е. Ю.* Динамика «имперских хвостов» на примере коронавирусной инфекции// Дальневост. мат. ж. — 2022. — 22, № 1. — С. 38–50.
3. *Еремеева Н. И.* Построение модификации SEIRD-модели распространения эпидемии, учитывающей особенности COVID-19// Вестн. Твер. гос. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2020. — № 4. — С. 14–27.
4. *Еремеева Н. И.* Частичное моделирование влияния карантинных мер на динамику эпидемиологического процесса на основе SEIRD-модели// Вестн. Тюмен. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. моделир. Нефть, газ, энергетика. — 2021. — 7, № 2. — С. 170–187.
5. *Кабанихин С. И., Криворотько О. И.* Математическое моделирование эпидемии уханьского коронавируса COVID-2019 и обратные задачи// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — 60, № 11. — С. 1950–1961.
6. *Криворотько О. И., Кабанихин С. И., Зятыков Н. Ю., Приходько А. Ю., Прохошин Н. М., Шилленин М. А.* Математическое моделирование и прогнозирование COVID-2019 в Москве и Новосибирской области// Сиб. ж. вычисл. мат. — 2020. — 23, № 4. — С. 395–414.
7. *Мухеев М. Ю., Колесникова С. В., Пушкарева А. В., Мамелина Т. Ю.* Математическое моделирование жизненного цикла COVID-19, обнаруженного на основе сверточной нейронной сети// Фундам. прикл. пробл. техн. технол. — 2022. — № 5. — С. 76–83.
8. *Никитина А. А.* Оценка параметров модели SQAIRD с учетом переменных интервалов// Процессы управл. устойч. — 2021. — 8. — С. 440–449.
9. *Abbasi M. et al.* Fractal signatures of the COVID-19 spread// Chaos Solit. Fract. — 2020. — 140. — 110119.
10. *Abbasi Z., Zamani I., Mehra A. H. A., Shafieirad M., Ibeas A.* Optimal control design of impulsive SQEIR epidemic models with application to COVID-19// Chaos Solit. Fract. — 2020. — 139. — 110054.
11. *Abdullahi B. I., Nasidi B. A.* Fractional order model for the role of mild cases in the transmission of COVID-19// Chaos Solit. Fract. — 2021. — 142. — 110374.
12. *Afshar P., Heidarian S., Naderkhani F., Oikonomou A., Plataniotis K. N., Mohammadi A.* COVID-CAPS: A capsule network-based framework for identification of COVID-19 cases from X-ray images// Pattern Recogn. Lett. — 2020. — 138. — С. 638–643.
13. *Alekseev D. V., Galatenko A. V., Galatenko V. V., Nersisyan S. A., Staroverov V. M.* A mathematical model of within-host COVID-19 dynamics// Дальневост. мат. ж. — 2022. — 22, № 2. — С. 150–151.
14. *Alkahtani B. S. T., Alzaid S. S.* A novel mathematics model of covid-19 with fractional derivative. Stability and numerical analysis// Chaos Solit. Fract. — 2020. — 138. — 110006.
15. *Aslam M., Farman M., Akgül A., Sun M.* Modeling and simulation of fractional order COVID-19 model with quarantined-isolated people// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — 44, № 8. — С. 6389–6405.
16. *Atangana A.* Modelling the spread of COVID-19 with new fractal-fractional operators: Can the lockdown save mankind before vaccination?// Chaos Solit. Fract. — 2020. — 136. — 109860.
17. *Babaei A., Jafari H., Banihashemi S., Ahmadi M.* Mathematical analysis of a stochastic model for spread of coronavirus// Chaos Solit. Fract. — 2021. — 145. — 110788.
18. *Basnarkov L.* SEAIR epidemic spreading model of COVID-19// Chaos Solit. Fract. — 2021. — 142. — 110394.
19. *Batistela C. M., Correa D. P. F., Bueno Á. M., Piqueira J. R. C.* SIRSi compartmental model for COVID-19 pandemic with immunity loss// Chaos Solit. Fract. — 2021. — 142. — 110388.
20. *Bhattacharyya S., Dey K., Paul A. R., Biswas R.* A novel CFD analysis to minimize the spread of COVID-19 virus in hospital isolation room// Chaos Solit. Fract. — 2020. — 139. — 110294.
21. *Bisiacco M., Pillonetto G., Cobelli C.* Closed-form expressions and nonparametric estimation of COVID-19 infection rate// Automatica. — 2022. — 140. — 110265.

22. *Boudaoui A., El Hadj M. Y., Hammouch Z., Ullah S.* A fractional-order model describing the dynamics of the novel coronavirus (COVID-19) with nonsingular kernel// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 146. — 110859.
23. *Bozkurt F., Yousef A., Abdeljawad T., Kalinli A., Mdallal Q. A.* A fractional-order model of COVID-19 considering the fear effect of the media and social networks on the community// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 152. — 111403.
24. *Chakraborty S., Mali K.* SUFMACS: A machine learning-based robust image segmentation framework for COVID-19 radiological image interpretation// *Expert Syst. Appl.* — 2021. — 178. — 115069.
25. *Chang J. T., Kaplan E. H.* Modeling local coronavirus outbreaks// *Eur. J. Oper. Res.* — 2023. — 304, № 1. — С. 57–68.
26. *Cheng X., Wang Y., Huang G.* Global dynamics of a network-based SIQS epidemic model with nonmonotone incidence rate// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 153. — 111502.
27. *Contreras S., Villavicencio H. A., Medina-Ortiz D., Biron-Lattes J. P., Olivera-Nappa Á.* A multi-group SEIRA model for the spread of COVID-19 among heterogeneous populations// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 136. — 109925.
28. *Costa G. S., Cota W., Ferreira S. C.* Data-driven approach in a compartmental epidemic model to assess undocumented infections// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 163. — 112520.
29. *Damberg S., Frömbing L.* ‘Furry tales’: pet ownership’s influence on subjective well-being during Covid-19 times// *Qual. Quant.* — 2022. — 56, № 5. — С. 3645–3664.
30. *Debbouche M., Ouannas A., Batiha I. M., Grassi G.* Chaotic dynamics in a novel COVID-19 pandemic model described by commensurate and incommensurate fractional-order derivatives// *Nonlin. Dynam.* — 2022. — 109, № 1. — С. 33–45.
31. *Dordević J., Papić I., Šuvak N.* A two diffusion stochastic model for the spread of the new corona virus SARS-CoV-2// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 148. — 110991.
32. *Easwaramoorthy D., Gowrisankar A., Manimaran A., Nandhini S., Rondoni L., Banerjee S.* An exploration of fractal-based prognostic model and comparative analysis for second wave of COVID-19 diffusion// *Nonlin. Dynam.* — 2021. — 106, № 2. — С. 1375–1395.
33. *Eliás L. L., Eliás S. L., del Rey A. M.* An analysis of contact tracing protocol in an over-dispersed SEIQR Covid-like disease// *Phys. A.* — 2022. — 590. — 126754.
34. *Erturk V. S., Kumar P.* Solution of a COVID-19 model via new generalized Caputo-type fractional derivatives// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 139. — 110280.
35. *Ge J., Wang W.* Vaccination games in prevention of infectious diseases with application to COVID-19// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 161. — 112294.
36. *Gonçalves A. D. S., Fernandes L. H. S., Nascimento A. D. C.* Dynamics diagnosis of the COVID-19 deaths using the Pearson diagram// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 164. — 112634.
37. *Grave M., Viguerie A., Barros G. F., Reali A., Andrade R. F. S., Coutinho A. L. G. A.* Modeling nonlocal behavior in epidemics via a reaction-diffusion system incorporating population movement along a network// *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2022. — 401. — 115541.
38. *Han C., Li M., Haihambo N., Babuna P., Liu Q., Zhao X., Jaeger C., Li Y., Yang S.* Mechanisms of recurrent outbreak of COVID-19: A model-based study// *Nonlin. Dynam.* — 2021. — 106, № 2. — С. 1169–1185.
39. *Hanthanan A. K., Hussaini M. Y.* Ranking non-pharmaceutical interventions against Covid-19 global pandemic using global sensitivity analysis — Effect on number of deaths// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 152. — 111458.
40. *Higazy M.* Novel fractional order SIDARTHE mathematical model of COVID-19 pandemic// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 110007.
41. *Iloanusí O., Ross A.* Leveraging weather data for forecasting cases-to-mortality rates due to COVID-19// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 152. — 111340.
42. *Jadhav S., Deng G., Zawin M., Kaufman A. E.* COVID-view: Diagnosis of COVID-19 using Chest CT// *IEEE Trans. Visual. Comput. Graph.* — 2022. — 28, № 1. — С. 227–237.
43. *Jahanshahi H., Muñoz-Pacheco J. M., Bekiros S., Alotaibi N. D.* A fractional-order SIRD model with time-dependent memory indexes for encompassing the multi-fractional characteristics of the COVID-19// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 143. — 110632.
44. *Jing N., Shi Z., Hu Y., Ji Y.* Cross-sectional analysis and data-driven forecasting of confirmed COVID-19 cases// *Appl. Intell.* — 2022. — 52, № 3. — С. 3303–3318.
45. *Kabir K. A., Chowdhury A., Tanimoto J.* An evolutionary game modeling to assess the effect of border enforcement measures and socio-economic cost: Export-importation epidemic dynamics// *Chaos Solit.*

- Fract. — 2021. — 146. — 110918.
46. *Khajji B., Kouidere A., Elhia M., Balatif O., Rachik M.* Fractional optimal control problem for an age-structured model of COVID-19 transmission// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 143. — 110625.
 47. *Khan H., Ahmad F., Tunç O., Idrees M.* On fractal-fractional Covid-19 mathematical model// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 157. — 111937.
 48. *Khan H., Ibrahim M., Abdel-Aty A.-H., Khashan M. M., Khan F. Ali, Khan A.* A fractional order Covid-19 epidemic model with Mittag-Leffler kernel// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 148. — 111030.
 49. *Khyar O., Allali K.* Global dynamics of a multi-strain SEIR epidemic model with general incidence rates: application to COVID-19 pandemic// *Nonlin. Dynam.* — 2020. — 102, № 1. — С. 489–509.
 50. *Kirbaş İ, Sözen A., Tuncer A. D., Kazancıoğlu F. Ş.* Comparative analysis and forecasting of COVID-19 cases in various European countries with ARIMA, NARNN and LSTM approaches// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 110015.
 51. *Kumar S., Cao J., Abdel-Aty M.* A novel mathematical approach of COVID-19 with non-singular fractional derivative// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 139. — 110048.
 52. *Lalwani S., Sahnı G., Mewara B., Kumar R.* Predicting optimal lockdown period with parametric approach using three-phase maturation SIRD model for COVID-19 pandemic// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 109939.
 53. *Lee C., Li Y., Kim J.* The susceptible-unidentified infected-confirmed (SUC) epidemic model for estimating unidentified infected population for COVID-19// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 139. — 110090.
 54. *Liu X., Ullah S., Alshehri A., Altanji M.* Mathematical assessment of the dynamics of novel coronavirus infection with treatment: A fractional study// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 153. — 111534.
 55. *Lobato F. S., Libotte G. B., Platt G. M.* Mathematical modelling of the second wave of COVID-19 infections using deterministic and stochastic SIDR models// *Nonlin. Dynam.* — 2021. — 106, № 2. — С. 1359–1373.
 56. *Lu Z., Yu Y., Chen Y. Quan, Ren G., Xu C., Wang S.* Stability analysis of a nonlocal SIHRDP epidemic model with memory effects// *Nonlin. Dynam.* — 2022. — 109, № 1. — С. 121–141.
 57. *Luo X., Duan H., Xu K.* A novel grey model based on traditional Richards model and its application in COVID-19// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 142. — 110480.
 58. *Meraz M., Carbó R., Rodriguez E., Alvarez-Ramirez J.* Fractal correlations in the Covid-19 genome sequence via multivariate rescaled range analysis// *Chaos Solit. Fract.* — 2023. — 168. — 113132.
 59. *Mohammad M., Trounev A.* On the dynamical modeling of COVID-19 involving Atangana–Baleanu fractional derivative and based on Daubechies framelet simulations// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 140. — 110171.
 60. *Mohd M. H., Sulayman F.* Unravelling the myths of R0 in controlling the dynamics of COVID-19 outbreak: A modelling perspective// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 109943.
 61. *Moualkia S.* Mathematical analysis of new variant Omicron model driven by Lévy noise and with variable-order fractional derivatives// *Chaos Solit. Fract.* — 2023. — 167. — 113030.
 62. *Nabi K. N., Kumar P. Erturk V. S.* Projections and fractional dynamics of COVID-19 with optimal control strategies// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 145. — 110689.
 63. *Nauman A., Amr E., Ali R., Muhammad R., Waleed A.* Numerical simulation and stability analysis of a novel reaction-diffusion COVID-19 model// *Nonlin. Dynam.* — 2021. — 106, № 2. — С. 1293–1310.
 64. *Naz R., Al-Raei M.* Analysis of transmission dynamics of COVID-19 via closed-form solutions of a susceptible-infectious-quarantined-diseased model with a quarantine-adjusted incidence function// *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2021. — 44, № 14. — С. 11196–11210.
 65. *Ng Lynnette H. X., Carley K. M.* The coronavirus is a bioweapon: classifying coronavirus stories on fact-checking sites// *Comput. Math. Organ. Th.* — 2021. — 27, № 2. — С. 179–194.
 66. *Nick J., Menzies M.* Trends in COVID-19 prevalence and mortality: A year in review// *Phys. D.* — 2021. — 425. — 132968.
 67. *Niu R., Chan Y.-C., Wong E. W. M., van Wyk M. A., Chen G.* A stochastic SEIHR model for COVID-19 data fluctuations// *Nonlin. Dynam.* — 2021. — 106, № 2. — С. 1311–1323.
 68. *Omame A., Abbas M., Abdel-Aty A.-H.* Assessing the impact of SARS-CoV-2 infection on the dynamics of dengue and HIV via fractional derivatives// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 162. — 112427.
 69. *Omame A., Abbas M., Onyenegecha C. P.* A fractional-order model for COVID-19 and tuberculosis co-infection using Atangana–Baleanu derivative// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 153. — 111486.
 70. *Otunuga O. M.* Time-dependent probability distribution for number of infection in a stochastic SIS model: case study COVID-19// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 147. — 110983.

71. *Özköse F., Yavuz M., Şenel M. T., Habbireeh R.* Fractional order modelling of omicron SARS-CoV-2 variant containing heart attack effect using real data from the United Kingdom// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 157. — 111954.
72. *Păcurar C.-M., Necula B.-R.* An analysis of COVID-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 139. — 110073.
73. *Parbat D., Chakraborty M.* A python based support vector regression model for prediction of COVID-19 cases in India// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 109942.
74. *Pathan R. K., Biswas M., Khandaker M. U.* Time series prediction of COVID-19 by mutation rate analysis using recurrent neural network-based LSTM model// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 110018.
75. *Pelinovsky E., Kokoulina M., Epifanova A., Kurkin A., Kurkina O., Tang M., Macau E., Kirillin M.* Gompertz model in COVID-19 spreading simulation// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 154. — 111699.
76. *Piovella N.* Analytical solution of SEIR model describing the free spread of the COVID-19 pandemic// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 140. — 110243.
77. *Rahman M., Ahmad S., Matoog R. T., Alshehri N. A., Khan T.* Study on the mathematical modelling of COVID-19 with Caputo–Fabrizio operator// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 150. — 111121.
78. *Rahman M., Muhammad A., Kamal S., Gómez-Aguilar J. F.* Investigating a nonlinear dynamical model of COVID-19 disease under fuzzy Caputo, random and ABC fractional order derivative// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 140. — 110232.
79. *Rautenstrauss M., Martin L., Minner S.* Ambulance dispatching during a pandemic: Tradeoffs of categorizing patients and allocating ambulances// *Eur. J. Oper. Res.* — 2023. — 304, № 1. — 239–254.
80. *Rezapour S., Baghaian A., Naderi N., Sarmiento J. P.* Infection transmission and prevention in metropolises with heterogeneous and dynamic populations// *Eur. J. Oper. Res.* — 2023. — 304, № 1. — C. 113–138.
81. *Sabbar Y., Kiouach D., Rajasekar S. P., El-Idrissi S. A.* The influence of quadratic Lévy noise on the dynamic of an SIC contagious illness model: New framework, critical comparison and an application to COVID-19 (SARS-CoV-2) case// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 159. — 112110.
82. *Scheiner S., Ukaj N., Hellmich C.* Mathematical modeling of COVID-19 fatality trends: Death kinetics law versus infection-to-death delay rule// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 136. — 109891.
83. *Shah K., Abdeljawad T., Ud Din R.* To study the transmission dynamic of SARS-CoV-2 using nonlinear saturated incidence rate// *Phys. A.* — 2022. — 604. — 127915.
84. *Singhal A., Singh P., Lall B., Joshi S. D.* Modeling and prediction of COVID-19 pandemic using Gaussian mixture model// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 110023.
85. *Sintunavarat W., Turab A.* Mathematical analysis of an extended SEIR model of COVID-19 using the ABC-fractional operator// *Math. Comput. Simul.* — 2022. — 198. — C. 65–84.
86. *Taylor J. W., Taylor K. S.* Combining probabilistic forecasts of COVID-19 mortality in the United States// *Eur. J. Oper. Res.* — 2023. — 304, № 1. — C. 25–41.
87. *Tomovski I., Basnarkov L., Abazi A.* Endemic state equivalence between non-Markovian SEIS and Markovian SIS model in complex networks// *Phys. A.* — 2022. — 599. — 127480.
88. *Triambak S., Mahapatra D. P.* A random walk Monte Carlo simulation study of COVID-19-like infection spread// *Phys. A.* — 2021. — 574. — 126014.
89. *Tsiligianni C., Tsiligiannis A., Tsiliyannis C.* A stochastic inventory model of COVID-19 and robust, realtime identification of carriers at large and infection rate via asymptotic laws// *Eur. J. Oper. Res.* — 2023. — 304, № 1. — C. 42–56.
90. *Tuan Nguyen H., Mohammadi H., Rezapour S.* A mathematical model for COVID-19 transmission by using the Caputo fractional derivative// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 140. — 110107.
91. *Wang J., Yang M., Lu L., Shao W.* Does the ‘Delta Variant’ affect the nonlinear dynamic characteristics of SARS-CoV-2 transmission?// *Chaos Solit. Fract.* — 2022. — 162. — 112382.
92. *Wang L., Min J., Doig R., Elliott Lloyd T., Colijn C.* Estimation of SARS-CoV-2 antibody prevalence through serological uncertainty and daily incidence// *Can. J. Statist.* — 2022. — 50, № 3. — C. 734–750.
93. *Wiliński A., Kupracz L., Senejko A., Chrzastek G.* COVID-19: Average time from infection to death in Poland, USA, India and Germany// *Qual. Quant.* — 2022. — 56, № 6. — C. 4729–4746.
94. *Yin M.-Z., Zhu Q.-W., Lü X.* Parameter estimation of the incubation period of COVID-19 based on the doubly interval-censored data model// *Nonlin. Dynam.* — 2021. — 106, № 2. — C. 1347–1358.
95. *Yin X., Büyüktaşkın İ. E., Patel B. P.* COVID-19: Data-driven optimal allocation of ventilator supply under uncertainty and risk// *Eur. J. Oper. Res.* — 2023. — 304, № 1. — C. 255–275.

96. *Yousefpour A., Jahanshahi H., Bekiros S.* Optimal policies for control of the novel coronavirus disease (COVID-19) outbreak// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 136. — 109883.
97. *Yu X., Lu L., Shen J., Li J., Xiao W., Chen Y.* RLIM: a recursive and latent infection model for the prediction of US COVID-19 infections and turning points// *Nonlin. Dynam.* — 2021. — 106, № 2. — С. 1397–1410.
98. *Yu Z., Arif R., Fahmy M. A., Sohail A.* Self organizing maps for the parametric analysis of COVID-19 SEIRS delayed model// *Chaos Solit. Fract.* — 2021. — 150. — 111202.
99. *Zhang X., Ma R., Wang L.* Predicting turning point, duration and attack rate of COVID-19 outbreaks in major Western countries// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 109829.
100. *Zhang Y., Yu X., Sun H., Tick G. R., Wei W., Jin B.* Applicability of time fractional derivative models for simulating the dynamics and mitigation scenarios of COVID-19// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 138. — 109959.
101. *Zhang Z., Jain S.* Mathematical model of Ebola and Covid-19 with fractional differential operators: Non-Markovian process and class for virus pathogen in the environment// *Chaos Solit. Fract.* — 2020. — 140. — 110175.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кругова Елена Павловна (Krugova Elena Pavlovna)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: ekrugo@mail.ru

Букжалёв Евгений Евгеньевич (Bukzhalev Evgenii Evgenievich)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: bukzhalev@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 140–152
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-140-152

УДК 004.85

МЕТОД ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ В ФУНКЦИОНИРОВАНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

© 2024 г. О. Е. ГОРОХОВ, М. И. ПЕТРОВСКИЙ, И. В. МАШЕЧКИН

Аннотация. Задача обнаружения аномального поведения крупных программных систем может быть сведена к задаче обнаружения аномалий в потоках текстовых данных. В работе предлагается подход, основанный на комбинации глубокого обучения (автокодировщика с использованием сверточных нейронных сетей и однослойного полносвязного декодировщика) и подходов, основанных на нечетком методе кластеризации. Предложенное решение позволяет эффективно строить векторные представления групп последовательных событий и определять выбросы в данных за счет разработанного слоя, основанного на методах нечеткой кластеризации и радиально-базисных функций.

Ключевые слова: обнаружение аномалий, анализ системных журналов, глубокое обучение, нейронные сети.

DEEP LEARNING METHOD FOR IDENTIFYING ANOMALIES IN OPERATING COMPUTER SYSTEMS

© 2024 O. E. GOROKHOV, M. I. PETROVSKII, I. V. MASHECHKIN

ABSTRACT. The problem of detecting anomalous behavior in large software systems can be reduced to the problem of detecting anomalies in text data streams. In this paper, we propose an approach based on a combination of deep learning (an autoencoder using convolutional neural networks and a single-layer fully connected decoder) and approaches based on the fuzzy clustering method. The solution proposed allows one to construct vector representations of groups of sequential events and identify outliers in the data using a developed layer based on fuzzy clustering and radial basis functions methods.

Keywords and phrases: anomaly detection, system log analysis, deep learning, neural networks.

AMS Subject Classification: 68T07

1. Введение. В последнее время возрастает значение различных компьютерных систем в деятельности человека. Они позволяют организовать оперативное общение людей, автоматизировать технологические процессы, обеспечить поддержку образования, медицины и других важных сфер жизни общества.

Особую роль играют программные системы, которые обеспечивают хранение и обработку больших данных, взаимодействуют с большим количеством пользователей. Возникновение ошибок в них может повлиять на многих пользователей и привести к значительным финансовым потерям. Поэтому, наиболее актуальной является проблема поддержания надежности и безопасности подобных систем.

Как правило, обнаружение ошибок в компьютерных системах возможно путем поиска аномального поведения на основании анализа происходящих событий, информация о которых хранится в сложно структурированном виде в специальных журналах. Эта информация может быть представлена в текстовом виде. Таким образом, задача поиска аномального поведения системы может

быть сведена к задаче обнаружения аномалий в потоке текстовых описаний происходящих событий. При этом важно отметить, что объем журналов может быть очень большим. Поэтому ручной поиск аномалий не представляется возможным [6, 12, 14]. Следовательно, нужно разработать алгоритм, позволяющий автоматически определять подобное аномальное поведение систем. Анализ существующих работ показывает, что в этой области эффективными являются подходы, основанные на глубоком обучении. Именно им и посвящена данная работа.

2. Анализ существующих работ. На основании анализа существующих работ можно утверждать, что общая схема обнаружения аномального поведения систем состоит из следующих этапов [1, 12]:

- (i) построение модели данных;
- (ii) построение модели нормального поведения системы;
- (iii) обучение модели обнаружения аномального поведения;
- (iv) применение модели обнаружения аномального поведения.

На этапе построения модели данных важно учитывать природу входных данных, которые, как было отмечено выше, представляют собой текстовые описания происходящих в системе событий. Следовательно, на этом этапе могут применяться классические методы анализа текстовых данных (токенизация, лемматизация; см. [7, 18]).

Кроме того, важно помнить, что входные текстовые данные описывают события и обладают рядом специфических особенностей [7]:

- (i) описания событий сильно зависят от конкретной системы, поэтому для разработки универсального алгоритма необходимо минимизировать множество алгоритмов предобработки данных;
- (ii) события часто похожи друг на друга и отличаются только наличием специальных идентификаторов связанных объектов (процессов, подсистем и т. д.),
- (iii) множество уникальных событий ограничено относительно небольшим размером словаря (не больше 1000);
- (iv) входные данные представляют собой поток описаний связанных между собой событий.

Указанные особенности необходимо также учитывать на этапе построения модели в данных. В частности, в качестве предобработки можно использовать только удаление различных идентификаторов с помощью регулярных выражений. Поскольку уникальных событий в системе, как правило, не очень много, в качестве токена можно использовать отдельно взятые события.

После выполнения токенизации необходимо провести векторизацию входных данных. На этом этапе применимы классические методы векторизации текста (One-hot кодирование отдельных событий, модели описаний событий как текстовые модели множества либо последовательности слов) [2].

Следующий этап заключается в построении признакового описания последовательности взаимосвязанных событий. Полученное информативное векторное представление указанных последовательностей и может рассматриваться в качестве модели данных. На этом этапе широко применяются подходы, основанные на сокращении размерности признакового пространства (латентное разложение Дирихле, матричные разложения и др.) [2]. Также в последнее время применяются подходы, основанные на глубоком обучении (сверточные нейронные сети, архитектуры трансформеров с использованием механизма самовнимания) [19].

После построения модели данных необходимо построить и обучить модель описания нормального поведения системы. Для этого, необходимо корректно сформулировать критерий аномального поведения системы. Здесь важно отметить, что в большинстве практических задач очень трудно заранее корректно описать аномальное поведение систем. Однако, можно подобрать данные, в которых поведение системы было нормальным на протяжении практически всего времени работы системы.

Поэтому на данном этапе следует использовать классический подход сведения поставленной задачи к задаче одноклассовой классификации [1]. Особый интерес представляет классический одноклассовый метод опорных векторов [1], который может рассматриваться в качестве базового

решения. Также стоит обратить внимание на методы нечеткой кластеризации, которые развиваются авторами данной работы [8,17]. Также в последнее время наиболее эффективными являются различные модификации архитектур трансформеров [5]. Именно эти подходы и будут рассмотрены далее.

Одноклассовый метод опорных векторов [13] представляет собой некоторую модификацию классического метода опорных векторов для задач одноклассовой классификации и позволяет строить разделяющую гиперплоскость на основании решения следующей задачи оптимизации:

$$\min \frac{1}{2} * \|w\|^2 + \frac{1}{vl} \sum_{i=1}^l \xi_i - \rho, \quad (w * \Phi(x_i)) \geq \rho - \xi_i; \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad \xi_i \geq 0.$$

Здесь $x_i \in \mathbb{R}$ — объекты обучающей выборки, $v \in (0, 1)$ — процент исключений в обучающей выборке, l — количество объектов в обучающей выборке, ξ_i — некоторые штрафующие переменные, $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow H$ — некоторая ядровая функция, осуществляющая отображение первоначального пространства признаков в пространство большей размерности H . Если w и ρ — решение поставленной задачи, то решающая функция выглядит следующим образом:

$$f(x) = \text{sign}(w * \Phi(x) - \rho).$$

Методы нечеткой кластеризации [3,17] позволяют строить так называемые нечеткие кластеры и определять степень аномальности входящих в обучающую выборку событий. При этом, лучший результат можно получить с помощью использования эллиптических кластеров, учитывающих матрицу ковариаций данных обучающей выборки [8].

Суть метода заключается в следующем. Рассмотрим конечную выборку входных данных: $\{x_i \in X \mid i = 1, \dots, N\}$. Здесь N — размер выборки, X — множество значений из пространства признаков. Необходимо построить единый кластер эллипсоидальной формы, включающий все исследуемые образцы таким образом, что степень типичности u_i каждого образца x_i вычисляется путем решения следующей задачи оптимизации:

$$\min_{U, a, \mu} E(u, a, \mu) = \mu \sum_{i=1}^N u_i^m * \|x_i - a\|_C^2.$$

Здесь u_i^m — степень типичности образца x_i , $m > 1$ — степень нечеткости, U — множество степеней типичности образцов, $\|x_i - a\|_C^2$ — квадрат расстояния Махалонобиса от вектора x_i до центра кластера a , вычисляемый по формуле

$$D_i(a) = \|x_i - a\|_C^2 = (x_i - a)^T * C^{-1} * (x_i - a),$$

где C — матрица ковариаций.

В ходе исследований, проведенных в изученной литературе [8], степень типичности объекта может определяться по следующей формуле:

$$u_i = \left[1 + \left(\frac{D_i(a)}{\mu} \right)^{1/(m-1)} \right]^{-1},$$

где μ — радиус кластера, на котором образы анализируемых объектов имеют степень типичности, равную 0,5. Этот радиус вычисляется на основании расстояний каждого объекта обучающей выборки до найденного центра распределения.

Подходы, основанные на архитектуре трансформеров с механизмом самовнимания (см. [5,19]), позволяют строить информативные векторные представления потока событий, учитывающие взаимные связи событий. Данный алгоритм обучается на задаче маскированного моделирования, заключающейся в предсказании пропущенных событий в рассматриваемой последовательности. При этом в последнее время наиболее эффективными являются подходы, основанные на так называемом многоголовом самовнимании. Такие архитектуры представляют собой параллельно связанные «голова» (элементы, вычисляющие степень внимания). Каждая «голова» позволяет

определять степень внимания, исходя из различных особенностей данных. Формально каждая «голова» представляет собой скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \text{head}_l &= \text{Attention}(X^j W_l^Q, X^j W_l^K, X^j W_l^V), \\ \text{Attention}(Q, K, V) &= \text{softmax} \left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_v}} \right) V. \end{aligned}$$

Здесь $X^j \in \mathbb{R}^{T*d}$ — информативное представление последовательности событий; W_l^Q , W_l^K и W_l^V — матрицы весов для линейной проекции размерности $\mathbb{R}^{d \times d_v}$ для «головы» с номером l ; d_v — размерность одной «головы».

Механизм многоголового самовнимания производит объединение всех голов линейное отображение в некоторое новое пространство размерности d_O с помощью матрицы весов $W^O \in \mathbb{R}^{hd_v \times d_O}$:

$$f(X^j) = \text{Concat}(\text{head}_1, \dots, \text{head}_H) W^O.$$

Далее, для предсказания пропущенного события используется полносвязный слой с функцией активации ReLU:

$$\text{transformer_layer}(X^j) = \text{ReLU}(f(X^j) W_1) W_2.$$

Здесь W_1 и W_2 — некоторые матрицы весов.

Классическая архитектура трансформера состоит из нескольких таких слоев `transformer_layer` и позволяет строить информативное векторное представление для события x_t^j по следующему правилу:

$$h_j^t = \text{Transformer}(x_t^j)$$

Как было сказано выше, в процессе обучения архитектуры трансформера для поставленной проблемы решаются две задачи: маскированное моделирование пропущенных событий и построение гиперсферы для определения кластера нормальных событий. Таким образом, целевая функция выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{MLKP}} + \alpha * \mathcal{L}_{\text{VHM}}.$$

Здесь α — гиперпараметр; $\mathcal{L}_{\text{MLKP}}$ — оценка предсказания векторного представления пропущенного события с вектором $h_{[\text{MASK}_i]}^j$:

$$\mathcal{L}_{\text{MLKP}} = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M y_{[\text{MASK}_i]}^j \log \hat{y}_{[\text{MASK}_i]}^j, \quad \hat{y}_{[\text{MASK}_i]}^j = \text{Softmax}(W_C h_{[\text{MASK}_i]}^j + b_C).$$

Здесь $\hat{y}_{[\text{MASK}_i]}^j$ — вероятность предсказанного события; W_C и b_C — обучаемые параметры; $y_{[\text{MASK}_i]}^j$ — векторное представление реального замаскированного события с номером i ; M — общее количество замаскированных событий в последовательности с номером j ; \mathcal{L}_{VHM} — функция для построения кластера нормальных событий:

$$\mathcal{L}_{\text{VHM}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|h_{\text{DIST}}^j - c\|^2.$$

Здесь h_{DIST}^j — информативное векторное представление всей информации о событиях в последовательности с номером j ; $c = \text{Mean}(h_{\text{DIST}}^j)$ — центр распределения нормальных событий.

Однако большинство рассмотренных подходов работают лишь в режиме бинарной классификации, когда на этапе обучения известны примеры аномального поведения. Они не приспособлены к задаче одноклассовой классификации, и показывают в ней не очень хороший результат. Кроме того, подходы, основанные на архитектуре трансформера достаточно затратны по времени обучения и применения, что вызывает проблемы при реальном применении указанных подходов. В данной работе предлагается рассмотреть подход, учитывающий указанные недостатки и позволяющий эффективно решать задачу одноклассовой классификации.

3. Предлагаемое решение. Как было сказано выше, методы глубокого обучения широко применяются для анализа сложно структурированных данных. При этом, для задач обнаружения аномалий в данных системных журналов используются описанные выше методы, основанные на архитектуре трансформера с использованием механизма самовнимания. Однако, данный механизм требует регулярного вычисления значения внимания для каждого отдельного блока и сравнения его с остальными блоками на каждой итерации обучения, что является достаточно сложным с точки зрения вычислительной сложности.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход, который напоминает указанные архитектуры. Однако, в качестве алгоритма построения модели данных предлагается использовать операцию параллельной свертки, предложенной в работе Ю. Ким и широко применяемую в анализе текстовых данных [9]. Данная операция также позволяет учесть порядок событий, что важно в рамках поставленной задачи. Кроме того, признаки, получаемые в процессе обучения каждой сверточной части автоматически обновляются независимо, что позволяет обучать сеть более эффективно, поэтому данная архитектура может выступать в качестве альтернативы архитектурам трансформера [2]. Также была показана возможность адаптации предложенной архитектуры для обнаружения аномалий в потоках текстового контента [4].

В данной работе предлагается новое решение поставленной задачи, основанное на рассмотренных архитектурах, и представляющее собой автокодировщик с использованием параллельной свертки в качестве кодировщика и однослойного полносвязного декодировщика, который позволяет минимизировать потери при уменьшении размерности признакового пространства путем привлечения сравнительно небольшого объема вычислительных затрат. Также в работе для обнаружения аномалий предлагается использовать слой, основанный на нечеткой кластеризации, который позволяет автоматически определять уровень типичности каждого блока событий на основании информации о расстоянии от построенных сверточных признаков каждого блока до центра построенного кластера, позволяя при этом строить робастное решение, допускающее определенный процент выбросов в обучающей выборке. При этом слой нечеткой кластеризации позволяет ограничить минимальный размер кластера нормальных данных, что, в свою очередь, не приводит к построению кластера, состоящего всего из одной точки. Итоговая оценка нормальности блока событий оценивается как произведение степени типичности блока, полученной из слоя нечеткой кластеризации, на ошибку реконструкции, которая вычисляется как косинусная мера схожести результата декодирования и исходного векторного описания рассматриваемого блока событий. Иными словами, в процессе обучения сети на нормальных данных мы ищем центр распределения сверточных признаков, пытаясь при этом приблизить векторные представления рассматриваемых блоков к указанному центру и минимизируя ошибки кодирования сверточной частью сети. Предлагаемая архитектура приведена на рис. 1 и 2.

3.1. Векторизация данных. В предлагаемом решении, как было сказано выше, рассматриваются непрерывные последовательности событий. При этом, к текстовому описанию каждого события применяется единственная предобработка, связанная с удалением идентификаторов (последовательностей непробельных символов, содержащих цифры). После указанной предварительной обработки проводится токенизация по отдельным событиям и проводится их кодирование. Поскольку, как было сказано выше, объем уникальных событий невелик, сложные методы построения информативных векторных представлений текстовых данных (Word2Vec, BERT и т. д.) добавляют лишний шум к данным и ухудшают качество итоговых алгоритмов. Поэтому в данной работе для кодирования описаний событий предлагается использовать простой алгоритм **One-hot**.

В результате предварительной обработки и векторизации мы получаем представление описаний событий в виде потока **One-hot** векторов:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots).$$

Здесь $x_i \in \mathbb{R}^m$ — вектор, описывающий событие с номером i , m — размер словаря. Далее события группируются в блоки по n событий, где размер блока n выбирается на основании особенностей рассматриваемых данных. Таким образом, на вход алгоритму построения модели данных

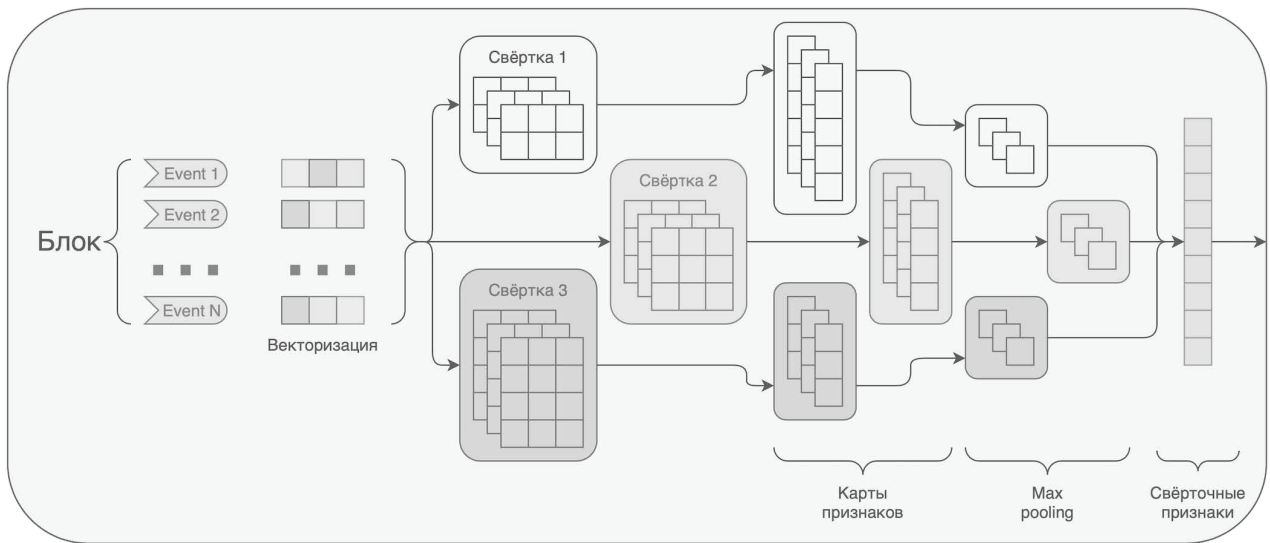


Рис. 1. Операция получения сверточных признаков

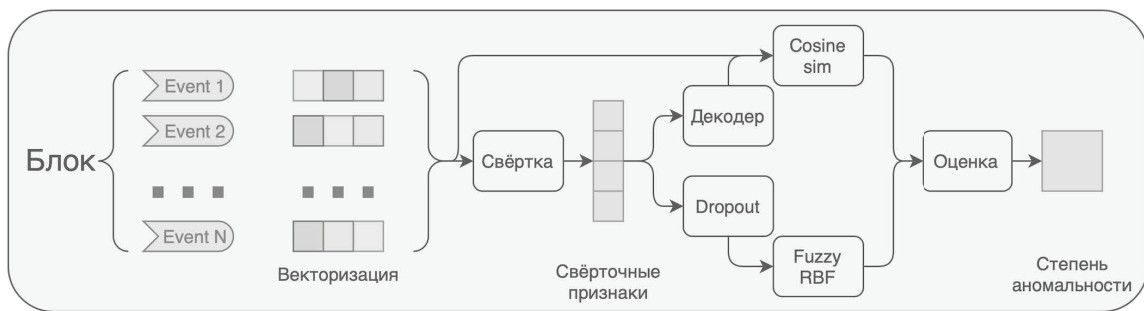


Рис. 2. Полная архитектура предлагаемого решения

подаются матрицы:

$$M = (M_1, M_2, \dots, M_i, \dots).$$

Здесь $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица, описывающая блок с номером i .

3.2. *Сверточные нейронные сети для построения признакового пространства.* Для векторизации блоков событий и построения данных предлагается использовать операцию параллельной свертки, описанной в работе Ю. Ким [9].

Данная свертка представляет собой 3 независимых параллельных сверточных слоя, каждый из которых представляет собой отдельный сверточный слой, который выполняет преобразование последовательности группы признаков по определенному правилу. Выбирается некоторое значение $h \in \mathbb{N}$ — размер фильтра для свертки. Этот размер задается на этапе построения модели.

Далее рассмотрим отдельную матрицу M_i , которая будет передана одному сверточному слою. Каждый сверточный слой использует несколько независимых фильтров заданного размера, но с разными значениями весов. Тогда рассмотрим отдельный слой и обозначим через $\hat{c}_{i,j}$ карту признаков, которая получается после применения фильтра w_j указанного слоя к матрице M_i . Тогда выполняется следующее соотношение:

$$\hat{c}_{i,j} = M_i \circ w_j.$$

Здесь символ \circ обозначает операцию свертки матрицы M_i фильтром w_j . Как и в работе Ю. Ким, в качестве фильтра используем матрицу размера $t \times h$, т.е. $w \in \mathbb{R}^{m \times h}$. Благодаря этому после

применения одного фильтра конкретного слоя получим карту признаков в виде вектора $\hat{c}_{i,j} \in \mathbb{R}^{n-h+1}$.

Далее к каждому значению в полученной карте признаков для указанного фильтра добавляется некоторое смещение и применяется нелинейная функция активации. В работе Ю. Ким [9] предлагалось использовать функцию ReLU. Однако она не позволяет учитывать отрицательные значения признаков, а также не осуществляет стандартизацию признаков, что ухудшает качество работы алгоритмов. В данной работе предлагается использовать модификацию указанной функции в виде SELU (см. [10]):

$$\text{SELU}(x) = \lambda * \begin{cases} x, & x > 0 \\ \alpha * (e^x - 1), & x \leq 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ — константы нормализации (см. [10]).

После указанных преобразований для конкретного фильтра выполняется операция субдискретизации, в результате которой выбирается наиболее значимое (максимальное) значение в карте признаков. Следовательно, в результате комбинации свертки и субдискретизации для каждого фильтра получаем одно значение $\tilde{c}_{i,j} \in \mathbb{R}$ — сверточный признак для заданного фильтра.

После этого происходит конкатенация всех сверточных признаков для всех сверточных слоев и всех фильтров, в результате которой получается вектор признакового описания блока событий, который и можно рассматривать в качестве модели данных: $c_i \in \mathbb{R}^k$, где $k = \sum_{p=1}^{n_c} s_p$, где $n_c = 3$ — количество сверточных слоев, s_p — количество фильтров в слое с номером p . Количество фильтров каждого слоя является гиперпараметром, который указывается на этапе построения модели.

3.3. Асимметричный автокодировщик для минимизации потерь информации при сокращении размерности признакового пространства. Анализ существующих работ показал, что для минимизации потерь информации при сокращении признакового пространства стоит использовать архитектуру декодировщика [2]. Таким образом, после сверточной части необходимо добавить слой декодировщика, который будет производить восстановление исходного векторного описания событий по построенным сверточным признакам.

При этом в нашей задаче не требуется точное восстановление первоначальных описаний событий. Ключевыми факторами при разработке декодировщика являются простота и скорость обучения. При этом важно, чтобы аномальные события имели большую по модулю ошибку восстановления, чем нормальные данные. Поэтому в данной работе предлагается использовать полносвязный однослойный декодировщик, а в качестве ошибки восстановления вычислять косинусную меру схожести, которая широко применяется в различных автокодировщиках для анализа текстовых данных:

$$\mathcal{L}_{\text{decomp}} = \cos(x_i, z_i).$$

Здесь z_i — восстановленный вектор исходного представления блока событий x_i , который получается в результате работы декодировщика.

В результате проведенных экспериментов было принято решение использовать в качестве декодировщика обычный полносвязный слой. При этом в процессе обучения сети происходит максимизация косинусной меры схожести. Иными словами, в процессе обучения модели данных мы строим информативное признаковое описание для каждого блока событий посредством применения сверточной архитектуры, при этом пытаюсь восстановить первоначальные данные из построенных признаков с помощью полносвязного декодировщика.

3.4. Нечеткая кластеризация и выявление аномалий. Далее предлагается разработать алгоритм, позволяющий определять аномальное поведение на основании построенной модели данных. Как было сказано выше, для этих целей широко применяется подход сведения к задаче одноклассовой классификации. При этом наиболее эффективным является алгоритм, основанный на нечетком методе выявления аномалий в данных на основе эллиптической кластеризации, который был описан ранее [8].

В данной работе предлагается модифицировать описанный выше процесс для возможности применения с предлагаемым решением. Для этого было предложено встроить указанный метод в предлагаемое решение виде обучаемого слоя. Данный слой выполняет кластеризацию сверточных признаков, строя описание распределения нормальных данных. При этом нормальные данные должны соответствовать найденному распределению, поэтому необходимо минимизировать расстояние от каждого вектора обучающей выборки до найденного центра распределения. Для этих целей используются радиально-базисные функция активации. Обучающими параметрами данного слоя являются:

- (i) координаты центра кластера a ;
- (ii) матрица ковариаций C (так как матрица является положительно определенной и диагональной, для эффективности построенного решения, можно представить эту матрицу в виде вектора неотрицательных параметров);
- (iii) параметр μ .

В качестве функции активации используется функция, определяющая значение u_i для каждого объекта. В качестве ошибки будет использовано следующее значение, взятое из поставленной задачи оптимизации:

$$\mathcal{L}_{\text{unsupervised}} = \mu \sum_{i=1}^N u_i^m * \|x_i - a\|_C^2.$$

Из этого следует, что можно доработать итоговый выход сети для заданного исходного векторного представления блока событий x_i следующим образом:

$$\text{Out}(x_i) = u_i^m * \mathcal{L}_{\text{decomp}}.$$

Таким образом, в качестве ошибки реконструкции вычисляется косинусная мера схожести первоначального и восстановленного представления блока событий. Чем больше это значение, тем меньше ошибка реконструкции. При этом мы обучаем предлагаемую модель на задаче одноклассовой классификации, в которой преобладающее большинство данных является нормальным. Поэтому в результате применения обученного автокодировщика к аномальным данным получаем в среднем меньшие значения косинусной меры схожести, чем в процессе применения модели к нормальным данным.

В результате работы сети мы получаем итоговую оценку нормальности анализируемого блока событий на основании корректности построения признакового пространства и с учетом степени типичности объекта, полученную из RBF-слоя.

При этом в процессе обучения мы должны приблизить значение $\text{Out}(x_i)$ к единице. Следовательно, данную модель можно рассматривать как модель регрессии, которая должна получать в качестве отклика значение, близкие к 1. Тогда в качестве функции ошибки выходного слоя можно использовать следующую функцию:

$$\mathcal{L}_{\text{anom}} = \text{MSE}(\text{Out}(x_i), 1).$$

Значит, можно описать функцию ошибки, которая минимизируется в процессе обучения всей сети:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{unsupervised}} + \mathcal{L}_{\text{anom}}.$$

3.5. Регуляризация. В ходе анализа существующих работ [4, 9], а также проведенных экспериментов с различными архитектурами, авторы пришли к выводу, что для избежания переобучения нужно использовать следующие два подхода:

- (i) добавление $L2$ -регуляризации для сверточного слоя, что позволяет ограничить значения весов сверточных слоев. Таким образом, итоговая функция ошибки будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{unsupervised}} + \mathcal{L}_{\text{anom}} + \mathcal{L}_{l2};$$

- (ii) использование слоя Dropout перед построением кластеризации. Это увеличивает качество обобщения сети для новых данных.

Анализ существующих работ показал, что стандартный алгоритм Dropout не позволяет добиться хороших результатов, так как он не сохраняет распределение исходных признаков после случайного удаления весов. Поэтому в данной работе предлагается использовать модификацию данного подхода, устраняющую указанный недостаток — AlphaDropout (см. [10]).

4. Экспериментальная оценка предлагаемого решения. Для экспериментальной оценки построенного решения предлагается провести подбор оптимальных гиперпараметров, а также сравнение данного подхода с рядом существующих классических подходов, таких как одноклассовый метод опорных векторов, методы нечеткой кластеризации. Также необходимо провести сравнение с более современными подходами, в частности, с архитектурой трансформера, использующего механизм самовнимания.

Как правило, для экспериментальной оценки эффективности работы того или иного алгоритма используются различные интегральные метрики качества. Одни из самых широко используемых метрик в данной задаче — это площадь под ROC-кривой (AUC-ROC, PR-AUC). Анализ существующих работ по тематикам, схожим с тематикой настоящей работы, показывает, что, как правило, для оценки качества алгоритма выявления аномалий при работе пользователя применяются именно эти метрики (см. [1, 4]). Поэтому они и будут использованы в настоящей работе для оценки эффективности предлагаемого алгоритма. При этом для проведения более достоверной оценки в данной работе предлагается провести бутстреппинг тестовой выборки и более точной оценки распределения предлагаемых метрик качества на основании вычисления медианного значения метрик, а также 1 и 3 квартиля по всем получаемым подвыборкам.

4.1. Используемые наборы данных. В целях проведения качественного экспериментального исследования было принято решения использовать следующие 2 набора данных, которые широко применяются для оценки решений схожих задач:

- (a) HDFS: этот набор данных представляет собой поток текстовых описаний событий, происходящих на более чем 200 узлах Amazon EC2. Суммарно данный набор данных содержит порядка 11 млн записей об отдельных событиях. В описании каждого события содержится информация о привязке к некоторому блоку, который отражает привязку события к отдельной выполняемой программе в системе. В данном наборе данных присутствует разметка блоков событий на нормальные и аномальные (см. [20]).
- (b) BGL (Blue Gene/L): этот набор данных содержит описания событий, происходящих на суперкомпьютерной системе BlueGene/L. Он содержит в себе порядка 5 млн записей об отдельных событиях. При этом для каждого события присутствует информация, является ли оно нормальным или аномальным. Всего в наборе присутствует порядка 350000 (7%) аномальных событий [16].

Далее для каждого набора данных будет приведено более подробное описание, а также будут сформулированы некоторые начальные установки для корректного проведения экспериментов.

4.2. Особенности применения предлагаемого алгоритма к рассмотренным наборам данных.

Векторизация данных и критерий аномальности. Как было сказано ранее, для предварительной обработки всех наборов данных используется удаление идентификаторов посредством регулярных выражений. Также на основании экспериментальных исследований было обнаружено, что в наборе данных BGL часто и то же событие дублируется несколько раз, поэтому было принято решение об очистке набора данных и сохранения только одного упоминания тех событий, информация о которых повторяется последовательно несколько раз. На этапе токенизации происходит разделение содержимого системных журналов по описаниям отдельных событий.

После выполнения предварительной обработки событий и удаления различных идентификаторов можно получить словарь уникальных событий. Ниже указана информация о получившихся словарях событий для каждого набора данных:

Таблица 1. Описание объемов выборок для наборов данных HDFS и BGL

Значение		HDFS	BGL
Тренировочная выборка		601576	541385
Валидационная выборка	Нормальные блоки	3367	4263
	Аномальные блоки	3367	4263
Тестовая выборка	Нормальные блоки	13471	17053
	Аномальные блоки	13471	17053
Число подвыборок в тестовой выборке		10	10

I. HDFS:

- (a) размер словаря: 75 событий;
- (b) примеры обработанных данных:
 - (9) INFO dfsDataNodeBlockReceiver Exception writing block to mirror;
 - (9) WARN dfsDataBlockScanner Adding an already existing block;

II. BGL:

- (a) размер словаря: 728 событий;
- (b) примеры обработанных данных:
 - (i) RAS KERNEL INFO ciod Received signal;
 - (ii) RAS KERNEL FATAL rts bad message header index greater than total.

Далее выполняется классическое **One-hot** кодирование всех событий на основании построенного словаря и порядкового номера каждого события в словаре.

В силу того, что размер входных данных должен быть фиксирован, необходимо группировать события в блоки фиксированного размера. Размер этих блоков и определение критерия аномальности зависит от особенностей конкретного набора данных:

1. В случае с данными HDFS события уже сгруппированы по номеру блока, в данных экспериментах было принято решение брать по 20 первых событий в каждом блоке (если в блоке было менее 20 событий, к нему добавлялось новое событие `<EMPTY_EVENT>` столько раз, чтобы размер блока был равен 20). В качестве уровня аномальности блока использовалась соответствующая метка о наличии аномалии в блоке в исходном наборе данных.
2. В наборе данных BGL присутствует информация об аномальности отдельных событий. Поэтому предлагается решать задачу предсказания аномалий: все события объединяются в блоки по 5 событий с помощью скользящего окна. В качестве уровня аномальности каждого блока используется оценка аномальности того события, которое следует непосредственно после указанного блока.

Разделение данных на тренировочную, валидационную и тестовую выборки. Как было сказано выше, рассматривалось сведение поставленной задачи к задаче одноклассовой классификации. Поэтому в тренировочную выборку попадали только нормальные данные. Для определения оптимальных значений гиперпараметров было принято решение выделить сбалансированную валидационную выборку, включающую в себя как аномальные блоки событий, так и нормальные. На построенной выборке вычислялась метрика **ROC-AUC** на каждой эпохе обучения сети. Тестовая выборка также была составлена сбалансированно по классам, чтобы добиться более корректного вычисления метрик оценки качества работы алгоритмов. При этом, для более точной оценки тестовая выборка была случайным образом разделена на 10 сбалансированных подвыборок одинакового размера, для каждой из которых независимо вычислялись метрики качества. Размеры валидационной и тестовой выборок определялись исходя из количества аномалий в данных. Объемы тренировочной, валидационной и тестовой выборок указаны в таблице 1. Все значения указываются в количестве рассматриваемых блоков.

Построение модели данных. Для построения модели данных, как было сказано выше, используются сверточные слои (используется три слоя), в которых размер и количество фильтров зависит от размера блока данных. Кроме того, предлагается оценить решение на GPU с возможностью применения `mixed precision`, поэтому, по рекомендациям разработчиков, следует выбирать размер фильтров, кратный 8 (см. [15]). Поэтому в наборе данных HDFS предлагается использовать по 16 фильтров размеров 10, 11 и 12. В наборе данных BGL используется по 64 фильтра размеров 2, 3 и 4. Поскольку в качестве функции активации используется SELU, начальные значения для фильтров берутся из подходящего распределения `LecunNormal` (см. [10]), которое представляет собой усеченное нормальное распределение со средним значением 0 и стандартным отклонением, равным $\sqrt{1/N}$, где N — количество элементов в рассматриваемом тензоре.

Построение модели обнаружения аномального поведения. На этом этапе в обоих наборах данных предлагается выполнить объединение данных в один кластер, в качестве степени нечеткости используется значение $m = 2$. В качестве начального значения для параметра μ используется константа 0. В качестве начального значения для центра кластера используется непрерывное нормальное распределение со средним значением 0 и дисперсией 1. В качестве начального значения для ковариаций при вычислении расстояния Махаланобиса используется единичная матрица.

Регуляризация. В ходе экспериментальных исследований было выяснено, что значение $l2$ -регуляризации сильно влияет на точность полученного решения и зависит от размера и количества используемых фильтров. Поэтому для набора HDFS в качестве оптимального значения константы регуляризации было выбрано 0,001, в наборе данных BGL — значение 0,9. Эти параметры также определялись на валидационном наборе данных.

4.3. Сравнение предлагаемого решения с классическими алгоритмами. Для оценки предлагаемого решения была проведена серия экспериментов по сравнению решения с существующими подходами, дающими лучший результат в похожих задачах: одноклассовый метод опорных векторов (OCSVC), нечеткая кластеризация (Fuzzy), трансформеры (LogBERT). При этом проведенные эксперименты показали, что в качестве алгоритма векторизации блоков событий для метода опорных векторов лучше всего подходит вектор, равный сумме `One-hot` векторов событий, входящих в блок («мешок событий»); для Fuzzy оптимальным стал подход, основанный на TF-IDF; подход LogBERT основан на архитектуре трансформера, который учитывает как индекс события в словаре, так и его позиция в блоке, поэтому для векторизации использовалась сумма векторов: случайно закодированный индекс события в словаре и векторное представление номера позиции, закодированное с помощью функции синусоиды. Также во всех алгоритмах осуществлялся подбор гиперпараметров на валидационной выборке. Рассматриваемые гиперпараметры и лучшие значения приведены ниже:

1. Метод опорных векторов:
 - (a) функция активации ядра: радиально-базисная для обоих наборов;
 - (b) параметр γ для ядровой функции: 0,1 для HDFS и 0,5 для BGL.
2. Метод нечеткой кластеризации:
 - (a) степень нечеткости: 1,3 для обоих наборов;
 - (b) процент исключений: 0,1 для HDFS и 0,15 для BGL;
 - (c) параметр γ для ядровой функции: 0,3 для HDFS и 0,1 для BGL.
3. Метод LogBERT:
 - (a) количество слоев типа «трансформер»: 2;
 - (b) размерность представления токенов и внутреннего состояния: 50 и 256 соответственно;
 - (c) коэффициент α в формуле вычисления итоговой ошибки;
 - (d) процент замаскированных событий m в каждом блоке: 0,65 для HDFS и 0,5 для BGL;
 - (e) число кандидатов g для определения степени аномальности предсказанного события: 6 в HDFS и 15 в BGL.

Результаты проведенных экспериментов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты проведенных экспериментов

Набор данных	Подход	ROC-AUC			PR-AUC		
		Медиана	Q1	Q3	Медиана	Q1	Q3
HDFS	OCSVC	0,833	0,826	0,837	0,828	0,821	0,832
	Fuzzy	0,858	0,851	0,862	0,853	0,847	0,856
	LogBERT	0,900	0,894	0,907	0,901	0,898	0,911
	FuzzyCNN	0,973	0,971	0,974	0,970	0,969	0,972
BGL	OCSVC	0,783	0,779	0,789	0,778	0,772	0,783
	Fuzzy	0,834	0,821	0,845	0,827	0,820	0,830
	LogBERT	0,908	0,901	0,912	0,898	0,893	0,901
	FuzzyCNN	0,939	0,934	0,940	0,921	0,916	0,926

Таким образом, во всех проведенных экспериментах на рассмотренных наборах данных предлагаемое решение позволяет добиться лучшего результата.

5. Заключение. В данной работе предлагается новый подход к задаче обнаружения аномальных событий в данных системных журналов на основании архитектуры автокодировщика с использованием параллельного свертки для кодирования поступающих блоков событий, полносвязного декодировщика для минимизации потерь при кодировании, а также нового слоя, основанного на нечеткой кластеризации сверточных признаков, выход которого перемножается на ошибку реконструкции декодировщика, что позволяет определить совокупную степень аномальности каждого блока событий. Предлагаемое решение позволяет эффективно строить векторные представления потока сложно структурированных данных системных журналов с учетом внутренних взаимосвязей между событиями.

Предложенное решение позволяет значительно уменьшить временные затраты существующих решений поставленной задачи путем применения параллельной свертки. Кроме того, для восстановления исходного векторного представления последовательности событий достаточно применить обычный полносвязный слой, который также не требует значительных вычислительных затрат. Следовательно, предложенное решение может выступать эффективной альтернативой существующим архитектурам **Transformer**, позволяющим добиться лучших результатов в поставленной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chandola V., Banerjee A., Kumar V.* Anomaly detection: A survey// ACM Comp. Surv. (CSUR). — 2009. — 41, № 3. — P. 1–58.
2. *Chollet F.* Deep Learning with Python. — Simon and Schuster, 2021.
3. *Girolami M.* Mercer kernel-based clustering in feature space// IEEE Trans. Neural Networks. — 2002. — 13, № 3. — P. 780–784.
4. *Gorokhov O., Petrovskiy M., Mashechkin I.* Convolutional neural networks for unsupervised anomaly detection in text data// Int. Conf. on Intelligent Data Engineering and Automated Learning. — Cham: Springer, 2017. — P. 500–507.
5. *Guo H., Yuan S., Wu X.* Logbert: Log anomaly detection via bert// Proc. 2021 International Joint Conf. on Neural Networks. — IEEE, 2021. — P. 1–8.
6. *He S. et al.* Experience report: System log analysis for anomaly detection// Proc. 2016 IEEE 27th Int. Symp. on Software Reliability Engineering. — IEEE, 2016. — P. 207–218.
7. *Hotho A., Nurnberger A., Paas G.* A brief survey of text mining// J. Language Techn. Comput. Linguistics. — 2005. — 20, № 1. — P. 19–62.

8. *Kazachuk M. et al.* Novelty detection using elliptical fuzzy clustering in a reproducing kernel Hilbert space// Proc. 19th Int. Conf. "Intelligent Data Engineering and Automated Learning (IDEAL-2018). Part 2 (Madrid, Spain, November 21–23, 2018). — Springer, 2018. — P. 221–232.
9. *Kim Y.* Convolutional neural networks for sentence classification/ [arXiv:1408.5882](https://arxiv.org/abs/1408.5882) [cs.CL].
10. *Klambauer G. et al.* Self-normalizing neural networks// Adv. Neural Inform. Process. Syst. — 2017. — 30. — P. 971–980.
11. *Le V. H., Zhang H.* Log-based anomaly detection with deep learning: How far are we?// Proc. 44th Int. Conf. on Software Engineering, 2022. — P. 1356–1367.
12. *Ma J. et al.* Automatic parsing and utilization of system log features in log analysis: A Survey// Appl. Sci. — 2023. — 13, № 8. — P. 4930.
13. *Manevitz L. M., Yousef M.* One-class SVMs for document classification// J. Machine Learn. Res. — 2001. — 2. — P. 139–154.
14. *Mi H. et al.* Toward fine-grained, unsupervised, scalable performance diagnosis for production cloud computing systems// IEEE Trans. Paral. Distr. Syst. — 2013. — 24, № 6. — P. 1245–1255.
15. *Micikevicius P. et al.* Mixed precision training/ [arXiv:1710.03740](https://arxiv.org/abs/1710.03740) [cs.AI].
16. *Oliner A., Stearley J.* What supercomputers say: A study of five system logs// Proc. 37th Annual IEEE/IFIP Int. Conf. on Dependable Systems and Networks. — IEEE, 2007. — P. 575–584.
17. *Petrovskiy M. I.* Outlier detection algorithms in data mining systems// Program. Comput. Software. — 2003. — 29. — P. 228–237.
18. *Ryciak P., Wasielewska K., Janicki A.* Anomaly detection in log files using selected natural language processing methods// Appl. Sci. — 2022. — 12, № 10. — P. 5089.
19. *Vaswani A. et al.* Attention is all you need// Adv. Neural Inform. Process. Syst. — 2017. — 30. — P. 5998–6008.
20. *Xu W. et al.* Detecting large-scale system problems by mining console logs// Proc. ACM SIGOPS 22nd Symp. on Operating Systems Principles, 2009. — P. 117–132.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Горохов Олег Евгеньевич (Gorokhov Oleg Evgenievich)
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
 (M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
 E-mail: owlman995@gmail.com

Петровский Михаил Игоревич (Petrovskii Mikhail Igorevich)
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
 (M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
 E-mail: michael@cs.msu.su

Машечкин Игорь Валерьевич (Mashechkin Igor Valerievich)
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
 (M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
 E-mail: mash@cs.msu.su



ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МСКЕАН

© 2024 г. С. А. ДУХНОВСКИЙ

Аннотация. В работе исследуется кинетическая система уравнений McKean двух групп частиц. Система представляет собой кинетическое уравнение Больцмана, и для этой модели импульс и энергия не сохраняются. При помощи методов группового анализа получено решение, представляющее плотность частиц газа. Аналогичным образом можно найти точные решения для других кинетических моделей.

Ключевые слова: кинетическая система McKean, инвариантное решение, групповой анализ.

GROUP ANALYSIS OF THE MCKEAN SYSTEM

© 2024 S. A. DUKHNOVSKY

ABSTRACT. In this paper, we examine the kinetic McKean system for two groups of particles. The system represents the Boltzmann kinetic equation, in this model, the momentum and the energy are not conserved. Using methods of group analysis, we obtain a solution representing the density of gas particles. Similarly, exact solutions for other kinetic models can be found.

Keywords and phrases: kinetic system McKean, invariant solution, group analysis.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60, 35Q20

1. Введение. Метод группового анализа является широко известным методом поиска решений, в частности, инвариантных решений уравнений математической физики. Подробно этот метод описан в [5, 10, 15]. Общее описание уравнения Больцмана описано в [3]. В [6, 7] О. В. Ильин получил оптимальную систему одномерных подалгебр и классов инвариантных решений для стационарной кинетической модели Бродуэлла и одномерного интегро-дифференциального уравнения Больцмана для максвелловских частиц с неупругими столкновениями. В [9] приведены результаты группового анализа уравнений Больцмана и Власова. Решения кинетических систем, использующие разложения Пенлеве, были найдены в [4, 8, 13, 14]. Асимптотическая устойчивость для моделей Больцмана, а также численное исследование представлены в [1, 2, 11, 12].

Рассмотрим одномерную систему McKean (см. [4, 13, 14]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\partial_t v - \partial_x v = -\frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv). \quad (2)$$

Здесь $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ — плотности групп частиц со скоростями $c = 1, -1$, ε — параметр Кнудсена из кинетической теории газов. Данная система описывает одноатомный разреженный газ, состоящий из двух групп частиц. Система McKean является неинтегрируемой системой, т.е. для нее тест Пенлеве неприменим (см. [13]). Взаимодействие происходит следующим образом. Частица из первой группы, взаимодействуя с частицей второй группы, переходят в две частицы

второй группы. Аналогично две частицы второй группы, взаимодействуя сами с собой, переходят в частицу первой группы и второй группы соответственно.

2. Формулы группового анализа. Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$F_1(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3)$$

$$F_2(v, v_t, v_x, v_{tt}, v_{xt}, v_{xx}, \dots) = 0, \quad (4)$$

где $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ являются неизвестными функциями. Согласно методу группового анализа, ищем продолженный оператор в форме

$$X_1 = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial t} + \zeta \frac{\partial}{\partial u} + \chi \frac{\partial}{\partial v} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_t} + \chi_1 \frac{\partial}{\partial v_x} + \chi_2 \frac{\partial}{\partial v_t},$$

где $\xi = \xi(x, t, u, v)$, $\eta = \eta(x, t, u, v)$, $\zeta = \zeta(x, t, u, v)$, $\chi = \chi(x, t, u, v)$. Здесь

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial t} + \zeta \frac{\partial}{\partial u} + \chi \frac{\partial}{\partial v} \quad (5)$$

является инфинитезимальным оператором группы. Инвариант группы и оператора (5) является функцией $I(x, t, u, v)$:

$$XI = \xi \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial t} + \zeta \frac{\partial I}{\partial u} + \chi \frac{\partial I}{\partial v} = 0. \quad (6)$$

Координаты первого продолжения оператора определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= D_x(\zeta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\eta), & \zeta_2 &= D_t(\zeta) - u_x D_t(\xi) - u_t D_t(\eta), \\ \chi_1 &= D_x(\chi) - v_x D_x(\xi) - v_t D_x(\eta), & \chi_2 &= D_t(\chi) - v_x D_t(\xi) - v_t D_t(\eta), \end{aligned}$$

где D_x, D_t являются операторами полного дифференцирования по x и t :

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + v_{xx} \frac{\partial}{\partial v_x} + v_{xt} \frac{\partial}{\partial v_t} + \dots, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + v_t \frac{\partial}{\partial v} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + v_{xt} \frac{\partial}{\partial v_x} + v_{tt} \frac{\partial}{\partial v_t} + \dots \end{aligned}$$

Имеем

$$\zeta_1 = \zeta_x + \zeta_u u_x + \zeta_v v_x - u_x(\xi_x + \xi_u u_x + \xi_v v_x) - u_t(\eta_x + \eta_u u_x + \eta_v v_x), \quad (7)$$

$$\zeta_2 = \zeta_t + \zeta_u u_t + \zeta_v v_t - u_x(\xi_t + \xi_u u_t + \xi_v v_t) - u_t(\eta_x + \eta_u u_t + \eta_v v_t) \quad (8)$$

и

$$\chi_1 = \chi_x + u_x \chi_u + v_x \chi_v - v_x(\xi_x + u_x \xi_u + v_x \xi_v) - v_t(\eta_x + u_x \eta_u + v_x \eta_v), \quad (9)$$

$$\chi_2 = \chi_t + \xi_u u_t + \xi_v v_t - v_x(\xi_t + \xi_u u_t + \xi_v v_t) - v_t(\eta_t + \eta_u u_t + \eta_v v_t). \quad (10)$$

Потребуем, чтобы

$$X_1 F_1 \Big|_{F_1=F_2=0} = 0, \quad X_1 F_2 \Big|_{F_1=F_2=0} = 0. \quad (11)$$

Соотношения (11) называются инвариантными условиями.

3. Приложение метода группового анализа. Подставим

$$F_1 = u_t + u_x - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv), \quad F_2 = v_t - v_x + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)$$

в инвариантные условия (11):

$$X_1 F_1 \Big|_{F_1=F_2=0} = \left(\zeta_2 + \zeta_1 - \frac{2}{\varepsilon} v \chi + \frac{1}{\varepsilon} u \chi + \frac{1}{\varepsilon} v \zeta \right) \Big|_{F_1=F_2=0}, \quad (12)$$

$$X_1 F_2 \Big|_{F_1=F_2=0} = \left(\chi_2 - \chi_1 + \frac{2}{\varepsilon} v \chi - \frac{1}{\varepsilon} \chi u - \frac{1}{\varepsilon} v \zeta \right) \Big|_{F_1=F_2=0}. \quad (13)$$

Заменяя u_t, v_t на $-u_x + (v^2 - uv)/\varepsilon, v_x - (v^2 - uv)/\varepsilon$ и принимая во внимание выражения (7)–(10) для координат первого продолжения из первого уравнения (12), имеем:

$$\begin{aligned} u_x : & -\xi_t - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\xi_u + \xi_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) + \eta_t + \eta_u \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \frac{1}{\varepsilon}\eta_v(v^2 - uv) - \xi_x + \eta_x = 0, \\ u_x^2 : & \xi_u - \eta_u - \xi_u + \eta_u = 0, \\ v_x : & \zeta_v - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v + \zeta_v - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v = 0, \\ u_x v_x : & -\xi_v + \eta_v - \xi_v + \eta_v = 0, \\ 1 : & \zeta_t + \zeta_u \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \zeta_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_t - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_u \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) + \zeta_x - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_x - \frac{2}{\varepsilon}v\chi + \frac{1}{\varepsilon}u\chi + \frac{1}{\varepsilon}v\zeta. \end{aligned}$$

Из второго уравнения (13):

$$\begin{aligned} u_x : & \chi_u - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_u - \chi_u - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_u = 0, \\ u_x v_x : & \xi_u + \eta_u + \xi_u + \eta - u = 0, \\ v_x : & \chi_v - \xi_t - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\xi_u + \xi_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \eta_t - \eta_u \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) + \eta_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v - \chi_v + \xi_x + \eta_x - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v = 0, \\ v_x^2 : & -\xi_v - \eta_v + \xi_v + \eta_v = 0, \\ 1 : & \chi_t + \chi_u \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \chi_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_t + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_u \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \chi_x - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_x + \frac{2}{\varepsilon}v\chi - \frac{1}{\varepsilon}\chi u - \frac{1}{\varepsilon}v\zeta. \end{aligned}$$

Перепишем систему в более компактной форме:

$$\begin{aligned} \eta_v = \xi_v, \quad 2\frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_u - \xi_t + \eta_t + \eta_x - \xi_x = 0, \quad \zeta_v - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v = 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) \left(\zeta_u - \zeta_v - \eta_t - \eta_u \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) + \eta_v \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) - \eta_x \right) + \zeta_x + \zeta_t - \frac{2}{\varepsilon}v\chi + \frac{1}{\varepsilon}u\chi + \frac{1}{\varepsilon}v\zeta = 0, \\ \eta_u = -\xi_u, \quad \chi_u + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_u = 0, \quad 2\frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v - \eta_t - \xi_t + \eta_x + \xi_x = 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv) \left(\chi_u - \chi_v + \eta_t + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_u - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)\eta_v - \eta_x \right) + \chi_t - \chi_x + \frac{2}{\varepsilon}v\chi - \frac{1}{\varepsilon}\chi u - \frac{1}{\varepsilon}v\zeta = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя систему, получаем

$$\eta(t) = \alpha t + \beta, \quad \xi(x) = \alpha x + \gamma, \quad \zeta(u) = -\alpha u, \quad \chi(v) = -\alpha v,$$

где α, β, γ — произвольные константы.

Характеристическая система для (6) имеет вид

$$\frac{dt}{\eta} = \frac{dx}{\xi} = \frac{du}{\zeta} = \frac{dv}{\chi} \quad \text{или} \quad \frac{dt}{\alpha t + \beta} = \frac{dx}{\alpha x + \gamma} = \frac{du}{-\alpha u} = \frac{dv}{-\alpha v}.$$

Интегрируя, получаем

$$\omega = \frac{\alpha x + \gamma}{\alpha t + \beta},$$

где α, γ, β — константы интегрирования. Инвариантное решение будем искать в виде

$$u = \frac{\Phi(\omega)}{\alpha(\alpha t + \beta)}, \quad v = \frac{\Psi(\omega)}{\alpha(\alpha t + \beta)}, \quad (14)$$

где Φ , Ψ — неизвестные функции автомодельных переменных, которые требуется определить. Подставляем (14) в (1)–(2):

$$\frac{-(\alpha t + \beta)\Phi + (\alpha t - \alpha x + \beta - \gamma)\Phi'}{(\alpha t + \beta)^3} = \frac{\Psi^2 - \Phi\Psi}{\alpha^2(\alpha t + \beta)^2\varepsilon},$$

$$\frac{-(\alpha t + \beta)\Psi - (\alpha t + \alpha x + \beta + \gamma)\Psi'}{(\alpha t + \beta)^3} = -\frac{\Phi^2 - \Psi\Psi}{\alpha^2(\alpha t + \beta)^2\varepsilon}$$

или

$$\alpha^2\varepsilon(\Phi(1 - \omega))' = \Psi^2 - \Phi\Psi, \quad \alpha^2\varepsilon(\Psi(1 + \omega))' = \Psi^2 - \Phi\Psi$$

(здесь дифференцирование производится по переменной ω). Интегрируя, получим

$$\Phi(\omega) = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}\Psi(\omega) + \frac{1}{(1 - \omega)}C,$$

где C — константа интегрирования. Для нахождения функции Ψ имеем упрощенное уравнение Риккати

$$\Psi' = \frac{2\omega^2 - 2\omega}{\varepsilon\alpha^2(1 - \omega)^2(1 + \omega)}\Psi^2 + \left(\frac{-C - \varepsilon\alpha^2 + (2\varepsilon\alpha^2 + C)\omega - \varepsilon\alpha^2\omega^2}{\varepsilon\alpha^2(1 - \omega)^2(1 + \omega)} \right) \Psi.$$

Можем записать частное решение при $C = 0$:

$$\Psi(\omega) = \frac{2\varepsilon\alpha^2}{2 + 2\alpha^2\varepsilon C_1 + 2\omega\varepsilon\alpha^2 C_1 + (\omega + 1) \ln \frac{\omega + 1}{\omega - 1}}, \quad \Phi(\omega) = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}\Psi(\omega), \quad (15)$$

где C_1 — произвольная константа интегрирования. Неотрицательность решения может быть достигнута посредством выбора константы C_1 в области x, t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О локальном равновесии уравнения Карлемана// в кн.: Проблемы математического анализа. Т. 78, 2015. — С. 165–190.
2. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова—Султангазина// Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — 60. — С. 23–81.
3. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 3. — С. 3–51.
4. Духновский С. А. Тест Пенлеве и автомодельное решение кинетической модели// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 176. — С. 91–94.
5. Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике// Усп. мат. наук. — 1992. — 47, № 4. — С. 83–144.
6. Ильин О. В. Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2012. — 170, № 3. — С. 481–488.
7. Ильин О. В. Симметрии, функция тока и точные решения для двумерной стационарной кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2014. — 179, № 3. — С. 350–359.
8. Линдблом О., Эйлер Н. Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати// Теор. мат. физ. — 2002. — 131, № 2. — С. 522–526.
9. Платонова К. С., Боровских А. В. Групповой анализ уравнений Больцмана и Власова// Теор. мат. физ. — 2020. — 203, № 3. — С. 417–450.
10. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики. — М.: Физматлит, 2005.
11. Радкевич Е. В. О дискретных кинетических уравнениях// Докл. Акад. наук. — 2012. — 447, № 4. — С. 369–373.
12. Радкевич Е. В. О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения// Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — 47. — С. 108–139.
13. Dukhnovsky S. A. On solutions of the kinetic McKean system// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2020. — 94, № 3. — P. 3–11.

14. *Euler N., Steeb W.-H.* Painlevé test and discrete Boltzmann equations// Austr. J. Phys. — 1989. — 42. — P. 1–10.
15. *Ovsiannikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations. — New York: Academic Press, 1982.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Духновский Сергей Анатольевич (Dukhnovsky Sergey Anatolievich)

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia)

E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

CONTENTS

Application of the projection-grid method for solving nonstationary problems (<i>O. P. Barabash</i>)	3
On problems of boundary control and optimal control of a distributed inhomogeneous oscillatory system with given intermediate conditions on the state functions (<i>V. R. Barseghyan</i>)	13
Models of cooling and freezing of living biological tissues with a flat ruler applicator (<i>B. K. Buzdov</i>)	30
Classical solution of the third mixed problem for the telegraph equation with nonlinear potential (<i>V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko</i>)	37
Generalized Riemann formulas for the solution of the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients in the first quadrant (<i>F. E. Lomovtsev</i>)	50
On the transformation dual to the Radon–Kipriyanov transformation (<i>L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, M. G. Lapshina</i>)	70
General scheme for constructing the determining function in a control problem for a dynamical system with partial derivatives of different orders (<i>E. V. Raetskaya</i>)	78
Riemann–Hilbert-type problems for the generalized Cauchy–Riemann equation with a leading coefficient having a singularity in a circle (<i>A. B. Rasulov, Yu. S. Fedorov, A. M. Sergeeva</i>)	89
Generalized solution of the initial-boundary-value problem for the wave equation with a mixed derivative and a general potential (<i>V. S. Rykhlov</i>)	99
On the mathematical models of virology used to study the Covid-19 pandemic (<i>E. P. Krugova, E. E. Bukzhalev</i>)	122
Deep learning method for identifying anomalies in operating computer systems (<i>O. E. Gorokhov, M. I. Petrovskii, I. V. Mashechkin</i>)	140
Group analysis of the McKean system (<i>S. A. Dukhnovsky</i>)	153

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антонинович,
д.ф.-м.-н. (ВИНТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович