

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 231



Москва 2024

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 231 (2024)

Дата публикации 15 января 2024 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. С. Бондарев

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

А. В. Овчинников

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 231

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXIV».

ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2023 г.

Часть 2



Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Периодические решения дифференциального уравнения с релейной нелинейностью с запаздыванием (Д. Д. Бачин)	3
Аналитические оценки точности восстановления профиля ветра по данным лидарного сканирования (Н. А. Баранов)	13
Построения регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения типа Шрёдингера с потенциалом $V(x) = x$ (А. Г. Елисеев, П. В. Кириченко)	27
Максимальный поток в параллельных сетях со связанными дугами (Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, В. А. Русаков)	44
Моментные функции решения стохастической системы дифференциальных уравнений в частных производных (Л. Ю. Кабанцова)	53
Формулы Грина для Δ_B -оператора Киприянова в весовой линейной форме (Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов)	68
Учет симметрии в методе Ритца для уравнения Шрёдингера в кристаллах с базисом (Н. Б. Мельников, Б. И. Резер)	74
Об асимптотической устойчивости одного уравнения с дискретным запаздывающим аргументом (М. В. Мулюков)	83
О восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности (М. В. Половинкина)	89
О построении решения неоднородного бигармонического уравнения в задачах механики тонких изотропных пластин (В. Н. Попов, О. В. Гермидер)	100
l -Проблема моментов в задачах оптимального управления и оценивания состояния для многомерных линейных систем дробного порядка (С. С. Постнов)	107
Задача линейного сопряжения для уравнения Коши—Римана с сильной особенностью в младшем коэффициенте в области с кусочно гладкой границей (А. Б. Расулов, Н. В. Якивчик)	115
Инструкция по подготовке статей для журнала «Итоги науки и техники. Современная ма- тематика. Тематические обзоры» (Н. А. Архипова, Е. Е. Букжсалёв, А. В. Овчинников, А. А. Широкин)	124



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-3-12

УДК 517.929

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РЕЛЕЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2024 г. Д. Д. БАИН

Аннотация. Для одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с релейной нелинейностью и запаздыванием отыскиваются орбитально устойчивые периодические решения. Для этого вводится оператор последования, который оказывается надстройкой над некоторым одномерным отображением. В результате анализа данного одномерного отображения обнаруживаются области параметров, для которых существует экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, оператор последования, устойчивость.

PERIODIC SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION WITH RELAY NONLINEARITY WITH DELAY

© 2024 D. D. BAIN

ABSTRACT. For one class of second-order differential equations with relay nonlinearity and delay, orbitally stable periodic solutions are found by means of the recurrence operator, which is a suspension over some one-dimensional mapping. The analysis of this one-dimensional mapping shows that there exist domains of parameters for which exponentially orbitally stable periodic solutions exist.

Keywords and phrases: differential equation with delay, recurrence operator, stability.

AMS Subject Classification: 34K13, 34K39

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = d \operatorname{sign} u(t - T), \quad (1)$$

в котором T, b, c, d — постоянные параметры. При этом $T > 0, d \neq 0$.

Похожие системы встречаются в работах [1–3], и само уравнение (1) при различных условиях на параметры встречается в [4] в качестве предельного объекта для нелинейного осциллятора с большим параметром и в [5] в качестве модели движения судна управляемого двухпозиционным авторулевым. Мы же будем рассматривать уравнение (1) при условиях $b^2 - 4c > 0, c \neq 0$.

Определение 1.1. Функцию $u(t)$ мы будем называть *осциллирующей*, если $u(t)$ обращается в нуль для сколь угодно больших t . Если на всяком интервале длины запаздывания осциллирующая функция $u(t)$ обращается в нуль не более одного раза, то такая функция называется *медленно осциллирующей*.

Далее будем отыскивать именно медленно осциллирующие периодические решения уравнения (1), потому что, с одной стороны, при численном счёте быстро осциллирующих решений не

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00209).

обнаруживается, а с другой стороны, рассмотрение только медленно осциллирующих решений позволяет ввести оператор последования, при анализе которого получаются условия существования и орбитальной устойчивости периодических решений.

Обратимая замена

$$u(t) \rightarrow \left(\frac{|d|}{c}\right) \cdot u\left(\frac{t}{T}\right), \quad b \rightarrow \frac{b}{T}, \quad c \rightarrow \frac{c}{T^2}, \quad \text{sign } d \rightarrow s,$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = cs \cdot \text{sign}(u(t-1)), \quad (2)$$

где $c \neq 0$, $s = \pm 1$, и $b^2 - 4c > 0$. Таким образом, уравнение (1) сводится к случаю $T = 1$, $d = \pm c$. В этой форме мы и будем исследовать данную систему.

2. Определение начальных условий. Как и в [4, 5], с целью построения решений уравнения (2) определим множество начальных условий $S \subset C[-1, 0] \times (0, \infty)$ следующим образом:

$$S = \left\{ (\varphi, v) \in C[-1, 0] \times (0, \infty) : \varphi(t) < 0 \text{ при } t < 0, \varphi(0) = 0 \right\}. \quad (3)$$

Для произвольной пары $(\varphi, v) \in S$ обозначим через $u_v(t)$ решение уравнения (2) с начальными условиями

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-1, 0], \quad \dot{u}(0) = v. \quad (4)$$

Заметим, что при $t \in [0, 1)$ в силу (3) и (4) выполняется неравенство $u_v(t-1) < 0$. Поэтому для $t \in [0, 1)$ решение $u_v(t)$ совпадает с решением $u_v^{(1)}(t)$ задачи Коши

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = -cs, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = v, \quad (5)$$

которое имеет вид

$$u_v^{(1)}(t) := \frac{v - \lambda_2 s}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{v - \lambda_1 s}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} - s, \quad (6)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7)$$

Так как $b^2 - 4c > 0$, то числа λ_1, λ_2 вещественны и различны, при этом значения параметров b, c однозначно соответствуют значениям параметров $\lambda_1 > \lambda_2$, поэтому далее мы будем рассматривать именно λ_1, λ_2 и s в качестве параметров уравнения (2), имея в виду $b = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $c = \lambda_1 \lambda_2$.

Заметим, что если в качестве начальных условий брать фиксированный v и различные φ , т.ч. $(\varphi, v) \in S$, то соответствующие им решения будут совпадать. Поэтому, решение $u_v(t)$ определяется параметром v однозначно.

Лемма 2.1. *Решение $u_v(t)$ не обращается в нуль при $t \in (0, 1]$ тогда и только тогда, когда*

$$v > v_0 := s \frac{\lambda_1(1 - e^{\lambda_2}) - \lambda_2(1 - e^{\lambda_1})}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}. \quad (8)$$

При этом знак v_0 совпадает со знаком $cs = \lambda_1 \lambda_2 s$.

Доказательство. При $t \in [0, 1]$ решение $u_v(t)$ совпадает с $u_v^{(1)}(t)$ (при $t = 1$ они совпадают по непрерывности). Заметим, что уравнение $\dot{u}_v^{(1)}(t) = 0$ может иметь не более одного решения, и, следовательно, функция $u_v^{(1)}(t)$ имеет не более одного экстремума, а значит, по теореме Ролля она имеет не более двух нулей. Ввиду начальных условий (5) функция $u_v^{(1)}(t)$ имеет нуль в точке $t = 0$ и положительна при малых $t > 0$, поэтому неравенство $u_v^{(1)}(1) > 0$ эквивалентно тому, что решение $u_v^{(1)}(t)$ не обращается в нуль при $t \in (0, 1]$. Прделав преобразования неравенства $u_v^{(1)}(1) > 0$ получаем неравенство (8). Тот факт, что знак v_0 совпадает со знаком $\lambda_1 \lambda_2 s = cs$, также может быть доказан прямыми преобразованиями. $\square$

Пусть $t^*(v) = \inf \{t > 0 : u_v(t) = 0\}$ — наименьший положительный нуль решения $u_v(t)$, если он существует, и $+\infty$ в противном случае. Так как $u_v(t) > 0$ при $t \in (0, t^*(v))$ (в том числе если $t^*(v) = +\infty$), то при $t \in (1, t^*(v) + 1)$ решение $u_v(t)$ совпадает с решением задачи Коши

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = cs, \quad u(1) = u_v^{(1)}(1), \quad \dot{u}(1) = \dot{u}_v^{(1)}(1), \quad (9)$$

которое имеет вид

$$u_v^{(2)}(t) = \frac{v - k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{v - k_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + s, \quad (10)$$

где

$$k_1 = \lambda_2 s(1 - 2e^{-\lambda_1}), \quad k_2 = \lambda_1 s(1 - 2e^{-\lambda_2}). \quad (11)$$

Определим множество V , состоящее из таких v , что $u_v(t)$ имеет наименьший положительный нуль на интервале $(1, +\infty)$, формулой

$$V = \left\{v \in (0, +\infty) : t^*(v) \in (1, +\infty)\right\}. \quad (12)$$

Заметим, что условие $v \in V$ является необходимым для медленной осцилляции решения $u_v(t)$, поэтому мы далее будем искать решения именно в предположении $v \in V$. Следующая лемма позволит нам прояснить вид множества V .

Лемма 2.2. *Если $v \in V$, то $(0, +\infty) \cap (v_0, v) \subset V$.*

Доказательство. В выражениях (6) и (10) можно, вынеся за скобку v получить выражения

$$\begin{aligned} u_v^{(1)}(t) &= v \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \frac{-\lambda_2 s}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{-\lambda_1 s}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + s, \\ u_v^{(2)}(t) &= v \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \frac{-k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{-k_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + s. \end{aligned}$$

Заметим, что выражение в скобках положительно при положительных t . Следовательно, при любом фиксированном $t > 0$ значения $u_v^{(1)}(t)$ и $u_v^{(2)}(t)$ строго возрастают по v .

Пусть $w \in (0, +\infty) \cap (v_0, v)$. Если у решения $u_w(t)$ нет положительных нулей, то $u_w(t) > 0$ при $t > 0$, но тогда, так как $v > w$, верны неравенства

$$\begin{aligned} u_v^{(1)}(t) &> u_w^{(1)}(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, 1], \\ u_v^{(2)}(t) &> u_w^{(2)}(t) > 0 \quad \text{при } t \in [1, +\infty), \end{aligned}$$

т.е. и у решения $u_w(t)$ нет положительных нулей, что неверно, ведь $v \in V$. Значит, $u_w(t)$ имеет положительный корень $t^*(w) < +\infty$. При этом $t^*(w) > 1$, так как из неравенства $w > v_0$ согласно лемме 2.1 следует, что $u_w(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$. Таким образом, $w \in V$. $\square$

Следствие. *Множество V является связным множеством в $\mathbb{R}$, а значит, если оно не пусто, то является некоторым интервалом.*

Лемма 2.3. *Если $v \in V$, то $t^*(v)$ является кратным нулём $u_v(t)$ в том и только том случае, когда $v = \sup V$.*

Доказательство. Пусть $v = \sup V \in V$. Тогда $u_v^{(2)}(t^*(v)) = 0$ и для любых $w > v$ верно неравенство $u_w^{(2)}(t) > 0$ при $t \in [1, +\infty)$. Следовательно, $t^*(v)$ — это минимум решения $u_v^{(2)}(t)$, т.е. нуль чётной кратности.

Обратно, пусть $v \in V$ и $t^*(v)$ является кратным нулём $u_v(t)$. Уравнение $\dot{u}_v^{(2)}(t) = 0$ имеет не более одного решения t_{ext} , причём из условия $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (т.е. $b^2 - 4c \neq 0$) следует, что $\ddot{u}_v^{(2)}(t_{\text{ext}}) \neq 0$. Поэтому точка $t^*(v) = t_{\text{ext}}$ является единственным локальным минимумом $u_v^{(2)}(t)$, а значит, она также является и глобальным минимумом функции $u_v^{(2)}(t)$. Следовательно, ввиду монотонности $u_v^{(2)}(t)$ по v , доказанной в лемме 2.2, при любых $w > v$ верно неравенство $u_w^{(2)}(t) > u_v^{(2)}(t) \geq 0$ при $t > 1$, а значит, $w \notin V$, т.е. v является верхней гранью V . Поскольку $v \in V$, то v является наименьшей верхней гранью V . $\square$

Для того чтобы иметь дело только с простыми нулями, будем рассматривать множество

$$V_0 = V \setminus \{\sup V\}, \quad (13)$$

которое, если не пусто, имеет вид

$$V_0 = \begin{cases} (v_0, v_1), & \text{если } v_0 > 0, \\ (0, v_1), & \text{если } v_0 < 0, \end{cases}$$

для некоторого $v_1 \in (0, +\infty]$. Ввиду леммы 2.3 для любых $v \in V_0$ нуль $t^*(v)$ является простым.

Вместе с V_0 будем рассматривать соответствующее множество начальных условий S_0 , заданное соотношением

$$S_0 = \{(\varphi, v) \in S : v \in V_0\}. \quad (14)$$

3. Построение оператора последования. Если $v \in V_0$, то известно решение $u_v(t)$ при $t \in [0, t^*(v) + 1]$. Для построения $u_v(t)$ при $t > t^*(v)$ воспользуемся симметрией уравнения (2), которое не меняется при замене $u \rightarrow -u$. С этой целью введём в рассмотрение одномерное отображение

$$p : V_0 \rightarrow (0, +\infty), \quad p(v) = -\dot{u}_v^{(2)}(t^*(v)). \quad (15)$$

Отметим, что $p(v) \in (0, +\infty)$, так как при условии $v \in V_0$ нуль $t^*(v)$ решения $u_v(t)$ является простым.

Далее, выполним в уравнении (2) замену $u \rightarrow -u$ и сдвиг по времени $t \rightarrow t + t^*(v)$. В результате придём к тому же уравнению (2), но с начальными условиями

$$u(t) = -u_v(t + t^*(v)), \quad t \in [-1, 0], \quad \dot{u}(0) = -\dot{u}_v(0 + t^*(v)) = p(v). \quad (16)$$

Заметим, что $u_v(t^*(v)) = 0$ и $u_v(t) > 0$ при $t \in [-1 + t^*(v), t^*(v))$, так что из проделанных построений вытекает включение

$$(-u_v(t + t^*(v)), p(v)) \in S,$$

где S — множество (3). Значит, на последующих отрезках решение будет строиться аналогично решению с начальным условием $(-u_v(t + t^*(v)), p(v))$, т.е. на множестве S_0 определён оператор последования

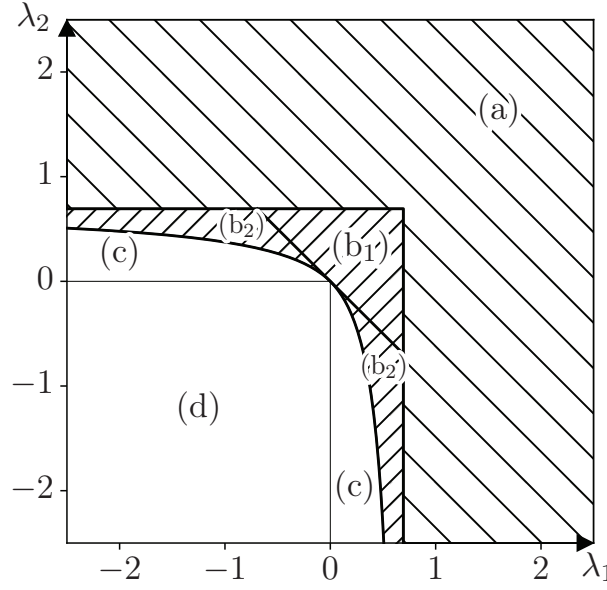
$$\Pi : S_0 \rightarrow S, \quad \Pi(\varphi, v) = (-u_v(t + t^*(v)), p(v)). \quad (17)$$

Заметим, что различные функции φ при фиксированном v переходят в одну и ту же функцию $-u_v(t + t^*(v))$, не зависящую от φ . Таким образом, оператор (17) представляет собой надстройку над одномерным отображением (15), поэтому вопрос о неподвижных точках отображения Π сводится к аналогичному вопросу для отображения p , а именно, всякой экспоненциально устойчивой неподвижной или периодической точке v^* отображения p отвечает экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u_{v^*}(t)$.

Отметим, что не всегда верно, что $\Pi(S_0) \subset S_0$, или, эквивалентно, что $p(V_0) \subset V_0$. Условия, при которых это вложение верно, будут получены позже, но мы не будем пользоваться принципом Шаудера, так как S_0 и V_0 не замкнуты.

4. Анализ одномерного отображения. Рассмотрим $u_v^{(2)}(t)$ как функцию двух переменных $u^{(2)}(t, v) = u_v^{(2)}(t)$. Ввиду формулы (10) эта функция непрерывно дифференцируема по совокупности переменных на открытом множестве $(1, +\infty) \times V_0$. Для любого $v \in V_0$ функция $u(t, v)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(t^*(v), v)$, при этом $u(t^*(v), v) = 0$, и, так как $t^*(v)$ является простым нулём, то $\dot{u}(t^*(v), v) \neq 0$. Тогда, по теореме о неявной функции, функция $t^*(v)$ непрерывно дифференцируема и её производная находится следующим образом:

$$\frac{dt^*(v)}{dv} = -\frac{\partial u^{(2)}(t^*(v), v)/\partial v}{\dot{u}^{(2)}(t^*(v), v)} = \frac{\left(\frac{e^{\lambda_1 t^*(v)} - e^{\lambda_2 t^*(v)}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)}{p(v)}.$$


 Рис. 1. Области пространства параметров в случае $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$.

Далее, отображение $p(v)$ можно записать в виде $p(v) = -\dot{u}^{(2)}(t^*(v), v)$, а значит, оно непрерывно дифференцируемо, и его производная равна

$$\frac{dp(v)}{dv} = -\ddot{u}^{(2)}(t^*(v), v) \frac{dt^*(v)}{dv} - \frac{\partial \dot{u}^{(2)}(t^*(v), v)}{\partial v},$$

что приводится к виду

$$\frac{dp(v)}{dv} = \frac{v - \tilde{v}}{p(v)} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t^*(v)}, \quad \text{где} \quad \tilde{v} = 2\lambda_1 \lambda_2 s \frac{e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (18)$$

Так как $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t^*(v)} > 0$ и $p(v) > 0$, то знак $dp(v)/dv$ совпадает со знаком $v - \tilde{v}$. В свою очередь, знак $\tilde{v}$ совпадает со знаком $\lambda_1 \lambda_2 s$.

Отображение $p(v)$ возрастает при $v > \tilde{v}$ и убывает при $v < \tilde{v}$, так что для случая $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$ отображение $p(v)$ строго возрастает на всём множестве V_0 .

Определение 4.1. Областью сходимости неподвижной точки v^* отображения $p(v)$ будем называть множество таких w_0 , что последовательность $w_n = p(w_{n-1})$ сходится к точке v^* .

Теорема 4.1. Пусть λ_1, λ_2 определены равенствами (7) и выполнено неравенство $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$. Тогда отображение $p(v)$ не имеет периодических точек и, в зависимости от значений λ_1, λ_2 , реализуются случаи (а)–(д), перечисленные ниже и изображённые на рис. 1.

(а) Если $\lambda_1 > \ln 2$, то $V_0 = \emptyset$, т.е. отображение $p(v)$ не определено.

(б) Если $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_2 > \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}}$, то отображение $p(v)$ не имеет неподвижных точек.

(с) Если $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_2 < \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}}$, то отображение $p(v)$ имеет единственную неподвижную точку, которая экспоненциально устойчива и имеет область сходимости $V_0 = (0, k_1)$.

(д) Если $\lambda_1 < 0$, то отображение $p(v)$ имеет единственную неподвижную точку, которая экспоненциально устойчива и имеет область сходимости $V_0 = (0, +\infty)$.

Отметим, что из (7) следует, что $\lambda_1 > \lambda_2$, так что случаи в теореме выписаны именно в предположении $\lambda_1 > \lambda_2$, однако в уравнении (2) параметры $b = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ и $c = \lambda_1 \lambda_2$ симметричны относительно замены λ_1 и λ_2 друг на друга, поэтому на рис. 1 изображены аналогичные случаи для $\lambda_2 > \lambda_1$.

Доказательство теоремы. Напомним, что если $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$, то $v_0 < 0$, и $\tilde{v} < 0$. Так как $v_0 < 0$, то, согласно лемме (2.1), для любых $v > 0 > v_0$ верно неравенство $u_v(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$. Так как $\tilde{v} < 0$, то, ввиду формулы (18), отображение $p(v)$ является возрастающим для любых $v > 0 > \tilde{v}$. При этом, так как отображение $p(v)$ монотонно возрастает, то оно не имеет периодических точек. Действительно, пусть $w_1 = p(w_0) < w_0$; тогда $w_2 = p(w_1) < p(w_0) = w_1$ и т. д., и для знака неравенства в обратную сторону аналогично.

Из равенств $u_v^{(2)}(t^*(v)) = 0$ и $\dot{u}_v^{(2)}(t^*(v)) = -p(v)$ можно получить соотношение

$$p(v) = -\dot{u}_v^{(2)}(t^*(v)) = \lambda_1 s - (v - k_2)e^{\lambda_2 t^*(v)}, \quad (19)$$

из которого, в частности, следует, что $p(0^-) > 0$, так как в случае $p(0^-) = 0$ можно показать, что $t^*(0^-) = 0$, что невозможно, поскольку $t^*(v) > 1$.

(а) Пусть $\lambda_1 > \ln 2$; тогда можно показать, что для любых $v > 0$ верно неравенство $\dot{u}_v^{(2)}(t) > 0$ при $t \geq 1$. Поскольку $u_v^{(2)}(1) > 0$, получаем, что $u_v^{(2)}(t) > 0$ при $t \geq 1$, а значит, $v \notin V$. Следовательно, $V = \emptyset$.

(b₁). Пусть $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$. Пусть v^* — наименьшая неподвижная точка отображения $p(v)$, либо, что то же самое, наименьший нуль функции $g(v) = p(v) - v$. Согласно равенству (18) и ввиду неравенств $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\tilde{v} < 0$ имеем

$$\frac{dp(v^*)}{dv} = \frac{v^* - \tilde{v}}{v^*} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t^*(v^*)} \geq \frac{v^* - \tilde{v}}{v^*} > 1$$

и, следовательно,

$$\frac{dg(v^*)}{dv} = \frac{dp(v^*)}{dv} - 1 > 0. \quad (20)$$

С одной стороны, $g(v) > 0$ при $v \in (0, v^*)$, так как $g(0^+) = p(0^+) > 0$ и v^* — это наименьший нуль $g(v)$. С другой стороны, ввиду неравенства (20), в некоторой левой окрестности точки v^* функция $g(v)$ принимает отрицательные значения, что является противоречием. Следовательно, $p(v)$ не имеет неподвижных точек.

(b₂), (с). Пусть теперь $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$; тогда $\lambda_2 < 0$ и $s = 1$. Пусть v^* — неподвижная точка отображения $p(v)$. Выразив $t^*(v^*)$ из равенства (19) и используя неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, можно показать, что $0 < dp(v^*)/dv < 1$. Следовательно, всякая неподвижная точка отображения $p(v)$ является экспоненциально устойчивой, а значит, если таковая существует, то она единственна.

Пусть k_1, k_2 определены равенством (11); тогда кусочное решение $u_{k_1}^{(2)}(t)$ имеет вид

$$u_{k_1}^{(2)}(t) = \frac{k_1 - k_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + 1$$

и монотонно стремится к значению 1, а значит нуль не пересекает; следовательно, $k_1 \notin V$.

Пусть $v < k_1$; тогда решение $u_v^{(2)}(t)$ имеет вид (10), причём коэффициент $(v - k_1)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ при экспоненте с положительным показателем $e^{\lambda_1 t}$ отрицателен, а значит, при достаточно больших $t > 1$ кусочное решение $u_v^{(2)}(t)$ пересекает нуль. Следовательно, для любых $v < k_1$ верно, что $v \in V$, а значит $V_0 = (0, k_1)$.

Если $t^{**} = \lim_{v \rightarrow k_1^-} t^*(v) < +\infty$, то по непрерывности $u^{(2)}(t^{**}, k_1) = \lim_{v \rightarrow k_1^-} u^{(2)}(t^*(v), v) = 0$, но тогда $k_1 \in V$; противоречие. Следовательно, $t^*(v) \xrightarrow{v \rightarrow k_1} \infty$ и

$$p(k_1^-) = \lim_{v \rightarrow k_1^-} \left(\lambda_1 s - (v - k_2)e^{\lambda_2 t^*(v)} \right) = s\lambda_1 = \lambda_1.$$

Далее, неподвижные точки отображения $p(v)$ однозначно соответствуют нулям отображения $g(v) = p(v) - v$. Заметим, что $g(0^+) = p(0^+) > 0$ и $g(k_1^-) = p(k_1^-) - k_1 = \lambda_1 - k_1$.

Пусть $\lambda_1 - k_1 < 0$. Тогда $g(k_1^-) < 0$ и, по теореме о промежуточном значении, $p(v)$ имеет неподвижную точку, причём она единственна и экспоненциально устойчива.

Пусть теперь $\lambda_1 - k_1 > 0$. Тогда $g(k_1^-) > 0$, и если v^* — наибольший корень функции $g(v)$, то с одной стороны, $g(v) > 0$ при $v \in (v^*, k_1)$, а с другой стороны, $g'(v^*) = p'(v^*) - 1 < 1 - 1 = 0$; значит, в некоторой правой окрестности v^* верно неравенство $g(v) < 0$, что является противоречием. Значит, при $\lambda_1 - k_1 > 0$ неподвижных точек нет.

Наконец, условие $\lambda_1 - k_1 < 0$ может быть записано в виде

$$\lambda_2 < \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}};$$

при этом, как можно проверить, из него следует условие $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, так что утверждение (с) доказано.

С другой стороны, условие $\lambda_1 - k_1 > 0$ может быть записано в виде

$$\lambda_2 > \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}},$$

и можно проверить, что оно влечёт условие $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ при $\lambda_1 < \ln 2$. Таким образом, утверждение (b) доказано.

(d) Пусть $\lambda_1 < 0$, тогда $\lambda_2 < 0$ и $s = -1$. Заметим, что при любых $v > 0$ экспоненты в формуле (10) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а значит, $u_v^{(2)}(t)$ стремится к $s = -1$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, при некотором t кусочное решение $u_v^{(2)}(t)$ обращается в нуль, и $p(v)$ определено. Поскольку это верно для любых $v > 0$, то $V_0 = (0, +\infty)$.

Отображение $p(v)$ возрастает, и, как видно из равенства (19), оно ограничено сверху положительным числом $\lambda_1 s = -\lambda_1 = |\lambda_1|$. Далее, неподвижные точки отображения $p(v)$ однозначно соответствуют нулям отображения $g(v) = p(v) - v$. Заметим, что $g(0^+) = p(0^+) > 0$, и $g(v) \leq |\lambda_1| - v < 0$ при $v > |\lambda_1|$, так что по теореме о промежуточном значении $p(v)$ имеет неподвижную точку.

Так как $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, то, аналогично случаю (с), для любой неподвижной точки v^* верно неравенство $0 < dp(v^*)/dv < 1$, а значит, эта неподвижная точка единственна, экспоненциально устойчива, причём её областью сходимости является всё множество $V_0 = (0, +\infty)$. $\square$

На рис. 2 изображены графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$. Эти графики иллюстрируют наличие экспоненциально устойчивых неподвижных точек в случаях (с) и (d), а также характер появления неподвижной точки при переходе от случая (b) к случаю (с).

На рис. 3, 4 изображены графики и траектории в фазовой плоскости некоторых решений уравнения (2) с начальными условиями из S_0 . Как видно, решения стремятся к некоторым предельным циклам, причём пересечения решениями оси ординат на изображениях фазового портрета соответствуют итерациям отображения $p(v)$. Точки излома на фазовых портретах соответствуют переключениям запаздывающего члена: в этих точках вторая производная решения имеет скачок.

Теорема 4.2. *Если выполнено неравенство $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$, то отображение $p(v)$ не имеет неподвижных точек. Точнее, в зависимости от значений λ_1, λ_2 , реализуются случаи (е)–(g), перечисленные ниже и изображённые на рис. 6.*

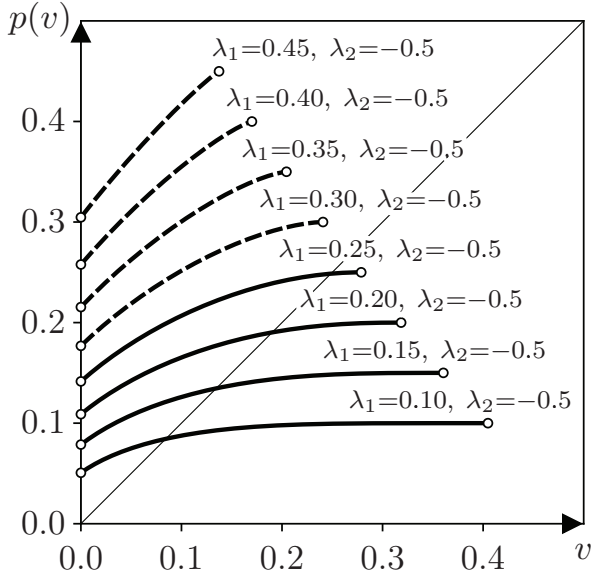
(е) *Если $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, то у отображения $p(v)$ нет неподвижных точек. Верно неравенство $p(v_0^+) < v_0$ и $p(v)$ монотонно убывает к нулю.*

(f) *Если $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} < \frac{1}{2}$, то у отображения $p(v)$ есть лишь неустойчивая неподвижная точка. Верно неравенство $p(v_0^+) > v_0$ и $p(v)$ монотонно убывает к нулю.*

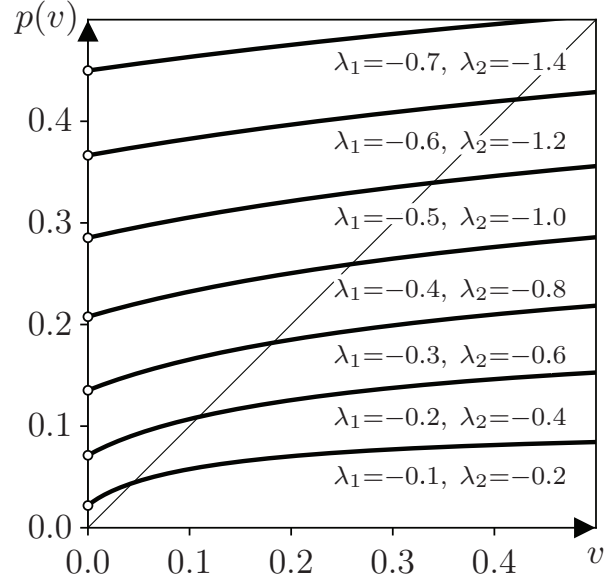
(g) *Если $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} > \frac{1}{2}$, то у отображения $p(v)$ нет неподвижных точек.*

При $v > \tilde{v}$ отображение $p(v)$ возрастает и стремится к бесконечности при $v \rightarrow k_1$.

Данный случай отличается отсутствием устойчивых неподвижных и периодических точек. Поскольку интереса неустойчивые решения не представляют, доказательство этой теоремы мы не приводим.



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случаях (b) (пунктир) и (c) (сплошная линия).



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случае (d).

Рис. 2. Графики отображения $p(v)$ в случае $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$. Неподвижным точкам отображения $p(v)$ соответствуют пересечения графиков $p(v)$ с главной диагональю.

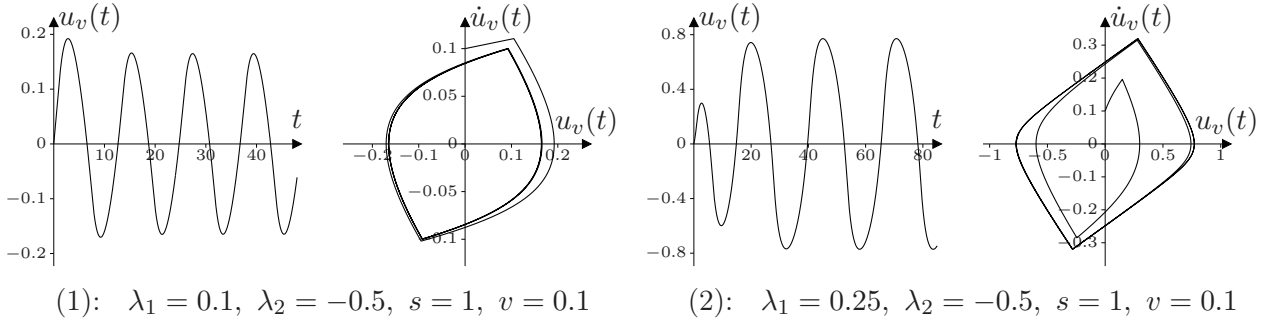


Рис. 3. Графики решений в случае (c).

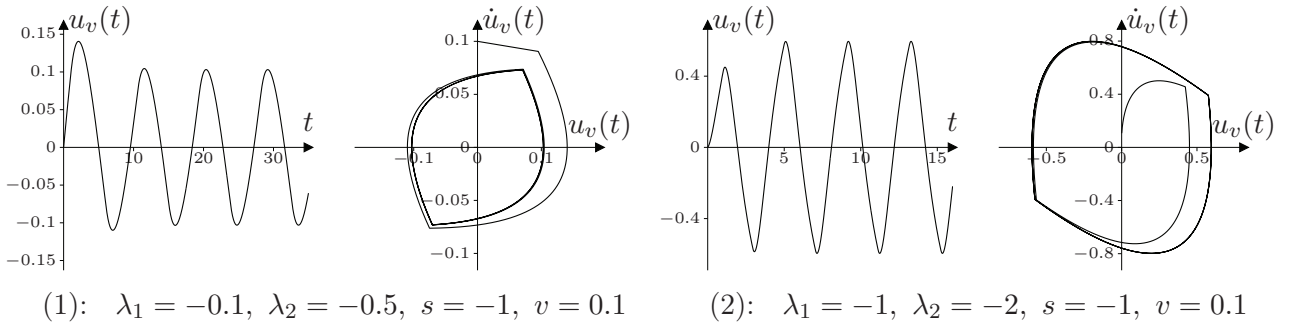
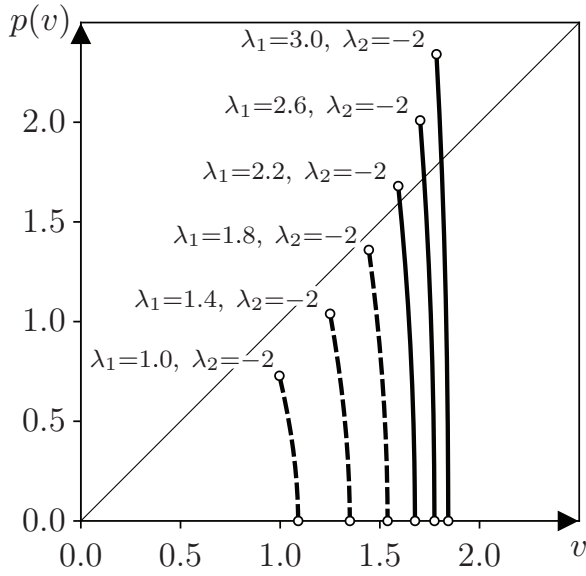
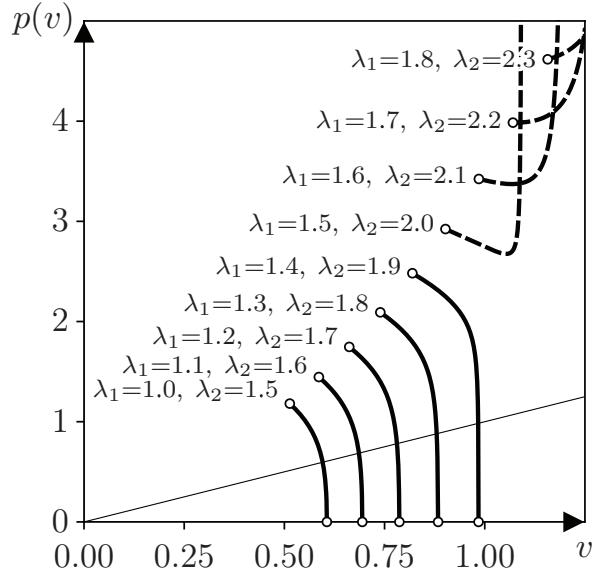


Рис. 4. Графики решений в случае (d).



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случаях (е) (пунктир) и (f) (сплошная линия).



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случаях (f) (сплошная линия) и (g) (пунктир).

Рис. 5. Графики отображения $p(v)$ в случае $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$. Неподвижным точкам отображения $p(v)$ соответствуют пересечения графиков $p(v)$ с главной диагональю.

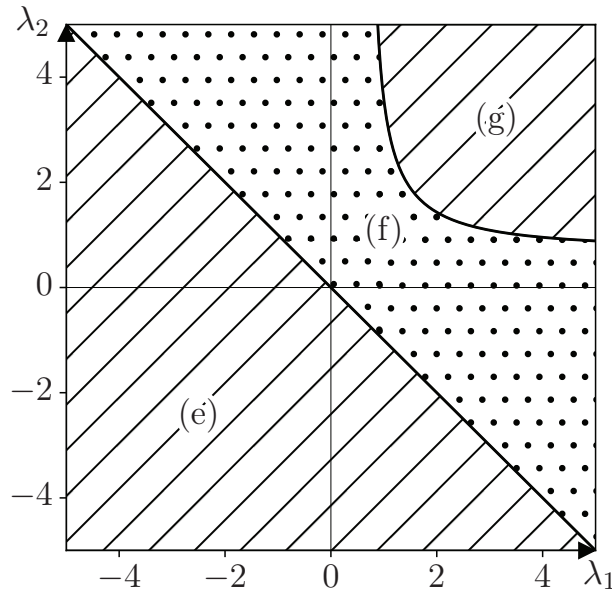


Рис. 6. Области пространства параметров в случае $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$.

На рис. 5 изображены графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$. Эти графики иллюстрируют наличие неустойчивой неподвижной точки в случае (f), а также характер появления неподвижной точки при переходе от случая (е) к случаю (f) и при переходе от случая (g) к случаю (f).

Численные эксперименты, в том числе с быстро осциллирующими начальными условиями, указывают на то, что описанные в этой работе случаи исчерпывающе описывают динамику уравнения (1). Точнее, наблюдается, что при любых начальных функциях решение либо стремится к бесконечности, либо стремится к неподвижной точке, либо происходит наматывание на цикл. При этом периодических решений, кроме тех, что мы рассмотрели не наблюдается.

На обосновании этих утверждений мы не останавливаемся, так как численному исследованию уравнения (1) при произвольных параметрах будет посвящена отдельная статья.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кащенко С. А.* Сравнительный асимптотический анализ динамики автогенераторов с различными нелинейными запаздывающими связями // Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 4. — С. 1027–1060.
2. *Дмитриев А. С., Кащенко С. А.* Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью // Докл. РАН. — 1993. — 328, № 2. — С. 174–177.
3. *Кащенко С. А.* Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. I // Диффер. уравн. — 1995. — 31, № 8. — С. 1330–1339.
4. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — 78, № 4. — С. 73–108.
5. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1997. — 216. — С. 126–153.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00209).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баин Данила Денисович

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: danila.bain@yandex.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 13–26
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-13-26

УДК 51-7, 519.65

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ ВЕТРА ПО ДАННЫМ ЛИДАРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

© 2024 г. Н. А. БАРАНОВ

Аннотация. Рассматривается задача восстановления трех компонент скорости ветра по данным измерений радиальной составляющей вдоль направлений, равномерно расположенных на поверхности вертикального конуса, при помощи метода наименьших квадратов. Получены оценки для максимальной ошибки восстановления каждой компоненты вектора скорости ветра и для среднеквадратических ошибок в асимптотическом приближении. Оценки получены с учетом полноты данных измерений.

Ключевые слова: точность восстановления, оценка, метод наименьших квадратов, профиль ветра, лидарное сканирование.

ANALYTICAL ESTIMATES OF THE ACCURACY OF WIND PROFILE RECONSTRUCTION FROM LIDAR SCANNING DATA

© 2024 N. A. BARANOV

ABSTRACT. We consider the problem of reconstructing three components of wind velocity from measurement data of the radial component along directions uniformly located on the surface of a vertical cone using the least squares method. Estimates are obtained for the maximum error in the reconstruction of each component of the wind speed vector and for the mean square errors in the asymptotic approximation. Estimates are obtained taking into account the completeness of measurement data.

Keywords and phrases: reconstruction accuracy, estimation, least squares method, wind profile, lidar scanning.

AMS Subject Classification: 65G99, 65Z05

1. Введение. В практике метеорологических измерений все более широкое распространение получают средства дистанционного зондирования, в частности, лидарные средства измерения профиля ветра (см. [20, 26]). Интенсивное их развитие стимулировалось прежде всего потребностями ветровой энергетики, поскольку для принятия решения о разворачивании кластера ветровых генераторов требуется статистическая информация о профиле ветра в предполагаемом районе разворачивания (см. [12, 17, 23, 25]). Статистические данные о значениях скорости ветра на различных высотах служат основой для оценки потенциальной эффективности генерации ветровой электроэнергии.

Кроме того, ветровые лидарные профилометры находят свое применение в экологии для оценки неблагоприятных условий рассеивания загрязняющих веществ и прогнозирования условий их распространения (см. [11]). Данные ветровых профилометров усваиваются в численных моделях прогноза погоды для повышения его точности (см. [6, 9, 18, 28, 29]).

Лидарные средства дистанционного измерения ветровых параметров используют эффект Доплера изменения частоты лазерного излучения, отраженного от аэрозольных образований, которые движутся с локальной скоростью ветра (см. [26]). Особенность определения компонент скорости ветра при лидарном дистанционном зондировании состоит в том, что непосредственно может быть измерена только одна составляющая скорости ветра, направленная вдоль текущего направления измерений (так называемая радиальная составляющая). Поэтому технология определения компонент скорости ветра состоит в получении значений радиальной скорости для нескольких направлений измерений, расположенных с одним и тем же углом места, а затем решается обратная задача восстановления трехмерного вектора скорости, проекции которого на направления измерения совпадают с измеренными значениями (см. [5, 7, 15]).

Для определения профиля ветра, т.е. расчета трех составляющих скорости ветра для различных высот над поверхностью земли, используется режим сканирования VAD (Velocity Azimuth Display; см. [7, 26]). В режиме VAD выполняется круговое сканирование приземного слоя атмосферы при постоянном значении угла места. Круговое сканирование означает, что азимут направления измерения изменяется в диапазоне $[0, 2\pi]$. Кроме того, в режиме VAD сканирование выполняется с большими углами места ($\sim 70^\circ$). С одной стороны, это обеспечивает большой диапазон высот измерения, а с другой, позволяет определять вертикальную составляющую скорости ветра, поскольку очевидно, что при малых углах места проекция вертикальной составляющей скорости ветра, которая, как правило, и так имеет малые значения ($\sim 0,5\text{--}1,0$ м/с), на направление измерений будет мала настолько, что окажется сравнимой с инструментальной погрешностью измерений. По сути режим сканирования VAD является частным случаем режима PPI (Plan Position Indicator), когда сканирование осуществляется при постоянном угле места в определенном диапазоне азимутальных углов.

Требования к точности измерения радиальной скорости ветра устанавливаются стандартом ISO [26]; там же описаны некоторые методы оценки точности измерения радиальной скорости ветра. Точность измерения радиальной скорости исследовалась как теоретически (см. [4]), так и экспериментально. Оценка точности измерений радиальной скорости в натурных условиях регламентируется стандартом (см. [26]). Лабораторные методы ее оценки были предложены в [13].

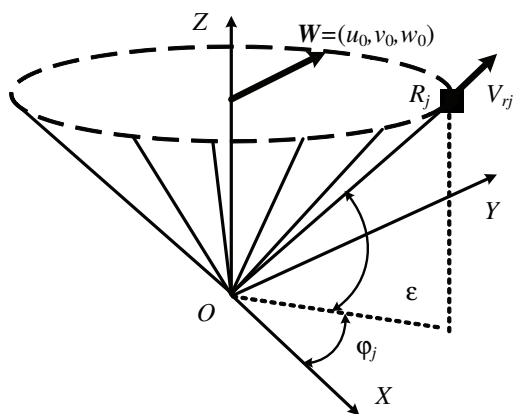


Рис. 1. Схема измерений скорости ветра

С практической точки зрения важнее точность определения всех составляющих скорости ветра. Основным методом оценки точностных характеристик измерений компонент скорости ветра в настоящее время являются экспериментальные методы (см. [10, 21, 22]). Было проведено множество экспериментов по оценке точности определения параметров профиля ветра, которые стимулировались, как было отмечено, потребностями ветровой энергии (см. [18, 29]). Для оценки точности лидарных измерений использовались анемометры [19, 30], радиозонды [14], локации, содары [16], самолетные ретрансляторы метеорологических данных (AMDAR) летных наблюдений [8, 24]. Кроме того, эксперименты проводились в различных географических и климатических регионах (см. [3, 27]).

Теоретическим оценкам точности решения задачи восстановления трех компонент скорости ветра поданным лидарного сканирования до последнего времени не уделялось внимания. Данная работа призвана частично устранить этот пробел.

2. Постановка задачи. Рассмотрим правую декартову земную систему координат $OXYZ$ с центром в точке O , оси OX , OY лежат в горизонтальной плоскости, а ось OZ направлена вертикально вверх (рис. 1). Измерения выполняются вдоль лучей OR_j , выходящих из начала системы

координат O . Положение луча в рассматриваемой декартовой системе координат определяется углами ϵ и ϕ_j , где ϵ — угол между горизонтальной плоскостью и лучом OR_j (угол места), ϕ_j — угол между осью OX и проекцией луча OR_j на горизонтальную плоскость (азимут). Все точки измерений равноудалены от начала системы координат на расстояние R , т.е. находятся на одной высоте.

Трехмерный вектор скорости ветра $\mathbf{W}$ определяется своими компонентами u_0, v_0, w_0 , которые являются его проекциями на оси OX, OY, OZ соответственно. Будем предполагать, что в пределах области измерений скорость ветра является постоянной величиной.

В соответствии с принятыми обозначениями проекция V_{rj} скорости ветра $\mathbf{W}$ на направление OR_j определяется соотношением

$$V_{rj} = (u_0 \cos \phi_j + v_0 \sin \phi_j) \cos \epsilon + w_0 \sin \epsilon.$$

Задача определения компонент скорости ветра u, v, w формулируется как задача минимизации функционала

$$J(u, v, w) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(V'_{rj} - (u \cos \phi_j + v \sin \phi_j) \cos \epsilon - w \sin \epsilon \right)^2, \quad (1)$$

где V'_{rj} — измеренное значение радиальной составляющей скорости ветра в азимутальном направлении ϕ_j с углом места ϵ , а n — число направлений измерений.

Будем предполагать, что ошибки измерений радиальной скорости являются такими независимыми случайными величинами, что

$$|V'_{rj} - V_{rj}| \leq \delta, \quad (2)$$

где V_{rj} — истинное значение радиальной составляющей скорости ветра в азимутальном направлении ϕ_j с углом места ϵ . Будем также предполагать, что азимутальные направления измерений расположены равномерно, т.е.

$$\phi_j = j \cdot \Delta\phi, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{n}.$$

Требуется найти оценки величин

$$\max |u^* - u_0|, \quad \max |v^* - v_0|, \quad \max |w^* - w_0|,$$

где u^*, v^*, w^* минимизируют функционал (1):

$$(u^*, v^*, w^*) = \arg \min J(u, v, w).$$

3. Оценки максимальной ошибки восстановления компонент вектора скорости ветра для случая полных исходных данных. В точках экстремума частные производные функционала (1) согласно необходимому условию экстремума функции многих переменных должны обращаться в ноль (см. [2]). Дифференцируя $J(u, v, w)$ по координатам u, v, w и приравнявая производные нулю, после преобразований получим следующую систему уравнений:

$$u \cos \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \phi_j + v \cos \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \sin \phi_j \cdot \cos \phi_j + w \sin \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \cos \phi_j = \sum_{j=0}^{n-1} V'_{rj} \cos \phi_j, \quad (3a)$$

$$u \cos \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \cos \phi_j \cdot \sin \phi_j + v \cos \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \phi_j + w \sin \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \sin \phi_j = \sum_{j=0}^{n-1} V'_{rj} \sin \phi_j, \quad (3b)$$

$$u \cos \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \cos \phi_j + v \cos \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \sin \phi_j + w \sin \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} 1 = \sum_{j=0}^{n-1} V'_{rj}. \quad (3c)$$

Поскольку углы ϕ_j расположены равномерно, то в силу симметрии внедиагональные члены в левой части системы уравнений (3) равны нулю, и можно записать решение в явном виде:

$$u^* = \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-1} V'_{rj} \cos \varphi_j}{\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j}, \quad v^* = \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-1} V'_{rj} \sin \varphi_j}{\sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j}, \quad w^* = \frac{1}{\sin \epsilon} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-1} V'_{rj}}{n}. \quad (4)$$

Для истинных значений u_0 , v_0 , w_0 составляющих скорости ветра справедливы аналогичные соотношения. Таким образом, для ошибок восстановления компонент скорости ветра можем записать

$$u^* - u_0 = \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} (V'_{rj} - V_{rj}) \cos \varphi_j \right) / \left(\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j \right), \quad (5a)$$

$$v^* - v_0 = \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} (V'_{rj} - V_{rj}) \sin \varphi_j \right) / \left(\sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j \right), \quad (5b)$$

$$w^* - w_0 = \frac{1}{\sin \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} (V'_{rj} - V_{rj}) \right) / n, \quad (5c)$$

откуда с учетом условия (2) получаем

$$|u^* - u_0| \leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j| \right) / \left(\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j \right), \quad (6a)$$

$$|v^* - v_0| \leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} |\sin \varphi_j| \right) / \left(\sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j \right), \quad (6b)$$

$$|w^* - w_0| \leq \delta \cdot \frac{1}{\sin \epsilon}. \quad (6c)$$

Нетрудно заметить, что при использовании метода наименьших квадратов оценка для ошибки восстановления вертикальной компоненты не зависит от количества измерений радиальной составляющей и определяется только точностью измерений радиальной скорости δ и углом места ϵ , с которым выполняются измерения.

Найдем асимптотические оценки для правых частей неравенств, определяющих максимальное значение ошибок восстановления горизонтальных компонент скорости ветра. Рассмотрим вначале сумму в числителе первого неравенства (6): представить в виде

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j| = \frac{1}{2} |\cos \varphi_0| + \frac{1}{\Delta \varphi} \left(\frac{1}{2} |\cos \varphi_0| + \sum_{j=1}^{n-2} |\cos \varphi_j| + \frac{1}{2} |\cos \varphi_{n-1}| \right) \cdot \Delta \varphi + \frac{1}{2} |\cos \varphi_{n-1}|. \quad (7)$$

Величина

$$\left(\frac{1}{2} |\cos \varphi_0| + \sum_{j=1}^{n-2} |\cos \varphi_j| + \frac{1}{2} |\cos \varphi_{n-1}| \right) \cdot \Delta \varphi$$

в правой части равенства (7) представляет собой интегральную сумму, соответствующую численному интегрированию функции $|\cos \varphi|$ методом трапеций на интервале $[0, 2\pi]$ при разбиении этого интервала с шагом $\Delta \varphi$ (см. [1]):

$$\left(\frac{1}{2} |\cos \varphi_0| + \sum_{j=1}^{n-2} |\cos \varphi_j| + \frac{1}{2} |\cos \varphi_{n-1}| \right) \cdot \Delta \varphi \approx \int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi. \quad (8)$$

Поскольку

$$\cos \varphi_0 = 1, \quad \cos \varphi_{n-1} \rightarrow 1 \text{ при } \Delta\varphi \rightarrow 0, \quad \int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 4,$$

можем записать следующее асимптотическое приближение:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j| \sim 1 + \frac{4}{\Delta\varphi}. \quad (9)$$

Аналогичным образом для других сумм в правых частях первых двух неравенств (6) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |\sin \varphi_j| &\sim \frac{1}{2} |\sin \varphi_0| + \frac{1}{\Delta\varphi} \int_0^{2\pi} |\sin \varphi| d\varphi + \frac{1}{2} |\sin \varphi_{n-1}|, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j &\sim \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{1}{\Delta\varphi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_{n-1}, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j &\sim \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0 + \frac{1}{\Delta\varphi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

откуда, вычисляя интегралы в правых частях, получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\sin \varphi_j| \sim \frac{4}{\Delta\varphi}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j \sim 1 + \frac{\pi}{\Delta\varphi}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j \sim \frac{\pi}{\Delta\varphi}. \quad (10)$$

Отметим, что замена интегральных сумм на интегралы вида (8) имеет достаточно высокую с практической точки зрения точность. Действительно,

$$\left| \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} f(\varphi) d\varphi - S_n \right| \leq \max |f''(\varphi)| \cdot (\varphi_n - \varphi_0) \cdot \frac{\Delta\varphi^2}{12},$$

где $[\varphi_0, \varphi_n]$ — интервал интегрирования, S_n — интегральная сумма, соответствующая соответствующая численному вычислению интеграла от функции $f(\varphi)$ методом трапеций с шагом $\Delta\varphi$. Применительно к рассматриваемому случаю интегрирования тригонометрических функций на интервале $[0, 2\pi]$ имеем

$$\left| \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} f(\varphi) d\varphi - S_n \right| \leq \frac{2}{3} \cdot \max |f''(\varphi)| \cdot \frac{\pi^3}{n^2},$$

где $\max |f''(\varphi)| \leq 2$. Уже при $\varphi = 12^\circ$, $n = 30$ имеем

$$\left| \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} f(\varphi) d\varphi - S_n \right| \leq 0,05.$$

Объединяя асимптотические оценки (9), (10), из неравенств (6) находим следующие асимптотические оценки для максимальных ошибок восстановления горизонтальных компонент скорости ветра:

$$\max |u^* - u_0| \lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4 + \Delta\varphi}{\pi + \Delta\varphi}, \quad \max |v^* - v_0| \lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi}. \quad (11)$$

В пределе при $\Delta\varphi \rightarrow 0$ получаем предельные асимптотические оценки вида

$$\max |u^* - u_0| \leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi}, \quad \max |v^* - v_0| \leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi}. \quad (12)$$

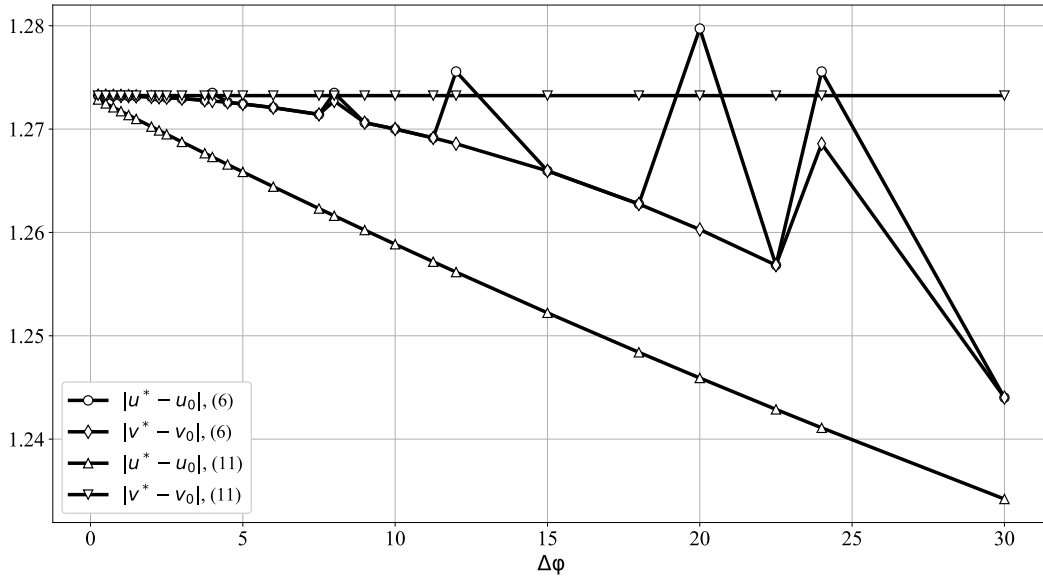


Рис. 2. Зависимости параметров оценок максимальной ошибки восстановления горизонтальных компонент скорости ветра от углового шага измерений $\Delta\varphi$.

На рис. 2 в качестве иллюстрации показаны зависимости значений коэффициентов при величине $\delta/\cos \epsilon$ в правых частях точных оценок для максимальной ошибки восстановления горизонтальных компонент скорости ветра вида (6) и соответствующих асимптотических оценок вида (11), отмеченных треугольными маркерами, от величины $\Delta\varphi$.

Как нетрудно заметить, коэффициенты в оценках точности восстановления горизонтальных компонент скорости ветра асимптотически возрастают к предельному значению $4/\pi$ при возрастании числа измерений. Тем не менее, дискретность измерений в целом слабо влияет на точность восстановления, которая в большей степени определяется углом места сканирования.

Представленная теоретическая модель геометрии дистанционного зондирования не учитывает ошибки позиционирования направлений измерения. Однако их можно учитывать как составляющую погрешности измерений радиальной составляющей скорости ветра δ .

4. Оценки среднеквадратической ошибки восстановления компонент вектора скорости ветра для случая полных исходных данных. Если рассматривать измерения V'_{rj} радиальной составляющей скорости ветра вдоль произвольного j -го направления как независимые, нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием V_{rj} и среднеквадратическим отклонением σ_V , то согласно (5) ошибки определения компонент скорости ветра будут представлять собой взвешенные суммы нормально распределенных независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Тогда среднеквадратические ошибки определения горизонтальных компонент скорости ветра будут равны

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{\sigma_V^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j}}{\cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j}, \quad \sigma_v = \frac{\sqrt{\sigma_V^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j}}{\cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j}, \quad \sigma_w = \frac{\sqrt{\sigma_V^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 1}}{\sin \epsilon \cdot n},$$

откуда находим

$$\sigma_u = \frac{\sigma_V}{\cos \epsilon \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j}}, \quad \sigma_v = \frac{\sigma_V}{\cos \epsilon \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j}}, \quad \sigma_w = \frac{\sigma_V}{\sin \epsilon \cdot \sqrt{n}},$$

или с учетом полученных асимптотических приближений для $\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j$, $\sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j$:

$$\sigma_u = \sigma_v \sim \sigma_V \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos \epsilon \cdot \sqrt{n}}, \quad \sigma_w = \sigma_V \cdot \frac{1}{\sin \epsilon \cdot \sqrt{n}},$$

где, напомним, n — число измерений.

5. Оценки максимальной ошибки восстановления компонент вектора скорости ветра для случая неполных исходных данных. Рассмотрим теперь случай, когда в некотором секторе размера $2\varphi_{\max}$ отсутствуют данные измерений. Для упрощения рассуждений будем предполагать, этот сектор расположен симметрично относительно оси абсцисс OX , т.е. измерения отсутствуют в секторе $[-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$, причем

$$\varphi_{\max} = k \cdot \Delta\varphi.$$

Таким образом, общее число пропущенных измерений составляет $2k + 1$. В этом случае соотношения (4) для определения компонент скорости ветра примут вид

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} V'_{rj} \cdot \cos \varphi_j \right) / \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} \cos^2 \varphi_j \right), \\ v^* &= \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} V'_{rj} \cdot \sin \varphi_j \right) / \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} \sin^2 \varphi_j \right), \\ w^* &= \frac{1}{\sin \epsilon} \cdot \frac{1}{n - 2k - 1} \sum_{j=k+1}^{n-k} V'_{rj}. \end{aligned}$$

Тогда соотношения для оценок абсолютных ошибок определения компонент скорости ветра (6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} |u^* - u_0| &\leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} |\cos \varphi_j| \right) \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} \cos^2 \varphi_j \right), \\ |v^* - v_0| &\leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} |\sin \varphi_j| \right) \left(\sum_{j=k+1}^{n-k} \sin^2 \varphi_j \right), \\ |w^* - w_0| &\leq \delta \cdot \frac{1}{\sin \epsilon}. \end{aligned} \tag{13}$$

Даже в случае отсутствия части измерений оценка ошибки восстановления вертикальной составляющей скорости ветра остается без изменений и не зависит от числа измерений.

Представим правые части неравенств (13) для ошибок определения горизонтальных компонент скорости ветра в следующем виде:

$$|u^* - u_0| \leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j| - \sum_{j=-k}^k |\cos \varphi_j|}{\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j - \sum_{j=-k}^k \cos^2 \varphi_j}, \tag{14a}$$

$$|v^* - v_0| \leq \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-1} |\sin \varphi_j| - \sum_{j=-k}^k |\sin \varphi_j|}{\sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j - \sum_{j=-k}^k \sin^2 \varphi_j}. \tag{14b}$$

Сумму в правой части первого неравенства (14) представим в виде

$$\sum_{j=-k}^k \cos^2 \varphi_j = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \cos^2 \varphi_j + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_k + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_k \right).$$

Выражение

$$\left(\frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \cos^2 \varphi_j + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_k \right) \cdot \Delta \varphi$$

представляет собой формулу численного интегрирования методом трапеций интеграла

$$S(\varphi_{\max}) = \int_0^{\varphi_{\max}} \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=-k}^k \cos^2 \varphi_j \approx \frac{2}{\Delta \varphi} \cdot \int_0^{\varphi_{\max}} \cos^2 \varphi d\varphi + \cos^2 \varphi_{\max}.$$

Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=-k}^k \sin^2 \varphi_j &\approx \frac{2}{\Delta \varphi} \cdot \int_0^{\varphi_{\max}} \sin^2 \varphi d\varphi + \sin^2 \varphi_{\max}, \\ \sum_{j=-k}^k |\cos \varphi_j| &\approx \frac{2}{\Delta \varphi} \cdot \int_0^{\varphi_{\max}} \cos \varphi d\varphi + \cos \varphi_{\max}, \\ \sum_{j=-k}^k |\sin \varphi_j| &\approx \frac{2}{\Delta \varphi} \cdot \int_0^{\varphi_{\max}} \sin \varphi d\varphi + \sin \varphi_{\max}. \end{aligned}$$

С учетом полученных асимптотических оценок сумм, входящих в правые части неравенств (14), их можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} |u^* - u_0| &\lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4 + \Delta \varphi \cdot (1 - \cos \varphi_{\max}) - 2 \sin \varphi_{\max}}{\pi - \varphi_{\max} - \frac{1}{2} \sin(2\varphi_{\max}) + \Delta \varphi \cdot \sin^2 \varphi_{\max}}, \\ |v^* - v_0| &\lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4 - 2 \cdot (1 - \cos \varphi_{\max}) - \Delta \varphi \cdot \sin \varphi_{\max}}{\pi - \varphi_{\max} + \frac{1}{2} \sin(2\varphi_{\max}) - \Delta \varphi \cdot \sin^2 \varphi_{\max}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Предполагая, что размер сектора $\varphi_{\max}$ пропущенных данных измерений является малой величиной, воспользуемся асимптотическими оценками

$$\sin \varphi_{\max} \sim \varphi_{\max}, \quad \frac{1}{2} \sin(2\varphi_{\max}) \sim \varphi_{\max}, \quad 1 - \cos \varphi_{\max} \sim \frac{1}{2} \varphi_{\max}^2.$$

Тогда из неравенств (15) после преобразований находим

$$|u^* - u_0| \lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4 - 2\varphi_{\max}}{\pi - 2\varphi_{\max}}, \quad |v^* - v_0| \lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4 + \varphi_{\max}^2}{\pi};$$

пренебрегая членом $\varphi_{\max}^2$ с учетом малости $\varphi_{\max}$,

$$|u^* - u_0| \lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4 - 2\varphi_{\max}}{\pi - 2\varphi_{\max}}, \quad |v^* - v_0| \lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi}. \quad (16)$$

Из неравенств (16) можно сделать вывод, что при наличии пропусков измерений, расположенных в некотором секторе размера $[-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$, асимптотическая оценка точности восстановления компоненты скорости ветра, ортогональной биссектрисе этого сектора, не изменяется по

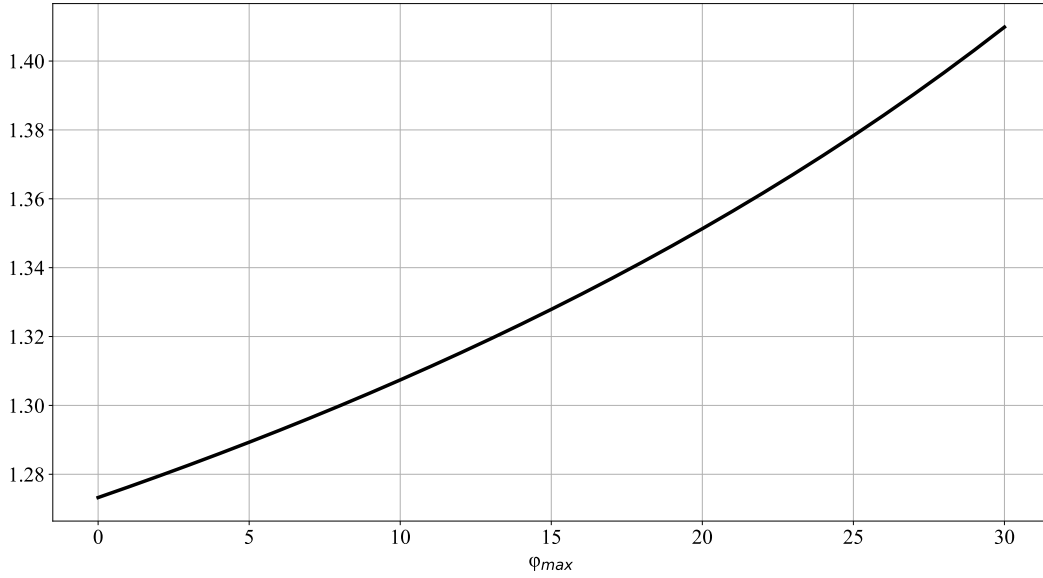


Рис. 3. График коэффициента $\frac{4 - 2\varphi_{\max}}{\pi - 2\varphi_{\max}}$, характеризующего точность восстановления компоненты скорости ветра вдоль биссектрисы сектора пропущенных данных.

сравнению со случаем полных данных. В то же время асимптотическая оценка точности восстановления компоненты скорости, направленной вдоль биссектрисы сектора пропущенных данных, ухудшается. График коэффициента $\frac{4 - 2\varphi_{\max}}{\pi - 2\varphi_{\max}}$ показан на рис. 3.

При увеличении размеров сектора пропуска данных до $\varphi_{\max} = 30^\circ$ ошибка восстановления компонент скорости ветра возрастает примерно на 11% для компоненты скорости, направленной вдоль биссектрисы сектора пропущенных данных.

6. Оценки максимальной ошибки восстановления компонент вектора скорости в случае ненулевого градиента горизонтального поля ветра. Рассмотрим случай, когда горизонтальные компоненты скорости ветра линейно возрастают вдоль некоторого направления. Будем предполагать, что ориентация декартовой системы координат $OXYZ$ выбрана таким образом, что компоненты скорости ветра изменяются вдоль оси OX :

$$u(x, y) = u_0 + \alpha_u \cdot x, \quad v(x, y) = v_0 + \alpha_v \cdot x.$$

Поскольку точки измерений расположены на окружности некоторого радиуса r_0 компоненты скорости ветра в j -й точке измерений будут равны

$$u_j = u_0 + \alpha_u \cdot r_0 \cdot \cos \varphi_j, \quad v_j = v_0 + \alpha_v \cdot r_0 \cdot \cos \varphi_j. \quad (17)$$

Задачу восстановления скорости ветра будем рассматривать как задачу определения компонент средней скорости ветра u_0, v_0, w_0 .

Значение радиальной компоненты скорости ветра в j -й точке измерений с учетом соотношений (17) будет иметь следующее значение:

$$V_{rj} = (u_0 \cdot \cos \varphi_j + v_0 \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon + w_0 \cdot \sin \epsilon + (\alpha_u \cdot r_0 \cdot \cos^2 \varphi_j + \alpha_v \cdot r_0 \cdot \cos \varphi_j \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon. \quad (18)$$

Последнее слагаемое в правой части (18) будем рассматривать как дополнительную ошибку измерений радиальной составляющей средней скорости ветра

$$\bar{V}_{rj} = (u_0 \cdot \cos \varphi_j + v_0 \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon + w_0 \cdot \sin \epsilon,$$

т.е.

$$\begin{aligned} V'_{rj} - \bar{V}_{rj} &= V'_{rj} - V_{rj} + (u_0 \cdot \cos \varphi_j + v_0 \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon + w_0 \cdot \sin \epsilon = \\ &= \delta_j + (u_0 \cdot \cos \varphi_j + v_0 \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon + w_0 \cdot \sin \epsilon, \end{aligned}$$

где $\delta_j = V'_{rj} - V_{rj}$. Тогда систему уравнений (5) для ошибок восстановления компонент скорости ветра можно записать в виде

$$\begin{aligned} u^* - u_0 &= \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j} \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j + (\alpha_u \cdot r_0 \cdot \cos^2 \varphi_j + \alpha_v \cdot r_0 \cdot \cos \varphi_j \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon) \cdot \cos \varphi_j, \\ v^* - v_0 &= \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j} \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j + (\alpha_u \cdot r_0 \cdot \cos^2 \varphi_j + \alpha_v \cdot r_0 \cdot \cos \varphi_j \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon) \cdot \sin \varphi_j, \quad (19) \\ w^* - w_0 &= \frac{1}{\sin \epsilon} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j + (\alpha_u \cdot r_0 \cdot \cos^2 \varphi_j + \alpha_v \cdot r_0 \cdot \cos \varphi_j \cdot \sin \varphi_j) \cdot \cos \epsilon). \end{aligned}$$

Из соотношений (19) получаем следующие неравенства для ошибок восстановления компонент вектора скорости ветра:

$$\begin{aligned} |u^* - u_0| &\leq \frac{1}{\cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j} \left[\delta \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j| + \right. \\ &\quad \left. + |\alpha_u| \cdot r_0 \cdot \cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\cos^3 \varphi_j| + |\alpha_v| \cdot r_0 \cdot \cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\cos^2 \varphi_j \cdot \sin \varphi_j| \right], \quad (20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v^* - v_0| &\leq \frac{1}{\cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j} \left[\delta \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\sin \varphi_j| + \right. \\ &\quad \left. + |\alpha_u| \cdot r_0 \cdot \cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\cos^2 \varphi_j \cdot \sin \varphi_j| + |\alpha_v| \cdot r_0 \cdot \cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j \cdot \sin^2 \varphi_j| \right], \quad (20b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |w^* - w_0| &\leq \frac{1}{n \cdot \sin \epsilon} \times \\ &\times \left[n \cdot \delta + |\alpha_u| \cdot r_0 \cdot \cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j + |\alpha_v| \cdot r_0 \cdot \cos \epsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j \cdot \sin \varphi_j| \right]. \quad (20c) \end{aligned}$$

Применяя ту же технику замены сумм, входящих в правые части неравенств (20) на соответствующие интегральные приближения, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j| &\approx 1 + \frac{4}{\Delta\varphi}, & \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \varphi_j &\approx 1 + \frac{\pi}{\Delta\varphi}, \\
 \sum_{j=0}^{n-1} |\sin \varphi_j| &\approx \frac{4}{\Delta\varphi}, & \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 \varphi_j &\approx \frac{\pi}{\Delta\varphi}, \\
 \sum_{j=0}^{n-1} |\cos^3 \varphi_j| &\approx 1 + \frac{8}{3\Delta\varphi}, & \sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j \cdot \sin \varphi_j| &\approx \frac{2}{\Delta\varphi}, \\
 \sum_{j=0}^{n-1} |\cos^2 \varphi_j \cdot \sin \varphi_j| &\approx \frac{4}{3\Delta\varphi}, & \sum_{j=0}^{n-1} |\cos \varphi_j \cdot \sin^2 \varphi_j| &\approx \frac{4}{3\Delta\varphi}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя полученные асимптотические приближения (21) в неравенства (20), получим следующие асимптотические оценки для ошибок восстановления компонент вектора скорости в случае линейного изменения горизонтального ветра вдоль оси OX :

$$\begin{aligned}
 |u^* - u_0| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi + \Delta\varphi} \left(\delta \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{4} \right) + |\alpha_u| r_0 \cos \epsilon \left(\frac{2}{3} + \frac{\Delta\varphi}{4} \right) + \frac{1}{3} |\alpha_v| r_0 \cos \epsilon \right), \\
 |v^* - v_0| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\delta + \frac{1}{3} |\alpha_u| r_0 \cos \epsilon + \frac{1}{3} |\alpha_v| r_0 \cos \epsilon \right), \\
 |w^* - w_0| &\lesssim \frac{1}{\sin \epsilon} \left(\delta + |\alpha_u| r_0 \cos \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) + \frac{1}{\pi} |\alpha_v| r_0 \cos \epsilon \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Переходя в (22) к пределу при $\Delta\varphi \rightarrow 0$, получим предельные асимптотические оценки вида

$$\begin{aligned}
 \max |u^* - u_0| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\delta + \frac{1}{3} (2|\alpha_u| + |\alpha_v|) r_0 \cos \epsilon \right), \\
 \max |v^* - v_0| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\delta + \frac{1}{3} (|\alpha_u| + |\alpha_v|) r_0 \cos \epsilon \right), \\
 \max |w^* - w_0| &\lesssim \frac{1}{\sin \epsilon} \left(\delta + \left(\frac{1}{2} |\alpha_u| + \frac{1}{\pi} |\alpha_v| \right) r_0 \cos \epsilon \right).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, если компоненты горизонтальной скорости ветра имеют градиент (называемый сдвигом ветра), ошибка восстановления компонент скорости ветра увеличивается пропорционально значениям градиента. Градиент боковой составляющей скорости ветра $|\alpha_v|$ оказывает одинаковое влияние на точность восстановления горизонтальных компонент, а градиент продольной составляющей оказывает большее влияние на ошибку ее восстановления. Таким образом, продольная составляющая скорости ветра восстанавливается с меньшей точностью при наличии градиента горизонтального ветра в продольном направлении.

Если ввести в рассмотрение параметры

$$\Delta u = |\alpha_u| \cdot r_0, \quad \Delta v = |\alpha_v| \cdot r_0$$

приращений горизонтальных компонент скорости ветра на дистанции r_0 , то соотношения (23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \max |u^* - u_0| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\delta + \frac{1}{3} (2\Delta u + \Delta v) \cos \epsilon \right), \\
 \max |v^* - v_0| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\delta + \frac{1}{3} (\Delta u + \Delta v) \cos \epsilon \right), \\
 \max |w^* - w_0| &\lesssim \frac{1}{\sin \epsilon} \left(\delta + \left(\frac{1}{2} \Delta u + \frac{1}{\pi} \Delta v \right) \cos \epsilon \right).
 \end{aligned}$$

Полученные оценки (23) позволяют также оценить влияние неточности вертикального позиционирования лидара на качество восстановления компонент скорости ветра. Действительно, пусть измерения скорости ветра выполняются на высоте h . Будем предполагать, что ось конуса сканирования отклонена от вертикальной оси в плоскости OXZ . Отклонение оси конуса сканирования на угол θ от вертикали приведет к тому, что высота j -й точки измерения будет отличаться от высоты точки, лежащей на оси конуса сканирования и удаленной от его вершины на расстояние h , на величину

$$\Delta h_j = h \cdot \sin \epsilon \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi_j.$$

Если на высоте h компоненты скорости ветра линейно изменяются с высотой

$$u(h + \Delta h) = u(h) + \beta_u(h)\Delta h, \quad v(h + \Delta h) = v(h) + \beta_v(h)\Delta h,$$

то измеряемые в j -й точке компоненты скорости ветра будут равны

$$u_j = u_0 + \beta_u(h) \cdot h \cdot \sin \epsilon \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi_j, \quad v_j = v_0 + \beta_v(h) \cdot h \cdot \sin \epsilon \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi_j.$$

Тогда неравенства (23) примут вид

$$\begin{aligned} \max |u^*(h) - u_0(h)| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\delta + \frac{1}{6} (2|\beta_u(h)| + |\beta_v(h)|) h \sin \theta \sin 2\epsilon \right), \\ \max |v^*(h) - v_0(h)| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\delta + \frac{1}{6} (|\beta_u(h)| + |\beta_v(h)|) h \sin \theta \sin 2\epsilon \right), \\ \max |w^*(h) - w_0(h)| &\lesssim \frac{1}{\sin \epsilon} \left(\delta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |\beta_u(h)| + \frac{1}{\pi} |\beta_v(h)| \right) h \sin \theta \sin 2\epsilon \right). \end{aligned} \quad (24)$$

В частном случае, когда горизонтальный ветер возрастает с высотой без изменения направления, т.е. $\beta_u(h) = \beta_v(h) = \beta(h)$, соотношения (24) примут вид

$$\begin{aligned} \max |u^*(h) - u_0(h)| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} (\delta + c_u |\beta(h)| h \sin \theta \sin 2\epsilon), \\ \max |v^*(h) - v_0(h)| &\lesssim \frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{4}{\pi} (\delta + c_v |\beta(h)| h \sin \theta \sin 2\epsilon), \\ \max |w^*(h) - w_0(h)| &\lesssim \frac{1}{\sin \epsilon} (\delta + c_w |\beta(h)| h \sin \theta \sin 2\epsilon), \end{aligned}$$

где

$$c_u = \frac{1}{2}, \quad c_v = \frac{1}{3}, \quad c_w = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right),$$

причем $c_v < c_w < c_u$.

7. Заключение. В рамках данной работы были получены аналитические асимптотические оценки точности определения компонент вектора скорости ветра по данным измерений лазерного измерителя профиля ветра в режиме сканирования VAD (Velocity Azimuth Display).

Оценки были получены для максимальной ошибки восстановления компонент вектора скорости ветра в случае однородного поля ветра и для случая неоднородного ветрового поля, когда горизонтальные компоненты линейно изменяются вдоль некоторого направления. Показано, что в случае наличия градиента скорости ветра (сдвига ветра по скорости), ошибка восстановления компонент горизонтальной скорости ветра пропорциональна значению градиента. При этом составляющая ветра, перпендикулярная направлению градиента, рассчитывается с большей точностью.

Показано, что оценки качества восстановления компонент вектора скорости ветра в случае неоднородного ветрового поля могут быть адаптированы для оценки влияния погрешности вертикального позиционирования устройства сканирования на точность восстановления характеристик профиля ветра.

Кроме того, рассмотрен случай и получены соответствующие асимптотические оценки при отсутствии измерений в некотором секторе углов азимута. Показано, что при отсутствии измерений в некотором секторе, точность определения компоненты скорости ветра, ортогональной биссектрисе этого сектора, не изменяется по сравнению со случаем полных данных. В то же

время точность восстановления компоненты скорости, направленной вдоль биссектрисы сектора пропущенных данных, ухудшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). — М.: Наука, 1975.
2. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. — М.: Изд-во МЦНМО, 20112.
3. Achtert P., Brooks I. M., Brooks B. J., Moat B. I., Prytherch J., Persson P. O. G., Tjernström M. Measurement of wind profiles by motion-stabilised ship-borne Doppler lidar// *Atm. Meas. Tech.* — 2015. — № 8. — P. 4993–5007.
4. Banakh V. A., Smalikho I. N. Measurements of turbulent energy dissipation rate with a CW Doppler lidar in the atmospheric boundary layer// *J. Atm. Ocean. Techn.* — 1999. — 16. — P. 1044–1061.
5. Baranov N. Algorithms of 3d wind field reconstructing by lidar remote sensing data// in: *Numerical Computations: Theory and Algorithms*. — Crotone: Springer, 2020. — 11974. — P. 306–313.
6. Benjamin S. G., Schwartz B. E., Szoke E. J., Koch S. E. The value of wind profiler data in U.S. Weather forecasting// *Bull. Am. Meteorol. Soc.* — 2004. — 85, № 12. — P. 1871–1886.
7. Bingöl F., Mann J., Foussekis D. Conically scanning lidar error in complex terrain// *Meteorol. Z.* — 2009. — 18. — P. 189–195.
8. Buzdugan L., Stefan S. A comparative study of sodar, lidar wind measurements and aircraft derived wind observations// *Roman. J. Physics.* — 2020. — 65. — P. 1–15.
9. Chen C. Y., Yeh N. C., Lin C. Y. Data assimilation of Doppler wind lidar for the extreme rainfall event prediction over Northern Taiwan: A case study// *Atmosphere.* — 2022. — 13, № 6. — P. 987.
10. Davies F., Collier C. G., Bozier K. E., Pearson G. N. On the accuracy of retrieved wind information from doppler lidar observations// *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* — 2003. — 129. — P. 321–334.
11. Filioglou M., Preissler J., Troville A., Thobois L., Vakkari V., Auvinen M., Fortelius C., Gregow E., Hämäläinen K., Hellsten A., Järvi L., O'Connor E., Schönach D., Hirsikko A. Evaluating modelled winds over an urban area using ground-based Doppler lidar observations// *Meteorol. Appl.* — 2022. — 29, № 2. — P. 2052.
12. Guo F., Schlipf D., Cheng P. W. Evaluation of lidar-assisted wind turbine control under various turbulence characteristics// *Wind Energy Sci.* — 2023. — 8, № 2. — P. 149–171.
13. Kim A. A., Orlov A. V., Luginya V. S., Baranov N. A. About the methodology and tools for meteo lidar metrological support// *Proc. 26 Int. Symp. on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics (Moscow, June29 — July 3, 2020)*. — SPIE, 2020. — 11560. — P. 457–467.
14. Kumer V. M., Reuder J., Furevik B. R. A comparison of lidar and radiosonde wind measurements// *Energy Proc.* — 2014. — 53. — P. 214–220.
15. Lane S., Barlow J., Wood C. An assessment of a three-beam doppler lidar wind profiling method for use in urban areas// *J. Wind Eng. Industr. Aerodyn.* — 2013. — 119. — P. 53–59.
16. Lang S., McKeogh E. Lidar and sodar measurements of wind speed and direction in upland terrain for wind energy purposes// *Remote Sensing.* — 2011. — № 3. — P. 1871–1901.
17. LIDAR Applications to Wind Energy Technology Assessment. — EPRI, 2011.
18. Lin H., Sun J., Weckwerth T. M., Joseph E., Kay Assimilation of New York State Mesonet Surface and Profiler Data for the 21 June 2021 Convective Event// *Mon. Weather Rev.* — 2023. — 151. — P. 485–507.
19. Lindelöw P. J. P. Upwind D1. Uncertainties in wind assessment with LIDAR. — Denmark: Danmarks Tekniske Universitet, 2009.
20. Liu Z., Barlow J. F., Chan P. W., Fung J. C. H., Li Y., Ren C., Mak H. W. L., Ng E. A review of progress and applications of pulsed doppler wind lidars// *Remote Sensing.* — 2019. — 11, № 21. — P. 2522.
21. Liu H., Yuan L., Fan C., Liu F., Zhang X., Zhu X., Liu J., Zhu X., Chen W. Performance validation on an all-fiber 1.54- μ m pulsed coherent doppler lidar for wind-profile measurement// *Opt. Eng.* — 2020. — 59. — P. 1–11.
22. Mann J., Angelou N., Arnqvist J., Callies D., Cantero E., Arroyo R. C., Courtney M., Cuxart J., Dellwik E., Gottschall J., Ivanell S., Kühn P., Lea G., Matos J. C., Palma J. M. L. M., Pauscher L., Pea A., Rodrigo J. Sanz, Söderberg S., Vasiljevic N., Rodrigues C. V. Complex terrain experiments in the New European Wind AtlasPhil// *Trans. Roy. Soc. A.* — 2017. — 375. — 20160101.

23. *Mikkelsen T.* Lidar-based research and innovation at DTU wind energy — A Review// J. Phys. Conf. Ser. — 2014. — 524, № 1. — P. 012007.
24. *Ng C. W., Hon K. K.* Fast dual-doppler LiDAR retrieval of boundary layer wind profiles// Weather. — 2022. — 77, № 4. — P. 134–142.
25. *Pichault M., Vincent C., Skidmore G., Monty J.* Short-term wind power forecasting at the wind farm scale using long-range Doppler LiDAR// Energies. — 2021. — 14, № 9. — P. 2663.
26. *Sauvage L., Jaeckel S., Dabas A., Cariou J.-P., Martucci G., Hardesty M., Lehman V., Dehuu M.* Air quality — Environmental meteorology — Part 2: Ground-based remote sensing of wind by heterodyne pulsed Doppler lidar. — ISO TC146/SC5:WG6/DIS 28902-2, 2015.
27. *Shimada S., Kogaki T., Konagaya M., Mito T., Araki R., Ueda Y., Ohsawa T.* Validation of near-shore wind measurements using a dual scanning light detection and ranging system// Wind Energy. — 2022. — 25, № 9. — P. 1555–1572.
28. *Shrestha B., Brotzge J. A., Wang J.* Evaluation of the New York State Mesonet Profiler Network data// Atm. Meas. Tech. — 2022. — 15, № 20. — P. 6011–6033.
29. *Wang C., Chen Y., Chen M., Shen J.* Data assimilation of a dense wind profiler network and its impact on convective forecasting// Atm. Res. — 2020. — 238. — 104880.
30. *Zhou Z., Bu Z.* Wind measurement comparison of doppler lidar with wind cup and l band sounding radar// Atm. Meas. Tech. Disc. — 2021. — P. 1–17.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баранов Николай Алексеевич
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына
ФИЦ Информатика и управление РАН, Москва
E-mail: baranov@ians.aero



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 27–43
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-27-43

УДК 517.928.2

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ АСИМПТОТИКИ
РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
НА ПОЛУОСИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА
ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ $V(x) = x$

© 2024 г. А. Г. ЕЛИСЕЕВ, П. В. КИРИЧЕНКО

Аннотация. Предложен метод построения асимптотического решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для нестационарного и неоднородного уравнения типа Шрёдингера в координатном представлении в случае нарушения условий стабильности спектра предельного оператора. Выбранный профиль потенциальной энергии приводит к спектральной особенности предельного оператора, которую в рамках метода регуляризации С. А. Ломова принято называть сильной точкой поворота.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, точка поворота, метод регуляризации, квазиклассическое приближение.

CONSTRUCTION OF REGULARIZED ASYMPTOTICS
FOR THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED
MIXED PROBLEM ON THE HALF-AXIS FOR THE INHOMOGENEOUS
SCHRÖDINGER-TYPE EQUATION WITH THE POTENTIAL $V(x) = x$

© 2024 А. Г. ELISEEV, P. V. KIRICHENKO

ABSTRACT. In this paper, we propose a method for constructing an asymptotic solution to a singularly perturbed mixed problem on the half-axis for a nonstationary inhomogeneous Schrödinger-type equation in the coordinate representation in the case of violation of the stability conditions for the spectrum of the limit operator. The chosen profile of the potential energy leads to a spectral singularity of the limit operator, which, within the framework of S. A. Lomov's regularization method, is usually called a strong turning point.

Keywords and phrases: singularly perturbed problem, asymptotic solution, turning point, regularization method, semiclassical approximation.

AMS Subject Classification: 34E20

1. Введение. Основные принципы метода регуляризации С. А. Ломова в теории сингулярных возмущений были заложены в конце 1950-х — начале 1960-х годов. Окончательную формулировку предложенный подход при выполнении так называемых условий стабильности спектра предельного оператора получил в монографии [13], где основная проблема метода регуляризации (поиск и описание регуляризирующих функций, которые содержат всю сингулярную зависимость

Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

асимптотического решения от малого параметра) успешно решена. Для ознакомления с современным состоянием метода регуляризации отсылаем читателя к монографиям [2, 14], где также приведены подробные библиографии по другим существующим подходам в теории сингулярных возмущений. При нарушенных условиях стабильности спектра предельного оператора описание сингулярной зависимости решения от малого параметра значительно сложнее, чем в задачах со стабильным спектром. Более того, до сих пор нет законченной математической теории с позиций метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка 50 лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [3, 9, 15]). В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам, в рамках метода регуляризации некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота и проведена их классификация:

- (i) *простая точка поворота* — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль;
- (ii) *слабая точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость;
- (iii) *сильная точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения, а базис собственных векторов теряет гладкость.

Приведем ссылки на несколько последних исследований в рамках метода регуляризации сингулярно возмущенных задач с особенностями в спектре предельного оператора указанного вида: по простой точке поворота см. [5, 9, 10], по слабой точке поворота — [7, 8, 11], сильной точке поворота посвящены статьи [4, 6].

Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье—Стокса с малой вязкостью и уравнение Шрёдингера, если постоянную Планка $\hbar$ считать малой величиной¹. Формальный предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [12, гл. 6]), поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому $\hbar$) решения уравнения Шрёдингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [12, гл. 7]). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шрёдингера в координатном представлении на полуоси с гамильтонианом $\hat{H}(p, x) = \hat{p}^2 + \hat{x}$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой посвящена настоящая работа. Следует сразу отметить, что рассматриваемая нами задача содержит неоднородное уравнение, что, как станет ясно в основном тексте статьи, существенно усложняет процесс построения регуляризованного асимптотического ряда.

Во многом наши исследования по асимптотическому интегрированию смешанной задачи для нестационарного и неоднородного уравнения Шрёдингера с обозначенным выше гамильтонианом при $\hbar \rightarrow 0$ представляют собой развитие идей работы [6], где рассмотрена задача Коши для неоднородного уравнения Шрёдингера с особенностью в спектре предельного оператора в виде сильной точкой поворота. В дальнейшем всюду будем использовать обозначение ε вместо $\hbar$, что является более естественным в теории сингулярных возмущений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим смешанную задачу на полуоси для нестационарного уравнения Шрёдингера ($\varepsilon \equiv \hbar$) с неоднородностью $h(x, t)$:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu = h(x, t), & 0 < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = \psi(t), \quad \psi(0) = f(0), \end{cases} \quad (1)$$

¹Строго говоря, постоянная Планка $\hbar$ является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости $\hbar$ следует понимать в том смысле, что можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую $\hbar$ в некоторой степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими $\hbar$.

причём выполнены следующие условия:

- (i) $h(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$;
- (ii) $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(t) \in C[0, T]$;
- (iii) имеют место равномерные по t неравенства

$$\int_0^\infty x^2 |u_0(x)| dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^2 |h(x, t)| dx < \infty$$

(достаточные условия для существования и единственности решения);

- (iv) для всех натуральных k, m, n имеют место равномерные по t неравенства

$$\int_0^\infty x^m |u_0^{(k)}(x)| dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^m |h^{(k,n)}(x, t)| dx < \infty$$

(достаточные условия для построения асимптотического ряда);

- (v) ε — малый параметр, т.е. задача изучается при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Существование и единственность классического решения задачи (1) при выполненных условиях (i)–(v) обосновывается стандартными методами математической физики (см., например, [16]), опираясь на фундаментальное решение, полученное в приложении 1.

Для наглядного представления о виде спектральной особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial/\partial t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix};$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко заметить, что матрица $A(x)$ диагонализируема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е. при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x . Согласно указанной во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора, к которой можно привести с помощью гладких преобразований (см., например, [1]), и соответствующий базис из собственных векторов, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответствующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x, t)$ (это связано с тем, что предельный оператор с матрицей $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим) и описать пограничный слой обусловленный точкой $x = 0$.

3. Формализм метода регуляризации. Во введении было отмечено, что метод регуляризации С. А. Ломова предлагает описывать сингулярную зависимость решения от малого параметра сразу (до построения асимптотического ряда путем решения итерационных задач) и абсолютно точно с помощью введения регуляризирующих функций и/или регуляризирующих операторов. Если это удалось сделать, то оставшуюся часть асимптотического решения можно искать в виде степенных рядов по малому параметру аналогично тому, как поступают при построении асимптотики в регулярно возмущенных задачах. Поэтому считаем целесообразным повествование в этом разделе начать именно с построения необходимых здесь дополнительных конструкций, содержащих в себе всю неравномерную сингулярную зависимость от ε , а затем перейти к построению асимптотического решения.

3.1. *Регуляризирующая функция и дополнительные регуляризирующие операторы.* Регуляризирующую функцию задачи (1) будем искать в стандартной форме $e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$, для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Ж. Лиувиллем в [18]. Итак, осуществляя подстановку $u(x,t) = v(x,t) \cdot e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$ в соответствующее однородное уравнение задачи (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - x \right) v + i\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot v - 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Анализ последнего выражения позволяет утверждать, что для поиска $v(x,t)$ в виде регулярного ряда по ε нужно в качестве $\varphi(x,t)$ взять решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = x, \quad \varphi(x,0) = 0. \quad (3)$$

Выбор начального условия для $\varphi(x,t)$ обусловлен нежеланием того, чтобы в дальнейшем начальное условие для $v(x,t)$ содержало сингулярную зависимость от ε . Кроме того, при таком выборе начальное условие на $v(x,t)$ наследует начальное условие задачи (1).

Задача (3) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую будем методом характеристик (см. [17, гл. 5, § 4, с. 268–272]). Введя обозначения $p = \partial \varphi / \partial t$ и $q = \partial \varphi / \partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (3):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{1} = \frac{d\varphi}{p - 2q^2} = dr, \quad (4)$$

Н.У.: $t = 0, \quad x = s, \quad \varphi = 0, \quad q = 0, \quad p = s.$

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (3).

Интегрируя систему (4), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = r, \quad x = -r^2 + s, \quad \varphi = sr - \frac{2}{3}r^3.$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x,t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x,t) = t \cdot \left(x + \frac{t^2}{3} \right). \quad (5)$$

Дополнительный регуляризирующий сингулярный оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора $A(x)$, строится с помощью фундаментального решения задачи (1) на всей прямой, которое можно получить методом интегрального преобразования Фурье для однородного уравнения с дельта-функцией в начальном условии (см. приложение 1). Выпишем здесь только окончательный результат:

$$\Phi(x, \xi, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \exp \left(-\frac{it}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{t^2}{3} \right) + i \frac{(t^2 - (x - \xi))^2}{4\varepsilon t} \right). \quad (6)$$

Построение указанного регуляризирующего оператора тесно связано с решением исходной задачи (1) при $-\infty < x < \infty$ с правой частью $h(x,t) = i\varepsilon$ и однородным начальным условием. Обозначив это решение $\sigma(x,t)$ и используя фундаментальное решение (6), получим

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \Phi(x - \xi, t - \tau) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)x}{\varepsilon} \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \exp \left(i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \cdot \left(x - \xi - \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) + i \frac{(x - \xi - (t-\tau)^2)^2}{4\varepsilon(t-\tau)} \right). \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших вычислений обозначим внутренний интеграл по ξ через I_0 и положим $t - \tau \equiv \alpha$. После замены $s = x - \xi$ отдельно для I_0 получим

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp \left(\frac{i\alpha}{\varepsilon} \cdot \left(s - \frac{\alpha^2}{3} \right) + i \frac{(s - \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha} \right) = \exp \left(\frac{-i\alpha^3}{12\varepsilon} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp \left(\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha} \right).$$

Теперь выделим в показателе экспоненты подынтегрального выражения полный квадрат:

$$\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha} = \frac{i}{4\varepsilon\alpha} (s^2 + 2\alpha^2 s + \alpha^4 - \alpha^4) = \frac{i}{4\varepsilon\alpha} ((s + \alpha)^2 - \alpha^4) = \frac{i(s + \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha} - \frac{i\alpha^3}{4\varepsilon}.$$

Сделав замену $z = (s + \alpha^2)/(2\sqrt{\varepsilon\alpha})$, выпишем результат для I_0 :

$$I_0 = \exp \left(\frac{-i\alpha^3}{3\varepsilon} \right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}.$$

Получившийся интеграл вычислен в приложении 1; его значение равно $\sqrt{\pi/2}(1+i)$. Возвращаясь к исходным обозначениям, для искомого $\sigma(x, t)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)x}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i) = \int_0^t d\tau \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right). \end{aligned}$$

Полученный результат позволяет определить тот самый дополнительный регуляризирующий оператор $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, основная задача которого — вложить правую часть уравнения задачи (1) в образ предельного оператора, в следующем виде:

$$\hat{\sigma}(\cdot) = \int_0^t d\tau (\cdot) \exp \left(-\frac{i\varphi(x, t-\tau)}{\varepsilon} \right),$$

где функция $\varphi(x, t)$ определена в (5). При этом действие этого оператора на функцию $f(t)$ запишется как свертка:

$$\hat{\sigma}(f(t)) = \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right) \equiv f(t) * \exp \left(-\frac{it}{\varepsilon} \cdot \left(x + \frac{t^2}{3} \right) \right).$$

Основным свойством, которое устанавливается непосредственной подстановкой, является следующее:

$$L_\varepsilon \hat{\sigma}(f(t)) = i\varepsilon f(t), \quad \text{где} \quad L_\varepsilon \equiv i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x. \quad (7)$$

Очевидно также, что это свойство является прямым следствием того, из каких соображений была найдена функция $\sigma(x, t)$, порождающая дополнительный регуляризирующий оператор $\hat{\sigma}(\cdot)$, т.е. того факта, что $L_\varepsilon \sigma(x, t) = i\varepsilon$.

Осталось выделить сингулярную зависимость от ε , описывающую пограничный слой при $x = 0$. В основе построения соответствующего сингулярного оператора лежит решение исходной задачи для однородного уравнения с однородным начальным условием, где в качестве граничного условия выбрана функция «единичного скачка» (функция Хевисайда) $\theta(t)$. Указанное решение $\chi(x, t)$ может быть получено с помощью преобразования Лапласа или интегрального преобразования Фурье (последняя возможность реализована в приложение 2) и имеет вид:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2 \right). \quad (8)$$

Последнее соотношение позволяет ввести по аналогии с оператором $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ регуляризующий оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ в следующем виде:

$$\hat{\chi}(\cdot) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau(\cdot) \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2 \right);$$

тогда его действие на функцию $f(t)$ запишется как свертка:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(f(t)) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2 \right) \equiv \\ &\quad \equiv f(t) * \left(\frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \left(\sqrt{t} + \frac{x}{t^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{it^3}{3\varepsilon} + \frac{it}{4\varepsilon} \left(t - \frac{x}{t} \right)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Последний результат приведём к более простому виду, сделав замену

$$z = \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}, \quad \tau = t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}, \quad d\tau = \frac{x^2}{2\varepsilon z^3} dz.$$

Получим

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(f(t)) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \frac{x^2}{2\varepsilon z^3} \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon} z} + \frac{8\varepsilon^{3/2} z^3}{x^2} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{ix^6}{192\varepsilon^4 z^6} + \frac{ix^2}{16\varepsilon^2 z^2} \left(\frac{x^2}{4\varepsilon z^2} - \frac{4\varepsilon z^2}{x} \right)^2 \right) = \\ &= (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \exp(\dots). \end{aligned}$$

В последнем соотношении показатель экспоненты обозначен многоточием, преобразуем его отдельно с помощью несложных операций:

$$\begin{aligned} -\frac{ix^6}{192\varepsilon^4 z^6} + \frac{ix^2}{16\varepsilon^2 z^2} \left(\frac{x^4}{16\varepsilon^2 z^4} - 2x + \frac{16\varepsilon^2 z^4}{x^2} \right) &= \\ = -\frac{ix^6}{192\varepsilon^4 z^6} + \frac{ix^6}{256\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 &= -\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\hat{\chi}(f(t)) = (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \exp \left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 \right). \quad (9)$$

В таком виде нетрудно явным вычислением установить основные свойства введенного дополнительного сингулярного оператора:

$$L_\varepsilon \hat{\chi}(f(t)) = 0, \quad \hat{\chi}(f(t)) \Big|_{x=0} = f(t). \quad (10)$$

Эти свойства становятся очевидными, если принять во внимание, из каких соображений был построен оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$.

3.2. *Построение регуляризованного асимптотического ряда.* Построенные в предыдущем разделе регуляризирующая функция $e^{-i\varphi/\varepsilon}$ и дополнительные регуляризирующие операторы $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ позволяют рассчитывать, что оставшуюся часть решения исходной задачи (1) можно искать в виде степенных рядов по ε :

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} \left[\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right] \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k; \quad (11)$$

здесь начало суммирования с $k = -1$ во втором ряде обусловлено свойством (7) и необходимостью регуляризации правой части $h(x, t)$ задачи (1) на нулевом шаге по ε .

Учитывая соотношения (2) и свойства построенных операторов (7), (10), подставим (11) в задачу (1). При этом получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & e^{-i\varphi/\varepsilon} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{v}_k \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k'' \varepsilon^{k+2} - 2it \sum_{k=0}^{\infty} v_k' \varepsilon^{k+1} \right) + i \sum_{k=0}^{\infty} z_{k-1} \cdot \varepsilon^k + \\ & \quad + i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\omega}_k \cdot \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k'' \cdot \varepsilon^{k+2} - x \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \cdot \varepsilon^k = h(x, t), \\ & \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k = f(x), \\ & e^{-it^3/(3\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(0, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\int_0^t d\tau \cdot z_k(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} \right) \cdot \varepsilon^k + \\ & \quad + \sum_{k=-1}^{\infty} y_k(t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(0, t) \cdot \varepsilon^k = \psi(t); \end{aligned} \right. \quad (12)$$

здесь $v_k = v_k(x, t)$, $\omega_k = \omega_k(x, t)$, а $z_k = z_k(t)$, $y_k = y_k(t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате.

Выделив в (12) группы слагаемых при регуляризирующей функции и без нее, приходим к серии итерационных задач:

$$\left\{ \begin{aligned} & iz_{k-1}(t) + i\dot{\omega}_{k-1}(x, t) + \omega_{k-2}''(x, t) - x \cdot \omega_k(x, t) = \delta_0^k \cdot h(x, t), \\ & i\dot{v}_k(x, t) + v_{k-1}''(x, t) - 2itv_k'(x, t) = 0, \\ & v_k(x, 0) + \omega_k(x, 0) = \delta_0^k \cdot f(x), \\ & e^{-it^3/(3\varepsilon)} v_{k-1}(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_{k-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + \\ & \quad + y_{k-1}(t) + \omega_{k-1}(0, t) = \delta_1^k \cdot \psi(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Отметим, что при отрицательных индексах у функций $v_k(x, t)$ и $\omega_k(x, t)$ их необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в ряде (11)).

Для начала рассмотрим итерационную задачу на нулевом шаге (т.е. при $k = 0$ в (13)):

$$\left\{ \begin{aligned} & iz_{-1}(t) - x \cdot \omega_0(x, t) = h(x, t), \\ & i\dot{v}_0(x, t) - 2itv_0'(x, t) = 0, \\ & v_0(x, 0) + \omega_0(x, 0) = f(x), \\ & \int_0^t d\tau \cdot z_{-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + y_{-1}(t) = 0. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Для разрешимости первого уравнения из системы (14) достаточно положить

$$z_{-1}(t) \equiv -ih(0, t). \quad (15)$$

Тогда для $\omega_0(x, t)$ получим гладкое решение

$$\omega_0(x, t) = \frac{h(x, t) - h(0, t)}{-x}, \quad (16)$$

что в свою очередь приводит к задаче Коши для определения функции $v_0(x, t)$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad v_0(x, 0) = \frac{h(x, 0) - h(0, 0)}{x} + f(x).$$

Последняя задача легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_0(x, t) = f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2}. \quad (17)$$

Выражение для $z_{-1}(t)$ в (15) и граничное условие в системе (14) позволяют выписать соотношение для $y_{-1}(t)$:

$$y_{-1}(t) = i \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot h(0, \tau). \quad (18)$$

Отметим, что функция $z_0(t)$ и $y_0(t)$ на нулевом шаге не определяются, выражения для них будут получены на следующем итерационном шаге. Этот факт не позволяет нам пока выписать главный член асимптотики.

Переходим теперь к задаче с $k = 1$ в (13):

$$\begin{cases} iz_0(t) + i\dot{\omega}_0(x, t) - x \cdot \omega_1(x, t) = 0, \\ i\dot{v}_1(x, t) + v_0''(x, t) - 2itv_1'(x, t) = 0, \\ v_1(x, 0) + \omega_1(x, 0) = 0, \\ e^{-it^3/3\varepsilon} \cdot v_0(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_0(\tau) \cdot \exp\left(-i\frac{(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) + y_0(t) + \omega_0(0, t) = \psi(t). \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя $\omega_0(x, t)$ из (16) в первое уравнение этой системы, убеждаемся, что для его разрешимости нужно положить

$$z_0(t) \equiv -ih_1(0, t), \quad \text{где} \quad h_1(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right). \quad (20)$$

Тогда аналогично предыдущему итерационному шагу для $\omega_1(x, t)$ получим гладкое решение

$$\omega_1(x, t) = \frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{-x},$$

а для $v_1(x, t)$ из (20) — задачу Коши для квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} = f_1(x + t^2), \quad v_1(x, 0) = \frac{h_1(x, 0) - h_1(0, 0)}{x};$$

здесь введено обозначение

$$f_1(x + t^2) \equiv i \cdot v_0''(x, t) = i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2} \right).$$

Выпишем здесь только окончательное решение последней задачи, опуская подробности:

$$v_1(x, t) = t \cdot f_1(x + t^2) + \frac{h_1(x + t^2, 0) - h_1(0, 0)}{x + t^2}.$$

Осталось подставить $\omega_0(x, t)$ из (16), $v_0(x, t)$ из (17) и $z_0(t)$ из (20) в граничное условие системы (19), что приводит к возможности определить $y_0(t)$. Будем иметь

$$y_0(t) = \psi(t) - e^{-it^3/(3\varepsilon)} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2} \right) + \\ + \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right) \Big|_{x=0} + i \int_0^t d\tau \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot h_1(0, \tau). \quad (21)$$

Ещё раз необходимо обратить внимание на то, что полностью определить все слагаемые перед ε^1 в ряде (11) удастся только на следующем итерационном шаге: осталось найти $z_1(t)$ и $y_1(t)$. Последнее можно сделать, рассмотрев условия разрешимости первого уравнения и граничное условие в системе (13) при $k = 2$. В результате будем иметь

$$z_1(t) \equiv -ih_2(0, t),$$

где

$$h_2(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right), \\ y_1(t) = -e^{-it^3/(3\varepsilon)} \cdot \left(t \cdot f_1(t^2) + \frac{h_1(t^2, 0) - h_1(0, 0)}{t^2} \right) + \left(\frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{x} \right) \Big|_{x=0} + \\ + i \int_0^t d\tau \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot h_2(0, \tau),$$

а функция $h_1(x, t)$ определена в (20).

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \dots$ в (13), можно найти все члены ряда (11). В конце данного раздела, опираясь на (15), (16), (17), (18), (20) и (21), выпишем главный член асимптотики:

$$u_{\text{гл.}}(x, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\hat{\sigma}(z_{-1}(t)) + \hat{\chi}(y_{-1}(t)) \right) + \hat{\sigma}(z_0(t)) + \hat{\chi}(y_0(t)) + e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \cdot v_0(x, t) + \omega_0(x, t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \left[-i \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right) + \right. \\ + (1+i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \int_0^{t-x^2/(4\varepsilon z^2)} d\tau \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 - \frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2) - \tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot h(0, \tau) \Big] + \\ + \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right) + \\ + (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \exp \left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 \right) \times \\ \times \left[\psi \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) - \exp \left(-\frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2))^3}{3\varepsilon} \right) \cdot \left(f \left(\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h((t-x^2/(4\varepsilon z^2))^2, 0) - h(0, 0)}{(t-x^2/(4\varepsilon z^2))^2} \right) + \frac{h(x, t-x^2/(4\varepsilon z^2)) - h(0, t-x^2/(4\varepsilon z^2))}{x} \right] \Big|_{x=0} -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{t-x^2/(4\varepsilon z^2)} d\tau \cdot \exp\left(-\frac{-i(t-x^2/(4\varepsilon z^2)-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \Big] + \\
& + \exp\left(-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}\right) \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2, 0) - h(0, 0)}{x+t^2}\right) - \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x}.
\end{aligned}$$

Для практического использования можно учесть полученную в лемме 7 оценку (см. приложение 3). Тогда формула главного члена упрощается:

$$\begin{aligned}
u_{\text{гл.}}(x, t, \varepsilon) &= \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot \exp\left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \left[\text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) - \exp\left(-\frac{i(t-\tau)x}{\varepsilon}\right) \right] + \\
& + \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot \exp\left(-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3}\right)\right) + \\
& + \left[\psi(t) - e^{-it^3/(3\varepsilon)} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2}\right) + \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \Big|_{x=0} - \right. \\
& \left. - \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-\frac{-i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \right] \cdot \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + \\
& + \exp\left(-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}\right) \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2, 0) - h(0, 0)}{x+t^2}\right) - \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}.$$

4. Оценка остаточного члена. Пусть члены ряда (11) определены в результате решения итерационных задач (13) для $0 \leq k \leq n+1$. Запишем соотношение для остатка:

$$\begin{aligned}
u(x, t, \varepsilon) &= e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k + \\
& + \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} \cdot R_n(x, t, \varepsilon). \quad (22)
\end{aligned}$$

Подставим (22) в задачу (1). Учитывая решения итерационных задач и сокращая на ε^{n+1} , для остаточного члена получим задачу:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x \cdot R_n = -H(x, t, \varepsilon), \\ R_n(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad R_n(0, t, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$H(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \cdot v_n''(x, t) \cdot \varepsilon + x \cdot \omega_{n+1}(x, t) + \varepsilon \cdot \omega_n''(x, t), \quad x > 0, \quad 0 < t \leq T.$$

Доопределим эту функцию тождественным нулём при $x \leq 0$. Тогда, используя фундаментальное решение (6), для $R_n(x, t, \varepsilon)$ в (23) получим:

$$R_n = -\frac{1-i}{2i\varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \exp\left(-\frac{i(t-\tau)}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{(t-\tau)^2}{3}\right) + i\frac{(x-\xi-(t-\tau)^2)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right) \cdot H(\xi, \tau, \varepsilon).$$

Выделив во внутреннем интеграле полный квадрат в показателе экспоненты, сделаем замену переменной интегрирования ξ на переменную

$$y = \frac{\xi - x + (t - \tau)}{2\sqrt{\varepsilon(t - \tau)}} - i\sqrt{\frac{(t - \tau)^3}{\varepsilon}}.$$

Тогда последнее выражение для остаточного члена перепишется в виде:

$$R_n = \frac{i+1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}(x - (t-\tau))\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{iy^2} \cdot H(y, \tau, \varepsilon).$$

Теперь, учитывая условия (i) и (ii) в постановке задачи (1) и тот факт, что итерационные задачи решены вплоть до шага $k = n + 1$, легко построить оценку по модулю для остатка:

$$|R_n| = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot |H(y, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{T \cdot M}{\varepsilon \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{C}{\varepsilon}, \quad (x, t) \in (\mathbb{R} \times [0, T]).$$

Осталось представить остаточный член в виде

$$R_n = u_{n+1} + \varepsilon \cdot R_{n+1}.$$

Окончательно получим

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| + \varepsilon \cdot \frac{C}{\varepsilon} \leq C.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема (об оценке остатка (асимптотическая сходимость)). Пусть дана смешанная задача на полуси (1) и выполнены условия (i)–(ii). Тогда существует единственное решение этой задачи $u(x, t, \varepsilon)$ и справедлива оценка

$$\left\| u(x, t, \varepsilon) - e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k \right\|_{C(\mathbb{R}^{(+)} \times [0, T])} \leq C \cdot \varepsilon^{n+1},$$

где $C \geq 0$ — константа, не зависящая от ε , а $v_k(x, t)$, $z_k(t)$, $y_k(t)$, $\omega_k(x, t)$ получены из решения итерационных задач при $0 \leq k \leq n + 1$.

5. Приложение 1. Поставим задачу для поиска фундаментального решения задачи (1):

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = \delta(x - x_0). \quad (24)$$

Для решения этой задачи применим метод интегрального преобразования Фурье с ядром $e^{-i\lambda x}$. Обозначим через $\tilde{U}(\lambda, t)$ образ Фурье искомого решения $u(x, t)$:

$$\tilde{U}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) \cdot e^{-i\lambda \xi} d\xi.$$

Будем предполагать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $u(x, t)$ со своими частными производными достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Также предположим, что интеграл для $\tilde{U}(\lambda, t)$ можно дифференцировать по переменным t и λ под знаком интеграла.

Умножим уравнение и начальное условие задачи (24) на $e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. При этом для второго интеграла в левой части уравнения после двукратного интегрирования по частям, учитывая обращения в ноль подстановок на $\pm\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot e^{-i\lambda x} dx = -\lambda^2 \cdot \tilde{U}(\lambda, t),$$

а для третьего интеграла, учитывая возможность дифференцировать по λ под знаком интеграла, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot u(x, t) \cdot e^{-i\lambda x} dx = i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda}(\lambda, t).$$

Тогда в пространстве образов получим следующую задачу Коши:

$$i\varepsilon \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} = \varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot \tilde{U}, \quad \tilde{U}(\lambda, 0) = e^{-i\lambda x_0}. \quad (25)$$

Задача (25) — задача для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, интегрирование которой проводится обычными методами. Выпишем сперва соответствующую характеристическую систему

$$\frac{dt}{i\varepsilon} = \frac{d\lambda}{-i} = \frac{d\tilde{U}}{\varepsilon^2 \lambda^2 \tilde{U}}, \quad (26)$$

и начальное условие в параметрическом виде

$$t = 0, \quad \lambda = s, \quad \tilde{U} = e^{-isx_0}, \quad s — \text{параметр}. \quad (27)$$

Находим первые интегралы для (26):

$$\begin{aligned} dt &= -\varepsilon d\lambda, \quad t + \varepsilon\lambda = C_1, \\ i\varepsilon^2 \lambda^2 d\lambda &= \frac{d\tilde{U}}{\tilde{U}}, \quad \tilde{U} \cdot \exp\left(-i\varepsilon^2 \frac{\lambda^3}{3}\right) = C_2, \end{aligned}$$

и, учитывая начальное условие (27), связь между ними:

$$\begin{cases} \varepsilon s = C_1, \\ e^{-isx_0} \cdot e^{-i\varepsilon^2 s^3/3} = C_2, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \left(C_1 x_0 + \frac{C_1^3}{3}\right)\right) = C_2.$$

Подставляя в последнее соотношение найденные выше первые интегралы, получим интегральную поверхность для задачи (25) в неявном виде:

$$\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \left(x_0(t + \varepsilon\lambda) + \frac{1}{3}(t + \varepsilon\lambda)^3\right)\right) = \tilde{U} \cdot \exp\left(-\frac{i}{3}\varepsilon^2 \lambda^3\right),$$

или, выражая $\tilde{U}$ и приводя подобные слагаемые в показателе экспоненты, решение искомой задачи в пространстве образов явно:

$$\tilde{U}(\lambda, t) = \exp\left(-i\varepsilon t \lambda^2 - i(x_0 + t^2)\lambda - \frac{ix_0 t}{\varepsilon} - \frac{it^3}{3\varepsilon}\right).$$

Теперь, используя формулу обратного преобразования Фурье, для оригинала будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \tilde{U}(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-i\frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \exp\left(i\lambda(x - x_0 - t^2) - i\varepsilon t \lambda^2\right).$$

Для вычисления получившегося интеграла выделим полный квадрат в показателе экспоненты

$$\begin{aligned}
& -i\varepsilon t \left(\lambda^2 + 2 \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \cdot \lambda + \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon^2 t^2} - \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon^2 t^2} \right) = \\
& = -i\varepsilon t \left(\lambda + \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \right)^2 + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t}
\end{aligned}$$

и сделаем замену:

$$z = \sqrt{\varepsilon t} \left(\lambda + \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \right).$$

В результате получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon t}} \exp \left(-i \frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon} + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2}. \quad (28)$$

Оставшийся интеграл может быть вычислен различными способами. Кратко остановимся на одном из них. Обозначив этот интеграл через I , воспользуемся чётностью подынтегральной функции и перейдём к переменной интегрирования $\xi = z^2$. В результате получим:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2} = 2 \cdot \int_0^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2} = \int_0^{\infty} d\xi \cdot \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}.$$

Теперь воспользуемся «интегральным представлением» функции $1/\sqrt{\xi}$, в данном случае в роли такого представления будет выступать интеграл Гаусса:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \cdot e^{-\xi x^2} \implies I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} dx \cdot e^{-\xi(x^2+i)}.$$

Изменим порядок интегрирования в получившемся повторном интеграле и берём интеграл по ξ :

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-\xi(x^2+i)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + i}.$$

Теперь можно воспользоваться теорией вычетов для вычисления интеграла по x :

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + i} = \frac{2\pi i}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{res} \left[\frac{1}{z^2 + i}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \right] = \frac{2\pi i}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2z} \Big|_{z=(-1+i)/\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (1 - i).$$

Подставим полученный результат в (28). Окончательно для фундаментального решения задачи (1) получаем:

$$u(x, t) = \frac{1 - i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \exp \left(-i \frac{t}{\varepsilon} \left(x_0 + \frac{t^2}{3} \right) + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t} \right),$$

что с точностью до обозначений совпадает с (6).

6. Приложение 2. Поставим задачу для поиска решения $\chi(x, t)$, позволяющего выписывать интегральное соотношение для решения однородного уравнения задачи (1) с произвольным граничным условием $\psi(t)$. Имеем:

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \theta(t);$$

здесь в граничном условии стоит функция Хевисайда и при $t > 0$ $\theta(t) = 1$. Доопределим неизвестную функцию $u(x, t)$ при $x < 0$ тождественным нулём и при аналогичных приложениях 1 предположениях перейдём к задаче Коши в пространстве образов Фурье:

$$i\varepsilon \frac{\partial F}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\varepsilon^2 \lambda, \quad F(\lambda, 0) = 0, \quad (29)$$

где введено обозначение

$$F(\lambda, t) = \int_0^\infty dx \cdot e^{-i\lambda x} u(x, t).$$

Запишем характеристическую систему для квазилинейного уравнения в задаче (29):

$$\frac{dt}{i\varepsilon} = \frac{d\lambda}{-i} = \frac{dF}{\varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\varepsilon^2 \lambda}.$$

Система первых интегралов для нее имеет вид:

$$\lambda + \frac{t}{\varepsilon} = C_1, \quad F \cdot e^{-i\varepsilon^2 \lambda^3/3} - \varepsilon^2 \int_\lambda^\infty dq \cdot q \cdot e^{-i\varepsilon^2 q^3/3} = C_2.$$

Теперь уже несложно, учитывая начальное условие в (29), получить решение исходной задачи в пространстве образов:

$$F(\lambda, t) = \varepsilon^2 \int_\lambda^{\lambda+t/\varepsilon} dq \cdot q \cdot e^{\varepsilon^2(\lambda^3 - q^3)/3}.$$

Замена переменной $\lambda - q = (s - t)/\varepsilon$ в последнем интеграле приведёт к более удобному в дальнейшем соотношению:

$$F(\lambda, t) = \varepsilon \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - i\varepsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \right).$$

Осталось осуществить обратное преобразование Фурье, что в итоге позволит получить решение интересующей нас задачи. Будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \cdot F(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - i\varepsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\varepsilon} \right) + i\lambda x \right). \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования в получившемся повторном интеграле и выделим во внутреннем интеграле по λ полный квадрат, после чего произведем замену

$$\mu = \lambda + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right).$$

После описанных преобразований получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^t ds \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty d\mu \cdot \left(\mu + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s + \frac{x}{t-s} \right) \right) \cdot \exp(-i\varepsilon(t-s)\mu^2). \quad (30) \end{aligned}$$

Обозначим внутренний интеграл $I_0(x, t-s)$ и вычислим его отдельно:

$$I_0(x, t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t-s + \frac{x}{t-s} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2}.$$

В силу того, что в обратном преобразовании Фурье интеграл понимается в смысле главного значения, первое слагаемое в последнем соотношении равно нулю из-за нечетности подынтегральной функции. Второе слагаемое легко свести к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (1-i),$$

о вычислении которого было сказано в приложении 1. В результате для I_0 получим:

$$I_0(x, t-s) = \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1-i}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right).$$

Подставляя полученное выражение в (30), будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1-i}{4\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t-s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right).$$

Осталось учесть известное свойство интегралов Фурье о сходимости в точке разрыва к полусумме левого и правого пределов разлагаемой в этот интеграл функции. Учитывая этот факт, последнее соотношение в точке $x=0, t=0$ будет давать $(\theta(0-0) + \theta(0+0))/2 = 1/2$, а для получения с помощью $u(x, t)$ решение поставленной задачи с произвольным краевым условием требуется 1. Поэтому последнее соотношение необходимо умножить на два. Окончательно получаем $(\chi(x, t) \equiv 2 \cdot u(x, t))$:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t-s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right),$$

что с точностью до обозначения переменной интегрирования совпадает с (8).

7. Приложение 3.

Лемма. Для соотношения (9), описывающего действие оператора $\hat{\chi}(\cdot)$ на функцию $f(t)$, справедлива оценка ($\delta > 0, t \in [0, T]$):

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) \quad \text{при } x \in [\delta, +\infty).$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

Доказательство. Отметим, что

$$\begin{aligned} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \exp\left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2\right) = \\ = f(t) \cdot \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t) \right] e^{iz^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1 \right] e^{iz^2} + \\
& + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[\exp\left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2}\right) - 1 \right] e^{iz^2}.
\end{aligned}$$

Оценим три последних слагаемых, учитывая неравенство $0 \leq \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \leq t \leq T$. Будем иметь при $x \in [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$:

$$\int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t) \right] \cdot e^{iz^2} = \frac{(f(t) - f(0)) \sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{i\frac{x^2}{4\varepsilon t}} + O\left(\frac{\varepsilon t}{x^2}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right);$$

$$\begin{aligned}
\int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1 \right] e^{iz^2} &= \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} e^{iz^2} = \\
&= \frac{x^3}{16\varepsilon^2} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{1}{z^4} e^{iz^2} = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[\exp\left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2}\right) - 1 \right] e^{iz^2} &= \\
&= f(0) \left(1 + \frac{t}{16x}\right) \left[\exp\left(-i\left(\frac{t^3}{12\varepsilon} + \frac{xt}{2\varepsilon}\right)\right) - 1 \right] \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{ix^2/(4\varepsilon t)} + O\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).
\end{aligned}$$

Складывая все три оценки, получим

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

Лемма доказана. $\square$

8. Заключение. Как отмечено во введении, основной проблемой метода регуляризации С. А. Ломова является поиск регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра достаточно трудная задача. В предложенной работе для смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения Шрёдингера со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота регуляризация, как выяснилось, состоит из трёх частей:

- (а) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $t = 0$;
- (б) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора;
- (в) описание пограничного слоя обусловленного точкой $x = 0$.

В статье описанные проблемы успешно разрешены путем введения регуляризирующей функции и двух дополнительных сингулярных операторов. Тем самым основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи успешно преодолены, что подтверждается результатами наших исследований. Продолжением этих исследований является обобщение предложенного в статье подхода для построения асимптотического ряда на другие задачи математической физики с подобного рода спектральными особенностями у предельного оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров// Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 2 (158). — С. 101–114.
2. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации. — М.: МЭИ, 2012.
3. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами// Уфим. мат. ж. — 2018. — 10, № 2. — С. 3–12.
4. Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота// Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 3. — С. 46–58.
5. Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота// Диффер. уравн. процессы управл. — 2020. — № 2. — С. 15–32.
6. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованное асимптотическое решение задачи Коши для неоднородного уравнения Шрёдингера в квазиклассическом приближении в присутствии «сильной» точки поворота у предельного оператора// Диффер. уравн. процессы управл. — 2023. — № 1. — С. 110–124.
7. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора// Сиб. электрон. мат. изв. — 2020. — 17. — С. 51–60.
8. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром// Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 6. — С. 733–746.
9. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора// Мат. сб. — 1986. — 131, № 173. — С. 544–557.
10. Елисеев А. Г., Ратникова Т. А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота// Диффер. уравн. процессы управл. — 2019. — № 3. — С. 63–73.
11. Кириченко П. В. 2020// Мат. заметки СВФУ. — № 3. — С. 3–15.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 2008.
13. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
14. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: МГУ, 2011.
15. Ломов С. А., Сафонов В. Ф. Регуляризации и асимптотические решения для сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора// Укр. мат. ж. — 1984. — 36, № 2. — С. 172–180.
16. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
17. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.
18. Liouville J. Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis á satisfaire á une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable// J. Math. Pures Appl. — 1837. — P. 16–35.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Елисеев Александр Георгиевич

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: yeliseevag@mpei.ru

Кириченко Павел Владимирович

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: kirichenkov@mpei.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 44–52
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-44-52

УДК 519.16, 519.17

МАКСИМАЛЬНЫЙ ПОТОК В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СЕТЯХ СО СВЯЗАННЫМИ ДУГАМИ

© 2024 г. Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, В. А. СКОРОХОДОВ, В. А. РУСАКОВ

Аннотация. Широко известная задача поиска максимального потока в классических сетях имеет множество алгоритмов решения, которые обладают полиномиальной вычислительной сложностью от размеров сети. В общем случае задача нахождения максимального потока для сетей со связанными дугами является NP-полной. Однако среди ранее изученных сетей со связанными дугами существуют такие, для которых вычисление максимального потока осуществимо за полиномиальное от размеров сети время. Данная работа посвящена определению влияния топологии сетей со связанными дугами на возможность нахождения для них максимального потока за полиномиальное время. В работе рассматривается класс параллельных сетей со связанными дугами, для которого предложен быстрый полиномиальный алгоритм поиска максимального потока.

Ключевые слова: граф, сеть, поток в сети, максимальный поток, параллельная сеть, связанные дуги, сети с ограничениями на достижимость.

MAXIMUM FLOW IN PARALLEL NETWORKS WITH CONNECTED ARCS

© 2024 Ia. M. ERUSALIMSKIY, V. A. SKOROHODOV, V. A. RUSAKOV

ABSTRACT. The well-known problem of finding maximum flows in classical networks has many solution algorithms that have a polynomial computational complexity depending on the size of the network. In general, the problem of finding maximum flows for networks with connected arcs is NP-complete. However, among the previously studied networks with connected arcs, there are networks for which the calculation of maximum flows is feasible in a time polynomially depending on the size of the network. This work is devoted to determining the influence of the topology of networks with connected arcs on the possibility of finding maximum flows in polynomial time. In this paper, for a class of parallel networks with connected arcs, we propose a fast polynomial algorithm for finding maximum flows.

Keywords and phrases: graph, network, network flow, maximum flow, parallel network, connected arcs, networks with reachability restrictions.

AMS Subject Classification: 05C21, 05C85

Введение. Одной из основных и наиболее изученных потоковых задач является задача о поиске максимального потока. Важность величины максимального потока в сети проистекает из того, что это глобальная характеристика всей сети, позволяющая оценить такие свойства сетей (транспортных, телекоммуникационных, ресурсных), как общая загруженность сети. Основываясь на знании о строении сети и максимальном допустимом потоке, можно выявить такие особенности конкретной сети, как избыточность дуг сети – в ситуации, когда максимальный поток достижим без использования пропускных способностей некоторых из дуг или, например, определить узкие места в инфраструктуре, моделируемой сетью.

Однако несмотря на то, что известны быстрые, полиномиально вычислимые алгоритмы поиска максимального потока — ранее было показано, что эти алгоритмы, как и иные классические алгоритмы на графах, в общем случае неприменимы для решения задач в сетях со связанными дугами [1]. Постановка задачи о максимальном потоке в сети со связанными дугами описана далее.

Целью данной работы является нахождение класса сетей со связанными дугами, для которых возможно построение полиномиального алгоритма решения задачи поиска максимального потока.

1. Постановка задачи. В классической постановке потоковых задач рассматриваются сети следующего вида.

Определение 1. *Сетью* назовем связный конечный ориентированный граф $G(X, U, f, \rho)$, в котором X — множество вершин сети, U — множество дуг сети, $f : U \rightarrow X \times X$ — отображение инцидентности, $\rho : U \rightarrow R_+ = (0; +\infty)$ — отображение, назначающее каждой из дуг u пропускную способность $\rho(u)$.

Сети, удовлетворяющие определению 1 будем называть классическими сетями. Как и в [8], источник будем обозначать через s , сток через t , а все вершины сети $G(X, U, f, \rho)$ из множества $X \setminus \{s, t\}$ будем называть промежуточными.

Определение 2. *Потоком* в сети G называется отображение φ , ставящее в соответствие каждой из дуг u значение из $[0; \rho(u)]$, удовлетворяющее в каждой промежуточной вершине x соотношению неразрывности потока

$$\sum_{u \in U^-(x)} \varphi(u) = \sum_{u \in U^+(x)} \varphi(u).$$

Величиной потока φ (обозначаемой через $VG(\varphi)$) в сети G назовем суммарную величину потока φ по дугам, входящим в сток, т.е.

$$VG(\varphi) = \sum_{u \in U^-(t)} \varphi(u).$$

Для классических сетей задача поиска величины максимального потока VG решена Л. Фордом и Д. Фалкерсоном (см. [6]). Для ее решения используются алгоритмы, в том числе имеющие квадратичную от размеров сети вычислительную сложность (см. [7]).

Определение 3. Сеть со связанными дугами — это сеть, множество дуг U которой содержит такое подмножество дуг $U^s \subseteq U$, $|U^s| \geq 2$, называемое множеством связанных дуг. Для дуг из U^s не задана пропускная способность $\rho(u)$, а задана суммарная пропускная способность $P(U^s)$. Сети со связанными дугами возникают естественным образом при рассмотрении сетей с ограничениями на достижимость (см. [2, 4]).

В общем случае может быть задано несколько множеств связанных дуг, причем они должны быть попарно непересекающимися, но в данной работе будем считать, что сеть G содержит ровно одно множество связанных дуг.

Для связанных дуг не определена пропускная способность, а значит для них не может быть определен поток (см. определение 2) и, следовательно, задача поиска величины максимального потока должна иметь другую постановку.

Для того, чтобы стало возможным назначать поток связанным дугам, необходимо сначала определить пропускную способность каждой из связанных дуг $\rho(u)$, $\rho(u) \geq 0$, $u \in U^s$, так, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{u \in U^s} \rho(u) \leq P(U^s). \quad (1)$$

После назначения $\rho(u)$ для дуг множества U^s сеть со связанными дугами может рассматриваться как классическая сеть, которую будем обозначать G_ρ , и на полученной сети уже можно рассматривать задачу о нахождении величины максимального потока VG_ρ .

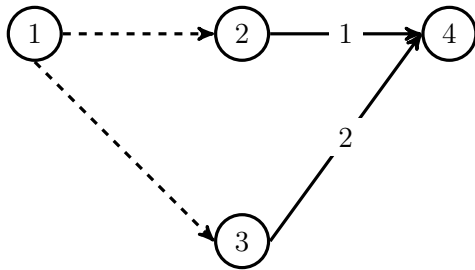


Рис. 1. Сеть с двумя связанными дугами

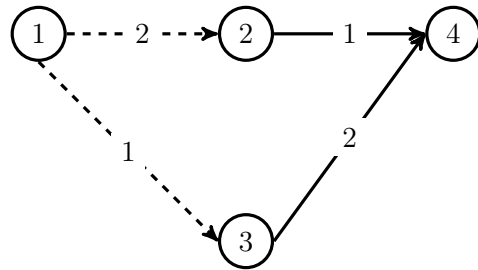


Рис. 2. Неоптимальное назначение пропускных способностей связанных дуг

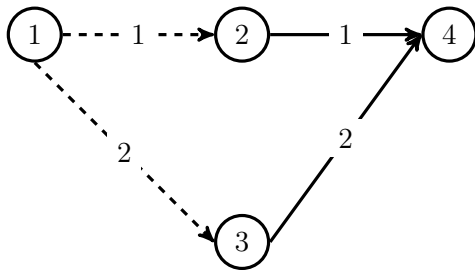


Рис. 3. Оптимальное назначение пропускных способностей связанных дуг

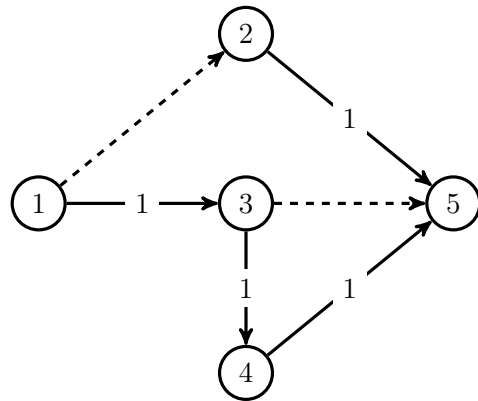


Рис. 4. Сеть со связанными дугами 1-2 и 3-5

Определение 4. Величиной максимального потока в сети со связанными дугами называют величину $VG = \max VG_\rho$, где $\max$ берется по всем возможным назначениям $\rho(u)$, $u \in U^s$.

Замечание. Ясно, что для нахождения VG в сети со связанными дугами можно рассматривать только такие назначения пропускных способностей, для которых в (1) выполняется равенство.

Рассмотрим пример сети со связанными дугами и обсудим, как различные варианты назначения $\rho(u)$ связанным дугам влияют на VG_ρ .

Пример 1. На рис. 1 изображена сеть со связанными дугами. Здесь и далее в примерах связанные дуги изображены стрелками со штриховыми линиями, а несвязанные дуги — стрелками со сплошными линиями. Пропускные способности дуг указаны на рисунке, а $P(U^s) = 3$.

Если для верхней связанной дуги $u_1 = (1; 2)$ с рис. 1 назначить $\rho(u_1) = 2$, а для нижней связанной дуги $u_2 = (1; 3)$ назначить $\rho(u_2) = 1$, то будет получена сеть, изображенная на рис. 2, для которой величина максимального потока равна 2.

Однако для сети, изображенной на рис. 1, существует оптимальное назначение пропускных способностей дуг, при котором достигается максимальный поток величиной в 3, а именно, такое назначение, что $\rho(u_1) = 1$, $\rho(u_2) = 2$ (рис. 3).

Ясно, что существует бесконечное количество способов назначения для $u \in U^s$, а значит, и бесконечное количество классических сетей, которые могут быть получены из сети со связанными дугами. Тогда задача поиска максимального потока величиной VG для сети со связанными дугами G формулируется как задача нахождения такого назначения пропускных способностей связанным дугам, при котором будет получена сеть, максимальный поток в которой является

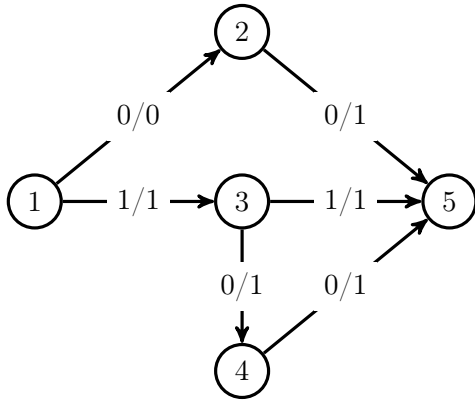


Рис. 5. Блокирующий поток в сети со связанными дугами

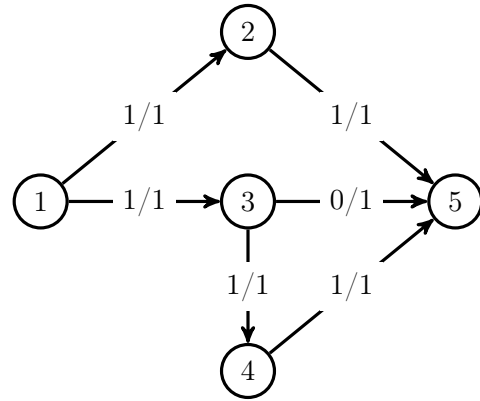


Рис. 6. Максимальный поток в сети со связанными дугами

наибольшим по величине среди максимальных потоков всех возможных сетей, которые могут быть получены из G путем назначения для дуг U^s .

Сеть, изображенная на рисунке 1, примечательна тем, что при любом назначении пропускных способностей, при котором $\rho(u_1) \neq 1$ и $\rho(u_2) \neq 2$ будет получена классическая сеть, величина максимального потока в которой не будет равна VG .

Однако существуют сети со связанными дугами, из которых может быть получено более одной классической сети, имеющей $VG_\rho = VG$. Например, если для сети, изображенной на рис. 1, суммарная пропускная способность $P(U^s) = 10$, то при любых назначениях, при которых одновременно $\rho(u_1) > 1$ и $\rho(u_2) > 2$, будет $VG_\rho = VG$. Кроме того, при назначении не всей суммарной пропускной способности, а только $\rho(u_1) = 1$ и $\rho(u_2) = 2$ из $P(U^s) = 10$, остаточная (неиспользованная) пропускная способность $P_{\text{res}}(U^s)$ составит 7, а максимальный поток величины VG все равно будет получен. Но также ясно, что при любом $\rho(u_1) > 8$ или $\rho(u_2) > 9$ величина максимального потока получаемой классической сети $VG_\rho \neq VG$.

В сетях со связанными дугами проявляется «нелокальность» влияния назначений пропускных способностей. Приведенный ниже пример раскрывает данную проблему.

Пример 2. Пусть дуги сети (рис. 4), не принадлежащие множеству связанных дуг, имеют пропускные способности, равные 1, а $P(U^s) = 1$, где U^s состоит из дуг 1-2 и 3-5.

При назначении пропускной способности по дуге 3-5 величиной 1 используется вся пропускная способность связанных дуг, а поток в данной сети осуществим лишь по пути 1-3-5 (рис. 5) и является максимальным потоком. Возможность назначения ненулевого потока по дуге 1-2 заблокирована, однако величина максимального потока в полученной сети не равна VG .

Однако если произвести назначение пропускной способности величиной 1 по дуге 1-2, то по дугам 1-2, 2-5, 1-3, 3-4, 4-6 (рис. 6) станет осуществимым максимальный поток величины $VG_\rho = VG = 2$.

Этот пример отражает не только свойство нелокальности изменений, происходящих при назначениях пропускных способностей в сети со связанными дугами, но также заставляет обратить внимание, на то, что несмотря на одинаковые пропускные способности (а соответственно, и возможность внести одинаковый вклад в формирование максимального потока), связанные дуги 1-2 и 3-4 неравноценны и любое назначение ненулевой пропускной способности по дуге 3-4 приводит к получению сети, величина максимального потока в которой не равна VG .

Может показаться, что найденный максимальный поток равен сумме пропускных способностей дуг любого из минимальных разрезов данной сети (например, разреза, состоящего из дуг 1-2 и 1-3). Но для сетей со связанными дугами понятие минимального разреза не имеет смысла, так как для каждой из связанных дуг, взятой в отдельности, пропускная способность не определена.

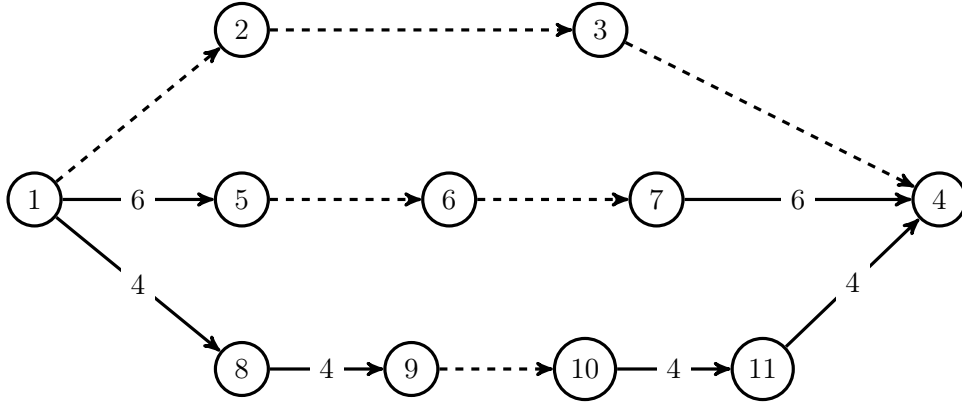


Рис. 7. Параллельная сеть со связанными дугами

Минимальный разрез может быть определен лишь для классических сетей, полученных из сети со связанными дугами.

По причине возникновения блокирующих потоков наподобие изображенного на рис. 4 в сети с произвольной топологией назначение пропускной способности для одной из связанных дуг может повлиять на возможность назначения потока в любом из участков сети, содержащих связанные дуги из того же множества связанных дуг. Поэтому рассмотрим решение задачи о максимальном потоке начиная с наиболее простых классов сетей — параллельных сетей.

2. Максимальный поток в параллельных сетях с одним множеством связанных дуг.

Определение 5. Параллельная сеть — сеть, содержащая только простые пути, ведущие из источника в сток, которые не имеют общих вершин, отличных от источника и стока (см. [5]).

Представленная ранее сеть (см. рис. 4) не удовлетворяет приведенному определению 5, поскольку простые пути 1-3-5 и 1-3-4-5 из источника 1 в сток 5 в пересечении по вершинам содержат не только источник и сток, но и общую промежуточную вершину 3. Из определения 5 следует, что

$$(\forall x \in X \setminus \{s, t\}) \quad \deg_+ x = \deg_- x = 1, \quad (2)$$

$$\deg_- s = \deg_+ t = p, \quad (3)$$

где $\deg_+ z$, $\deg_- z$ — полустепени захода и исхода вершины z ($z \in X$) соответственно, а p — количество параллельных путей.

Если сеть $G(X, U, f, p)$ удовлетворяет определению 1, а именно,

$$c(G) = 1, \quad (4)$$

где $c(G)$ — число компонент связности графа G , то следствия (2) и (3) — необходимые и достаточные условия, при выполнении которых G является параллельной сетью.

Из условий (2), (3), (4) определение того, является ли сеть параллельной, осуществимо за линейное от размеров сети (количества дуг и вершин сети) время путем модифицированного обхода в глубину (см. [3]).

Замечание. Определение 4 сформулировано для сетей с одним источником и одним стоком, но может быть распространено и на сети с несколькими источниками и стоками. Если при объединении всех источников в один источник и объединении всех стоков в один сток будет получена параллельная сеть, то будем считать исходную сеть параллельной (для такой сети условия (2), (3), (4) должны быть сформулированы с учетом нескольких источников и стоков).

Примером параллельной сети с одним множеством связанных дуг является сеть, изображённая на рис. 7.

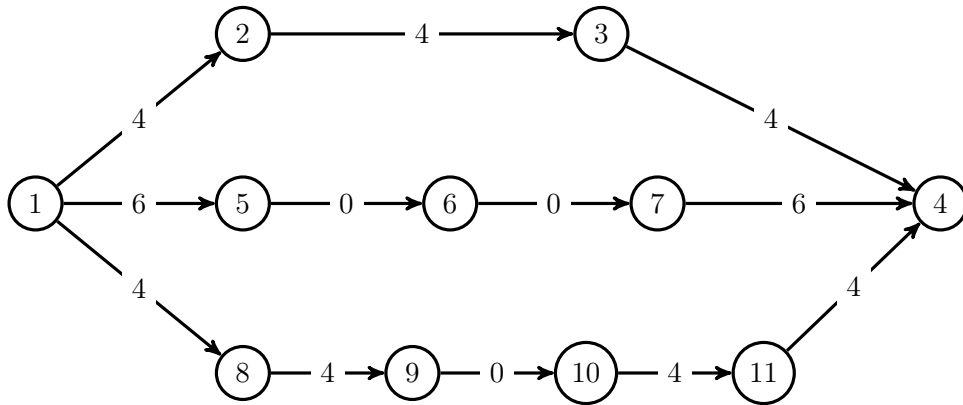


Рис. 8. Параллельная сеть с ненулевыми пропускными способностями пути 1-2-3-4

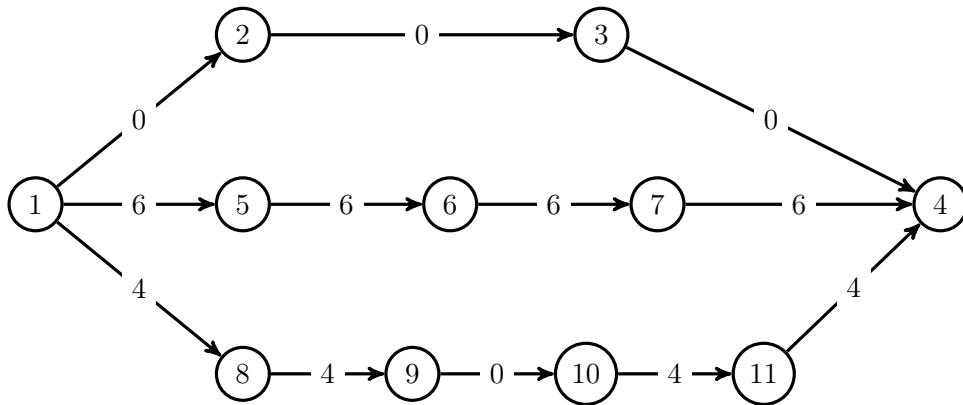


Рис. 9. Параллельная сеть с ненулевыми пропускными способностями пути 1-5-6-7-4

Пример 3. Пропускные способности несвязанных дуг указаны на рис. 7, $P(U^s) = 12$. Если для этой сети, назначить ненулевую пропускную способность величины 4 для связанных дуг по пути 1-2-3-4, а для остальных связанных дуг установить пропускную способность в 0, то будет получена сеть, изображенная на рис. 8, для которой $VG_\rho = 4$.

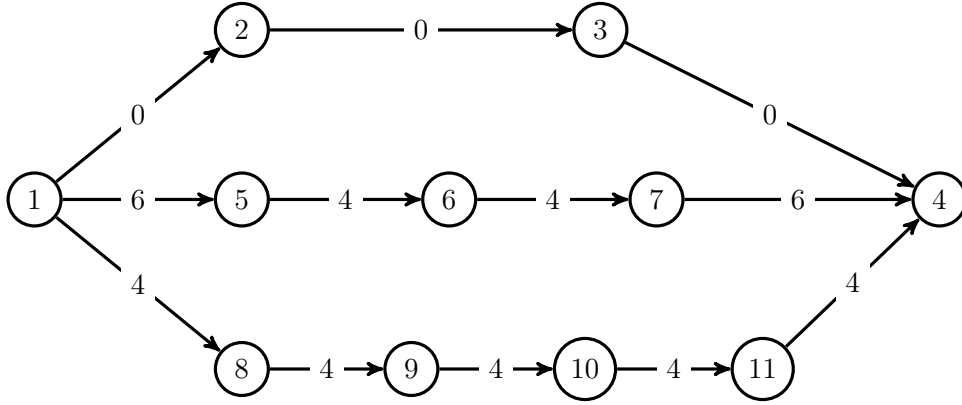
Если при назначении пропускных способностей для этой же сети установить ненулевую пропускную способность только для связанных дуг пути 1-5-6-7-4 величины 6, а для остальных связанных дуг назначить нулевую пропускную способность, то будет получена классическая сеть, изображенная на рис. 9. Величина максимального потока в полученной сети составит 6.

Если при назначении пропускных способностей для этой же сети установить для связанных дуг 9-10, 5-6, 6-7 пропускную способность величины 4, а для остальных связанных дуг нулевую пропускную способность, то будет получена классическая сеть, изображенная на рис. 10, у которой $VG_\rho = VG = 8$.

Для того, чтобы сравнить полученные варианты назначений потоков (рис. 8–10) для каждого из путей μ_i , $i \in \{1, \dots, p\}$ из s в t , определим две характеристики — кратность связанных дуг $\delta(\mu_i)$ и пропускную способность по несвязанным дугам — $\tilde{\rho}(\mu_i)$ следующим образом:

$$\delta(\mu_i) = |U^s \cap \mu_i|, \quad \tilde{\rho}(\mu_i) = \min \rho(u), u \in \{\mu_i \setminus U^s\}.$$

Необходимо отметить, что в приведенных выше примерах (рис. 8–10), «цена» прохождения потока в отношении использования $P(U^s)$ по разным путям различна. Для того, чтобы организовать поток величины x ($x \leq \tilde{\rho}(\mu_i)$) по пути 1-2-3-4, потребуется использовать $3 \cdot x$ пропускной способности из $P(U^s)$ — по x на каждую из трех дуг этого пути. Поток величины x по пути 1-5-6-7-4

Рис. 10. Параллельная сеть с $VG_\rho = VG$

потребуется уже задействования суммарной пропускной способности величиной $2 \cdot x$ из $P(U^s)$. Путь 1-8-9-10-11-4 является самым выгодным по отношению использования $P(U^s)$ — прохождение потока величиной x по этому пути требует назначения пропускной способности величины x по единственной связанной дуге в этом пути 9-10.

Таким образом, поток, проходящий по пути с меньшим числом связанных дуг, т.е. с меньшей кратностью $\delta(\mu_i)$, получает меньшую «цену» в отношении использования $P(U^s)$. На основе этого принципа строится алгоритм поиска максимального потока для параллельных сетей с одним множеством связанных дуг, который описан далее.

3. Алгоритм нахождения максимального потока в параллельной сети с одним множеством связанных дуг. Алгоритм нахождения максимального потока в параллельной сети с одним множеством связанных дуг состоит из следующих шагов.

- Шаг 1. Пронумеровать параллельные пути μ_i в неубывающем по $\delta(\mu_i)$ порядке. В случае, если $\delta(\mu_i) = \delta(\mu_{i+1})$ ($i < p$), доупорядочить так, чтобы $\tilde{\rho}(\mu_i) \geq \tilde{\rho}(\mu_{i+1})$.
- Шаг 2. Положить $P_{\text{res}}(U^s) := P(U^s)$.
- Шаг 3. Положить, что пропускная способность всех путей $\rho(\mu_i) := 0$.
- Шаг 4. Производить перебор путей в порядке возрастания их порядковых номеров и для каждого из путей перейти на шаг 5. По завершении перебора путей перейти на шаг 7.
- Шаг 5. Если $\delta(\mu_i) = 0$, то $\rho(\mu_i) := \tilde{\rho}(\mu_i)$ и перейти на шаг 4; иначе перейти на шаг 6.
- Шаг 6. Вычислить $\rho_p := P_{\text{res}}(U^s) / \delta(\mu_i)$. Если $\rho_p \geq \tilde{\rho}(\mu_i)$, то $P_{\text{res}}(U^s) := P_{\text{res}}(U^s) - \tilde{\rho}(\mu_i) \cdot \delta(\mu_i)$, присвоить всем связанным дугам пути μ_i пропускную способность, равную $\tilde{\rho}(\mu_i)$ и $\rho(\mu_i) := \tilde{\rho}(\mu_i)$, а также перейти на шаг 4; иначе присвоить всем связанным дугам пути μ_i пропускную способность, равную ρ_p и $\rho(\mu_i) := \rho_p$, установить $P_{\text{res}}(U^s) := 0$ и перейти на шаг 7.
- Шаг 7. Вычислить величину максимального потока, просуммировав $\rho(\mu_i)$. Завершить работу алгоритма.

Этот алгоритм имеет полиномиальную вычислительную сложность от размеров сети, так как подсчет количества связанных дуг для каждого из путей осуществим за линейное время, а сортировка путей по кратностям связанных дуг за полиномиальное — с помощью известных алгоритмов сортировки, таких как сортировка бинарным деревом, сортировка слиянием, имеющих квадратичную вычислительную сложность (см. [3]).

Замечание. 1. Если работа алгоритма прекращается досрочно, то это означает, что суммарной пропускной способности связанных дуг недостаточно, чтобы обеспечить наличие ненулевого потока на каждом из параллельных путей.

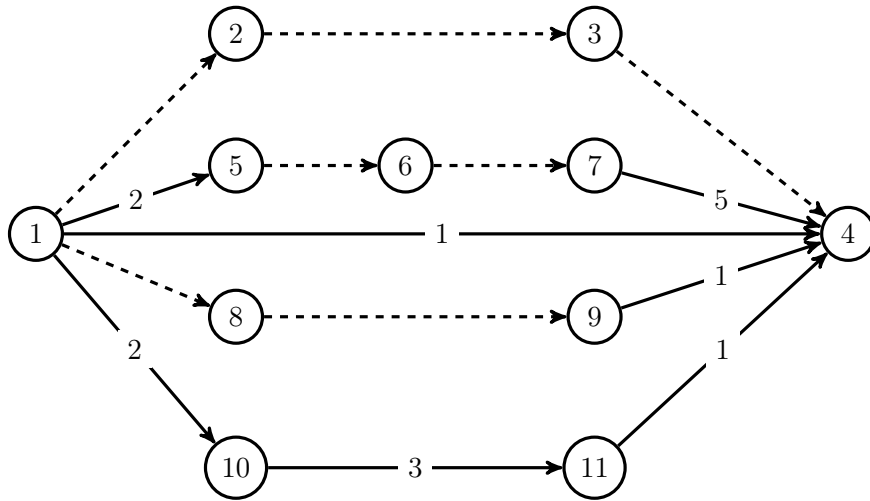


Рис. 11. Параллельная сеть

2. Доупорядочение последовательности путей в случае $\delta(\mu_i) = \delta(\mu_{i+1})$ по условию $\tilde{\rho}(\mu_i) \geq \tilde{\rho}(\mu_{i+1})$ может существенно ускорить выполнение алгоритма, когда суммарной пропускной способности связанных дуг недостаточно, чтобы обеспечить наличие ненулевого потока на каждом из параллельных путей.

Пример 4. Применим вышеописанный алгоритм к сети, изображенной на рис. 11, для которой $P(U^s) = 5$, а пропускные способности дуг из $\{U \setminus U^s\}$ указаны на рис. 11 рядом с каждой из дуг.

Обозначим пути из s в t на рис. 11 как $p_1, \dots, p_5$ в порядке сверху вниз. Шаг 1 алгоритма предполагает вычисление $\delta(p_i)$ и $\tilde{\rho}(p_i)$. Для рис. 11 значения $\delta(p_i)$ путей и значения $\tilde{\rho}(p_i)$ равны

$$\begin{aligned} \delta(p_1) &= 3, & \delta(p_2) &= 2, & \delta(p_3) &= 0, & \delta(p_4) &= 2, & \delta(p_5) &= 0, \\ \tilde{\rho}(p_1) &= 0, & \tilde{\rho}(p_2) &= 2, & \tilde{\rho}(p_3) &= 1, & \tilde{\rho}(p_4) &= 1, & \tilde{\rho}(p_5) &= 1. \end{aligned}$$

Тогда по завершении шага 1 алгоритма порядок выбора путей будет следующим:

$$\mu_1 = p_3, \quad \mu_2 = p_5, \quad \mu_3 = p_2, \quad \mu_4 = p_4, \quad \mu_5 = p_1,$$

при этом пути p_3 , p_5 и p_2 , p_4 попарно равны по $\delta(\mu_i)$, поэтому были доупорядочены по $\tilde{\rho}(\mu_i)$.

На шаге 2 $P_{\text{res}}(U^s) := 5$. На шаге 3 пропускные способности всех путей $\rho(\mu_1), \dots, \rho(\mu_5)$ обнуляются. В цикле, начинающемся на шаге 4, пути μ_1 и μ_2 будут получать пропускные способности величиной 1 на шаге 5, поскольку не имеют в своем составе связанных дуг. Для пути μ_3 на шаге 5 будет определена пропускная способность величиной в $\tilde{\rho}(\mu_3) = 2$, поскольку $\rho_p \geq \tilde{\rho}(\mu_3)$, а $P_{\text{res}}(U^s)$ на данном шаге станет равным 1.

Для пути μ_4 на шаге 5 будет израсходована вся остаточная пропускная способность $P_{\text{res}}(U^s)$, за счет которой связанным дугам этого пути будет назначена пропускная способность $\rho_p = 0,5$, после чего произойдет переход на шаг 7 с подсчетом величины максимального потока и завершение работы алгоритма, следовательно путь μ_5 не будет обработан в цикле и назначенная для него на шаге 3 пропускная способность останется равной 0. Итак, по результатам работы алгоритма максимальный поток для параллельной сети со связанными дугами с рис. 11 будет равен 4,5.

Заключение. В работе были рассмотрены параллельные сети со связанными дугами как отдельный класс сетей. Показано что из всех сетей со связанными дугами можно выделить классы, для которых существуют алгоритмы с полиномиальным временем решения потоковых задач (подобно представленному алгоритму нахождения максимального потока) несмотря на NP-разрешимость общей задачи.

Дальнейшая работа по изучению потоков в сетях со связанными дугами может включать решение задачи о максимальном потоке в параллельных сетях с несколькими множествами связанных

дуг. Помимо параллельных сетей, большой интерес представляет выделение других классов сетей и отыскание для них быстрых алгоритмов решения потоковых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Водолазов Н. Н.* Исследование стационарных и динамических потоков в сетях без ограничений и с ограничениями на достижимость / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2010.
2. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Потоки в сетях со связанными дугами // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2003. — № 8. — С. 9–12.
3. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. — М.: Вильямс, 2005.
4. *Скороходов В. А.* Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами // Модел. анал. информ. сист. — 2012. — 19, № 2. — С. 41–52.
5. *Erusalimskiy I. M., Rusakov V. A.* Some networks that allow splashes of dynamic flows and finding the maximum splash value // J. Math. Sci. — 2023. — 271. — P. 223–232.
6. *Ford L. R. Jr., Fulkerson D. R.* Flows in Networks. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2010.
7. *Goldberg A. P., Tarjan R. E.* Efficient maximum flow algorithms // Commun. ACM. — 2014. — 57, № 8. — P. 82–89.
8. *Newman M.* Networks: An Introduction. — New York: Oxford Univ. Press, 2010.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ерусалимский Яков Михайлович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Скороходов Владимир Александрович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Русаков Владислав Андреевич
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: vrusakov@sfedu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 53–67
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-53-67

УДК 517.97, 517.955

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2024 г. Л. Ю. КАБАНЦОВА

Аннотация. Рассматривается задача Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя случайными коэффициентами и случайной неоднородностью. Получены явные формулы для моментных функций решения: математическое ожидание, смешанные моментные функции и вторая моментная функция. В качестве приложений выведены явные формулы смешанных моментных функций и второй моментной функции решения уравнения с независимыми гауссовскими случайными коэффициентами.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со случайными коэффициентами, математическое ожидание, смешанная моментная функция, вторая моментная функция, вариационная производная, характеристический функционал.

MOMENT FUNCTIONS FOR A SOLUTION OF A STOCHASTIC SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2024 L. Yu. KABANTSOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider the Cauchy problem for a linear inhomogeneous system of first-order partial differential equations with two random coefficients and a random inhomogeneity. Explicit formulas for the moment functions of the solution are obtained: mathematical expectation, mixed moment functions, and the second moment function. As applications, explicit formulas for mixed moment functions and the second moment function for solutions of an equation with independent Gaussian random coefficients are obtained.

Keywords and phrases: system of first-order partial differential equations with random coefficients, mathematical expectation, mixed moment function, second moment function, variational derivative, characteristic functional.

AMS Subject Classification: 35R60, 60H15

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon_1(t)A \frac{\partial y}{\partial z} + \varepsilon_2(t)y + b(t, z), \quad (1)$$

$$y(t_0, z) = y_0(z), \quad (2)$$

где $t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, t_0 задано, $y : T \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ — искомое отображение, $b : T \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ — случайный векторный процесс, A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y , Y —

конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные процессы, $y_0(z)$ — случайный векторный процесс.

Так как уравнение (1) содержит случайные процессы, то решение задачи Коши (1), (2) также является случайным процессом. Для приложений важны статистические характеристики решения — функция распределения, плотность распределения, характеристический функционал или моментные функции. Наиболее важным и одновременно простым является математическое ожидание. Метод сведения стохастической задачи к детерминированному дифференциальному уравнению с обычными и вариационными производными (см. [1–4, 7]) оказался эффективным для нахождения моментных функций решений линейных дифференциальных уравнений. В [2] получены явные формулы для математического ожидания решения мультипликативно возмущенного векторного дифференциального уравнения в частных производных с одним случайным коэффициентом и случайной неоднородностью.

В данной работе решается задача нахождения математического ожидания, смешанных моментных функций и второй моментной функции решения задачи (1), (2) с двумя случайными коэффициентами и случайной неоднородностью. Исследуемая задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с частными и вариационными производными, для которой удастся получить явную формулу решения. На основе полученной формулы выписать математическое ожидание, смешанные моментные функции и вторую моментную функцию решения стохастического уравнения с использованием характеристического функционала случайных коэффициентов и неоднородности. В качестве приложений выведены явные формулы смешанных моментных функций и второй моментной функции решения уравнения с независимыми гауссовскими случайными коэффициентами.

2. Математическое ожидание решения задачи (1), (2). Пусть $L_1(T)$ — пространство суммируемых функций на отрезке T с нормой

$$\|v\| = \int_T |v(t)| dt,$$

$\psi : L_1(T) \rightarrow \mathbb{C}$ — функционал, $h \in L_1(T)$ — приращение переменной v .

Определение 1. Если

$$\psi(v+h) - \psi(v) = \int_T \varphi(t, v) h(t) dt + o(h),$$

где $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно h и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h , то отображение $\varphi : T \times L_1(T) \rightarrow \mathbb{C}$ называется *вариационной производной функционала ψ в точке v* и обозначается $\delta\psi(v)/\delta v(t)$.

Вариационное дифференцирование аналогично обычному дифференцированию.

Пусть $\varepsilon(t, \omega)$ обозначает случайный процесс (ω — случайное событие; см. [1]). В дальнейшем случайный процесс будем записывать просто как $\varepsilon(t)$, а обозначение $E[\varepsilon]$ использовать для математического ожидания случайного процесса ε .

Определение 2 (см. [1, с. 30]). Функционал

$$\psi(v) = E \left[\exp \left(i \int_T \varepsilon(s) v(s) ds \right) \right],$$

где $v \in L_1(T)$, $i = \sqrt{-1}$, называется *характеристическим функционалом* случайного процесса ε .

Отметим, что с помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса, например (см. [1]),

$$\left. \frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)} \right|_{v=0} = iE[\varepsilon(t)], \quad \left. \frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v(t)\delta v(\tau)} \right|_{v=0} = -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)].$$

2.1. *Переход к детерминированной задаче.* Будем считать, что процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b заданы характеристическим функционалом, т.е. считаем известным

$$\psi(v_1, v_2, v_3) = E \left[\exp \left(i \int_T \varepsilon_1(s) v_1(s) ds + i \int_T \varepsilon_2(s) v_2(s) ds + i \int_T \int_{\mathbb{R}} \langle b(s_1, s_2), v_3(s_1, s_2) \rangle ds_2 ds_1 \right) \right].$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в Y . Введем обозначение

$$w = \exp \left(i \int_T \varepsilon_1(s) v_1(s) ds + i \int_T \varepsilon_2(s) v_2(s) ds + i \int_T \int_{\mathbb{R}} \langle b(s_1, s_2), v_3(s_1, s_2) \rangle ds_2 ds_1 \right).$$

Умножим уравнение (1) на w и возьмем математическое ожидание полученного равенства:

$$E \left[\frac{\partial y}{\partial t} w \right] = E \left[\varepsilon_1(t) A \frac{\partial y}{\partial z} w \right] + E [\varepsilon_2(t) y w] + E [b(t, z) w]. \quad (3)$$

Введем обозначение

$$\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3) = E[y(t, z)w].$$

Уравнение (3) (формально) можно записать с помощью $\tilde{y}$. Имеем

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = -iA \frac{\delta_p}{\delta v_1(t)} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} - i \frac{\delta_p}{\delta v_2(t)} \tilde{y} - i \frac{\delta_p \psi}{\delta v_3(t, z)}, \quad (4)$$

где $\delta_p \psi / \delta v_3(t, z)$ — частная вариационная производная по переменной v_3 .

Будем считать, что случайный процесс y_0 не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b . Умножим начальные условие (2) на w и вычислим математическое ожидание полученного равенства:

$$E[y(t_0, z)w] = E[y_0(z)w] = E[y_0(z)]E[w] = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\tilde{y}(t_0, z, v_1, v_2, v_3) = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3). \quad (5)$$

Определение 3. Математическим ожиданием $E[y(t, z)]$ решения задачи Коши (1), (2) называется $\tilde{y}(t, z, 0, 0, 0)$, где $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ решение задачи (4), (5) в некоторой окрестности точки $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$.

Таким образом, для нахождения математического ожидания $E[y(t, z)]$ решения задачи (1), (2) достаточно найти решение $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ не случайной (детерминированной) задачи (4), (5) в малой окрестности точки $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$.

2.2. *Решение уравнения с обычной и вариационной производными.* Пусть $F_z(g(z))(\xi)$ обозначает преобразование Фурье функции g по переменной z (см. [6]):

$$F_z(g(z))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{i\xi z} dz.$$

Применим преобразование Фурье по переменной z к уравнениям (4), (5):

$$\frac{\partial}{\partial t} F_z(\tilde{y}) = -\xi A \frac{\delta_p}{\delta v_1(t)} F_z(\tilde{y}) - i \frac{\delta_p}{\delta v_2(t)} F_z(\tilde{y}) - i F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1, v_2, v_3)}{\delta v_3(t, z)} \right), \quad (6)$$

$$F_z(\tilde{y})(t_0, \xi, v_1, v_2, v_3) = F_z(E[y_0(z)])(\xi) \psi(v_1, v_2, v_3). \quad (7)$$

Пусть $\chi(t_0, t, s)$ — функция переменной $s \in \mathbb{R}$, определенная следующим образом:

$$\chi(t_0, t, s) = \begin{cases} \text{sign}(s - t_0), & s \in [\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В [2] получена явная формула для решения уравнения, содержащего обычную и вариационные производные, с заданным начальным условием.

Теорема 1 (см. [2, теорема 7.3]). Пусть функционал $\psi(v_1, v_2)$ разлагается в ряд

$$\psi(v_1, v_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \dots \int_T \psi_k(s_1, \dots, s_k, v_2) v_1(s_1) \dots v_1(s_k) ds_1 \dots ds_k, \quad \psi_0 = 1,$$

где ψ_k — симметрические по любой паре переменных функции, имеющие вариационные производные по переменной v_2 . Тогда решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_z(\tilde{y}) &= -\xi A \frac{\delta}{\delta v_1(t)} F_z(\tilde{y}) - i F_z \left(\frac{\delta \psi(v_1, v_2)}{\delta v_2(t, z)} \right), \\ F_z(\tilde{y})(t_0, \xi, v_1, v_2) &= F_z(E[y_0(z)])(\xi) \psi(v_1, v_2) \end{aligned}$$

имеет вид

$$F_z(\tilde{y})(t, \xi, v_1, v_2) = F_z(E[y_0])(\xi) \psi(v_1 E - \xi \chi(t_0, t) A, v_2) - i \int_{t_0}^t F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 E - \xi \chi(s, t) A, v_2)}{\delta v_2(s, z)} \right) ds.$$

Полученную в теореме 1 формулу можно обобщить на случай задачи Коши вида (6), (7).

Теорема 2. Пусть функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в ряд

$$\begin{aligned} \psi(v_1, v_2, v_3) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \dots \int_T \psi_{1k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_1(s_1) \dots v_1(s_k) ds_1 \dots ds_k \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \dots \int_T \psi_{2k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_2(s_1) \dots v_2(s_k) ds_1 \dots ds_k, \quad \psi_{10} = 1, \psi_{20} = 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где ψ_{ik} — симметрические по любой паре переменных функции, и имеющие вариационные производные по переменной v_3 . Тогда

$$\begin{aligned} F_z(\tilde{y})(t, \xi, v_1, v_2, v_3) &= \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3) F_z(E[y_0])(\xi) - \\ &- i \int_{t_0}^t F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) ds \end{aligned} \quad (9)$$

является решением задачи (6), (7).

Замечание 1. Характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ будет удовлетворять условию (8), если предположить независимость случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

2.3. Нахождение математического ожидания решения задачи. Для нахождения среднего значения решения задачи (1), (2) нужно найти отображение $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$. Это можно сделать вычислив обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} выражения (9). Поскольку преобразование Фурье от произведения равно свертке преобразований Фурье сомножителей (см. [6, с. 154]), то для детерминированной задачи Коши (4), (5) можно получить явную формулу решения.

Теорема 3. Если характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в степенной ряд вида (8), то

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3) &= F_\xi^{-1} \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3) * E[y_0(z)] - \\ &- i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds \end{aligned} \quad (10)$$

является решением детерминированной задачи (4), (5). Здесь F_ξ^{-1} — обратное преобразование Фурье, $*$ — свертка по переменной z , I — единичный оператор.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$E[y(t, z)] = F_\xi^{-1} \psi \left(-\xi \chi(t_0, t) A, -i \chi(t_0, t), 0 \right) * E[y_0(z)] - \\ - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \psi(-\xi \chi(s, t) A, -i \chi(s, t), 0)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds \quad (11)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

3. Смешанные моментные функции. Формула (10) полезна не только для нахождения математического ожидания $E[y(t, z)]$ решения задачи (1), (2), но и может быть применена для нахождения других моментных функций решения задачи (1), (2). Из определения $\tilde{y}$ следует, что

$$\left. \frac{\delta_p \tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_1(\tau)} \right|_{v_1=v_2=v_3=0} = i E[y(t, z) \varepsilon_1(\tau)], \\ \left. \frac{\delta_p \tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_2(\tau)} \right|_{v_1=v_2=v_3=0} = i E[y(t, z) \varepsilon_2(\tau)], \\ \left. \frac{\delta_p \tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_3(\tau, z)} \right|_{v_1=v_2=v_3=0} = i E[y(t, z) b^T(\tau, z)].$$

Таким образом, смешанные моментные функции может быть найдена из $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ с помощью вариационного дифференцирования.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$E[y(t, z) \varepsilon_1(\tau)] = -i F_\xi^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_1(\tau)} \right) * E[y_0(z)] - \\ - \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_1(\tau) \delta v_3(s, z)} \right) \right) ds. \quad (12)$$

Доказательство. Так как

$$E[y(t, z) \varepsilon_1(\tau)] = -i \frac{\delta_p \tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_1(\tau)} \Big|_{v_1=v_2=v_3=0},$$

то справедливость формулы (12) можно легко установить, если вычислить вариационную производную от $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ по переменной v_1 . $\square$

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$E[y(t, z) \varepsilon_2(\tau)] = -i F_\xi^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_2(\tau)} \right) * E[y_0(z)] - \\ - \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_2(\tau) \delta v_3(s, z)} \right) \right) ds. \quad (13)$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$E[y(t, z)b^T(\tau, z)] = -iF_\xi^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i\chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_3(\tau, z)} \Big|_{v_1=v_2=v_3=0} \right) * E[y_0^T(z)] - \\ - \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t)A, v_2 - i\chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(\tau, z) \delta v_3(s, z)} \Big|_{v_1=v_2=v_3=0} \right) \right) ds. \quad (14)$$

4. Вторая моментная функция. Умножим уравнение (1) на $y^T(\tau, z)w$ и возьмем математическое ожидание полученного равенства

$$E \left[\frac{\partial y(t, z)}{\partial t} y^T(\tau, z)w \right] = \\ = E \left[\varepsilon_1(t)A \frac{\partial y(t, z)}{\partial z} y^T(\tau, z)w \right] + E[\varepsilon_2(t)y(t, z)y^T(\tau, z)w] + E[b(t, z)y^T(\tau, z)w]. \quad (15)$$

Введем обозначение

$$\zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3) = E[y(t, z)y^T(\tau, z)w].$$

Уравнение (15) (формально) можно записать с помощью ζ в виде

$$\frac{\partial \zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3)}{\partial t} = \\ = -iA \frac{\delta_p}{\delta v_1(t)} \frac{\partial \zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3)}{\partial z} - i \frac{\delta_p}{\delta v_2(t)} \zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3) - i \frac{\delta_p \tilde{y}(\tau, z, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_3(t, z)}. \quad (16)$$

Умножим начальное условие (2) на $y^T(t_0, z)w$ и вычислим математическое ожидание полученного равенства, находим

$$E[y(t_0, z)y^T(t_0, z)w] = E[y_0(z)y_0^T(z)w] = E[y_0(z)y_0^T]E[w] = E[y_0(z)y_0^T]\psi(v_1, v_2, v_3);$$

предполагаем, что случайный процесс y_0 не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b . Перепишем последнее равенство в виде

$$\zeta(t_0, t_0, z, v_1, v_2, v_3) = E[y_0(z)y_0^T(z)]\psi(v_1, v_2, v_3). \quad (17)$$

Определение 4. Второй моментной функцией $E[y(t, z)y^T(\tau, z)]$ решения задачи Коши (1), (2) называется величина $\zeta(t, \tau, z, 0, 0, 0)$, где $\zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3)$ — симметричное по переменным t, τ решение уравнения (16), удовлетворяющее условию

$$\zeta(t_0, \tau, z, v_1, v_2, v_3) = E[y(t_0, z)y^T(\tau, z)w]$$

в некоторой окрестности точки $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$.

Запишем уравнение (16) при $\tau = t_0$:

$$\frac{\partial \zeta(t, t_0, z, v_1, v_2, v_3)}{\partial t} = \\ = -iA \frac{\delta_p}{\delta v_1(t)} \frac{\partial \zeta(t, t_0, z, v_1, v_2, v_3)}{\partial z} - i \frac{\delta_p}{\delta v_2(t)} \zeta(t, t_0, z, v_1, v_2, v_3) - i \frac{\delta_p \tilde{y}(t_0, z, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_3(t, z)}. \quad (18)$$

Задача (18), (17) имеет вид задачи (4), (5). Найдём её решение по формуле (10):

$$\zeta(t, t_0, z, v_1, v_2, v_3) = F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i\chi(t_0, t), v_3 \right) * E[y_0(z)y_0^T(z)] - \\ - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \tilde{y}(t_0, z, v_1 I - \xi \chi(s, t)A, v_2 - i\chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds.$$

Так как ζ симметрична по двум первым переменным, то

$$\begin{aligned} \zeta(t_0, \tau, z, v_1, v_2, v_3) = & F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, \tau), v_3 \right) * E[y_0(z) y_0^T(z)] - \\ & - i \int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \tilde{y}(t_0, z, v_1 I - \xi \chi(s, \tau) A, v_2 - i \chi(s, \tau), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Равенство (19) является начальным условием для уравнения (16). Задача (16), (19) имеет вид задачи (4), (5). Найдём её решение по формуле (10):

$$\begin{aligned} \zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3) = & \\ = & F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau), v_3 \right) * E[y_0(z) y_0^T(z)] - \\ & - i \int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \tilde{y}(t_0, z, v_1 I - \xi \chi(t, t_0) A - \xi \chi(s, \tau) A, v_2 - i \chi(t, t_0) - i \chi(s, \tau), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds - \\ & - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \tilde{y}(\tau, z, v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив (10) в (20), получим окончательное представление для решения задачи (16), (19):

$$\begin{aligned} \zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3) = & F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau), v_3 \right) * E[y_0(z) y_0^T(z)] - \\ & - i \int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p}{\delta v_3(s, z)} \left\{ F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau), v_3 \right) * E[y_0(z)] \right\} \right) \right) ds - \\ & - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p}{\delta v_3(s, z)} \left\{ F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(t_0, \tau) - i \chi(s, t), v_3 \right) * E[y_0(z)] - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - i \int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(\sigma, z)} \right) \right) d \right\} \right) \right) ds = \\ = & F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau), v_3 \right) * E[y_0(z) y_0^T(z)] - \\ & - i \int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1} \left(F_z B \left(F_\xi^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) * E[y_0(z)] \right) \right) ds - \\ & - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(F_\xi^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(t_0, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) * E[y_0(z)] \right) \right) ds - \\ & - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1} \left(F_z \left(F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(\sigma, z) \delta v_3(s, z)} \right) \right) \right) \right) d\sigma ds. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (16), (19) задается следующей формулой

$$\begin{aligned} \zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3) = & F_\xi^{-1} \psi \left(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau), v_3 \right) * E[y_0(z) y_0^T(z)] - \\ & - i \int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1} \left(F_z \left(F_\xi^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A, v_2 - i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) \right) * E[y_0(z)] ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \int_{t_0}^t F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(t_0, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) \right) * E[y_0(z)] ds - \\
& - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(\sigma, z) \delta v_3(s, z)} \right) \right) \right) \right) d\sigma ds. \quad (21)
\end{aligned}$$

Отметим, что функция $\zeta(t, \tau, z, v_1, v_2, v_3)$, определяемая формулой (21), симметрична по t и τ .

Теорема 8. Если характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в степенной ряд вида (8) имеет вариационную производную второго порядка по переменной v_3 , то

$$\begin{aligned}
E[y(t, z) y^T(\tau, z)] &= F_{\xi}^{-1} \psi \left(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A, -i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau), 0 \right) * E[y_0(z) y_0^T(z)] - \\
& - i \int_{t_0}^{\tau} F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A, -i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) \right) \Big|_{v_3=0} * E[y_0(z)] ds - \\
& - i \int_{t_0}^t F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(\frac{\delta_p \psi(-\xi \chi(t_0, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, -i \chi(t_0, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) \right) \Big|_{v_3=0} * E[y_0(z)] ds - \\
& - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, -i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(\sigma, z) \delta v_3(s, z)} \right) \right) \right) \right) \Big|_{v_3=0} d\sigma ds \quad (22)
\end{aligned}$$

является второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Согласно определению $E[y(t, z) y^T(\tau, z)] = \zeta(t, \tau, z, 0, 0, 0)$. Подставляя $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ в формулу (21), находим, что $E[y(t, z) y^T(\tau, z)]$ определяется формулой (22). $\square$

5. Случай независимых случайных процессов ε_1 , ε_2 и b . Если процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы, то

$$\psi(v_1, v_2, v_3) = \psi_{\varepsilon_1}(v_1) \psi_{\varepsilon_2}(v_2) \psi_b(v_3),$$

где ψ_{ε_1} , ψ_{ε_2} , ψ_b — характеристические функционалы для ε_1 , ε_2 и b соответственно.

Теорема 9. Если случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы, то

$$\begin{aligned}
E[y(t, z)] &= \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t)) F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A) \right) * E[y_0(z)] + \\
& + \int_{t_0}^t \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t)) F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t) A) \right) * E[b(s, z)] ds \quad (23)
\end{aligned}$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_p \psi(-\xi \chi(s, t) A, -i \chi(s, t), 0)}{\delta v_3(s, z)} &= \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t) A) \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t)) \frac{\delta_p \psi_b(0)}{\delta v_3(s, z)} = \\
& = i \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t) A) \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t)) E[b(s, z)].
\end{aligned}$$

Подставив найденные выражения в формулу (11) и вычислив прямое и обратное преобразования Фурье, получаем формулу (23). $\square$

Замечание 2. Отметим, что для нахождения математического ожидания $E[y(t, z)]$ нужно знать характеристические функционалы процессов ε_1 , ε_2 и только математическое ожидание процесса b .

Теорема 10. Если случайные процессы ε_1 , ε_2 и b независимы, то

$$\begin{aligned} E[y(t, z)\varepsilon_1(\tau)] &= -i\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0, t))F_{\xi}^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}(v_1I - \xi\chi(t_0, t)A)}{\delta v_1(\tau)}\Bigg|_{v_1=0}\right) * E[y_0(z)] - \\ &\quad - i\int_{t_0}^t \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t))F_{\xi}^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}(v_1I - \xi\chi(s, t)A)}{\delta v_1(\tau)}\Bigg|_{v_1=0}\right) * E[b(s, z)]ds \end{aligned} \quad (24)$$

является смешанной моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Вычислим значение вариационных производных входящих в формулу (12) в предположение, что случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_p\psi(v_1I - \xi\chi(t_0, t)A, v_2 - i\chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_1(\tau)}\Bigg|_{v_1=v_2=v_3=0} &= \\ &= \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0, t))\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}(v_1I - \xi\chi(t_0, t)A)}{\delta v_1(\tau)}\Bigg|_{v_1=0} \psi_b(0) = \\ &= \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0, t))\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}(v_1I - \xi\chi(t_0, t)A)}{\delta v_1(\tau)}\Bigg|_{v_1=0}, \\ \frac{\delta_p^2\psi(v_1I - \xi\chi(s, t)A, v_2 - i\chi(s, t), v_3)}{\delta v_1(\tau)\delta v_3(s, z)}\Bigg|_{v_1=v_2=v_3=0} &= \\ &= \frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}(v_1I - \xi\chi(s, t)A)}{\delta v_1(\tau)}\Bigg|_{v_1=0} \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t))\frac{\delta\psi_b(v_3)}{\delta v_3(\tau, z)}\Bigg|_{v_3=0} = \\ &= \frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}(v_1I - \xi\chi(s, t)A)}{\delta v_1(\tau)}\Bigg|_{v_1=0} \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t))E[b(s, z)]. \end{aligned}$$

Подставив найденные выражения в формулу (12) и вычислив прямое и обратное преобразования Фурье, получаем формулу (24). $\square$

Теорема 11. Если случайные процессы ε_1 , ε_2 и b независимы, то

$$\begin{aligned} E[y(t, z)\varepsilon_2(\tau)] &= -i\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(t_0, t))}{\delta v_2(\tau)}\Bigg|_{v_2=0} F_{\xi}^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0, t)A)\right) * E[y_0(z)] - \\ &\quad - i\int_{t_0}^t \frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(s, t))}{\delta v_2(\tau)}\Bigg|_{v_2=0} F_{\xi}^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s, t)A)\right) * E[b(s, z)]ds \end{aligned} \quad (25)$$

является смешанной моментной функцией решения задачи (1), (2).

Теорема 11 доказывается аналогично теореме 10.

Теорема 12. Если случайные процессы ε_1 , ε_2 и b независимы, то

$$\begin{aligned} E[y(t, z)b^T(\tau, z)] &= \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0, t))F_{\xi}^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0, t)A)\right)E[b(s, z)] * E[y_0^T(z)] + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t))F_{\xi}^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s, t)A)\right) * E[b(s, z)b^T(\tau, z)]ds \end{aligned} \quad (26)$$

является смешанной моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Вычислим значения вариационных производных, входящих в формулу (14), в предположении, что случайные процессы ε_1 , ε_2 и b независимы:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_3(\tau, z)} \right|_{v_1=v_2=v_3=0} &= i \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t)) \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A) E[b(\tau, z)], \\ \left. \frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(\tau, z) \delta v_3(s, z)} \right|_{v_1=v_2=v_3=0} &= -\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t)) \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t) A) E[b(s, z) b^T(\tau, z)]. \end{aligned}$$

Подставив найденные выражения в формулу (14) и вычислив прямое и обратное преобразования Фурье, получаем формулу (26). $\square$

Теорема 13. Если случайные процессы ε_1 , ε_2 и b независимы, то

$$\begin{aligned} E[y(t, z) y^T(\tau, z)] &= \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau)) F_{\xi}^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A)) * E[y_0(z) y_0^T(z)] + \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \left\{ \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau)) F_{\xi}^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A)) E[b(s, z)] * E[y_0(z)] \right\} ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \left\{ \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, \tau) - i \chi(s, t)) F_{\xi}^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, \tau) A - \xi \chi(s, t) A)) E[b(s, z)] * E[y_0(z)] \right\} ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t)) F_{\xi}^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A)) * E[b(s, z) b^T(\sigma, z)] d\sigma ds \quad (27) \end{aligned}$$

является второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} F_{\xi}^{-1} \psi(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A, -i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau), 0) &= \\ &= \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(t_0, \tau)) F_{\xi}^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(t_0, \tau) A)) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(\left. \frac{\delta_p \psi(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A, -i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right|_{v_3=0} \right) \right) \right) &= \\ &= i F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A) \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau)) E[b(s, z)] \right) \right) \right) = \\ &= i F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau)) E[b(s, z)] F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A) \right) \right) \right) = \\ &= i F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau)) F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A) \right) E[b(s, z)] \right) \right) = \\ &= \frac{i}{2\pi} F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau)) \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A) * F_z(E[b(s, z)]) \right) = \\ &= i \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t) - i \chi(s, \tau)) F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A - \xi \chi(s, \tau) A) \right) E[b(s, z)], \end{aligned}$$

преобразуя последнее подынтегральное выражение, получаем

$$\begin{aligned}
& F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A, -i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(\sigma, z) \delta v_3(s, z)} \Big|_{v_3=0} \right) \right) \right) \right) = \\
& = -F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1} \left(F_z(\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t))) \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A) E[b(s, z) b^T(\sigma, z)] \right) \right) \right) = \\
& = -F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(F_{\xi}^{-1}(\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t))) \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A) F_z(E[b(s, z) b^T(\sigma, z)]) \right) \right) = \\
& = -F_{\xi}^{-1} \left(F_z \left(\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t)) F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A) \right) * E[b(s, z) b^T(\sigma, z)] \right) \right) = \\
& = -F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t)) \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A) F_z(E[b(s, z) b^T(\sigma, z)]) \right) = \\
& = -\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(\sigma, \tau) - i \chi(s, t)) F_{\xi}^{-1} \left(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(\sigma, \tau) A - \xi \chi(s, t) A) \right) * E[b(s, z) b^T(\sigma, z)].
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (22), получаем вторую моментную функцию (27) для независимых случайных процессов ε_1 , ε_2 и b . $\square$

Замечание 3. Отметим, что для нахождения второй моментной функции $E[y(t, z) y^T(\tau, z)]$ нужно знать характеристические функционалы процессов ε_1 , ε_2 и только математическое ожидание и вторую моментную функцию процесса b .

6. Частные случаи. Рассмотрим задачу (1), (2) с гауссовскими случайными процессами ε_1 , ε_2 , заданными характеристическими функционалами

$$\psi_{\varepsilon_k}(v_k) = \exp \left(i \int_T E[\varepsilon_k(s)] v_k(s) ds - \frac{1}{2} \int_T \int_T b_k(s_1, s_2) v_k(s_1) v_k(s_2) ds_1 ds_2 \right), \quad k = 1, 2, \quad (28)$$

где $b_k(s_1, s_2) = E[\varepsilon_k(s_1) \varepsilon_k(s_2)] - E[\varepsilon_k(s_1)] E[\varepsilon_k(s_2)]$, $k = 1, 2$, — ковариационные функции случайных процессов ε_1 и ε_2 соответственно, и независимым с ε_1 и ε_2 случайным процессом b .

Теорема 14. Пусть в задаче (1), (2) случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы характеристическими функционалами (28) и не зависят от случайного процесса b . Тогда

$$\begin{aligned}
E[y(t, z) \varepsilon_1(\tau)] & = -i \exp \left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon_2(s)] ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \\
& \times F_{\xi}^{-1} \left(\exp \left(-i \xi \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(s)] A ds - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \times \right. \\
& \times \left. \left(i E[\varepsilon_1(\tau)] I + \xi \int_{t_0}^t b_1(\tau, s) A ds \right) \right) * E[y_0(z)] - \\
& - i \int_{t_0}^t \left\{ \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \right. \\
& \times F_{\xi}^{-1} \left(\exp \left(-i \xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \times \right. \\
& \times \left. \left. \left(i E[\varepsilon_1(\tau)] I + \xi \int_s^t b_1(\tau, s_1) A ds_1 \right) \right) * E[b(s, z)] \right\} ds \quad (29)
\end{aligned}$$

является смешанной моментной функцией решения этой задачи.

Доказательство. Выпишем $\psi_{\varepsilon_1}(v_1 I - \xi \chi(s, t) A)$ для гауссовского процесса, используя определение функции $\chi(s, t)$:

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon_1}(v_1 I - \xi \chi(s, t) A) = \exp & \left(i \int_T^t E[\varepsilon_1(\sigma)] v_1(\sigma) I d\sigma - i \xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_T^t \int_T^t b_1(s_1, s_2) v_1(s_1) v_1(s_2) ds_1 ds_2 I + \frac{1}{2} \xi \int_s^t \int_T^t b_1(s_1, s_2) v_1(s_1) A ds_1 ds_2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} \xi \int_T^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) v_1(s_2) A ds_1 ds_2 - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta_p \psi_{\varepsilon_1}(v_1 I - \xi \chi(s, t) A)}{\delta v_1(\tau)} \Big|_{v_1=0} &= \exp \left(-i \xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \times \\ &\times \left[i E[\varepsilon_1(\tau)] I - \int_T^t b_1(s_1, \tau) v_1(s_1) I ds_1 + \frac{1}{2} \xi \int_s^t b_1(\tau, s_2) A ds_2 + \frac{1}{2} \xi \int_s^t b_1(s_1, \tau) A ds_1 \right] \Big|_{v_1=0}. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $b_1(s_1, s_2)$ симметрична, окончательно получаем выражение

$$\exp \left(-i \xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \left[i E[\varepsilon_1(\tau)] I + \xi \int_s^t b_1(\tau, s_2) A ds_2 \right].$$

Выпишем $\psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t))$ для гауссовского процесса, используя определение функции $\chi(s, t)$:

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t)) &= \exp \left(i \int_T^t E[\varepsilon_2(\sigma)] (-i \chi(s, t)) d\sigma - \frac{1}{2} \int_T^t \int_T^t b_2(s_1, s_2) (-i \chi(s, t)) (-i \chi(s, t)) ds_1 ds_2 \right) = \\ &= \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (24), получаем формулу (29). $\square$

Теорема 15. Пусть в задаче (1), (2) случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы характеристическими функционалами (28) и не зависят от случайного процесса b . Тогда

$$\begin{aligned} E[y(t, z) \varepsilon_2(\tau)] &= -i \exp \left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon_2(s)] ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \left\{ i E[\varepsilon_2(\tau)] + i \int_{t_0}^t b_2(\tau, s) ds \right\} \times \\ &\times F_{\xi}^{-1} \left(\exp \left(-i \xi \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(s)] A ds - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) * E[y_0(z)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \int_{t_0}^t \left\{ \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \left[iE[\varepsilon_2(\tau)] + i \int_s^t b_2(\tau, s_2) ds_2 \right] \times \right. \\
& \quad \left. \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) * E[b(s, z)] \right\} ds \quad (30)
\end{aligned}$$

является смешанной моментной функцией решения этой задачи.

Доказательство. Выпишем $\psi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(s, t))$ для гауссовского процесса, используя определение функции $\chi(s, t)$:

$$\begin{aligned}
\psi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(s, t)) &= \exp \left(i \int_T^t E[\varepsilon_2(\sigma)] v_2(\sigma) d\sigma + \int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma - \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_T^t \int_T^t b_2(s_1, s_2) v_2(s_1) v_2(s_2) ds_1 ds_2 + \frac{i}{2} \int_T^t \int_T^t b_2(s_1, s_2) v_2(s_1) ds_1 ds_2 + \\
& \quad \left. + \frac{i}{2} \int_T^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) v_2(s_2) ds_1 ds_2 + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta_p \psi_{\varepsilon_2}(v_2 - i\chi(s, t))}{\delta v_2(\tau)} \right|_{v_2=0} &= \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \\
& \times \left[iE[\varepsilon_2(\tau)] - \int_T^t b_2(s_1, \tau) v_2(s_1) ds_1 + \frac{i}{2} \int_s^t b_2(\tau, s_2) ds_2 + \frac{i}{2} \int_s^t b_2(s_1, \tau) ds_1 \right] \Big|_{v_2=0}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что функция $b_2(s_1, s_2)$ симметрична, окончательно получаем выражение

$$\exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \left[iE[\varepsilon_2(\tau)] + i \int_s^t b_2(\tau, s_2) ds_2 \right].$$

Характеристический функционал $\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s, t)A)$ для гауссовского процесса имеет вид

$$\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s, t)A) = \exp \left(-i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right).$$

Подставляя эти выражения в (25), получаем формулу (30). $\square$

Теорема 16. Пусть в задаче (1), (2) случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы характеристическими функционалами (28) и не зависят от случайного процесса b . Тогда

$$\begin{aligned}
E[y(t, z) b^T(\tau, z)] &= \exp \left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon_2(s)] ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \\
& \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(s)] A ds - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) E[b(\tau, z)] * E[y_0^T(z)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \left\{ \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) * E[b(s, z) b^T(\tau, z)] \right\} ds
\end{aligned}$$

является смешанной моментной функцией решения этой задачи.

Теорема 16 доказывается по аналогии с предыдущей теоремой.

Теорема 17. Пусть в задаче (1), (2) случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы характеристическими функционалами (28) и не зависят от случайного процесса b . Тогда

$$\begin{aligned}
& E[y(t, z) y^T(\tau, z)] = \\
& = \exp \left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon_2(s)] ds + \int_{t_0}^\tau E[\varepsilon_2(s)] ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^\tau \int_{t_0}^\tau b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \\
& \quad \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(s)] A ds - i\xi \int_{t_0}^\tau E[\varepsilon_1(s)] A ds - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^\tau \int_{t_0}^\tau b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) * E[y_0(z) y_0^T(z)] + \\
& + \int_{t_0}^\tau \left\{ \exp \left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \int_s^\tau E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \frac{1}{2} \int_s^\tau \int_s^\tau b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \right. \\
& \quad \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - i\xi \int_s^\tau E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^\tau \int_s^\tau b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) E[b(s, z)] * E[y_0(z)] \right\} ds + \\
& + \int_{t_0}^t \left\{ \exp \left(\int_{t_0}^\tau E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \int_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)] d\sigma + \frac{1}{2} \int_{t_0}^\tau \int_{t_0}^\tau b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \right. \\
& \quad \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^\tau E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] A d\sigma - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^\tau \int_{t_0}^\tau b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) E[b(s, z)] * E[y_0(z)] \right\} ds + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^\tau \left\{ \exp \left(\int_\sigma^\tau E[\varepsilon_2(s_2)] ds_2 + \int_s^t E[\varepsilon_2(s_2)] ds_2 + \frac{1}{2} \int_\sigma^\tau \int_\sigma^\tau b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \Big) F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_\sigma^\tau E[\varepsilon_1(s_1)] A ds_1 - i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(s_1)] A ds_1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \xi^2 \int_\sigma^\tau \int_\sigma^\tau b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) * E[b(s, z) b^T(\sigma, z)] \Big\} d\sigma ds
\end{aligned}$$

является второй моментной функцией решения этой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
2. *Задорожний В. Г., Кабанцова Л. Ю.* О решении линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Совр. мат. Фундам. напр. — 2021. — 67, № 3. — С. 549–563.
3. *Задорожний В. Г., Коновалова М. А.* Мультипликативно возмущенное случайным шумом дифференциальное уравнение в банаховом пространстве // Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63, № 4. — С. 599–614.
4. *Задорожний В. Г., Тихомиров Г. С.* О системе дифференциальных уравнений со случайными параметрами // Совр. мат. Фундам. напр. — 2022. — 68, № 4. — С. 621–634.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1970.
6. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Физматлит, 1965.
7. *Zadorozhniy V. G., Semenov M. E., Selavesyuk N. T., Ulshin I. I., Nozhkin V. S.* Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model // Math. Mod. Comp. Simul. — 2021. — 13, № 1. — P. 11–25.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кабанцова Лариса Юрьевна
Воронежский государственный университет
E-mail: dljuv@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 68–73
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-68-73

УДК 517.98

ФОРМУЛЫ ГРИНА ДЛЯ Δ_B -ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА В ВЕСОВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ

© 2024 г. Л. Н. ЛЯХОВ, Ю. Н. БУЛАТОВ

Посвящается 100-летию со дня рождения профессора И. А. Киприянова

Аннотация. Для сингулярного дифференциального оператора Киприянова в евклидовом n -полупространстве получена общая формула Грина и две формулы Грина, отвечающие специальным значениям параметра.

Ключевые слова: оператор Бесселя, оператор Киприянова, ограниченная область с границей Киприянова, весовая линейная форма, формула Грина.

GREEN'S FORMULAS FOR THE KIPRIYANOV Δ_B -OPERATOR IN THE WEIGHTED LINEAR FORM

© 2024 L. N. LYAKHOV, Yu. N. BULATOV

Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor I. A. Kipriyanov

ABSTRACT. For the Kipriyanov singular differential operator in the Euclidean n -half-space, the general Green formula and two its particular cases corresponding to special values of the parameter are obtained.

Keywords and phrases: Bessel operator, Kipriyanov operator, bounded domain with Kipriyanov boundary, weighted linear form, Green's formula.

AMS Subject Classification: 35J08

1. Введение. Обычно для Δ_B -оператора Лапласа–Бесселя в евклидовом пространстве точек $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i \geq 0,$$

соответствующая весовая линейная форма сопровождается степенным весом $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$ (см. книгу [1]

и имеющиеся в ней многочисленные ссылки). И. А. Киприянов в начале 1980-х годов на научном семинаре в Воронежском государственном университете поставил задачу об исследовании подобных операторов с отрицательными показателями степенного веса. Оказалось, что оператор Бесселя $B_{-\gamma}$ с отрицательным параметром $-1 < -\gamma < 0$ обладает рядом особенностей, отмеченных в [2–4]. В частности, при $1 < -\gamma < 0$ фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ необходимо искать в билинейной форме с весом, уже отличным от $x^{-\gamma}$. Более общие параметры операторов Бесселя приводят к необходимости исследовать операторы Киприянова в весовых линейных формах с весом $\prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}$, где ω — мультииндекс с произвольными действительными координатами.

Через $\mathbb{R}_n$ будем обозначать евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, а через $\mathbb{R}_n^+$ — n -полупространство, определенное неравенствами $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $-\gamma = -(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ —

мультииндекс с отрицательными дробными параметрами $-1 < -\gamma_i < 0$. Следуя [4], будем называть Δ_B -оператором Киприянова сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B-\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}, \quad (1)$$

отрицательный параметр которого удовлетворяет неравенству $0 > -\gamma > -1$. Оператор (1), как и любой оператор Бесселя, целесообразно применять к функциям, четным по каждой координате своего аргумента, так как в этом случае

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{1}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left. \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right|_{x_i=0}.$$

Пусть $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i > 0\}$. Учитывая особенность операторов Бесселя, далее полагаем, что область Ω^+ прилегает к сингулярным координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, оператора Δ_B . Тогда граница области Ω^+ состоит из двух частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^0 \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. Область $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ получена объединением Ω^+ со своими зеркальными отражениями от координатных гиперплоскостей $x_i = 0$. Граница Γ области Ω предполагается гладкой в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^0$ (условие гладкости границы И. А. Киприянова; см. [1, § 3.1]). Это условие также предполагает, что рассматриваемые функции в области Ω^+ должны иметь гладкое четное продолжение через границу Γ^0 по отношению к каждой координате x_i . В связи с этим вводим следующее определение.

Определение 1. Функцию $f = f(x)$, определенную в n -полупространстве $\mathbb{R}_n^+$, будем называть n -четной (по Киприянову), если она допускает четное продолжение по каждой координате x_i своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности.

В частности, если $u \in C^k(x_i \in [0, \infty))$, то u — i -четная функция, если все её производные по x_i нечетного порядка $l \leq k$ равны нулю при $x_i = 0$. Такое определение четности введено И. А. Киприяновым (см. [1, с. 21]). В связи с этим функции, удовлетворяющие определению 1, принято называть *четными по Киприянову*.

Из определения 1 вытекает, что каждую из областей Ω^+ и Ω^- , как правило, удобно считать частично замкнутыми, т.е. считать границу Γ^0 границей симметрии и, поэтому полагаем $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ и $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$. Точки, принадлежащие $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ или $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$, будем называть s -внутренними. Аналогично, подобласть $\Omega_*^+ = \Omega_*^+ \cup \Gamma_*^0$ области Ω^+ с возможно общей границей $\Gamma_*^0 \subset \Gamma^0$ будем называть s -подобластью области Ω^+ . Это же касается и соответствующей подобласти области Ω^- .

2. Оператор Δ_B в весовой линейной форме. Пусть u и v — n -четные функции, принадлежащие классу функций $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$.

Через $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ обозначим n -мультииндекс, состоящий из произвольных действительных чисел. Введем весовую билинейную форму, в рамках которой сингулярный дифференциальный Δ_B -оператор Киприянова может не совпадать со своим сопряжением, т.е. не является самосопряженным по Лангранжу (эрмитовым). Рассмотрим весовую билинейную форму следующего вида:

$$(u, v)_\omega = \int_{\Omega_n^+} u(x) v(x) x^\omega dx, \quad x^\omega = \prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}. \quad (2)$$

Дополнительно введем класс функций, соответствующим образом убывающих на границе Γ_0 . Именно, обозначим через

$$\mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma = \mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma(\Omega^+) = C_{\text{ev}}^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$$

и положим

$$\varphi \in \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega}^\gamma = \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega}^\gamma(\Omega^+) = C_{\text{ev}, \omega}^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+}), \quad \text{если } x_i^{\omega_i} \varphi(x) = O(x_i), \quad x_i \rightarrow +0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Введем обозначение

$$\sum_{i=1}^n \left[B_{\gamma_i + 2\omega_i} + \frac{(\gamma_i + \omega_i)(\omega_i - 1)}{x_i^2} \right] = \Delta_{B_{\gamma+2\omega}} + \frac{(\gamma + \omega)(\gamma + \omega_0)}{x^2},$$

где $\omega_0 = (1, \dots, 1)$.

Теорема 1 (общая K_γ -формула Грина). Пусть весовая линейная форма определена равенством (2) и пусть $\gamma_i \in (0, 1)$, ω_i — произвольные действительные числа, $i = \overline{1, n}$. Тогда для всех функций $u(x) \in \mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma(\Omega^+)$ и $v(x) \in \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega}^\gamma(\Omega^+)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega - \left(u, \left[\Delta_{B_{\gamma+2\omega}} + \frac{(\gamma + \omega)(\omega - 1)}{x^2} \right] v \right)_\omega = \\ = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{\nu}$ — направление внешней нормали к части границы Γ^+ .

Доказательство. Сингулярные операторы Бесселя рассмотрим в дивергентной форме:

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i} = \sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Возьмем произвольную область Ω_*^+ с кусочно гладкой границей, строго s -внутреннюю в области Ω^+ . В этом случае обе функции u и v принадлежат $C_{\text{ev}}^2(\Omega_*^+)$. Исходное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega = \int_{\Omega_*^+} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) v(x) x^\omega dx = \\ = \int_{\Omega_*^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) v(x) x_i^{\omega_i + \gamma_i} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x_j^{\omega_j} dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega = \int_{\Gamma_*^+ \cup \Gamma_*^0} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) x_i^{\omega_i} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x_j^{\omega_j} d\Gamma - \\ - \int_{\Omega_*^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{\omega_i} + v(x) (\omega_i + \gamma_i) x_i^{\omega_i - 1} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x_j^{\omega_j} dx, \end{aligned}$$

где ν — направление внешней нормали к границе $\Gamma_*^+ \cup \Gamma_*^0$. Применяя формулу интегрирования по частям второй раз, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_*^+} \left(\sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i} u(x) \right) v(x) x^\omega dx = \\ = \int_{\Gamma_*^+ \cup \Gamma_*^0} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma + \\ + \int_{\Omega_*^+} u(x) \left(\sum_{i=1}^n \left[B_{\gamma_i + 2\omega_i} + \frac{(\gamma_i + \omega_i)(\omega_i - 1)}{x_i^2} \right] v(x) \right) x^\omega dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Учтем, что в (5) участок границы Γ^0 состоит из соответствующих кусков координатных плоскостей $x_i = 0$. Поэтому на части границы Γ_*^0 направление нормали ν совпадает с соответствующим направлением оси Ox_i . Интеграл по Γ^0 представляет собой набор интегралов по каждой такой

части границы, заданной уравнением $x_i = 0$, которую обозначим $\Gamma_*^{0,i}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_*^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_*^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0. \end{aligned}$$

При условии принадлежности функций v функциональному классу $\mathcal{M}_{\text{ev},\omega}^\gamma$ (см. (3)) все интегралы по $\Gamma_*^{0,i}$ исчезнут. Поэтому

$$\int_{\Gamma_*^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = 0.$$

Устремляя в полученном равенстве Ω_*^+ к Ω^+ и учитывая непрерывность функций $\partial u/\partial \bar{v}$ и $\partial v/\partial \bar{v}$ в $\bar{\Omega}^+$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Из равенств (5) и (6) равенство (4) вытекает с очевидностью. Доказательство закончено. $\square$

3. Формулы Грина для оператора Киприянова. Равенство (4) будем называть *общей $K_{-\gamma}$ -формулой Грина* для $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператора Киприянова.

Наиболее употребительными при исследовании уравнений с $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператором Киприянова (1) оказываются формулы, полученные из (4) при совпадении мультииндексов весовой билинейной формы (2) с параметрами операторов Бесселя, входящих в оператор Киприянова (1), т.е. $\omega = -\gamma$; если мультииндекс билинейной формы (2) ω состоит из единиц, т.е. $\omega = \omega_0 = (1, \dots, 1)$ (см. [2, 3]). В этих случаях из (4) получим две формулы, которые будем называть *первой и второй основными $K_{-\gamma}$ -формулами Грина* для оператора Киприянова.

Первая основная $K_{-\gamma}$ -формула Грина. Пусть мультииндексы ω и γ совпадают: $\omega_i = -\gamma_i$, $i = \overline{1, n}$, и пусть $u \in C_{\text{ev}}^2(\Omega^+)$ и $v \in C_{\text{ev}}^2(\Omega^+)$. Тогда

$$(\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega - (u, \Delta_{B_{-\gamma}} v)_{-\gamma} = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{v}} \right) x^{-\gamma} d\Gamma. \quad (7)$$

Доказательство. Равенство (7) вытекает из общей формулы (4), если в ней положить $\omega_i = -\gamma_i$. Остается проверить его справедливость при условии, что $u, v \in C_{\text{ev}}^2(\Omega^+)$. Для этого вернемся к равенству (6), правая часть которого при $\omega = -\gamma$ примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x^{-\gamma_j} d\Gamma^{0,i}, \quad (8)$$

где $\Gamma^{0,i}$ — соответствующий участок границы области Ω^+ , уравнение которого $x_i = 0$. Напомним, что в силу естественных причин, связанных с симметрией, область Ω^+ мы считаем частично замкнутой, т.е. $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$. Это означает, что рассматриваемые функции непрерывно дифференцируемы в окрестности каждого участка $\Gamma^{0,i}$ границы Γ^0 . Из x_i -четности этих функций вытекают неравенства

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = O(x_i) \text{ при } x_i \rightarrow 0; \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = O(x_i) \text{ при } x_i \rightarrow 0. \quad (9)$$

Отсюда, учитывая, что $0 < \gamma_i < 1$, получим

$$\lim_{x_i \rightarrow +0} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0, \quad \lim_{x_i \rightarrow +0} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = 0.$$

Следовательно, каждое слагаемое в сумме (8)

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \Big|_{\Gamma^{0,i}} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x^{-\gamma_j} d\Gamma^{0,i} = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x^{-\gamma_j} d\Gamma^{0,i} = 0, \end{aligned}$$

Равенство (7) доказано. $\square$

Из формулы (7) вытекают важные для приложений следствия (см. также [3], где рассматривался только случай $\omega_i = -\gamma_i$).

1. Пусть в (7) $u = v$; тогда

$$\int_{\Omega^+} (\Delta_{B_{-\gamma}} u) u x^\omega dx = \int_{\Omega^+} u \Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx.$$

2. Если в (7) $v = 1$, то

$$\int_{\Omega^+} \Delta_{B_{-\gamma}} u x^\omega dx = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma.$$

3. Условием K_γ -гармоничности функции $u = u(x)$ в области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ является равенство

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma = 0.$$

Вторая основная $K_{-\gamma}$ -формула Грина Пусть $\omega = \omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$ и

$$u \in \mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma, \quad v \in \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega_0}^\gamma. \quad (10)$$

Тогда

$$(\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega (u, \Delta_{B_{\gamma+2}} v)_{\omega_0} = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma, \quad (11)$$

где $\omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$.

Доказательство. Равенство (11) вытекает также из общей формулы (4), если положить $\omega_i = 1$. Остается проверить его справедливость при условии (10). Для этого вернемся к равенству (6), правая часть которого при $\omega = \omega_0$ примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - u(x) v(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma. \quad (12)$$

Первые два слагаемых в правой части равенства (12) равны нулю по причине выполнения условий (9). Равенство нулю третьего слагаемого в (12) есть следствие требования (10). Следовательно,

$$\int_{\Gamma^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - u(x) v(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma = 0. \quad \square$$

Из формулы (11) вытекают следующие результаты.

1. Пусть $\omega = \omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$ и $u = v$ в (11). Тогда

$$\int_{\Omega^+} (\Delta_{B-\gamma} u) u x^\omega dx - \int_{\Omega^+} u \Delta_{B_{\gamma+2}} u x^{\omega_0} dx = - \int_{\Gamma^+} \sum_{i=1}^n u^2(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} x^{\omega_0} d\Gamma.$$

2. Пусть $\omega = \omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$ и $v = 1$ в (11). Тогда

$$\int_{\Omega^+} \Delta_{B-\gamma} u x^\omega dx = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - \sum_{i=1}^n u(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma. \quad (13)$$

3. Условием K_γ -гармоничности функции $u = u(x)$ в области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ является равенство

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} x^{-\gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma^+} \sum_{i=1}^n u(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} x^{\omega_0} d\Gamma, \quad (14)$$

которое выполняется в любой s -внутренней (симметрично внутренней, см. введение) подобласти Ω_*^+ области Ω^+ .

Доказательство. Действительно, если функция u является K_γ -гармонической, то равенство (14) непосредственно следует из (13). Напротив, пусть в каждой внутренней s -подобласти Ω_*^+ области Ω^+ выполняется (14). Тогда из (13) вытекает, что равенство

$$\int_{\Omega_*^+} \Delta_{B-\gamma} u x^\omega dx = 0$$

выполняется в любой подобласти области Ω^+ , что возможно лишь в случае, когда $\Delta_{B-\gamma} u(x) = 0$ в любой точке x области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
2. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Роцункин С. А., Санина Е. Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 12. — С. 1654–1665.
3. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Роцункин С. А., Санина Е. Л. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова // Диффер. уравн. — 2023. — 59, № 4. — С. 483–493.
4. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Диффер. уравн. — 2020. — 56, № 12. — С. 1610–1620.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ляхов Лев Николаевич

Воронежский государственный университет;

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина;

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: levnya@mail.ru

Булатов Юрий Николаевич

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

E-mail: y.bulatov@bk.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2023). С. 74–82
DOI: 10.36535/2782-4438-2023-231-74-82

УДК 512.54, 517.958

УЧЕТ СИММЕТРИИ В МЕТОДЕ РИТЦА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА В КРИСТАЛЛАХ С БАЗИСОМ

© 2023 г. Н. Б. МЕЛЬНИКОВ, Б. И. РЕЗЕР

Аннотация. Работа посвящена учету симметрии в уравнении Шрёдингера с периодическим потенциалом для кристаллов с базисом. Представлен общий теоретико-групповой подход, который дает матричные элементы гамильтониана в приближении сильной связи, используя пространственную симметрию задачи, симметрию обращения времени и эрмитовость гамильтониана. Построенная математическая теория обобщает известный результат для кристаллов с двумя атомами в элементарной ячейке на случай кристаллов с несколькими атомами в элементарной ячейке.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, периодический потенциал, метод Ритца, кристаллическая решетка, пространственная группа, теория представлений.

TREATMENT OF SYMMETRY IN THE RITZ METHOD FOR THE SCHRÖDINGER EQUATION IN CRYSTALS WITH A BASIS

© 2023 N. B. MELNIKOV, B. I. RESER

ABSTRACT. This paper is devoted to treatment of symmetry in the Schrödinger equation with a periodic potential for crystals with a basis. We present a general group-theoretical approach, which yields the matrix elements of the Hamiltonian in the tight-binding approximation, using the spatial symmetry of the problem, time reversal symmetry, and the Hermitian property of the Hamiltonian. The developed mathematical theory generalizes the well-known result for crystals with two atoms in the unit cell to the case of crystals with several atoms in the unit cell.

Keywords and phrases: Schrödinger equation, periodic potential, Ritz method, crystal lattice, space group, representation theory.

AMS Subject Classification: 20C35, 81Q05

1. Введение. Электронный спектр в кристаллах получается из уравнения Шрёдингера с периодическим потенциалом [1, 10]. Наиболее распространенным методом вычисления приближенного решения является метод Ритца, в котором решение аппроксимируется линейной комбинацией координатных функций. Метод Ритца, использующий в качестве координатных функций линейные комбинации атомных орбиталей, называется методом сильной связи.

Для кристаллов с двумя атомами в элементарной ячейке общий теоретико-групповой подход, который позволяет вычислять матричные элементы гамильтониана в методе сильной связи, был

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Электрон», номер госрегистрации 122021000039-4).

разработан в [4]. Этот метод изложен в книгах [3, 5, 6, 8] и применяется для создания программного обеспечения (см., напр., [6, 12]). В методе используется пространственная симметрия задачи, симметрия обращения времени и эрмитовость гамильтониана; он годится для любой кристаллической структуры, для любого набора атомных волновых функций, как с учетом спина, так и без учета спина.

В настоящей работе дано математическое описание метода учета симметрии, обобщающего метод [4] на случай кристаллов с несколькими атомами в элементарной ячейке. Для простоты изложения рассматривается случай без учета спина. Метод иллюстрируется на примере квазидвумерных дихалькогенидов переходных металлов с кристаллической структурой типа $2H\text{-TaSe}_2$, которые имеют шесть атомов в элементарной ячейке (физические приложения см. в [9]).

Работа организована следующим образом. В разделе 2 изложена постановка задачи. В разделе 3 приведены необходимые сведения, касающиеся приложений теории представлений в квантовой механике, и получены соотношения симметрии между матричными элементами гамильтониана сильной связи. В разделе 4 описанный метод учета симметрии иллюстрируется на примере.

2. Математическая постановка задачи. Стационарное уравнение Шрёдингера

$$-\Delta\psi + V\psi = \varepsilon\psi \quad (1)$$

представляет собой задачу на собственные значения, которая описывает возможные состояния электрона: энергию ε (собственное значение) и волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$ (собственную функцию)¹. Рассматривается твердое тело, обладающее кристаллической структурой. Это означает, что электрон находится в поле периодического потенциала $V(\mathbf{r})$, обладающего периодичностью решетки:

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{R}_p) = V(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{R}_p$ — произвольный вектор кристаллической решетки:

$$\mathbf{R}_p = p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + p_3\mathbf{a}_3,$$

где $\mathbf{a}_i$ — базисные векторы решетки, p_i — целые числа (подробнее см., напр., [1, 10]).

Определение ряда Фурье для функции периодической на решетке требует понятия обратной решетки по отношению к исходной (прямой) решетке с узлами $\mathbf{R}_p$. Узлы обратной решетки

$$\mathbf{K}_\mu = \mu_1\mathbf{b}_1 + \mu_2\mathbf{b}_2 + \mu_3\mathbf{b}_3,$$

где $\mathbf{b}_i$ — базисные векторы обратной решетки, μ_i — целые числа, определяются соотношением

$$e^{i\mathbf{K}_\mu\mathbf{R}_p} = 1.$$

Это означает, что $e^{i\mathbf{K}_\mu\mathbf{r}}$ — периодическая функция на решетке:

$$e^{i\mathbf{K}_\mu(\mathbf{r} + \mathbf{R}_p)} = e^{i\mathbf{K}_\mu\mathbf{r}}.$$

Следовательно, любая функция, периодическая на решетке,

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{R}_p) = f(\mathbf{r}),$$

может быть представлена рядом Фурье вида

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} c_{\mu} e^{i\mathbf{K}_{\mu}\mathbf{r}}.$$

В бесконечном кристалле естественно требовать, чтобы волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ и ее первые производные были непрерывны и ограничены во всем евклидовом пространстве². В этом случае из периодичности потенциала (2) следует теорема Блоха:

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_p) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

¹Здесь и далее используются атомные единицы: $\hbar^2/2m = 1$, а энергия дана в ридбергах. Жирные буквы обозначают векторы в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, как принято в физической литературе.

²Уточнения, которые необходимы, если потенциал становится бесконечным в некоторой точке или имеет поверхность разрыва, можно найти в [2, 11].

где n — индекс (энергетической) полосы, а $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Периодическая функция $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ разлагается в ряд Фурье

$$u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} c_{\mu}^{(n)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{K}_{\mu}\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{K}_{\mu}$ — вектор обратной решетки. Нетрудно показать, что волновая функция

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} c_{\mu}^{(n)}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{K}_{\mu})\mathbf{r}}$$

и энергия $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ суть периодические функции волнового вектора¹:

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \psi_{n,\mathbf{k}+\mathbf{K}_{\mu}}(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_n(\mathbf{k}) = \varepsilon_n(\mathbf{k} + \mathbf{K}_{\mu}).$$

Поэтому вектор $\mathbf{k}$ достаточно рассматривать в элементарной ячейке обратной решетки, симметричной относительно начала координат (зоне Бриллюэна).

Как правило, рассматривается кристалл большого, но *конечного* объема. Это позволяет использовать теорию представлений конечных групп. На границе кристалла накладывают циклические граничные условия Борна—Кармана:

$$\psi(\mathbf{r} + N_1\mathbf{a}_1) = \psi(\mathbf{r} + N_2\mathbf{a}_2) = \psi(\mathbf{r} + N_3\mathbf{a}_3) = \psi(\mathbf{r}).$$

Это приводит к тому, что волновой вектор принимает конечное число значений

$$\mathbf{k} = \frac{k_1}{N_1}\mathbf{b}_1 + \frac{k_2}{N_2}\mathbf{b}_2 + \frac{k_3}{N_3}\mathbf{b}_3, \quad 0 \leq k_i \leq (N_i - 1) — \text{целые}.$$

Число значений волнового вектора $N = N_1N_2N_3$ считается достаточно большим, поэтому дискретный спектр $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ называют *квазинепрерывным* по $\mathbf{k}$.

Задачу (1)–(2) можно ограничить элементарной ячейкой, симметричной относительно начала координат (ячейкой Вигнера—Зейтца Ω_{WS}), наложив граничные условия

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_{\sigma}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_r}\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_{\sigma})}{\partial\mathbf{n}} = -e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_r}\frac{\partial\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}}.$$

Здесь $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_{\sigma}$ — сопряженные точки на границе ячейки Вигнера—Зейтца, $\mathbf{R}_r$ — вектор смещения решетки между этими точками, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе ячейки. Тогда исходная задача на собственные значения эквивалентна задаче минимизации интегрального функционала

$$J[\psi] = \int_{\Omega_{\text{WS}}} \psi^* \mathcal{H} \psi d\mathbf{r}, \quad \mathcal{H} \equiv -\Delta + V, \quad (3)$$

при дополнительном ограничении

$$\int_{\Omega_{\text{WS}}} |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1 \quad (4)$$

в классе функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям (здесь и далее звездочка обозначает комплексное сопряжение).

Наиболее распространенным методом получения приближенного решения вариационной задачи (3)–(4) является метод Ритца. Искомая функция ψ аппроксимируется линейной комбинацией некоторых координатных функций χ_{μ} :

$$\psi^{(M)} = \sum_{\mu} c_{\mu} \chi_{\mu}.$$

Коэффициенты c_{μ} находятся из системы уравнений

$$\sum_{\nu} (H_{\mu\nu} - \varepsilon S_{\mu\nu}) c_{\nu} = 0, \quad \mu, \nu = 1, \dots, M,$$

¹Энергия $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ является аналитической, хотя и не обязательно однозначной, функцией волнового вектора $\mathbf{k}$.

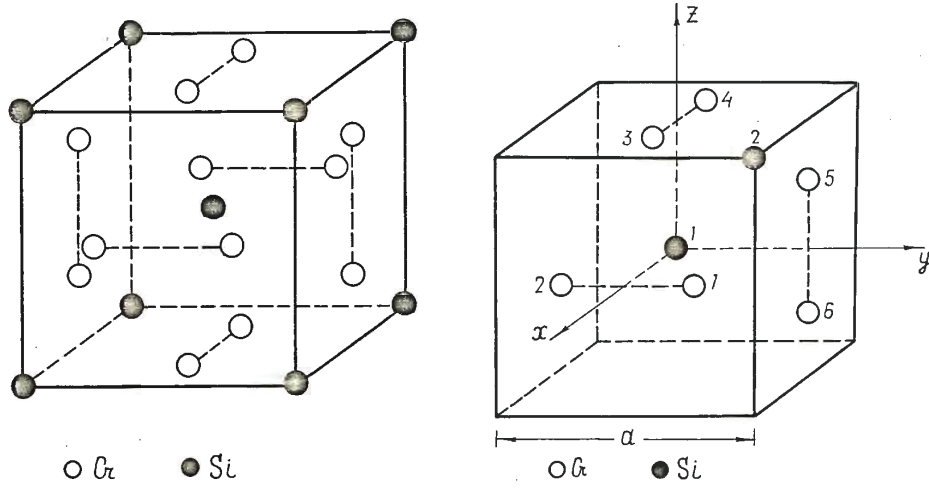


Рис. 1. Слева: кристаллическая структура типа Cr_3Si . Справа: ячейка Вигнера–Зейтца; номерами s показаны базисные векторы τ_s атомов Cr и Si.

где матричные элементы имеют вид

$$H_{\mu\nu} = \int_{\Omega_{\text{WS}}} \chi_{\mu}^* \mathcal{H} \chi_{\nu} d\mathbf{r}, \quad S_{\mu\nu} = \int_{\Omega_{\text{WS}}} \chi_{\mu}^* \chi_{\nu} d\mathbf{r}.$$

Значения энергии ε находятся из обобщенной задачи на собственные значения

$$\det(H - \varepsilon S) = 0.$$

Методом сильной связи называют метод Ритца, использующий в качестве координатных функций χ_{μ} блоховские суммы

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_n + \tau_s)} \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n - \tau_s). \quad (5)$$

Здесь N — общее количество элементарных ячеек в кристалле, τ_s — базисный вектор, характеризующий положение атома в элементарной ячейке, а φ — решение уравнения Шрёдингера с центрально-симметричным потенциалом (атомная орбиталь). Тогда блоховская сумма (5) — это линейная комбинация атомных орбиталей, центрированных на атомах в кристалле, $\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n - \tau_s)$.

Как известно [2, 11], атомные орбитали имеют вид

$$\varphi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\mathbf{r}),$$

где радиальная функция $R_{nl}(r)$ зависит только от модуля радиус-вектора $\mathbf{r}$, а сферическая функция

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad l = 0, 1, \dots, (n-1), \quad m = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l,$$

зависит только от углов ϑ и φ (и не зависит от явного вида атомного потенциала). Индексы n, l, m называются квантовыми числами. Главное квантовое число n принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Азимутальное квантовое число l традиционно заменяют буквой: s ($l = 0$), p ($l = 1$), d ($l = 2$) и т. д. Скажем, атомную орбиталь, отвечающую квантовым числам $n = 3$ и $l = 0$, называют 3s-орбиталью, $n = 4$ и $l = 1$ — 4p-орбиталью, а $n = 5$ и $l = 2$ — 5d-орбиталью.

Кристалл с базисом определяется решеткой (совокупностью узлов решетки $\mathbf{R}_n$) и набором атомных позиций (базисных векторов τ_s) в элементарной ячейке Вигнера–Зейтца. Для примера на рис. 1 слева изображена кристаллическая структура типа Cr_3Si (подробнее см. [8]). Атомы кремния Si расположены в центре и вершинах куба, а атомы хрома Cr расположены попарно на гранях куба. Поскольку противоположные грани ячейки Вигнера–Зейтца отождествляются, достаточно указать позиции τ_s лишь восьми атомов в ячейке Вигнера–Зейтца, как показано на рис. 1 справа. Все остальные атомы в кристалле будут иметь вид $\mathbf{R}_n + \tau_s$.

3. Учет симметрии в кристаллах с базисом. Сначала напомним необходимые сведения о пространственных группах, теории представлений и их приложениях в квантовой механике (подробнее см. [8]).

Пространственные преобразования $\{\alpha | \mathbf{t}\}$ векторов $\mathbf{r}$ в трехмерном евклидовом пространстве,

$$\{\alpha | \mathbf{t}\}\mathbf{r} = \alpha\mathbf{r} + \mathbf{t},$$

порождают преобразования $P_{\{\alpha|\mathbf{t}\}}$ функций $f(\mathbf{r})$:

$$P_{\{\alpha|\mathbf{t}\}}f(\mathbf{r}) = f(\{\alpha | \mathbf{t}\}^{-1}\mathbf{r}).$$

Здесь α — точечное преобразование: вращение или вращение с инверсией (несобственное вращение), а $\mathbf{t}$ — вектор трансляции.

Пространственная группа G состоит из всех преобразований $\{\alpha | \mathbf{t}\}$, переводящих кристалл в себя. Набор соответствующих операторов $P_{\{\alpha|\mathbf{t}\}}$ образует (изоморфную) группу операторов симметрии. Операторы симметрии коммутируют с гамильтонианом $\mathcal{H}$:

$$P_{\{\alpha|\mathbf{t}\}}\mathcal{H} = \mathcal{H}P_{\{\alpha|\mathbf{t}\}}$$

и всегда могут быть выбраны унитарными.

Рассмотрим l -мерное унитарное представление $\mathcal{D} = \{D(g), g \in G\}$ группы G . Функции f_λ ($\lambda = 1, \dots, l$) называются *базисными функциями* представления $\mathcal{D}$, если

$$P_g f_\lambda = \sum_{\mu=1}^l D_{\mu\lambda}(g) f_\mu, \quad g \in G, \quad \lambda = 1, \dots, l.$$

В этом случае говорят, что функция f_λ принадлежит строке с номером λ представления G .

Теорема 1 (Ю. Вигнер). *Собственные функции ψ оператора $\mathcal{H}$ при наличии группы симметрии G можно занумеровать тройками индексов, $\psi_{jn\mu}$:*

- (i) j — номер неприводимого представления $\mathcal{D}_j$ группы операторов симметрии, которому принадлежит ψ ;
- (ii) n — номер собственного подпространства оператора $\mathcal{H}$, отвечающего представлению $\mathcal{D}_j$ (может принимать бесконечное число значений $n = 1, 2, \dots$);
- (iii) μ — номер строки представления $\mathcal{D}_j$.

Атомные орбитали удобно индексировать, исходя из вращательной симметрии кристалла. Рассмотрим точечную группу G'_0 всех «чистых» вращений α , отвечающих преобразованиям симметрии без сдвига:

$$G'_0 = \{\alpha : \exists \{\alpha | 0\} \in G\}.$$

В соответствии с теоремой Вигнера занумеруем атомные орбитали $\varphi(\mathbf{r})$ индексами (j, μ) , связанными с группой G'_0 ¹:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_\mu^j(\mathbf{r}).$$

Это означает, что функция $\varphi_\mu^j(\mathbf{r})$ принадлежит μ -й строке j -го неприводимого представления группы G'_0 :

$$P_{\{\alpha|0\}}\varphi_\mu^j(\mathbf{r}) = \sum_\nu D_{\nu\mu}^j(\alpha)\varphi_\nu^j(\mathbf{r}).$$

В соответствии с принятой индексацией атомных орбиталей блоховская сумма записывается в виде

$$\Phi_\mu^{sj}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_n + \boldsymbol{\tau}_s)} \varphi_\mu^j(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n - \boldsymbol{\tau}_s), \quad (6)$$

¹В данном случае индекс n в теореме Вигнера — это главное квантовое число. Здесь и далее n для краткости опускаем.

где $\mathbf{k}$ — фиксированный волновой вектор, принадлежащий зоне Бриллюэна. Для системы блоховских сумм матричные элементы гамильтониана имеют вид

$$\left(\Phi_{\mu}^{sj}, \mathcal{H}\Phi_{\mu'}^{s'j'}\right) = \int_{\Omega_{\text{WS}}} \Phi_{\mu}^{sj*}(\mathbf{r}) \mathcal{H}\Phi_{\mu'}^{s'j'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = e^{i\mathbf{k}(\tau_{s'} - \tau_s)} \sum_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_n} I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'}),$$

где не все интегралы

$$I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'}) = \int \varphi_{\mu}^{j*}(\mathbf{r} - \tau_s) \mathcal{H}\varphi_{\mu'}^{j'}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n - \tau_{s'}) d\mathbf{r}$$

независимы. Наша цель — получить соотношения на $I_{\mu\mu'}^{jj'}$, вытекающие из симметрии задачи (но не из явного вида $\mathcal{H}$).

Прежде всего, из эрмитовости гамильтониана

$$\left(\Phi_{\mu}^{sj}, \mathcal{H}\Phi_{\mu'}^{s'j'}\right) = \left(\Phi_{\mu'}^{s'j'}, \mathcal{H}\Phi_{\mu}^{sj}\right)^* \quad (7)$$

следуют соотношения

$$I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'}) = I_{\mu'\mu}^{j'j*}(\tau_{s'}; -\mathbf{R}_n + \tau_s).$$

Кроме того, атомные орбитали обладают определенной четностью. В случае, если пространственная группа содержит преобразование $\{i | \tau\}$, где i — инверсия, справедливо соотношение

$$I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'}) = \omega^j \omega^{j'} I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau - \tau_s; -\mathbf{R}_n + \tau - \tau_{s'}). \quad (8)$$

Здесь ω^j — множитель, отвечающий за четность j -й атомной орбитали. Как известно, $\omega = (-1)^l$, где l — азимутальное квантовое число атомной орбитали [2, 11]. Например, для s-орбитали ($l = 0$) имеем $\omega = 1$, для p-орбитали ($l = 1$) имеем $\omega = -1$ и т. д. Из соотношения (8) следует

$$\left(\Phi_{\mu}^{\tau_s, j}, \mathcal{H}\Phi_{\mu'}^{\tau_{s'}, j'}\right) = \omega^j \omega^{j'} \left(\Phi_{\mu'}^{\tau - \tau_{s'}, j'}, \mathcal{H}\Phi_{\mu}^{\tau - \tau_s, j}\right). \quad (9)$$

Наконец, рассмотрим учет симметрии обращения времени. Оператор обращения времени можно записать в виде

$$\theta = \begin{cases} K & \text{без учета спина,} \\ \sigma_y K & \text{с учетом спина,} \end{cases}$$

где K — оператор комплексного сопряжения, а σ_x , σ_y , σ_z — матрицы Паули. Отметим основные свойства оператора обращения времени:

- (i) $\theta(a\psi_1 + b\psi_2) = a^*\theta\psi_1 + b^*\theta\psi_2$ (оператор θ антилинейный);
- (ii) $(\theta\psi_1, \theta\psi_2) = (\psi_2, \psi_1)$ (оператор θ антиунитарный);
- (iii) $\theta^2 = 1$ (без учета спина), и $\theta^2 = -1$ (с учетом спина).

Оператор θ является одним из операторов симметрии, поэтому

$$\theta\mathcal{H} = \mathcal{H}\theta.$$

В случае без учета спина имеем

$$I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'}) = I_{\mu\mu'}^{jj'*}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'}).$$

Полученные соотношения симметрии (7) и (9) позволили уменьшить число матричных элементов гамильтониана, которые необходимо вычислить. Следующий шаг — упрощение выражения

$$\left(\Phi_{\mu}^{sj}, \mathcal{H}\Phi_{\mu'}^{s'j'}\right) = e^{i\mathbf{k}(\tau_{s'} - \tau_s)} \sum_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_n} I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'})$$

для оставшихся матричных элементов с помощью симметрии. Для этого разбиваем сумму по узлам решетки $\mathbf{R}_n$ в кристалле на две:

- (a) по векторам фиксированной координационной сферы, т.е. по всем атомам, находящимся на равном расстоянии от начала координат;
- (b) по номерам координационных сфер $p = 1, 2, \dots$

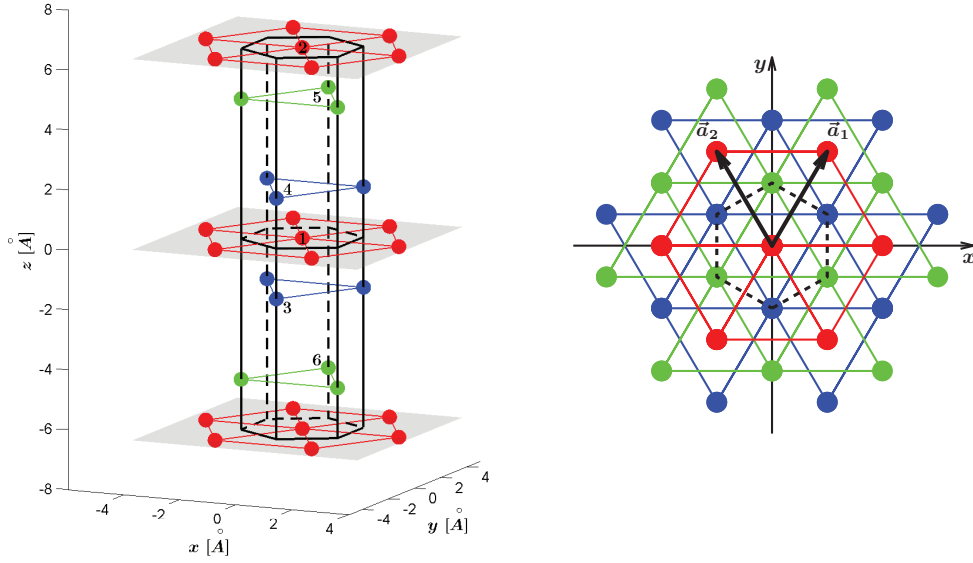


Рис. 2. Слева: кристаллическая структура: атомы Ta (красные), атомы Se — близкие к $z = 0$ (синие) и близкие к соседним слоям Ta (зеленые). Номерами обозначены позиции τ_s шести атомов в ячейке Вигнера—Зейтца, которая ограничена шестиугольной призмой. Справа: проекция кристаллической структуры $2H$ -TaSe₂ вдоль оси z .

Для p -й координационной сферы выбираем такой набор векторов $\mathbf{Q}_p^l$, что любой вектор координационной сферы преобразуется в вектор этого набора преобразованием $\alpha \equiv \{\alpha \mid 0\}$ из G'_0 :

$$\exists \alpha \in G'_0 : \quad \alpha(\mathbf{R}_n + \tau_{s'}) = \mathbf{Q}_p^l. \quad (10)$$

Может существовать несколько α из G'_0 , которые переводят заданный вектор $\mathbf{R}_n + \tau_{s'}$ в $\mathbf{Q}_p^l$; достаточно взять один из них. В результате

$$\left(\Phi_{\mu}^{sj}, \mathcal{H} \Phi_{\mu'}^{s'j'} \right) = e^{-i\mathbf{k}\tau_s} \sum_p \sum_l \sum_{\alpha} e^{i\mathbf{k}\alpha^{-1}\mathbf{Q}_p^l} I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \alpha^{-1}\mathbf{Q}_p^l).$$

Пусть $P_{\{\alpha|0\}}$ — оператор симметрии, где α — элемент G'_0 . Поскольку оператор $P_{\{\alpha|0\}}$ унитарный и коммутирует с $\mathcal{H}$, имеем

$$\begin{aligned} I_{\mu\mu'}^{jj'}(\tau_s; \mathbf{R}_n + \tau_{s'}) &= \int [P_{\{\varepsilon|\alpha\tau_s\}} P_{\{\alpha|0\}} \varphi_{\mu}^j(\mathbf{r})]^* \mathcal{H} [P_{\{\varepsilon|\alpha\mathbf{R}_n + \alpha\tau_{s'}\}} P_{\{\alpha|0\}} \varphi_{\mu'}^{j'}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\nu\nu'} D_{\nu\mu}^{j*}(\alpha) D_{\nu'\mu'}^{j'}(\alpha) I_{\nu\nu'}^{jj'}(\alpha\tau_s; \alpha(\mathbf{R}_n + \tau_{s'})). \end{aligned}$$

С учетом (10) и унитарности α получим окончательное выражение для матричного элемента:

$$\left(\Phi_{\mu}^{sj}, \mathcal{H} \Phi_{\mu'}^{s'j'} \right) = e^{-i\mathbf{k}\tau_s} \sum_p \sum_l \sum_{\nu\nu'} \left[\sum_{\alpha} e^{i\alpha\mathbf{k}\mathbf{Q}_p^l} D_{\nu\mu}^{j*}(\alpha) D_{\nu'\mu'}^{j'}(\alpha) I_{\nu\nu'}^{jj'}(\alpha\tau_s; \mathbf{Q}_p^l) \right]. \quad (11)$$

На практике обычно берется несколько первых координационных сфер: ближайшие соседи, вторые соседи и т. д.

4. Пример приложения метода. В качестве примера приложения метода учета симметрии рассмотрим квазидвумерный диселенид тантала $2H$ -TaSe₂ (подробнее см. [9]). Кристаллическая структура этого диселенида изображена на рис. 2. Ячейка Вигнера—Зейтца содержит шесть атомов.

Зона Бриллюэна обратной решетки и точки высокой симметрии изображены на рис. 3 слева. На рис. 3 справа изображен энергетический спектр $\varepsilon(\mathbf{k})$, рассчитанный для $\mathbf{k}$ вдоль сторон

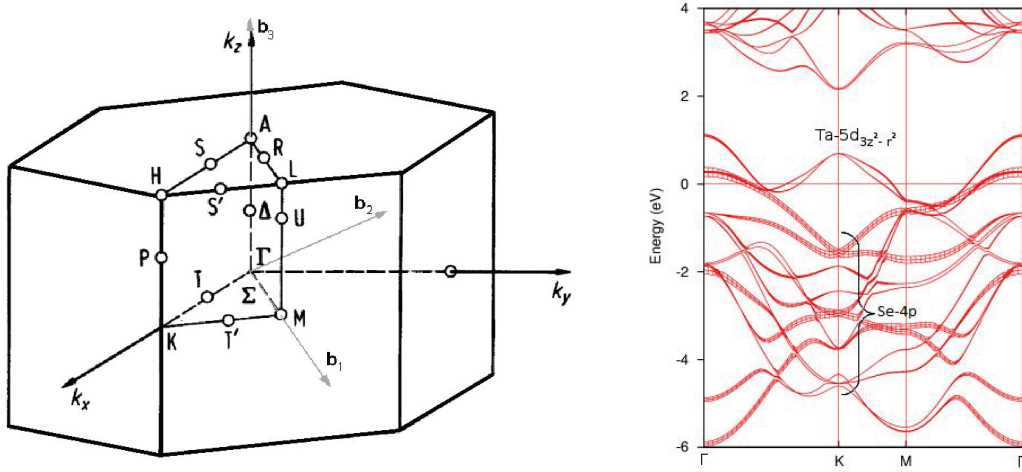


Рис. 3. Слева: зона Бриллюэна и точки высокой симметрии. Справа: Энергетические полосы $2H$ -TaSe₂, полученные в приближении локальной плотности. Толщина линии показывает вклад $4p_z$ -орбитали в соответствующую полосу.

треугольника с вершинами в точках высокой симметрии ГКМ в плоскости $z = 0$, которая исследуется в связи с экспериментом (подробнее см. [8, 9]). Наибольший интерес представляют две $5d_{3z^2-r^2}$ -орбитали, соответствующие двум атомам Ta в элементарной ячейке, и четыре $4p_z$ -орбитали, соответствующие четырём атомам Se в элементарной ячейке.

Блоховские суммы, построенные на выбранных атомных орбиталях, рассматриваем как набор координатных функций в методе сильной связи для построения матричных элементов гамильтониана. Соответствующие неприводимые представления группы G'_0 : $j = 1$ для $5d_{3z^2-r^2}$ -орбиталей Ta и $j = 4$ для $4p_z$ -орбиталей Se, в этом случае одномерны, поэтому индекс μ в блоховской сумме (6) опускаем. Эффективный гамильтониан, построенный на этих функциях, будет матрицей размера 6×6 . Для краткости блоховские суммы Φ^{11} и Φ^{21} двух атомов Ta и Φ^{34} , Φ^{44} , Φ^{54} и Φ^{64} четырех атомов Se обозначаем $\Phi_1, \dots, \Phi_6$. Используя соотношения симметрии (7) и (9), имеем

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12}^* & H_{11} & -H_{16}^* & -H_{15}^* & -H_{14}^* & -H_{13}^* \\ H_{13}^* & -H_{16} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14}^* & -H_{15} & H_{34}^* & H_{44} & H_{45} & H_{35} \\ H_{15}^* & -H_{14} & H_{35}^* & H_{45}^* & H_{44} & H_{34} \\ H_{16}^* & -H_{13} & H_{36}^* & H_{35}^* & H_{34}^* & H_{33} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где диагональные элементы матрицы H_{11} , H_{33} , H_{44} вещественны. Ограничивая гамильтониан (12) на плоскость $z = 0$ в $\mathbf{k}$ -пространстве, получаем

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{12}^* & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ 0 & 0 & H_{34}^* & H_{44} & H_{45} & H_{35} \\ 0 & 0 & H_{35}^* & H_{45}^* & H_{44} & H_{34} \\ 0 & 0 & H_{36}^* & H_{35}^* & H_{34}^* & H_{33} \end{pmatrix}.$$

Блочный вид гамильтониана указывает на отсутствие взаимодействия между $5d_{3z^2-r^2}$ -орбиталями Ta и $4p_z$ -орбиталями Se. Явные выражения для матричных элементов, полученные с помощью формулы (11), приведены в [9]. Полученный аналитический вид матричных элементов гамильтониана $2H$ -TaSe₂ можно использовать для любого другого соединения, имеющего такую же структуру [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонс Г. Теория зон Бриллюэна и электронные состояния в кристаллах. — М.: Мир, 1968.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 1989.
3. Callaway J. Quantum Theory of the Solid State. — New York: Academic, 1991.
4. Egorov R. F., Reser B. I., Shirokovskii V. P. Consistent treatment of symmetry in the tight binding approximation// Phys. Stat. Sol. — 1968. — 26, № 2. — P. 391–408.
5. Fletcher G. C. The Electron Band Theory of Solids. — Amsterdam: North-Holland, 1971.
6. Hergert W., Geilhufe R. M. Group Theory in Solid State Physics and Photonics. — New York: Wiley, 2018.
7. Katzke H., Tolédano P., Depmeier W. Phase transitions between polytypes and intralayer superstructures in transition metal dichalcogenides// Phys. Rev. B. — 2004. — 69. — 134111.
8. Melnikov N. B., Reser B. I. Space Group Representations: Theory, Tables and Applications. — Berlin: Springer, 2023.
9. Melnikov N. B., Reser B. I. Treatment of symmetry in the tight-binding method for crystals with several atoms per unit cell// Phys. Scr. — 2023. — 98. — 065952.
10. Raimes S. The Wave Mechanics of Electrons in Metals. — Amsterdam: North-Holland, 1963.
11. Schiff L. Quantum Mechanics. — New York: McGraw-Hill, 1968.
12. Zhang Z., Yu Z.-M., Liu G.-B., Yao Y. MagneticTB: A package for tight-binding model of magnetic and non-magnetic materials// Comput. Phys. Commun. — 2022. — 270. — 108153.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Электрон», номер госрегистрации 122021000039-4).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Мельников Николай Борисович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: melnikov@cs.msu.ru

Резер Борис Ильич

Институт физики металлов им. М. Н. Михеева

Уральского отделения РАН, Екатеринбург

E-mail: reser@imp.uran.ru



ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

© 2024 г. М. В. МУЛЮКОВ

Аннотация. Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение с дискретным запаздывающим аргументом, постоянным запаздыванием и слагаемым без запаздывания. Осуществлена редукция задачи об асимптотической устойчивости данного уравнения к задаче исследования спектра оператора сдвига по траекториям. Получены простые коэффициентные необходимые условия асимптотической устойчивости данного уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, асимптотическая устойчивость, дискретный запаздывающий аргумент, гибридная система.

ON THE ASYMPTOTIC STABILITY OF ONE EQUATION WITH A DISCRETE RETARDED ARGUMENT

© 2024 M. V. MULYUKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider a functional differential equation with a discrete retarded argument, a constant delay, and a term without delay. The problem of the asymptotic stability of this equation is reduced to the problem of studying the spectrum of the operator of shift along trajectories. Simple coefficient necessary conditions for the asymptotic stability of this equation are obtained.

Keywords and phrases: functional differential equation, asymptotic stability, discrete retarded argument, hybrid system.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K20, 34K25, 34K34

1. Введение. Настоящая работа посвящена асимптотической устойчивости уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) + cx([t]) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-1, 0), \end{cases} \quad (1)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, начальная функция ψ считается суммируемой, а через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

Непрерывно-дискретными системами функционально-дифференциальных уравнений называются такие системы, состояние которых описывается двумя группами взаимосвязанных переменных: одни переменные являются функциями непрерывного времени и удовлетворяют дифференциальным уравнениям; другие являются функциями дискретного времени и удовлетворяют разностным уравнениям. В настоящем исследовании мы также называем такие системы *гибридными*.

Дифференциальные уравнения, содержащие дискретный запаздывающий аргумент, интересны тем, что к ним сводятся некоторые гибридные системы. В частности, уравнение (1) эквивалентно

следующей гибридной системе:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = y(n), & t \in [n, n+1), \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-1, 0), \\ y(n) = -cx(n), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Гибридные системы такого рода возникают при исследовании технических объектов с импульсным и цифровым управлением. Кроме того, такие гибридные системы используются для моделирования процессов экономической динамики, состояние которых описывается функцией непрерывного времени, однако управленческие решения принимаются дискретно по времени или наблюдения некоторых показателей доступны дискретно по времени [2].

Устойчивость гибридных систем исследуются следующими методами:

- (i) подходы, основанные на метода Ляпунова (см. [2, 3, 7]);
- (ii) принцип неподвижной точки (см. [10]);
- (iii) W -метод Азбелева (см. [5, 9]);
- (iv) интегрирование по шагам и сведение гибридной системе к системе разностных уравнений (см. [4, 8, 11, 13–15]).

Отметим, что последний подход наиболее эффективно применяется для гибридных систем, в которых подсистема с непрерывным временем является системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно для этого класса систем данный подход позволяет получить необходимые и достаточные условия устойчивости в терминах коэффициентах системы.

Для гибридных систем, в которых подсистема с непрерывным временем является системой дифференциальных уравнений с запаздыванием, как правило, ограничиваются достаточными условиями устойчивости. Отметим, что система (2) при $b \neq 0$ относится именно к этому классу. Насколько известно автору работы, до сих пор не были разработаны методы получения коэффициентных необходимых и достаточных условий устойчивости для таких систем.

Задача Коши для уравнения (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) + cx([t]) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-1, 0), \\ x(0) = \alpha, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение задачи Коши (3) $x = x(t)$ в пространстве локально абсолютно непрерывных вектор-функций существует и единственно (см. [1]).

Определение 1. Уравнение (1) называется асимптотически устойчивым, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

для любой суммируемой начальной функции ψ и любого вещественного α .

Определение 2. Уравнение (1) называется экспоненциально устойчивым, если для любой суммируемой начальной функции ψ и любого вещественного α существуют такие $\sigma, M > 0$, что $|x(t)| < Me^{-\sigma t}$ при $t \geq 0$.

Необходимые условия асимптотической устойчивости уравнения (1) в случае $a = 0$ были получены в [12].

Целью настоящей работы является сведение задачи об устойчивости (1) к задаче исследования спектра оператора сдвига по траекториям. Кроме того, мы ставим целью продемонстрировать эффективность этого подхода, используя его для построения простого необходимого признака асимптотической устойчивости уравнения (1).

2. Основной результат. Ниже функцию $(e^x - 1)/x$ будем считать доопределённой в нуле по непрерывности.

Обозначим через $C[0, 1]$ пространство непрерывных комплекснозначных функций $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой

$$\|z\| = \sup_{t \in [0, 1]} |z(t)|.$$

Определим оператор S , действующий в пространстве $C[0, 1]$:

$$(Sx)(\tau) = x(1) \left(e^{-a\tau} - c \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) - be^{-a\tau} \int_0^\tau x(s) e^{as} ds.$$

Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \lambda + \frac{c\lambda}{a\lambda + b} - \left(1 + \frac{c\lambda}{a\lambda + b} \right) e^{-\frac{a\lambda + b}{\lambda}}.$$

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) уравнение (1) асимптотически устойчиво;
- (ii) уравнение (1) экспоненциально устойчиво;
- (iii) спектральный радиус оператора S меньше единицы;
- (iv) все корни уравнения $F(\lambda) = 0$ лежат внутри единичного круга.

Доказательство. При любом $n \in \mathbb{N}_0$ обозначим решение уравнения (1) на отрезке $[n, n+1]$ через $x_n = x_n(\tau)$, где $\tau = t - n$. Очевидно,

$$x_0(\tau) = \alpha \left(e^{-a\tau} - c \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) - be^{-a\tau} \int_0^\tau \psi(s-1) e^{as} ds.$$

Заметим, что $x_n \in C[0, 1]$, причём $x_n(\tau) \in \mathbb{R}$. Для любого $n \geq 1$ справедливо равенство

$$x_n = Sx_{n-1} = \dots = S^n x_0.$$

Изучим спектр оператора S . Непрерывный спектр оператора состоит из единственной точки $\lambda = 0$.

Точка λ является собственным числом оператора S в том и только том случае, если $\lambda \neq 0$ и краевая задача

$$\begin{cases} \dot{y}(\tau) + (a + b/\lambda)y(\tau) = -c, & \tau \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \\ y(1) = \lambda \end{cases} \quad (4)$$

разрешима в $C[0, 1]$. Решение дифференциального уравнения задачи (4), удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, имеет вид

$$y(\tau) = \left(1 + \frac{c}{a + b/\lambda} \right) e^{-(a+b/\lambda)\tau} - \frac{c}{a + b/\lambda}. \quad (5)$$

Для того, чтобы выполнялось условие $y(1) = \lambda$ необходимо и достаточно, чтобы λ являлось корнем уравнения $F(\lambda) = 0$.

Если $b = 0$, то

$$F(\lambda) = \lambda + c \frac{1 - e^{-a}}{a} - e^{-a};$$

следовательно, существует единственный корень $\tilde{\lambda}$ данной функции:

$$\tilde{\lambda} = e^{-a} - c \frac{1 - e^{-a}}{a}.$$

Предположим, что $b \neq 0$. В этом случае λ является собственным числом оператора S в том и только том случае, если

$$\lambda = -\frac{b}{a + \mu},$$

где μ — корень уравнения

$$\mu + a - c - ac \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu} + (b + c)e^{-\mu} = 0. \quad (6)$$

Если $a = -\mu$, то из (6) вытекает равенство $b = 0$. Следовательно, $a \neq -\mu$, поэтому λ определён для любого корня уравнения (6) при $b \neq 0$.

Уравнение (6) является характеристическим уравнением дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием:

$$\dot{x}(t) + (a - c)x(t) - ac \int_{t-1}^t x(s) ds + (b + c)x(t - 1) = 0.$$

Дифференциальные уравнения такого типа хорошо исследованы (см. [6]); в частности, известно, что любому кругу в комплексной плоскости принадлежит конечное (или пустое) множество корней его характеристического уравнения (6). Следовательно, существует такой корень $\tilde{\lambda}$ функции F , что

$$|\tilde{\lambda}| = \frac{|b|}{\min |a + \mu_k|},$$

где $\{\mu_k\}$ — множество всех корней уравнения (6).

Итак, при любом b спектральный радиус оператора S удовлетворяет соотношению $\rho(S) = |\tilde{\lambda}|$.

Пусть $|\tilde{\lambda}| \geq 1$. Выберем две начальные функции

$$\psi_R(t) = \operatorname{Re} \tilde{y}(t + 1), \quad \psi_I(t) = \operatorname{Im} \tilde{y}(t + 1),$$

где $\tilde{y}$ — собственный вектор, соответствующий собственному числу $\tilde{\lambda}$.

Обозначим через x_R решение задачи Коши (3) при $\psi = \psi_R$ и $\alpha = \operatorname{Re} \tilde{\lambda}$, а через x_I — решение той же задачи Коши при $\psi = \psi_I$ и $\alpha = \operatorname{Im} \tilde{\lambda}$.

Согласно формуле (5) имеем

$$x_R(n) + ix_I(n) = \tilde{\lambda}^{n+1};$$

следовательно, по крайней мере одно из двух решений не стремится к нулю, то есть уравнение (1) не является асимптотически устойчивым.

Пусть $|\tilde{\lambda}| < 1$, тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(S) < 1 - \varepsilon$.

Ниже норма оператора является индуцированной нормой.

Из формулы Бёрлинга—Гельфанда вытекает соотношение

$$\rho(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|S^n\|}.$$

Следовательно, существует такое N , что при $n \geq N$ имеем

$$\|S^n\| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Далее,

$$\|x_{N+n}\| = \|S^n x_N\| \leq \|S^n\| \|x_N\| \leq (1 - \varepsilon/2)^n \|x_N\|;$$

следовательно, уравнение (1) является экспоненциально устойчивым. $\square$

Заметим, что при $b \neq 0$ уравнение (1) асимптотически устойчиво в том и только том случае, если $|\mu + a| > |b|$ для любого корня уравнения (6).

Сформулируем простой необходимый признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (1) было экспоненциально устойчивым, необходимо выполнения неравенств

$$\begin{cases} a + b + c > 0, \\ c < (b - a) \cosh \frac{b - a}{2}. \end{cases}$$

Если при этом $b = 0$, то данные условия являются достаточными.

Доказательство. Если $a + b + c \leq 0$, то

$$F(1) = (a + b + c) \frac{1 - e^{-(a+b)}}{a + b} \leq 0,$$

однако

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \in \mathbb{R}}} F(\lambda) = \infty;$$

следовательно, уравнение $F(\lambda) = 0$ имеет по крайней мере один вещественный корень на множестве $[1; +\infty)$.

Пусть $c \geq v \cosh(v/2)$, где $v = b - a$. Тогда

$$-c > v \frac{1 + e^v}{1 - e^v};$$

следовательно,

$$F(-1) = -1 - e^v - c \frac{1 - e^v}{v} > 0;$$

однако,

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow -\infty \\ \lambda \in \mathbb{R}}} F(\lambda) = -\infty;$$

следовательно, уравнение $F(\lambda) = 0$ имеет по крайней мере один вещественный корень на множестве $(-\infty; -1]$.

Если $b = 0$, то

$$\rho(S) = e^{-a} - c \frac{1 - e^{-a}}{a}.$$

Неравенства $-1 < \rho(S) < 1$ эквивалентны

$$-1 < e^{-a} - c \frac{1 - e^{-a}}{a} < 1.$$

Далее,

$$-1 + e^{-a} < c \frac{1 - e^{-a}}{a} < 1 + e^{-a},$$

что эквивалентно $a + c < 0$ и $c < a \coth(a/2)$. □

В заключение отметим, что для построения необходимого и достаточного условия асимптотической устойчивости уравнения (1) необходимо исследовать не только случай, когда вещественные собственные значения оператора S принадлежат единичному кругу, но и случай, когда все комплексные собственные значения данного оператора принадлежит единичному кругу. Это актуальная задача, которая в настоящий момент не решена и выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. Козлов Р. И., Козлова О. Р. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. I // Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2009. — № 2. — С. 104–113.
3. Козлов Р. И., Козлова О. Р. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. II // Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2009. — № 3. — С. 41–50.
4. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Тр. БГТУ. Физ.-мат. науки информ. — 2012. — № 6. — С. 7–10.
5. Симонов П. М. К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последствием // Вестн. рос. унив. Мат. — 2020. — № 131 (25). — С. 299–306.
6. Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В. Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 6. — С. 55–63.
7. Fridman E. Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — № 1 (273). — P. 24–44.

8. *Branicky M. S.* Stability of hybrid systems: State of the art// Proc. 36 IEEE Conf. on Decision and Control (San Diego, CA, USA, December 12, 1997), 1998. — P. 120–125.
9. *Bravyi E., Maksimov V., Simonov P.* Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect// Mathematics. — 2020. — № 10 (8).
10. *De la Sen M.* Total stability properties based on fixed point theory for a class of hybrid dynamic systems// Fixed Point Th. Appl. — 2009. — 2009. — 826438.
11. *Marchenko V. M., Loiseau J. J.* On the stability of hybrid difference-differential systems// Differ. Equations. — 2009. — № 45. — P. 743–756.
12. *Mulyukov M. V.* Necessary conditions of the stability of one hybrid system// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 2022. — 87. — P. 111–118.
13. *Seifert G.* Second-order neutral delay-differential equations with piecewise constant time dependence// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — № 281. — P. 1–9.
14. *Wiener J., Cooke K. L.* Oscillations in systems of differential equations with piecewise constant argument// J. Math. Anal. Appl. — 1989. — № 137. — P. 221–239.
15. *Ye H., Michel A. N., Hou L.* Stability theory for hybrid dynamical systems// IEEE Trans. Automat. Control. — 1998. — № 4 (43).

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00517).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Мулюков Михаил Вадимович

Пермский государственный национальный исследовательский университет;

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail: mulykoff@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 89–99
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-89-99

УДК 517.9

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2024 г. М. В. ПОЛОВИНКИНА

Аннотация. Задача восстановления решения сингулярного уравнения теплопроводности по положительной части действительной прямой в данный момент времени решается на основе неточных измерений этого решения в другие предыдущие моменты времени. Получены явные выражения для оптимального метода восстановления и его ошибок.

Ключевые слова: оператор Бесселя, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье–Бесселя, уравнение теплопроводности.

ON THE RECONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE SINGULAR HEAT EQUATION

© 2024 M. V. POLOVINKINA

ABSTRACT. The problem of reconstructing solutions of the singular heat equation on the positive part of the real axis at a certain moment of time is solved by inaccurate measurements of this solution at other previous moments of time. Explicit expressions for the optimal reconstruction method and its errors are obtained.

Keywords and phrases: Bessel operator, optimal reconstruction, extremal problem, Fourier–Bessel transform, heat equation.

AMS Subject Classification: 26A33, 35Q92, 35B40, 43A32, 35J15

1. Введение. Постановка проблемы. Хорошо известно, что распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$.

В [10] была поставлена следующая задача. Пусть известны температурные распределения $u(\cdot, t_1), \dots, u(\cdot, t_p)$ в моменты времени $0 \leq t_1 < \dots < t_p$, заданные приближенно. Точнее, известны такие функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, что

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq \delta_j,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, p$. Для каждого набора таких функций требуется найти функцию в $L_2(\mathbb{R}^N)$, которая наилучшим образом аппроксимирует реальное распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ в фиксированный момент времени τ в некотором смысле. В данной работе исследуется аналогичная задача для сингулярного уравнения теплового типа с оператором Бесселя (см. [2–9, 13–15]). Особенности вышеуказанного типа возникают в моделях математической физики в таких случаях, когда характеристики сред (например, характеристики диффузии или характеристики теплопроводности) имеют вырожденные степенные неоднородности. Кроме того, к таким уравнениям

приводят ситуации, когда исследуются изотропные диффузионные процессы с осевой или сферической симметрией.

Мы далее сосредоточимся на уравнении с одной пространственной переменной. Однако изложенные ниже результаты без труда переносятся на многомерный случай.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bu, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0,$$

где B — оператор Бесселя в $\mathbb{R}_+$, определенный формулой

$$Bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial u}{\partial x},$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Единственное решение этой задачи было получено в [2, 15]. Оно выражается следующей формулой, обобщающей хорошо известную формулу Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{2tx^\nu} \int_{\mathbb{R}_+} \eta^{\nu+1} u_0(\eta) I_\nu\left(\frac{\eta x}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\eta^2 + x^2}{4t}\right) d\eta, \quad (1)$$

где

$$I_\nu(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m + \nu + 1)}$$

— модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν , $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Поставим следующую задачу. Пусть функции $y_j(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R})$ известны в моменты $0 \leq t_1 < \dots < t_p$ и

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, p,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, p$. Требуется, каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в $\mathbb{R}_+$ в фиксированный момент времени τ . В связи с этим, следуя [10], любое отображение $m : L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) \times \dots \times L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ мы называем методом восстановления (температуры в $\mathbb{R}_+$ в момент τ согласно этой информации). Значение

$$e(\tau, \bar{\delta}, m) = \sup_U \|u(\cdot, \tau) - m(y_j(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)},$$

где $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot))$, $\bar{\delta} = (\delta_1(\cdot), \dots, \delta_p(\cdot))$,

$$U = \left\{ (u_0(\cdot), \bar{y}(\cdot)) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) : \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, p \right\},$$

называется ошибкой этого метода. Значение

$$E(\tau, \bar{\delta}) = \inf_{m: (L_2^\gamma(\mathbb{R}))^p \rightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} e(\tau, \bar{\delta}, m)$$

называется ошибкой оптимального восстановления. Метод $\hat{m}$, для которого

$$E(\tau, \bar{\delta}) = e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m}),$$

называется оптимальным методом восстановления.

2. Необходимые сведения. Введем следующие обозначения:

$$R_N^+ = \left\{ x = (x', x''), \quad x' = (x_1, \dots, x_n), \quad x'' = (x_{n+1}, \dots, x_N), \quad x_1 > 0, \dots, x_n > 0 \right\},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \quad \gamma_i > 0.$$

Через Ω^+ будем обозначать область, прилегающую к гиперплоскостям $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+ , расположенной в части пространства R_N^+ , и Γ_0 , принадлежащей гиперплоскостям $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

Через $L_p^\gamma(\Omega^+)$ будем обозначать линейное пространство функций, для которых

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \left(\int_{\Omega^+} |f(x)|^p (x')^\gamma dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — объединение множества Ω^+ и множества Ω^- , полученного из Ω^+ симметрией относительно пространства $x' = 0$.

Смешанный обобщенный сдвиг определим формулой

$$f \rightarrow (T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''), \quad (2)$$

где каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен по формуле (см. [8])

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\gamma_i}{2})} \int_0^\pi f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha}, x_{i+1}, \dots, x_N\right) \sin^{\gamma_i-1} \alpha d\alpha, \quad (3)$$

$i = 1, \dots, n$, а произведение $\prod_{k=1}^n T_{x_k}^{y_k}$ понимается как произведение (суперпозиция) операторов.

Обобщенная свертка функций $f, g \in L_p^\gamma(R_N^+)$ определяется формулой

$$(f * g)_\gamma(x) = \int_{R_N^+} f(y) T_x^y g(y') (y')^\gamma dy. \quad (4)$$

Прямое и обратное смешанные преобразования Фурье—Бесселя определяются соответственно формулами

$$F_{B,\gamma}[\varphi(x', x'')](\xi) = \int_{R_N^+} \varphi(x) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix'' \cdot \xi''} (x')^\gamma dx =$$

$$= (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^n \Gamma^2(\nu_k + 1) F_{B,\gamma}^{-1}[\psi(x', -x'')](\xi), \quad (5)$$

где

$$x' \cdot \xi' = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, \quad x'' \cdot \xi'' = x_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + x_N \xi_N, \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n,$$

$$j_{\nu_k}(z_k) = \frac{2^{\nu_k} \Gamma(\nu_k + 1)}{z_k^{\nu_k}} J_{\nu_k}(z_k) = \Gamma(\nu_k + 1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z_k^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m + \nu_k + 1)}$$

— нормированная функция Бесселя первого рода порядка ν_k , $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $J_{\nu_k}(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu_k = (\gamma_k - 1)/2$, $k = 1, \dots, n$.

3. Нижняя граница оптимального метода. Пусть $P_t : L_2^\gamma(\mathbb{R}) \rightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ — оператор, определенный формулой (1):

$$u_0(\eta) I_\nu \left(\frac{\eta x}{2t} \right) \exp \left(-\frac{\eta^2 + x^2}{4t} \right) d\eta,$$

$t > 0$ — фиксированное значение, P_0 — тождественный оператор.

Пусть $\tau \geq 0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \max, \quad (6)$$

$$\|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+). \quad (7)$$

Функция, удовлетворяющая условию (7) называется допустимой функцией задачи (6)–(7).

Пусть S означает верхнюю границу $\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}$ с условиями (7).

Лемма 1. *Имеет место неравенство $E(\tau, \bar{\delta}) \geq S$.*

Доказательство. Пусть $\bar{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (6)–(7). Тогда $-\bar{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (6)–(7). Для всякого метода $m : (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p \rightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, имеем:

$$\begin{aligned} 2\|P_\tau \bar{u}_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} &= \left\| P_\tau \bar{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - P_\tau(-\bar{u}_0(\cdot)) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \\ &\leq \left\| P_\tau \bar{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \left\| m(0)(\cdot) - P_\tau(-\bar{u}_0(\cdot)) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \\ \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j, \\ j=1, \dots, p}} \left\| P_\tau u_0(\cdot) - m(0)(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \\ &\leq 2 \sup_U \left\| P_\tau u_0(\cdot) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

В левой части полученного неравенства мы переходим к верхней границе допустимых функций, а в правой — к нижней границе всех методов. Этот шаг завершает доказательство леммы. $\square$

С помощью [1, формула 6.633(4)] легко убедиться в справедливости равенства

$$F_\gamma[P_t u_0(\cdot)](\xi) = \exp(-|\xi|^2 t) F_\gamma u_0(\xi).$$

Следовательно, по теореме Парсеваля—Планшереля для преобразования Фурье—Бесселя квадрат значения задачи (6)–(7) равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1)} \int_{\mathbb{R}_+} \xi^{2\nu+1} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \quad (8)$$

$$\frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1)} \int_{\mathbb{R}_+} \xi^{2\nu+1} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, p. \quad (9)$$

Перейдем от задачи (8)–(9) к расширенной задаче (согласно терминологии [10]). Для этого заменим $\frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1)} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \xi^{2\nu+1} d\xi$ на положительную меру $d\mu(\xi)$:

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\mu(\xi) \rightarrow \max, \quad (10)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, p. \quad (11)$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ — набор множителей Лагранжа. Расширенная проблема (10)–(11) была решена в [10]. Для полноты повествования нам нужно будет переписать это решение, слегка изменив конкретные значения в соответствии с нашими потребностями. На двумерной плоскости (t, y) построим множество

$$M = \text{co} \left\{ \left(t_j, \ln \left(\frac{1}{\delta_j} \right) \right), j = 1, \dots, p \right\} + \{(t, 0) : t \geq 0\},$$

где $\text{co } A$ означает выпуклую оболочку множества A . Введем функцию $\theta(t)$ на луче $[0, +\infty)$ с помощью формулы

$$\theta(t) = \max\{y : (t, y) \in M\},$$

предполагая, что $\theta(t) = -\infty$, если $(t, y) \notin M$ при всех y . На луче $[t_1, +\infty)$ график функции $\theta(t)$ — направленная вверх выпуклая (вогнутая) ломаная линия. Пусть $t_1 = t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_p}$ — точки ее изломов. Очевидно,

$$\{t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_p}\} \subseteq \{t_1 < t_2 < \dots < t_p\}.$$

Рассмотрим три случая.

(а) Пусть $\tau \geq t_1$, в то время как справа от τ имеется точка излома функции $\theta(t)$. Предположим, что $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Пусть $d\hat{\mu}(\xi) = x^\gamma T_\xi^{\xi_0} \delta_\gamma$, где параметры A_0 и ξ_0 определяются из условий

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\hat{\mu}(\xi) = A e^{-2|\xi_0|^2 t_k} = \delta_k^2, \quad k = s_j, s_{j+1}. \quad (12)$$

Из условия (12) получим

$$A = \delta_{s_j}^{2t_{s_{j+1}}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{-2t_{s_j}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})},$$

$$|\xi_0|^2 = \frac{\ln \delta_{s_j}/\delta_{s_{j+1}}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}.$$

Пусть $\hat{\lambda}_0 = -1$, $\hat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j, s_{j+1}$. Для того, чтобы найти числа $\lambda_{s_j}, \lambda_{s_{j+1}}$, сделаем некоторые приготовления. Пусть

$$f(v) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^p \lambda_j e^{-2v(t_j-\tau)}.$$

Потребуем, чтобы $f(|\xi_0|^2) = f'(|\xi_0|^2) = 0$. Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно $\lambda_{s_j}, \lambda_{s_{j+1}}$:

$$\lambda_{s_j} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} = 1,$$

$$\lambda_{s_j}(t_{s_j} - \tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}}(t_{s_{j+1}} - \tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} = 0.$$

Решив эту систему, находим

$$\lambda_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}, \quad \lambda_{s_{j+1}} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}.$$

Для меры $d\hat{\mu}(\xi)$ имеем:

$$\min_{d\mu(\cdot) \geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}), \quad (13)$$

$$\hat{\lambda}_j \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\hat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (14)$$

Пусть

$$\rho(t) = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} (t - t_{s_j}) + \ln(1/\delta_{s_j}).$$

Прямая $y = \rho(t)$ проходит через точки $(t_{s_j}, \ln(1/\delta_{s_j}))$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln(1/\delta_{s_{j+1}}))$ и лежит ниже графика функции $y = \theta(t)$. Для найденных значений A и $|\xi_0|^2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_i} d\hat{\mu}(\xi) &= A e^{-2|\xi_0|^2 t_i} = \delta_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}} - t_i)/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{2(t_i - t_{s_j})/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})} = \\ &= e^{-2\rho(t_i)} \leq e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Это означает, что $d\hat{\mu}(\xi)$ является допустимой мерой в расширенной задаче (10)–(11) и является ее решением. Если мы подставим $d\hat{\mu}(\xi)$ в функционал, определенный в (10), получим значение задачи (10)–(11), которое также является решением задачи (8)–(9):

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\hat{\mu}(\xi) = A e^{-2|\xi_0|^2 \tau} = \delta_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}} - \tau)/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{2(\tau - t_{s_j})/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})} = e^{-2\rho(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}.$$

Это означает, что значение задачи (6)–(7) равно $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(b) Пусть $\tau \geq t_{s_\varrho}$. Если график функции $y = \theta(t)$ представляет собой прямую линию, то $t_{s_\varrho} = t_1$. На этот раз положим $\hat{\lambda}_0 = -1$, $\hat{\lambda}_{s_\varrho} = 1$, $\hat{\lambda}_{s_j} = 0$, где $j \neq \varrho$, $d\hat{\mu}(\xi) = x^\gamma \delta_{s_\varrho} \delta_\gamma(\xi)$. Для всех $\xi \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$f(|\xi|^2) = -1 + e^{-2|\xi|^2(t_{s_\varrho} - \tau)} \geq 0;$$

также имеет место неравенство $f(0) = 0$. Следовательно, условие (13) также выполняется. На луче $[t_{s_\varrho}, +\infty)$, равенство $\theta(t) \equiv \ln(1/\delta_{s_\varrho})$ выполняется тождественно. Следовательно, $\ln(1/\delta_j) \leq \ln(1/\delta_{s_\varrho})$, $j = 1, \dots, p$. Отсюда

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\hat{\mu}(\xi) = \delta_{s_\varrho}^2 = e^{-2\ln(1/\delta_{s_\varrho})}.$$

Таким образом, мера $d\hat{\mu}(\xi)$ допустима в задаче (10)–(11) и является ее решением. Значение этой задачи вычисляется следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\hat{\mu}(\xi) = \delta_{s_\varrho}^2 = e^{-2\ln(1/\delta_{s_\varrho})} = e^{-2\theta(t)}.$$

Это снова означает, что решение проблемы (6)–(7) равно $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(c) Пусть $\tau < t_1$. Для произвольного $y_0 > 0$, существует прямая линия, заданная уравнением $y = at + b$, $a > 0$, разделяющая точку $(\tau, -y_0)$ и множество M . В то же время

$$-a\tau - y_0 \geq b \geq -at_j + \ln \frac{1}{\delta_{s_j}}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Пусть $A = e^{-2b}$. Выберем $\xi_0 \in \mathbb{R}_+$, чтобы обеспечить $|\xi_0|^2 = a$. Тогда

$$A e^{-2|\xi_0|^2 t_j} \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, p.$$

Это значит, что мера $d\hat{\mu}(\xi) = x^\gamma T_\xi^{\xi_0} \delta_\gamma(\xi)$ допустима в задаче (10)–(11) и $A e^{-2|\xi_0|^2 \tau} \geq e^{2y_0}$. В силу произвольности $y_0 > 0$ значение задачи (10)–(11), а вместе с ним и решение задачи (6)–(7) равно $+\infty$.

Во всех трех случаях, для всех $\tau \geq 0$, ошибка оптимального восстановления оценивается снизу: $E(\tau, \bar{\delta}) \geq e^{-\theta(\tau)}$.

4. Верхняя оценка оптимальной ошибки восстановления. Пусть $\tau \geq t_1$ и $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p$ — множители Лагранжа из случаев (a), (b) для таких значений τ .

Лемма 2. Пусть для множества функций $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ задача

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \rightarrow \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \quad (15)$$

имеет решение $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}(\cdot))$. Тогда для любого $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ значение задачи

$$\left\| P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \hat{u}_0(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \rightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \quad (16)$$

$$\left\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \sigma_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad (17)$$

не превосходит значения задачи

$$\left\| P_\tau u_0(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \rightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} u_0(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \sigma_j^2. \quad (19)$$

Доказательство. Равенство нулю дифференциала Фреше выпуклого гладкого целевого функционала из (15) в точке $\hat{u}_0(\cdot)$, т.е. равенство

$$2 \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}_+} x^\gamma (P_{t_j} \hat{u}_0(x) - y_j(x)) P_{t_j} u_0(x) dx = 0, \quad (20)$$

является необходимым и достаточным условием для доставки минимума к этому функционалу функцией $\hat{u}_0(\cdot)$. Принимая во внимание это равенство, легко получить, что

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 = \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} u_0(\cdot) - P_{t_j} \hat{u}_0(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 + \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} \hat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Пусть функция $u_0(\cdot)$ действительна для задачи (16)–(17). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} \hat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 &= \\ &= \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 - \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} \hat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \sigma_j^2. \end{aligned}$$

Это означает, что функция $u_0(\cdot) - \hat{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (18)–(19). Значение функционала (16) на функции $u_0(\cdot)$ равно значению функционала (18). $\square$

Лемма 3. Значения задач (6)–(7) и (18)–(19), где $\sigma_j = \delta_j$, $j = 1, \dots, p$, совпадают.

Доказательство. С помощью равенства Парсеваля–Планшереля перейдем от задачи (18)–(19) к задаче

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\mu(\xi) \rightarrow \max, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) \leq \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad (22)$$

где

$$d\mu(\xi) = \frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1)} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \xi^{2\nu+1} d\xi \geq 0.$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \nu) = \nu_0 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2\tau} d\mu(\xi) + \nu_1 \left(\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) - \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \delta_j^2 \right),$$

где множество ν множителей Лагранжа теперь имеет вид $\nu = (\nu_0, \nu_1)$. Из того, что мера $d\hat{\mu}(\xi)$, которая является решением проблемы (18)–(19), допустимо в этой задаче, следует, что она также допустима в задаче (21)–(22). Пусть $\nu_0 = \hat{\nu}_0 = -1$, $\nu_1 = \hat{\nu}_1 = 1$. Тогда

$$\min_{d\mu(\cdot) \geq 0} \mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \hat{\nu}) = \mathcal{L}_1(d\hat{\mu}(\cdot), \hat{\nu}) = \mathcal{L}(d\hat{\mu}(\cdot), \hat{\lambda}) = \min_{d\mu(\cdot) \geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}), \quad (23)$$

где $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_0, \hat{\nu}_1)$; с учетом (14), имеем

$$\hat{\nu}_1 \left(\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\hat{\mu}(\xi) - \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \delta_j^2 \right) = 0. \quad (24)$$

Это значит, что $d\hat{\mu}(\xi)$ является решением задачи (21)–(22). Следовательно, значение этой задачи равно значению задачи (21)–(22). Отсюда следует, что возведенное в квадрат значение задачи (10)–(11) равно решению задачи (18)–(19). Следовательно, значения задач (10)–(11) и (18)–(19) совпадают. $\square$

5. Основной результат.

Теорема 1. Для любого $\tau > 0$ имеет место равенство

$$E(\tau, \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

- (i) Если $0 \leq \tau < t_1$, то $\theta(\tau) = -\infty$.
- (ii) Если $\tau = t_{s_j}$, $j = 1, \dots, \varrho$, то метод $\hat{m}$, определенный формулой $\hat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, является оптимальным.
- (iii) Если $\varrho \geq 2$, $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, то метод $\hat{m}$, определенный формулой

$$\hat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (\Psi_{s_j} * y_{s_j})_\gamma(\cdot) + (\Psi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot), \quad (25)$$

где $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — функции, образы Фурье–Бесселя которых имеют вид

$$F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}, \quad (26)$$

$$F_\gamma \Psi_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}, \quad (27)$$

является оптимальным.

- (iv) Если $\tau > t_{s_\varrho}$, то метод $\hat{m}$, определенный формулой $\hat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_\varrho}} y_{s_\varrho}(\cdot)$, является оптимальным.

Доказательство. Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Выше было показано, что можно было бы выбрать набор множителей Лагранжа, в котором только множители $\hat{\lambda}_{s_j}$ и $\hat{\lambda}_{s_{j+1}}$ не равны нулю. Следовательно, задача (15) принимает вид

$$\hat{\lambda}_{s_j} \left\| P_{t_{s_j}} u_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} \left\| P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+).$$

Пусть $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, y(\cdot))$ — решение этой задачи. Тогда выполнено условие (20). В образах Фурье–Бесселя это условие может быть записано в виде

$$\sum_{\kappa=j}^{j+1} \int_{\mathbb{R}_+} \xi^\gamma \left(e^{-|\xi|^2 t_{s_\kappa}} F_\gamma \hat{u}_0(\xi) - F_\gamma y_{s_\kappa}(\xi) \right) e^{-|\xi|^2 t_{s_\kappa}} F_\gamma u_0(\xi) d\xi = 0. \quad (28)$$

Пусть

$$F_\gamma \hat{u}_0(\xi) = \frac{\hat{\lambda}_{s_j} e^{-|\xi|^2 t_{s_j}} F_\gamma y_{s_j} + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2 t_{s_{j+1}}} F_\gamma y_{s_{j+1}}}{\hat{\lambda}_{s_j} e^{-2|\xi|^2 t_{s_j}} + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2 t_{s_{j+1}}}}. \quad (29)$$

Тогда равенство (28) выполняется для всех $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Пусть для множества $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ функции $F_\gamma y_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, p$, финитны. Тогда функция (29) принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Тогда функция $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, y(\cdot))$, определенная формулой (29), также принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и является решением задачи (15). Финитные функции плотны в $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, функции с финитными образами Фурье—Бесселя являются плотными в $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$.

Пусть функции $\tilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\| P_{t_{s_j}} \tilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Выберем последовательность $\bar{y}^{(k)}(\cdot) = (y_1^{(k)}(\cdot), \dots, y_p^{(k)}(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$, $k \in \mathbb{N}$, для которой функции $F_\gamma y_j^{(k)}(\cdot)$, $j = 1, \dots, p$, финитны и

$$\left\| y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{k}, \quad j = 1, \dots, p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Существует решение $\hat{u}_0(\cdot, y^{(k)}(\cdot))$ задачи (15). В силу неравенств

$$\begin{aligned} & \left\| P_{t_j} \tilde{u}_0(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \\ & \leq \left\| P_{t_j} \tilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \left\| y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j + \frac{1}{k}, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

функция $\tilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (16)–(17) с $\sigma_j = \sigma_j(k) = \delta_j + 1/k$. Пусть

$$a(k) = \sqrt{\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \sigma_j^2(k) / \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \delta_j^2}.$$

В силу леммы 2 значение задачи (16)–(17) не превышает значения задачи (18)–(19).

Произведем замену функции $u_0(\cdot) = a(k)v_0(\cdot)$ для задачи (18)–(19). Эта задача примет вид

$$a(k) \left\| P_\tau v_0(\cdot) - P_\tau \hat{u}_0(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \rightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} v_0(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j \sigma_j^2. \quad (31)$$

Значение задачи (30)–(31) совпадает со значением задачи (6)–(7), умноженным на $a(k)$, и оно равно $a(k)e^{-\theta(\tau)}$. Поскольку функция $\tilde{u}_0(\cdot)$ допустимо в задаче (16)–(17), имеем

$$\left\| P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - P_\tau \hat{u}_0(\cdot, y^{(k)}(\cdot)) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq a(k)e^{-\theta(\tau)}. \quad (32)$$

Пусть $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — функции, образы Фурье—Бесселя которых имеют следующий вид в соответствии с (26)–(27):

$$\begin{aligned} F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) &= \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}, \\ F_\gamma \Psi_{s_{j+1}}(\xi) &= \frac{(\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}. \end{aligned}$$

Пусть $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Образы Фурье—Бесселя (26) и (27) функций $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат пространству четных бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Следовательно, функции $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат этому пространству. В рассматриваемом случае мы определяем метод восстановления с использованием обобщенной свертки в соответствии с (25):

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (\Psi_{s_j} * y_{s_j})_\gamma(\cdot) + (\Psi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot).$$

Тогда

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) F_\gamma y_{s_j}^{(k)}(\xi) + F_\gamma \Psi_{s_{j+1}}(\xi) F_\gamma y_{s_{j+1}}^{(k)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 \tau} F_\gamma \tilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi). \quad (33)$$

Это значит, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) = P_\tau \tilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot). \quad (34)$$

Если $\tau = t_{s_j}$, включая случай $\tau = t_{s_e}$, то

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = F_\gamma y_{s_j}^{(k)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 \tau} F_\gamma \tilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = F_\gamma (P_\tau \tilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)))(\xi),$$

так что в этом случае (34) тоже верно.

Пусть снова функции $\tilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\| P_{t_{s_j}} \tilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} &\leq \\ &\leq \left\| P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \left\| \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \\ &\leq \left\| P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - P_\tau \tilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \left\| \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \\ &\leq a(k) e^{-\theta(\tau)} + \left\| \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot) - \overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу в $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\left\| P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq e^{-\theta(\tau)}.$$

В этом неравенстве перейдем к верхней грани по всем $\tilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$, для которых

$$\left\| P_{t_{s_j}} \tilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Тогда получим $e(\tau, \bar{\delta}, \widehat{m}) \leq e^{-\theta(\tau)}$. Учитывая нижнюю оценку, доказанную ранее, получаем

$$e^{-\theta(\tau)} \leq E(\tau, \bar{\delta}) \leq e(\tau, \bar{\delta}, \widehat{m}) \leq e^{-\theta(\tau)},$$

откуда следует, что $E(\tau, \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$ и что $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Пусть $\tau > t_{s_e}$. Тогда $\widehat{\lambda}_{s_e} = 1$, а остальные множители Лагранжа равны нулю. Задача (15) примет вид

$$\left\| P_{t_{s_e}} \tilde{u}_0(\cdot) - y_{s_e}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}^2 \rightarrow \min.$$

Пусть для заданного множества $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ функции $F_\gamma y_j$, $j = 1, \dots, p$, финитны. Тогда решение $\tilde{u}_0(\cdot) = \tilde{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$ этой задачи существует и $F_\gamma \tilde{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2 t_{s_e}} F_\gamma y_{s_e}$. Неравенство (32) в этом случае доказывается по-прежнему. Теперь определяем метод $\widehat{m}$ посредством равенства

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_e}}. \quad (35)$$

Тогда

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_e})} F_\gamma y_{s_e}(\xi) = e^{-|\xi|^2 \tau} F_\gamma \tilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Это означает, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau} \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения предыдущего случая. $\square$

Основные результаты, изложенные выше в настоящей статье, анонсированы в [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1963.
2. Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. — 1955. — 36 (78), № 2. — С. 299–310.
3. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
4. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
5. Киприянов И. А. Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1967. — 89. — С. 130–213.
6. Киприянов И. А., Засорин Ю. В. О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями // Диффер. уравн. — 1992. — 28, № 3. — С. 452–462.
7. Киприянов И. А., Куликов А. А. Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя // Докл. АН СССР. — 1988. — 298, № 1. — С. 13–17.
8. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
9. Ляхов Л. Н. -гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с -потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
10. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. — 2009. — 200, № 5. — С. 37–54.
11. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб. — 2012. — 203, № 4. — С. 119–130.
12. Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавказ. мат. ж. — 2012. — 14, № 4. — С. 63–72.
13. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
14. Muravnik A. B. Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations // Funct. Differ. Equations. — 2001. — 8, № 3–4. — P. 353–363.
15. Muravnik A. B. Functional differential parabolic equations: Integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem // J. Math. Sci. — 2016. — 216, № 3. — P. 345–496.
16. Polovinkina M. V., Polovinkin I. P. Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data // Bol. Soc. Mat. Mex. — 2023. — 29. — 41.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 100–106
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-100-106

УДК 519.635.1

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

© 2024 г. В. Н. ПОПОВ, О. В. ГЕРМИДЕР

Аннотация. Предложен метод для построения решения неоднородного бигармонического уравнения в приложении к задачам механики тонких изотропных пластин. Метод основан на полиномиальной аппроксимации Чебышева смешанной частной производной восьмого порядка искомой функции. В качестве базисных функций использованы многочлены Чебышева первого рода. Предложенный метод применен для моделирования изгиба упругой изотропной прямоугольной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Проведен анализ результатов, полученных методом коллокации с применением интегрального подхода и в его отсутствии при использовании нулей многочленов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, многочлены Чебышева, прямоугольная пластина, напряженно-деформированное состояние.

ON THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF THE INHOMOGENEOUS BIHARMONIC EQUATION IN PROBLEMS OF MECHANICS OF THIN ISOTROPIC PLATES

© 2024 V. N. POPOV, O. V. GERMIDER

ABSTRACT. In this paper, we propose a method for constructing a solution of the inhomogeneous biharmonic equation as applied to problems in the mechanics of thin isotropic plates. The method is based on the Chebyshev polynomial approximation of the eighth-order mixed partial derivative of the unknown function. Chebyshev polynomials of the first kind were used as basis functions. The proposed method is used to simulate the bending of an elastic isotropic rectangular plate under the action of a transverse load. The results obtained by the collocation method are analyzed; the roots of Chebyshev polynomials of the first kind are used as collocation points.

Keywords and phrases: polynomial approximation, Chebyshev polynomials, rectangular plate, stress-strain state.

AMS Subject Classification: 65D40, 31A30

1. Введение. Многие практически значимые инженерные проблемы, связанные с деформацией тонкой пластины, приводят к необходимости решения неоднородного бигармонического уравнения (см. [1–5, 8, 10, 13]). Построение его решения вызывает ряд трудностей, в частности, связанных с наличием в этом уравнении производных четвертого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходных краевых задач (см. [5]). При этом достижение требуемой степени детализации области интегрирования предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразрезанной матрицей (см. [4]). Одним из перспективных подходов к решению проблемы является развитие методов полиномиальной аппроксимации.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00381).

Представленная работа посвящена построению решения неоднородного бигармонического уравнения с использованием системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Выбор в качестве базисных функций многочленов Чебышева обусловлен тем, что такое приближение минимизирует количество членов усеченного ряда, необходимых для аппроксимации решения [6, 9]. В представленной работе предложено развитие метода полиномиальной аппроксимации Чебышева путем представления в виде усеченного ряда по полиномам Чебышева смешанной производной восьмого порядка искомой функции и использования в качестве точек коллокации нулей этих полиномов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу моделирования прогиба упругой изотропной прямоугольной пластины, закрепленной на краях $x = 0$, $x = d_1$, $y = 0$ и $y = d_2$ и находящейся под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$. Пластина предполагается тонкой. В этом случае прогиб срединной поверхности пластины $\omega(x, y)$ будем описывать на основе бигармонического уравнения Софи Жермен—Лагранжа, которое запишем в следующем виде (см. [12]):

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — цилиндрическая жесткость пластины, h — толщина пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

В качестве граничного условия используем защемление по каждому краю прямоугольной области (см. [12]):

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (2)$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad y = 0, d_2. \quad (3)$$

3. Построение решения краевой задачи. Представим смешанную производную восьмого порядка функции $\omega(x, y)$ в виде усеченного ряда по полиномам Чебышева первого рода $\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i), j_i = \overline{0, n_i}\}$ (см. [9]) по каждой введенной новой переменной $x_i \in [-1, 1]$ ($n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$):

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1, \quad x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1. \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{\partial^8 \omega(x_1, x_2)}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} = \sum_{\substack{j_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{j_1 j_2} T_{j_1}(x_1) T_{j_2}(x_2) = (\mathbf{T}_1(x_1) \circ \mathbf{I}_{s,1}) \otimes (\mathbf{T}_2(x_2) \circ \mathbf{I}_{s,2}) \mathbf{A}, \quad (5)$$

где $\mathbf{T}_i(x_i)$ — матрица-строка размером $1 \times n'_i$ ($n'_i = n_i + 5$):

$$\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) T_1(x_i) \dots T_{n_i-1}(x_i) T_{n_i}(x_i) T_{n_i+1}(x_i) T_{n_i+2}(x_i) T_{n_i+3}(x_i) T_{n_i+4}(x_i)),$$

$\mathbf{I}_{s,i}$ — матрица-строка размером $1 \times n'_i$ с ненулевыми элементами $I_{s,i,0,j_i} = 1$ ($j_i = \overline{0, n_i}$, $i = 1, 2$), знаки $\circ$ и $\otimes$ соответственно обозначают произведение Адамара и тензорное произведение Кронекера двух матриц (см. [7]). Нумерацию строк и столбцов каждой из введенных матриц осуществляем с нуля. Матрица-столбец $\mathbf{A}$ имеет размер $n'_1 n'_2 \times 1$ и содержит неизвестные коэффициенты

$$\mathbf{A} = \left(a_{00} a_{01} \dots a_{0n_2} a'_{0n_2+1} a'_{0n_2+2} a'_{0n_2+3} a'_{0n_2+4} a_{10} \dots a_{n_1 n_2} a'_{n_1 n_2+1} \dots a'_{n_1+4 n_2+4} \right)^T.$$

Интегрируя (5) по переменной x_2 и используя обозначения для интегралов из [11], получаем

$$\frac{\partial^7 \omega(x_1, x_2)}{\partial x_1^4 \partial x_2^3} = \sum_{\substack{j_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{j_1 j_2} T_{j_1}(x_1) \int_{x_2}^{x_2} T_{j_2}(s_2) ds_2 + \sum_{j_1=0}^{n_1} a'_{j_1 n_2+1} T_{j_1}(x_1). \quad (6)$$

Последовательно k раз интегрируя (6) по переменной x_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4 \partial x_2^{3-k}} = & \sum_{\substack{j_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{j_1 j_2} T_{j_1}(x_1) \int_{x_2^{k+1}} T_{j_2}(s_2) d^{k+1} s_2 + \\ & + \sum_{j_1=0}^{n_1} T_{j_1}(x_1) \left(a'_{j_1 n_2+k+1} + \sum_{l=1}^k a'_{j_1 n_2+l} \frac{x_2^{k+1-l}}{(k+1-l)!} \right), \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для нахождения интегралов от многочленов Чебышева первого рода в (6) и (7) учитывая, что $T_0(x_2) = 1$ и $T_1(x_2) = x_2$ [9], имеем

$$\int_{x_2} T_0(s_2) ds_2 = x_2, \quad \int_{x_2} T_1(s_2) ds_2 = \frac{x_2^2}{2}, \quad (8)$$

для четных $j_2 \geq 2$ согласно [9] получаем

$$2 \int_{x_2} T_{j_2}(s_2) ds_2 = \frac{T_{j_2+1}(x_2)}{j_2+1} - \frac{T_{j_2-1}(x_2)}{j_2-1}, \quad (9)$$

для нечетных $j_2 \geq 3$:

$$2 \int_{x_2} T_{j_2}(s_2) ds_2 = \frac{T_{j_2+1}(x_2)}{j_2+1} - \frac{T_{j_2-1}(x_2)}{j_2-1} - \frac{2j_2(-1)^{(j_2+1)/2}}{j_2^2-1}. \quad (10)$$

Постоянная в (10) получена с использованием следующего представления (см. [9]):

$$T_{j_2}(x_2) = \sum_{k=0}^{[j_2/2]} \chi_k x_2^{j_2-2k}, \quad \chi_k = \frac{(-1)^k 2^{j_2-2k-1} j_2 (j_2-k-1)!}{(j_2-2k)! k!}. \quad (11)$$

Здесь $[j_2/2]$ обозначает целую часть числа $j_2/2$.

Для нечетных $j_2 \geq 3$ из (11) получаем

$$\frac{\chi_{(j_2+1)/2}}{j_2+1} - \frac{\chi_{(j_2-1)/2}}{j_2-1} = \frac{(-1)^{(j_2+1)/2}}{j_2+1} - \frac{(-1)^{(j_2-1)/2}}{j_2-1} = \frac{2j_2(-1)^{(j_2+1)/2}}{j_2^2-1}. \quad (12)$$

Далее, подставляя (8)–(12) в (6) и (7), имеем

$$\frac{\partial^{8-k} w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4 \partial x_2^{4-k}} = (T_1(x_1) \circ I_{s,1}) \otimes \left((T_2(x_2) G_2^k) \circ I_{s,2} + P_{k,2}(x_2) \right) A, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (13)$$

где G_2 — квадратная матрица размером $n'_2 \times n'_2$, в которой последний столбец нулевой, ненулевые элементы первой строки:

$$G_{2,01} = \frac{1}{4}, \quad G_{2,02j_2+1} = (-1)^{[(j_2+1)/2]} \frac{2j_2+1}{(2j_2+1)^2-1}, \quad j_2 = \overline{1, [n'_2/2]-1},$$

ненулевые элементы второй строки: $G_{2,10} = 1$, $G_{2,12} = -1/2$, одиночные ненулевые элементы предпоследней и последней строк: $G_{2,n'_2-2n'_2-3} = 1/(2n'_2-4)$, $G_{2,n'_2-1n'_2-2} = 1/(2n'_2-2)$, парные ненулевые элементы остальных строк:

$$G_{2,j_2 j_2+(-1)^i} = \frac{(-1)^{i+1}}{j_2^2}, \quad i = 1, 2, \quad j_2 = \overline{2, n'_2-3};$$

$P_{k,2}(x_2)$ ($k = \overline{1, 4}$) — матрицы-строки размером $1 \times n'_2$ каждая, в $P_{1,2}(x_2)$ один ненулевой элемент $P_{1,2,0n_2+1}(x_2) = 1$, в остальных матрицах $P_{k,2}(x_2)$ ненулевые элементы

$$P_{k,2,0n_2+k}(x_2) = 1, \quad P_{k,2,0n+j}(x_2) = \frac{x_2^{k-j}}{(k-j)!}, \quad j = \overline{1, k-1}, \quad k = \overline{2, 4}.$$

При $n_2 = 4$ приведем развернутую форму матрицы $\mathbf{G}_2$:

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{24} & 0 & -\frac{7}{48} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично, последовательно интегрируя (13) по переменной x_1 , получаем

$$\frac{\partial^{8-k_1-k_2} w(x_1, x_2)}{\partial x_1^{4-k_1} \partial x_2^{4-k_2}} = \mathbf{Q}_{k_1-1,i}(x_1) \otimes \mathbf{Q}_{k_2-1,i}(x_2) \mathbf{A}, \quad k_i = \overline{0,4}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

$$\mathbf{Q}_{0,i}(x_i) = \mathbf{T}_i(x_i) \circ \mathbf{I}_{s,i}, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

$$\mathbf{Q}_{k_i,i}(x_i) = (\mathbf{T}_i(x_i) \mathbf{G}_i^{k_i}) \circ \mathbf{I}_{s,i} + \mathbf{P}_{k_i,i}(x_i), \quad k_i = \overline{1,4}, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где матрицы $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{P}_{k_1,1}(x_1)$ определяются аналогичным образом, что и матрицы $\mathbf{G}_2$ и $\mathbf{P}_{k_2,2}(x_2)$.

В качестве точек коллокации в (13) для переменных x_1 и x_2 будем использовать нули многочлена $T_{n_i+1}(x_i)$ (см. [9]):

$$x_{i,j_i} = \cos \left(\frac{\pi(2n_i - 2j_i + 1)}{2(n_i + 1)} \right), \quad j_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Значения полиномов Чебышева в точках (13) находим, используя геометрическое представление $T_{q_i}(x_i) = \cos(q_i \arccos x_i)$:

$$T_{q_i}(x_{i,j_i}) = \cos \left(\frac{\pi q_i(2n_i - 2j_i + 1)}{2(n_i + 1)} \right), \quad j_i, q_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя (4)–(17) в (1) и используя (2) и (3), приходим к системе линейных $n'_1 n'_2$ -уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{B}_i, \quad (18)$$

где $\mathbf{B}_i$ ($i = \overline{1,5}$) — квадратные матрицы размером $n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2$, $\mathbf{F} = (F_{01} F_{02}, \dots, F_{n'_1 n'_2})^T$ — матрица-столбец размером $n'_1 n'_2 \times 1$ с элементами $F_{k_1 k_2} = q(d_1(x_{1,k_1} + 1)/2, d_2(x_{2,k_2} + 1)/2)/D$ за исключением нулевых элементов при $k_1 = \overline{n_1 + 1, n_1 + 4}$ или $k_2 = \overline{n_2 + 1, n_2 + 4}$, которые соответствуют граничным условиям (2) и (3). Ненулевые строки $\mathbf{B}_i$ ($i = \overline{1,3}$) получены из уравнения

(1) в узлах (17) с использованием (14)–(16):

$$B_1 = \kappa_1 \begin{bmatrix} Q_{0,1}(x_{1,0}) \\ Q_{0,1}(x_{1,1}) \\ \dots \\ Q_{0,1}(x_{1,n_1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} Q_{4,2}(x_{2,0}) \\ Q_{4,2}(x_{2,1}) \\ \dots \\ Q_{4,2}(x_{2,n_2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \kappa_2 \begin{bmatrix} Q_{4,1}(x_{1,0}) \\ Q_{4,1}(x_{1,1}) \\ \dots \\ Q_{4,1}(x_{1,n_1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} Q_{0,2}(x_{2,0}) \\ Q_{0,2}(x_{2,1}) \\ \dots \\ Q_{0,2}(x_{2,n_2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \kappa_3 \begin{bmatrix} Q_{2,1}(x_{1,0}) \\ Q_{2,1}(x_{1,1}) \\ \dots \\ Q_{2,1}(x_{1,n_1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} Q_{2,2}(x_{2,0}) \\ Q_{2,2}(x_{2,1}) \\ \dots \\ Q_{2,2}(x_{2,n_2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa_i = \frac{16}{d_i^4}, \quad i = 1, 2, \quad \kappa_3 = \frac{32}{d_1^2 d_2^2}.$$

Ненулевые строки матриц B_4 и B_5 соответствуют граничным условиям (2) и (3):

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \kappa_4 Q_{3,1}(-1) \\ \kappa_4 Q_{3,1}(1) \\ Q_{4,1}(-1) \\ Q_{4,1}(1) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} Q_{4,2}(x_{2,0}) \\ Q_{4,2}(x_{2,1}) \\ \dots \\ Q_{4,2}(x_{2,n_2}) \\ \kappa_5 Q_{3,2}(-1) \\ \kappa_5 Q_{3,2}(1) \\ Q_{4,2}(-1) \\ Q_{4,2}(1) \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} Q_{4,1}(x_{1,0}) \\ Q_{4,1}(x_{1,1}) \\ \dots \\ Q_{4,1}(x_{1,n_1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \kappa_5 Q_{2,2}(-1) \\ \kappa_5 Q_{2,2}(1) \\ Q_{4,2}(-1) \\ Q_{4,2}(1) \end{bmatrix},$$

где $\kappa_4 = 2/d_1$, $\kappa_5 = 2/d_2$.

Для приведения матрицы B в (18) к разреженной и уменьшения числа вычислений при ее заполнении используем свойство конечных сумм многочленов Чебышева в точках (17) (см. [9]):

$$\sum_{j_i=0}^{n_i} T_{l_i}(x_{i,j_i}) T_{q_i}(x_{i,j_i}) = \gamma_{l_i} \delta_{l_i, q_i}, \quad i = 1, 2,$$

где δ_{l_i, q_i} — символ Кронекера, коэффициент $\gamma_{l_i} = 1/2$, если $l_i = 0$, иначе $\gamma_{l_i} = 1$. В этом случае левые и правые части уравнения (18) умножаем на матрицу $S = S_1 \otimes S_2$, где отличные от нуля элементы квадратных матриц S_1 и S_2 , имеющих размер соответственно $n'_i \times n'_i$, определяются как $S_{i,0,j_i} = 1/(n_i + 1)$, $S_{i,q_i,j_i} = 2T_{q_i}(x_{i,j_i})/(n_i + 1)$, ($j_i = \overline{0, n_i}$, $j_i = \overline{1, n_i}$), $S_{n_i+k_i, n_i+k_i} = 1$, ($k_i = \overline{1, 4}$, $i = 1, 2$). В результате получаем

$$B_S A = F_S, \quad B_S = \sum_{i=1}^5 B_{S,i}, \quad (19)$$

где $B_{S,i} = S B_i$ ($i = \overline{1, 5}$), $F_S = S F$. Решение уравнения (19) находим LU -методом. Зная элементы матрицы A , функцию $w(x, y)$ получаем, используя (14).

4. Представление и анализ результатов. Рассмотрим изгиб пластины, на которую действует распределенная нагрузка:

$$q(x, y) = q_0 \left(\cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) + \frac{d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2} \left(\frac{1}{d_1^2} \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) + \frac{1}{d_2^2} \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) \right) \right),$$

n	$\ E_n\ _\infty$		
	ChPIn	ChP	ChPS
6	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
9	$5,1 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$
12	$2,7 \cdot 10^{-11}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$
18	$1,2 \cdot 10^{-12}$	$3,5 \cdot 10^{-12}$	$9,8 \cdot 10^{-15}$

Таблица 1. Значения погрешности полученного решения

где $q_0 = 10^5$ Па. В этом случае аналитическое решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$\omega(x, y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \right) \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) \right). \quad (20)$$

При проведении вычислений предложенным методом (ChPIn) использованы значения физических параметров из [1, 2]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0,1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,28$, $n_{1,2} = n$. В таблице 1 представлены результаты вычислений, где для расчета погрешности построенного решения применены 100 равномерно распределенных контрольных точек (x_i, y_j) (см. [1]):

$$\|E_n\|_\infty = \frac{\max_{i,j} |\omega(x_i, y_j) - w(x_i, y_j)|}{\max_{i,j} |\omega(x_i, y_j)|}.$$

В таблице приведены также значения погрешности численного решения краевой задачи (1)–(3), полученного на основе представления в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева первого рода самой искомой функции. Результаты вычислений в этом случае без использования интегрального подхода в таблице имеют аббревиатуру ChP. Здесь приходим к системе линейных $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ уравнений, полученных при использовании точек (17), и осуществляем замену уравнений согласно граничным условиям (2) и (3) в точках, для которых $x_1 = x_{1,0}$, x_{1,n_1} или $x_2 = x_{2,0}$, x_{2,n_2} , соответственно на уравнения

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = -1, 1, \\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -1, 1. \end{aligned}$$

В последнем столбце таблицы представлены результаты полиномиальной интерполяции (ChPS) аналитического решения (20), коэффициенты в разложении которого определяются с использованием значений $\omega(d_1(x_1 + 1)/2, d_2(x_2 + 1)/2)$, вычисленных в узлах (17):

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}'_1{}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_2{}^{-1} \mathbf{W},$$

где элементы квадратных матриц $\mathbf{S}'_1$ и $\mathbf{S}'_2$, имеющих размер $(n_i + 1) \times (n_i + 1)$, равны соответствующим элементам матриц $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$:

$$S'_{i,0,j_i} = S_{i,0,j_i}, \quad S'_{i,q_i,j_i} = S_{i,q_i,j_i}, \quad j_i = \overline{0, n_i}, \quad j_i = \overline{1, n_i},$$

$\mathbf{W} = \left(w_{00} \ w_{01} \ \dots \ w_{n_1 \ n_2-1} \ w_{n_1 \ n_2} \right)^T$ — матрица-столбец размера $n'_1 n'_2 \times 1$, элементы которой равны $w_{k_1 k_2} = \omega(d_1(x_{1,k_1} + 1)/2, d_2(x_{2,k_2} + 1)/2)$, $(k_i = 0, n_i, i = 1, 2)$.

Из таблицы видно, что высокая точность полученного решения с использованием нулей многочленов Чебышева первого рода достигается при сравнительно малых значениях n .

5. Заключение. В работе методом полиномиальной аппроксимации с использованием интегрального подхода построено решение задачи расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольной изотропной пластины под действием заданной поперечной нагрузки для случая

граничного условия заземленного края. Показано, что построенное решение с высокой точностью приближает аналитическое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев В. А., Брындин Л. С., Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шапеев В. П.* Н-, Р- и НР-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2022. — 62, № 4. — С. 531–552.
2. *Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П.* Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычисл. технол. — 2013. — 18, № 6. — С. 31–43.
3. *Карчевский А. Л.* Вычисление напряжений в угольном пласте с учетом диффузии газа // Сиб. ж. индустр. мат. — 2016. — 19, № 4. — С. 31–43.
4. *Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И.* Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2013. — 1. — С. 52–62.
5. *Шапеев В. П., Брындин Л. С., Беляев В. А.* НР-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2022. — 26, № 3. — С. 556–572.
6. *Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E.* A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Appl. Math. Comput. — 2018. — 322. — P. 55–65.
7. *Liu S., Trenkler G.* Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // Int. J. Inform. Syst. Sci. — 2008. — 4, № 1. — P. 160–177.
8. *Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W.* A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Eng. Anal. Bound. Elements. — 2022. — 143. — P. 687–699.
9. *Mason J., Handscomb D.* Chebyshev Polynomials. — Florida: CRC Press, 2003.
10. *Shao W., Wu X.* An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Appl. Math. Model. — 2015. — 39, № 9. — P. 2554–2569.
11. *Shao W., Wu X., Wang C.* Numerical study of an adaptive domain decomposition algorithm based on Chebyshev tau method for solving singular perturbed problems // Appl. Num. Math. — 2017. — 118. — P. 19–32.
12. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. — New York: McGraw-Hill, 1959.
13. *Ye X., Zhang Sh.* A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Res. Appl. Math. — 2022. — 15. — P. 100318.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00381).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Попов Василий Николаевич

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: v.popov@narfu.ru

Гермидер Оксана Владимировна

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: o.germider@narfu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 107–114
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-107-114

УДК 517.977, 519.7

l -ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. С. С. ПОСТНОВ

Аннотация. Рассматриваются многомерные динамические системы, состояние которых описывается системой линейных дифференциальных уравнений дробного порядка и при этом в каждом из уравнений системы порядок оператора дробного дифференцирования разный. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто или в смысле Римана—Лиувилля. Исследуются задачи оптимального управления и оптимального оценивания состояния для рассматриваемых систем. Показано, что при определённых условиях обе задачи сводятся к l -проблеме моментов. Для полученной проблемы проверены условия разрешимости и в ряде случаев построены точные решения.

Ключевые слова: оптимальное управление, оптимальное оценивание, динамическая система, дробная динамика, дробная производная, l -проблема моментов.

l -PROBLEM OF MOMENTS IN PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL AND STATE ESTIMATION FOR MULTIDIMENSIONAL FRACTIONAL LINEAR SYSTEMS

© 2024 S. S. POSTNOV

ABSTRACT. In this paper, we consider multidimensional dynamical systems whose states are described by systems of linear fractional differential equations of different order. We examine problems of optimal control and optimal state estimation for systems with the Caputo and Riemann–Liouville fractional differentiation operators. We prove that under certain conditions both problems can be reduced to the l -problem of moments. For the resulting problem, the solvability conditions are verified and, in a number of cases, exact solutions are constructed.

Keywords and phrases: optimal control, optimal estimation, dynamical system, fractional dynamics, fractional derivative, l -problem of moments.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 34K35, 34A08

1. Введение. Как известно, метод моментов широко применяется для поиска управления, оптимального в смысле минимальности нормы управления или времени перехода в заданное состояние при явном ограничении на норму управления (см. [2, ч. 2]). С помощью этого метода возможно построить точное решение задач оптимального управления для линейных (по управлению) систем с сосредоточенными параметрами, а также приближённые решения для линейных (по управлению) систем с распределёнными параметрами (см. [1, гл. 3]). Данный метод применим и к исследованию задач оптимального управления системами, которые описываются дифференциальными уравнениями дробного порядка (см. [3]).

Н. Н. Красовским было рассмотрено иное применение метода моментов: задача «наблюдения в случайных обстоятельствах» или оценивания состояния некоторой системы по результатам наблюдений в условиях действия внешних возмущений (см. [2, § 46]). Аналогичная задача была исследована и для одно- и двумерных линейных систем дробного порядка (см. [4]).

Ранее задачи оптимального управления и оценивания состояния системы были рассмотрены для линейных одномерных систем дробного порядка и для некоторых двумерных и многомерных систем частного вида (см. [3, 4] и ссылки в этих работах). В настоящей работе аналогичное исследование проводится для более общего случая линейных многомерных систем произвольной конечной размерности с коэффициентами, зависящими от времени, и различным порядком операторов дробного дифференцирования в каждом из уравнений, описывающих поведение системы.

2. Предварительные сведения. Рассматриваются многомерные линейные динамические системы дробного порядка, поведение которых описывается уравнением следующего вида:

$${}_t D_t^{\alpha_i} q_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) q_j(t) + u_i(t) + f_i(t), \quad t \in (t_0, T], \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где ${}_t D_t^{\alpha_i}$ — оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha_i \in (0, 1)$, $q_i(t)$ — компоненты вектора состояния системы, $u_i(t)$ — компоненты вектора управления, $f_i(t)$ — компоненты вектора возмущения, $a_{ij}(t)$ — коэффициенты, в общем случае зависящие от времени. Оператор дробного дифференцирования в формуле (1) понимается либо в смысле Римана—Лиувилля, либо в смысле Капуто (см. [6, Ch. 2]). Соответственно, начальные условия для системы (1) ставятся либо в нелокальном, либо в локальном виде:

$$\lim_{t \rightarrow t_0+} [{}_t I_t^{1-\alpha_i} q_i(t)] = q_i^0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$q_i(t_0) = q_i^0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где ${}_t I_t^{1-\alpha_i}$ — оператор дробного интегрирования Римана—Лиувилля (см. [6, Ch. 2]).

В [5, Theorems 5, 6] получены аналитические решения уравнения (1) с начальными условиями (2) или (3), которые могут быть записаны в виде

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^N \left(\tilde{Z}_{ij}(t, t_0) q_j^0 + \int_{t_0}^t Z_{ij}(t, \tau) [u_j(\tau) + f_j(\tau)] d\tau \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где $\tilde{Z}_{ij}(t, t_0) = Z_{ij}(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (1) понимается в смысле Римана—Лиувилля, и $\tilde{Z}_{ij}(t, t_0) = {}^C Z_{ij}(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (1) понимается в смысле Капуто. Функции $Z_{ij}(t, t_0)$ и ${}^C Z_{ij}(t, t_0)$ в общем случае вычисляются как решение однородного уравнения (1) с оператором дробного дифференцирования Римана—Лиувилля и Капуто соответственно (см. [5, Sec. 4]). Для функций $Z_{ij}(t, \tau)$ справедлива следующая оценка (см. [5, Lemma 5]):

$$|Z_{ij}(t, \tau)| \leq \frac{\text{const}}{(t - \tau)^{1-\alpha_i}}. \quad (5)$$

Сформулируем l -проблему моментов, к которой далее будут сведены задачи оптимального управления и оценивания состояния.

l -Проблема моментов. Пусть дана система функций $g_n(t) \in L_{p'}(t_0, T]$, $p' \geq 1$, и набор чисел c_n , $n = 1, \dots, N$ (называемых моментами), хотя бы одно из которых отлично от нуля. Необходимо построить такую функцию $u(t) \in L_p(t_0, T]$, $p > 1$, $1/p + 1/p' = 1$, что выполняются соотношения:

$$\int_{t_0}^T g_n(T, \tau) u(\tau) d\tau = c_n(T), \quad (6)$$

$$\|u\|_{L_p(t_0, T]} \leq l. \quad (7)$$

Следует отметить, что функции $g_n(T, t)$ и $u(t)$ могут быть и вектор-функциями: $g_n(T, t) = (g_n^1(T, t), \dots, g_n^N(T, t))$, $u(t) = (u^1(t), \dots, u^N(t))$.

Проблема моментов вида (6)–(7) разрешима, если выполнено одно из эквивалентных условий (см. [1, 2]):

- (i) функции $g_n(\tau)$ линейно независимы или среди них можно выделить подсистему линейно независимых функций;
- (ii) выполняется неравенство $\Lambda_N > 0$, где число Λ_N определяет минимальное значение нормы (7) и находится из условия

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_N} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^N \left| \sum_{i=1}^N \xi_i g_i^k(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \frac{1}{\Lambda_N}, \quad (8)$$

где ξ_i — такие числа, что

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = 1. \quad (9)$$

Решением l -проблемы моментов, обладающим минимальной нормой, является вектор-функция, компоненты которой имеют следующий вид:

$$u^k(t) = \Lambda_N^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t) \right), \quad t \in (t_0, T], \quad k = 1, \dots, N, \quad (10)$$

где ξ_i^* — числа, доставляющие минимум в задаче (8)–(9).

Решением l -проблемы моментов, обладающим минимальным носителем, является вектор-функция, компоненты которой имеют следующий вид:

$$u^k(t) = l^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t) \right), \quad t \in (t_0, T^*], \quad k = 1, \dots, N, \quad (11)$$

где T^* определяется как минимальное вещественное положительное значение T , для которого выполнено неравенство $\Lambda_N \leq l$.

Следует отметить, что моменты c_n , вообще говоря, параметрически зависят от T , что определяет (в соответствии с (9)) и зависимость от данного параметра чисел ξ_i^* .

3. Задача оптимального управления. Будем рассматривать следующую формулировку задачи оптимального управления. Найти управление $u(t) \in L_p(t_0, T]$, чтобы система (1) перешла из начального состояния, определяемого условиями (2) или (3), в конечное состояние, определяемое условием

$$q(T) = q^T, \quad (12)$$

и при этом было выполнено одно из следующих требований:

- (i) норма управления $\|u(t)\|_{L_p(t_0, T]}$ была минимальной (среди всех допустимых управлений) при заданном времени T ;
- (ii) время T было минимальным при заданном ограничении (7) на норму управления.

Теорема 1. Пусть справедливы следующие выражения:

$$c_n(T) = q_n(T) - \sum_{k=1}^N \left(\tilde{Z}_{nk}(T, t_0) q_k^0 - \int_{t_0}^T Z_{nk}(T, \tau) f_k(\tau) d\tau \right), \quad (13)$$

$$g_n^k(T, \tau) = Z_{nk}(T, \tau), \quad n = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Поставленная выше задача оптимального управления сводится к проблеме моментов (6)–(7), где моменты $c_n(T)$ и функции $g_n(T, \tau)$ определяются выражениями (13) и (14) соответственно, при выполнении следующих условий:

$$\alpha_n > \frac{1}{p}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Доказательство. Воспользуемся формулами (4) и запишем решение системы (1) в момент времени $t = T$:

$$q_n(T) = \sum_{k=1}^N \left(\tilde{Z}_{nk}(T, t_0) q_k^0 + \int_{t_0}^T Z_{nk}(T, \tau) [u_k(\tau) + f_k(\tau)] d\tau \right), \quad n = 1, \dots, N.$$

Данное выражение с учётом обозначений (13) и (14) может быть переписано в виде проблемы моментов (6). Теперь необходимо убедиться, что функции, определяемые выражением (14), являются элементами пространства $L_{p'}(t_0, T]$, $p' > 1$. Оценим норму этих функций в пространстве $L_{p'}(t_0, T]$, воспользовавшись неравенством (5):

$$\left(\int_{t_0}^T \left| \sum_{k=1}^N Z_{nk}(T, \tau) \right|^{p'} d\tau \right)^{1/p'} \leq N \left(\int_{t_0}^T \left| \frac{\text{const}}{(T - \tau)^{1-\alpha_n}} \right|^{p'} d\tau \right)^{1/p'}.$$

Выражение в правой части будет ограничено при выполнении условий (15). Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Условия (15) обобщают условия, полученные в [3, 4] при рассмотрении частных случаев системы (1).

Следствие 1. Пусть матрица $Z(T, \tau)$ имеет хотя бы один ненулевой элемент (и, следовательно, в системе функций $g_n(T, \tau)$ можно выделить подсистему линейно независимых функций) и условия (15) выполнены. Тогда проблема моментов (6)–(7), где моменты $c_n(T)$ и функции $g_n(T, \tau)$ определяются выражениями (13) и (14) соответственно, является разрешимой, и её решение определяется формулами (10)–(11).

Следствие 2. Пусть матрица $A = \|a_{nk}\|_1^N$ не зависит от времени. В этом случае элементы матрицы $Z(T, \tau)$ выражаются формулой

$$Z_{nk}(T, \tau) = \frac{E_{\alpha_n, \alpha_n} [a_{nk}(T - \tau)^{\alpha_n}]}{(T - \tau)^{\alpha_n}}.$$

(см. [5]). Если выполнены условия (15), то проблема моментов (6)–(7), где моменты $c_n(T)$ и функции $g_n(T, \tau)$ определяются выражениями (13) и (14) соответственно, будет разрешимой даже в случаях, когда матрица A является нулевой или вырожденной.

4. Задача оценивания состояния системы. Рассмотрим теперь ситуацию, когда динамика некоторой системы описывается системой уравнений (1) при $u(t) = f(t) = 0$, но состояние $q(t)$ недоступно для непосредственного измерения, а может быть восстановлено с определённой погрешностью по результатам измерения состояния $z(t)$ другой системы, динамика которой подчиняется одномерному уравнению:

$${}_{t_0}D_t^\beta z(t) = F(t)z(t) + \sum_{n=1}^N G_n(t)q_n(t) + \Delta(t), \quad t \geq t_0, \quad (16)$$

где ${}_{t_0}D_t^\beta$ — оператор дробного дифференцирования порядка $\beta \in (0, 1)$, понимаемый, как и выше, в смысле либо Капуто, либо Римана—Лиувилля; $\Delta(t)$ — внешнее возмущение; $F(t)$ и $G_n(t)$ — зависящие от времени коэффициенты, $n = 1, \dots, N$. Будем далее называть функцию $z(t)$ наблюдением.

Примем, что возмущение $\Delta(t)$ представляет собой последовательность δ -импульсов, моменты появления которых t_i подчиняются распределению Пуассона с математическим ожиданием λ (как и в [2, § 46]):

$$\Delta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i \delta(t - t_i), \quad (17)$$

η_i — случайные величины, принимающие с одинаковой вероятностью значения $\pm \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Начальные условия для наблюдения поставим, как и выше, в локальном или нелокальном виде для случаев, когда оператор ${}_t D_t^\beta$ понимается в смысле Капуто или Римана—Лиувилля соответственно:

$$\lim_{t \rightarrow t_0+} \left[{}^{RL} I_t^{1-\beta} z(t) \right] = z^0, \quad (18)$$

$$z(t_0) = z^0. \quad (19)$$

Поставим следующую задачу оценивания состояния системы, аналогичную рассмотренной Н. Н. Красовским задаче о «наблюдении в случайных обстоятельствах» для систем целого порядка (см. [2, § 46]): найти оптимальную операцию $\varphi[t, z(t)]$, восстанавливающую компоненту состояния системы $q_i(t)$ по наблюдению $z(t)$ с наименьшей возможной погрешностью w ,

$$q_i(t) = \varphi[t, z(t)] + w, \quad (20)$$

$$M\{w^2\} \rightarrow \min, \quad (21)$$

где $M\{w^2\}$ — математическое ожидание погрешности w . При этом должно выполняться условие $w = 0$ при $\Delta(t) = 0$.

Замечание 2. Можно пополнить вектор $q(t)$ компонентой $z(t)$ и в этом случае рассматривать поставленную задачу оценивания состояния системы как задачу восстановления одной из координат нового (пополненного) вектора по набору других.

Используя формулу (4) в одномерном случае и заменяя функции $q_i(t)$ и $Z_{ij}(t, \tau)$ на функции $z(t)$ и $Q(t, \tau)$, а неоднородность $u_i(t) + f_i(t)$ на неоднородность $\sum_{n=1}^N G_n(t)q_n(t) + \Delta(t)$, запишем решение уравнения (16):

$$z(t) = \tilde{Q}(t, t_0)z^0 + \int_{t_0}^t Q(t, \tau) \left[\sum_{n=1}^N G_n(\tau)q_n(\tau) + \Delta(\tau) \right] d\tau, \quad (22)$$

где $\tilde{Q}(t, t_0) = Q(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (16) понимается в смысле Римана—Лиувилля, и $\tilde{Q}(t, t_0) = {}^C Q(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (16) понимается в смысле Капуто. Функции $Q(t, t_0)$ и ${}^C Q(t, t_0)$ в общем случае вычисляются как решение однородного уравнения (16) с оператором дробного дифференцирования Римана—Лиувилля и Капуто соответственно (см. [5, Sec. 4]). Для функций $Q(t, \tau)$ справедлива оценка вида (5).

Первое слагаемое в формуле (22) не зависит ни от состояния $q(t)$, ни от возмущения $\Delta(t)$, поэтому можно рассматривать задачу оценивания для функции

$$\Xi(t) = z(t) - \tilde{Q}(t, t_0)z^0 = \int_{t_0}^t Q(t, \tau) \left[\sum_{n=1}^N G_n(\tau)q_n(\tau) + \Delta(\tau) \right] d\tau. \quad (23)$$

Соответственно, поставленная выше задача оптимального оценивания состояния может быть переформулирована: найти оптимальную операцию $\varphi[\Xi(t)]$, такую что

$$\varphi \left[\int_{t_0}^t Q(t, \tau) \sum_{n=1}^N G_n(\tau) q_n(\tau) d\tau \right] = q_i(t), \quad (24)$$

$$M \left\{ \left[\varphi \left[\int_{t_0}^t Q(t, \tau) \Delta(\tau) d\tau \right] \right]^2 \right\} \rightarrow \min. \quad (25)$$

Будем искать оптимальную операцию $\varphi[t, z(t)]$ в виде

$$\varphi[t, z(t)] = \varphi[\Xi(t)] = \int_{t_0}^t \Xi(\tau) dV(\tau), \quad (26)$$

где $V(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением.

Теорема 2. Пусть $G_n(\tau) \in C_{\gamma_n}^1 = \left\{ f(t) = (t - t_0)^{\gamma_n} \tilde{f}(t), \tilde{f} \in C^1(t_0, \infty) \right\}$, $G_n(\tau)$ отлична от константы 0 на интервале $(t_0, t]$, $\sum_{j=1}^N \tilde{Z}_{ij}(t, t_0) q_j^0 \neq 0$ и выполнены следующие условия:

$$\gamma_n + \alpha_n > \frac{1}{2}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Тогда поставленная задача оценивания (24)–(25) при фиксированном t эквивалентна следующей проблеме моментов: найти такую функцию $U(t, \zeta) \in L_2(0, t]$ с минимальной нормой, что

$$\int_{t_0}^t g(\zeta) U(t, \zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \tilde{Z}_{ij}(t, t_0) q_j^0, \quad \zeta \in (t_0, t], \quad (28)$$

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^N G_n(\zeta) \sum_{k=1}^N \tilde{Z}_{nk}(\zeta, t_0) q_k^0, \quad (29)$$

$$U(t, \zeta) = \int_{\zeta}^t Q(\tau, \zeta) dV(\tau). \quad (30)$$

Доказательство. Перепишем формулу (24) с учётом (26) и поменяем в полученном выражении порядок интегрирования:

$$\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{\tau} Q(\tau, \zeta) \sum_{n=1}^N G_n(\zeta) q_n(\zeta) d\zeta \right] dV(\tau) = \int_{t_0}^t \sum_{n=1}^N G_n(\zeta) q_n(\zeta) d\zeta \left[\int_{\zeta}^t Q(\tau, \zeta) dV(\tau) \right] = q_i(t). \quad (31)$$

Внутренний интеграл в полученном выражении представляет собой функцию $U(t, \zeta)$ (см. (30)). Тогда будем иметь

$$\int_{t_0}^t U(t, \zeta) \sum_{n=1}^N G_n(\zeta) q_n(\zeta) d\zeta = q_i(t). \quad (32)$$

Функция $q_i(t)$ является решением уравнения (1) при $u_i(t) = f_i(t) = 0$ с начальным условием (2) или (3) и может быть записана в явном виде с помощью формулы (4). Подставив получившееся выражение в уравнение (32) и выражение в правой части отличным от нуля, получим выражение (28), где функция $g(\zeta)$ определяется формулой (29).

Рассмотрим теперь величину в фигурных скобках в выражении (25). Используя выражение (26), можно, по аналогии с выражением (31), поменять порядок интегрирования и получить формулу:

$$\left[\varphi \left[\int_{t_0}^t Q(t, \tau) \Delta(\tau) d\tau \right] \right]^2 = \left[\int_{t_0}^t \Delta(\zeta) U(t, \zeta) d\zeta \right]^2.$$

Возмущение (17), как указывалось выше, представляет собой последовательность δ -импульсов, моменты появления которых подчиняются распределению Пуассона, а амплитуды с одинаковой вероятностью принимают значение $\pm \varepsilon$. В [2, § 46] было показано, что для такой модели возмущения справедливо соотношение

$$M \left\{ \left[\int_{t_0}^t \Delta(\zeta) U(t, \zeta) d\zeta \right]^2 \right\} = \varepsilon^2 \lambda \int_{t_0}^t U^2(t, \zeta) d\zeta = \varepsilon^2 \lambda \|U\|_{L_2(t_0, t]}^2. \quad (33)$$

Таким образом, требование минимизации погрешности (25) в данном случае эквивалентно требованию минимизации нормы функции $U(t, \zeta) \in L_2(t_0, t]$.

Итак, показано, что исходная задача (24)–(25) при фиксированном t эквивалентна одномерной проблеме моментов вида (28) для функции $U(t, \zeta) \in L_2(t_0, t]$, определяемой формулой (30), относительно известной функции $g(\zeta)$, определяемой формулой (29), и момента $c = \sum_{j=1}^N \tilde{Z}_{ij}(t, t_0) q_j^0$, который по условию теоремы отличен от нуля.

Поскольку $\sum_{j=1}^N \tilde{Z}_{ij}(t, t_0) q_j^0$ и $G_n(\tau)$ отлична от константы 0, то функция $g(\zeta)$ на полуинтервале $(t_0, t]$ отлична от нуля. Для нормы функции $g(\zeta)$ в пространстве $L_2(t_0, t]$ справедливо неравенство

$$\|g\|_{L_2(t_0, t]} \leq \sum_{n,k=1}^N |q_j^0| \|G_n(\zeta) \tilde{Z}_{nk}(\zeta, t_0)\|_{L_2(t_0, t]}. \quad (34)$$

По условию теоремы $G_n(\tau) \in C_{\gamma_n}^1 = \{f(t) = (t - t_0)^{\gamma_n} \tilde{f}(t), \tilde{f} \in C^1(t_0, \infty)\}$, также справедлива оценка (5); следовательно, при выполнении условий (27) выражение в правой части неравенства (34) будет ограничено. Следовательно, норма функции $g(\zeta)$ в пространстве $L_2(t_0, t]$ будет определена. Теорема доказана. $\square$

Следствие 3. Можно непосредственно убедиться, что в одномерном случае задача условной оптимизации (8)–(9) имеет единственное решение:

$$\Lambda = \frac{|c|}{\|g\|_{L_2(t_0, t]}}.$$

Если теорема 2 справедлива и норма $\|g\|_{L_2(t_0, t]}$ определена, то $\Lambda > 0$, и проблема моментов (28) разрешима.

Замечание 3. Если рассматривать более общий случай $U \in L_p(t_0, t]$, $p > 1$, $g \in L_{p'}(t_0, t]$, $p' \geq 1$, $1/p + 1/p' = 1$, то условия (27) запишутся в виде

$$\gamma_n + \alpha_n > \frac{1}{p}, \quad n = 1, \dots, N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

3. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование// Автомат. телемех. — 2014. — № 5. — С. 3–17.
4. *Постнов С. С.* Об использовании метода моментов для оптимального оценивания состояния систем дробного порядка с возмущением импульсного типа// Пробл. мат. анал. — 2023. — № 121. — С. 93–102.
5. *Bourdin L.* Cauchy–Lipschitz theory for fractional multi-order dynamics: State-transition matrices, Duhamel formulas and duality theorems// Differ. Integral Equations. — 2018. — 31, № 7–8. — P. 559–594.
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Постнов Сергей Сергеевич

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, Москва

E-mail: postnov.sergey@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 115–123
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-115-123

УДК 517.544

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2024 г. А. Б. РАСУЛОВ, Н. В. ЯКИВЧИК

Аннотация. В работе построено общее решение уравнения Коши–Римана с сильными особенностями в младшем коэффициенте и исследована краевая задача линейного сопряжения в области с кусочно гладкой границей.

Ключевые слова: уравнения Коши–Римана, сильная особенность, оператор Помпейю–Векуа, кусочно гладкая граница, задача линейного сопряжения.

LINEAR CONJUGATION PROBLEM FOR THE CAUCHY–RIEMANN EQUATION WITH A STRONG SINGULARITY IN THE LOWEST COEFFICIENT IN A DOMAIN WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARY

© 2024 А. Б. RASULOV, N. V. YAKIVCHIK

ABSTRACT. In this work, a general solution of the Cauchy–Riemann equation with strong singularities in the lowest coefficient is constructed and the boundary-value problem of linear conjugation in a domain with a piecewise smooth boundary is examined.

Keywords and phrases: Cauchy–Riemann equations, strong singularity, Pompeiu–Vekua operator, piecewise smooth boundary, linear conjugation problem.

AMS Subject Classification: 30E20

1. Интегральные представления решений в конечной области. Пусть односвязная область D^+ ограничена простым кусочно гладким ляпуновским контуром Γ , составленным из гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ и ориентированным против часовой стрелки. Множество $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ концов этих дуг обозначим F . Для определенности пусть $0 \in D^+$ и $D_0^+ = D^+ \setminus \{0\}$, $D_\varepsilon^+ = D^+ \cap \{|z| > \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$, а область $D^- = \mathbb{C} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$ содержит бесконечно удаленную точку $z = \infty$.

Рассмотрим в области D_0^+ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) = f(z) \quad (1)$$

с коэффициентом $a(z) \in C^n(D \setminus D_\varepsilon^+) \cap C(\overline{D^+})$, где $\alpha > 1$, $n = [\alpha]$ — целая часть α , причем $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, и функция f принадлежит $L_{\text{loc}}^p(D_0^+)$, $p > 2$, т.е. $L_{\text{loc}}^p(D_0^+) = \{f : f \in L_{\text{loc}}^p(D_\varepsilon^+) \text{ для любого } \varepsilon > 0\}$. В дальнейшем также воспользуемся классом $W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0^+) = \{f : f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_\varepsilon^+) \text{ для любого } \varepsilon > 0\}$.

Следуя [9], обозначим $C_\lambda(\overline{D^+}, 0)$, где $\lambda < 0$, пространство всех непрерывных в $\overline{D^+} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с точечной особенностью $z = 0$ и с поведением $O(|z|^\lambda)$ при $z \rightarrow 0$. Это пространство снабжается нормой $\|\varphi\| = \sup_{z \in D} |z|^{-\lambda} |\varphi(z)|$, относительно которой оно является банаховым.

Классическая теория И. Н. Векуа (см. [2]) обобщенных аналитических функций охватывает случай, когда коэффициенты уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + au + b\bar{u} = f$$

принадлежат пространству $L^p(D)$ с показателем $p > 2$. Коэффициенты таких систем могут допускать слабые особенности с требованием их p -интегрируемости в области D . Уравнения с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geq 0$, и $b \in C_{-1}$ не удовлетворяют этому условию. На необходимость изучения более общих уравнений (обобщенных систем Коши—Римана с коэффициентами, допускающими особенности не ниже первого порядка) впервые было указано И. Н. Векуа и А. В. Бицадзе (см. [1]). Вопросам построения общего решения уравнения (1), обобщенного уравнения Коши—Римана с сингулярными коэффициентами $a \in C_{-1}$ и $b \in C_{-1}$ были посвящены многочисленные исследования (см., например, [5, 11]). Понятие сверхсингулярных особенностей введено в монографии Н. Р. Раджабова [7]. В последнее десятилетие к исследованию обобщенного уравнения Коши—Римана с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geq 0$, и $b \in C_{-1}$ со специальными видами посвящено достаточно много работ (см., например, [8]). Краевые задачи в областях с кусочно гладкими границами для уравнений с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

В настоящей работе найдено интегральное представление решения уравнения (1) с более общим коэффициентом в областях D_0^+ и D_0^- и исследована задача линейного сопряжения в классе функций, ограниченных на бесконечности и допускающих особенность порядка меньше единицы при $z \rightarrow \tau$ в точках $\tau \in F$.

Функция $u(z) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0^+)$, где $p > 2$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, называется его *регулярным* решением.

В получении представления регулярного решения данного уравнения существенную роль играет интегральный оператор Помпейю—Векуа (см. монографию И. Н. Векуа [2, с. 29])

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \neq 0, \quad (2)$$

с плотностью $f \in L^p(D^+)$, где $p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. В частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D^+)$ и $C(\overline{D^+})$.

Если в уравнении (1) функции $A(z) = |z|^{-\alpha} a(z) \in L^p(D)$ и $f \in L^p(D)$, то $\Omega = TA \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$ является решением уравнения $\Omega_{\bar{z}} - A = 0$. Следовательно, для функции $V = e^{-\Omega}u$ имеем соотношение

$$V_{\bar{z}} = e^{-\Omega}u_{\bar{z}} - Ae^{-\Omega}u = e^{-\Omega}f.$$

В результате приходим к представлению

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\phi \in C(\overline{D})$. Эта процедура получения общего решения хорошо известна (см. [2]).

Лемма 1. *Если α не является четным целым числом, то существует регулярное решение уравнения*

$$\Omega_{1\bar{z}} = |z|^{-\alpha}a(z),$$

представимое в виде

$$\Omega_1(z) = \frac{2a(0)\bar{z}}{(2-\alpha)|z|^\alpha} + \frac{2}{|z|^\alpha} \sum_{k_1+k_2=1}^n \frac{1}{k_1!k_2!} \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2}a}{\partial^{k_1}z \partial^{k_2}\bar{z}}(0) \cdot \frac{z^{k_1}\bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1)-\alpha}. \quad (3)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция $|z|^{-\alpha}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вдоль линии, соединяющей точки 0 и ∞ (например, луча $\arg z = \beta$), мы выбираем фиксированную ветвь данной функции, и этот выбор нужно учитывать при дифференцировании. В самом деле,

$$|z|^{-\alpha} = z^{-\alpha/2} \bar{z}^{-\alpha/2} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \ln z\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \ln \bar{z}\right);$$

при этом значения логарифма $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ и $\ln \bar{z} = \ln |z| - i \arg z$ комплексно сопряжены, так что значение функции остается положительным вещественным числом.

Запишем коэффициент $a(z)$ в виде

$$a(z) = a(0) + p(z), \quad p(z) = \sum_{k_1+k_2=1}^n \frac{2}{k_1! k_2!} \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2} a}{\partial^{k_1} z \partial^{k_2} \bar{z}}(0) \cdot z^{k_1} \bar{z}^{k_2}.$$

Тогда

$$\Omega_0(z) = a(0) T|z|^{-\alpha} = \frac{2a(0) \bar{z}}{(2-\alpha) |z|^\alpha}$$

является решением уравнения $(\Omega_0)_{\bar{z}} = a(0) |z|^{-\alpha}$, а второе слагаемое $\Omega_1(z)$ является решением уравнения $(\Omega_1)_{\bar{z}}(z) = |z|^{-\alpha} p(z)$. $\square$

Теорема 1. Пусть нечетное число $\alpha > 1$ и функция $f_0 = e^{-\Omega_1} f \in L^p(D)$, где $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) с правой частью f представимо в виде

$$u = e^{\Omega_1} [\phi + T f_0], \quad (4)$$

где $\phi(z)$ — произвольная аналитическая в области D_0^+ функция.

Замечание 1. Если при $z \rightarrow 0$ функция $u(z)$ имеет поведение

$$u(z) = O(e^{-\operatorname{Re} \Omega_1(z)}), \quad (5)$$

то функция $\phi(z)$ имеет слабую особенность в точке $z = 0$ и аналитична в области D^+ .

Замечание 2. В случае, если α является четным целым числом, вид решения существенно меняется: в его представлении возникают слагаемые, содержащие логарифмы. Этот случай исследуется нами отдельно.

2. О поведении решений в окрестности изолированной особой точки коэффициента уравнения. Как видно из (5), при $z \rightarrow 0$ функция $u(z)$ может вести себя весьма разнообразно в зависимости от значений $\operatorname{Re} \Omega_1$. Теперь рассмотрим в качестве примера уравнение, решение которого $u(z)$ при $z \rightarrow 0$ по всем направлениям ведет себя одинаково. Как видно из следующего примера, для этого достаточно, чтобы функция $a(z)$ была однородной по переменной z . Рассмотрим в области D_0^+ частный случай уравнения (1) с коэффициентом

$$A_0(z) = a(z) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{a_k z}{|z|^{\alpha-k+1}} \in L^p(D^+), \quad p > 2, \quad (6)$$

где $\alpha > 1$, с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}$, а функция f принадлежит классу $L_{\text{loc}}^p(D_0^+)$, $p > 2$.

Введем следующее обозначение:

$$\omega_k^0(z) = \frac{2}{(\alpha - k + 1) |z|^{\alpha-k+1}},$$

где $\alpha > 1$ — нецелое число.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$ — нецелое число. Тогда функция

$$\Omega_1^0(z) = - \sum_{k=0}^{[\alpha]} a_k \omega_k^0(z) + (T A_0)(z), \quad z \neq 0,$$

представляет собой решение уравнения

$$(\Omega_1^0)_{\bar{z}} = |z|^{-\alpha} z a(z).$$

В предположении $f^0 = e^{-\Omega_1^0} f \in L^p(D)$ любое регулярное решение уравнения (1) с коэффициентом (6) дается формулой

$$u = e^{\Omega_1} [\phi + T f^0], \quad (7)$$

где $\phi(z)$ — произвольная аналитическая в области D_0^+ функция, причем она аналитична в D^+ , если

$$u(z) = O\left(\exp\left\{\frac{-2 \operatorname{Re} a_0}{(n-1)|z|^{n-1}}\right\}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (8)$$

Доказательство. Из равенства $\Omega_1^0(z) = \Omega^0(z) + (T A_0)(z)$ следует, что функция

$$\Omega^0(z) = - \sum_{k=0}^{[\alpha]} a_k \omega_k^0(z)$$

удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} \Omega^0(z) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{a_k z}{|z|^{\alpha-k+1}}.$$

С другой стороны, как было отмечено выше, для $A_0 \in L^p$, $p > 2$, функция $T A_0$ является решением уравнения $(T A_0)_{\bar{z}} = A_0$. $\square$

Замечание 3. В этом случае, как следует из (8), в зависимости от $\operatorname{Re} a_0$ функция $u(z)$ имеет единственное предельное значение при $z \rightarrow 0$ по любым направлениям:

$$u(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \rightarrow 0, \text{ когда } \operatorname{Re} a_0 > 0, \\ \infty & \text{при } z \rightarrow 0, \text{ когда } \operatorname{Re} a_0 < 0, \\ O(1) & \text{при } z \rightarrow 0, \text{ когда } \operatorname{Re} a_0 = 0. \end{cases}$$

3. Интегральные представления решений в бесконечной области. В этом случае интегральный оператор Помпейю—Векуа T понимается по отношению к неограниченной области $D^- = \mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$. Хорошо известно (см. [2]), что если функция f непрерывно дифференцируема и $f(z) = O(|z|^\delta)$ при $z \rightarrow \infty$ с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad \zeta, z \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1) при $a = 0$. В монографии [2] И. Н. Векуа описал условие на функцию f , обеспечивающее принадлежность Tf классу $C^\mu(\mathbb{C})$ в терминах введенного им пространства $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$, где $p > 2$. Под $C^\mu(\mathbb{C})$ здесь понимается класс непрерывных функций $f(z)$, которые вместе с $f(1/z)$ принадлежат $C^\mu(\mathbb{T})$ в единичном круге $\mathbb{T} = \{z : |z| \leq 1\}$. По определению пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$ состоит из всех функций f , для которых $f(z)$ и $f_\nu(z) = |z|^{-\nu} f(1/z)$ принадлежат $L^p(\mathbb{T})$. В этих обозначениях, если $f \in L^{p,2}(\mathbb{C})$, $p > 2$, то функция $Tf \in C^\mu(\mathbb{C})$, где $\mu = 1 - 2/p$, и обращается в нуль на бесконечности (см. [2, теоремы 1.24, 1.25]). В частности, $(Tf)(z) = o(|z|^{\mu-1})$ при $z \rightarrow \infty$.

В работах А. П. Солдатова [9, 10] даны оценки классического интеграла Помпейю (2), рассматриваемого на всей комплексной плоскости с особыми точками $z = 0$ и $z = \infty$ в семействах различных весовых пространств, некоторые из которых мы используем в данной работе.

Далее, под *регулярным* решением уравнения (1) в области D^- понимается функция u , которая допускает обобщенную производную по $\bar{z}$, принадлежит классу $L^{p,2}(D^-)$, ограничена на бесконечности и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду.

Теорема 3. Пусть нечетное число $\alpha > 1$ и функция $f_0 = e^{-\Omega_1} f \in L^{p,2}(D^-)$, где $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) с правой частью f представимо в виде (4), где $\phi \in C^\mu(\overline{D^-} \setminus F)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция и $\phi(z) = o(|z|^{-2/p})$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 4. При $0 < \delta < 1$ и $a(0) \neq 0$, как следует из поведения $e^{-\operatorname{Re} \Omega_1(z)} = O(|z|^{1-\alpha})$ и $(Tf)(z) = o(|z|^{\mu-1})$ при $z \rightarrow \infty$, условие

$$u(z) = O(|z|^{-\delta} e^{-\operatorname{Re} \Omega_1(z)})$$

при $z \rightarrow \infty$ равносильно тому, что в этом представлении функция ϕ имеет в $z = \infty$ устранимую особую точку и, следовательно, аналитична во всей области D^- .

Поэтому фактически функция u относится к классу функций, для которых $e^{-\Omega} u \in H(D^- \setminus F)$. Функция ϕ в окрестности точки $z = \infty$ также удовлетворяет условию $|\phi(z) - \phi(\infty)| < |z|^{-\delta}$, где $\delta > 0$. Класс таких функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым показателем, удобно обозначить $H(\overline{D^-} \setminus F, e^\Omega)$. Аналогично, через $H(\overline{D^+} \setminus F, e^\Omega)$ обозначим класс функций, удовлетворяющих условию $e^{-\Omega} u \in H(\overline{D^+} \setminus F)$.

Обозначим через $H(\Gamma, F)$ класс кусочно непрерывных функций на Γ , которые принадлежат $H(\Gamma_j)$ на каждой закрытой дуге Γ_j , $j = \overline{1, m}$.

4. Задача типа линейного сопряжения. Рассмотрим функцию $G \in H(\Gamma, F)$, которая всюду отлична от нуля, включая $G(\tau \pm 0)$.

Требуется найти регулярное решение уравнения (1) в областях D^+ , D^- , соответственно принадлежащее классам $H(\overline{D^+} \setminus F, e^\Omega)$ и $H(\overline{D^-} \setminus F, e^\Omega)$ и такое, что для функций $(e^{-\Omega} u)^\pm$, ограниченных в D^+ и D^- , предельные значения на контуре Γ удовлетворяют следующему граничному условию:

$$(e^{-\Omega} u)^+(t) = G(t) (e^{-\Omega} u)^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (10)$$

где $G(t), g(t) \in H(\Gamma, F)$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ и $g(t) = o(|t|^{-\delta})$ при $t \rightarrow \infty$, где $\delta > 0$. Функция $u(z)$ вблизи особых точек $z = 0$, $z = \infty$ и в узлах $\tau = \tau_j \in F$ контура Γ имеет поведение

$$u(z) = \begin{cases} O(e^{-\operatorname{Re} \Omega_1(z)}) & \text{при } z \rightarrow 0, \\ O((z - \tau_j)^{\varepsilon_j}) & \text{при } z \rightarrow \tau_j, j = \overline{1, m}, \text{ где } -1 < \varepsilon_j, \\ O(1) & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Используя интегральное представление (4) и условие задачи (10), мы приходим к следующей задаче линейного сопряжения теории аналитических функций:

$$\phi^+(t) = G(t) \phi^-(t) + \tilde{g}(t), \quad t \in \Gamma, \quad (12)$$

где

$$\tilde{g} = T^+(e^{-\Omega} f) + g - GT^-(e^{-\Omega} f), \quad T^\pm(e^{-\Omega} f) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{D^\pm} \frac{e^{-\Omega(\zeta)} f(\zeta)}{\zeta - z} d_2 \zeta \right\}^\pm.$$

Из (9) и (10) следует, что индекс $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$.

Задача линейного сопряжения исчерпывающим образом изучена в известных монографиях [2, 3, 6] в классе H^* интегрируемых функций ϕ , принадлежащих классу $C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$ с некоторыми $-1 < \lambda < 0$ и $0 < \mu < 1$, а также в классах H_ε почти ограниченных функций $H(\overline{D}, F)$ и ограниченных функций, принадлежащих соответственно классам $C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$, $0 < \lambda < 1$, и $C_{(+0)}^\mu(\overline{D}, F)$ с некоторым $0 < \mu < 1$. Однако различные приложения требуют исследования этой задачи в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$ для всех весовых порядков.

Рассмотрим задачу (12). Тогда дополнительные условия (11) переходят в условия

$$\phi(z) = \begin{cases} O(e^{-\operatorname{Re} \Omega_1(z)}) & \text{при } z \rightarrow 0, \\ O((z - \tau_j)^{\varepsilon_j}) & \text{при } z \rightarrow \tau_j, j = \overline{1, m}, \text{ где } -1 < \varepsilon_j, \\ O(1) & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (13)$$

Исследование задачи (12) осуществляется с помощью так называемой G -канонической функции (см. [9]). По определению под ней понимается функция $X \in C(D_0^+ \cup D^-)$, которая всюду отлична от нуля, включая ее граничные значения $X^\pm$, вместе с $1/X(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+(t) = G(t) X^-(t), \quad t \in \Gamma \setminus F, \quad (14)$$

которые, в силу определения кусочно аналитической функции, мы должны иметь вблизи всех узлов $\tau = \tau_j \in F$:

$$|X(z)| < \frac{\operatorname{const}}{|z - \tau|^\alpha}, \quad \alpha = \operatorname{const} < 1, \quad (15)$$

$$\frac{1}{|X(z)|} < \frac{\operatorname{const}}{|z - \tau|^\alpha}, \quad \alpha = \operatorname{const} < 1. \quad (16)$$

Функция $G \in C(\Gamma \setminus F)$ кусочно непрерывна на Γ , т.е. существуют односторонние пределы $G(\tau \pm 0) = \lim_{t \rightarrow \tau} G(t)$ при $t \rightarrow \tau$, $t \in \Gamma_{\tau \pm 0}$ в точках $\tau \in F$. Согласно этим условиям $G(t)$ отлична от нуля, включая $G(\tau \pm 0) = \lim_{t \rightarrow \tau} G(t)$ при $t \rightarrow \tau$, $t \in \Gamma_{\tau \pm 0}$ и $G(\tau \pm 0)$ в точках $\tau \in F$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \tau \pm 0} \ln G(t) = \ln G(\tau \pm 0). \quad (17)$$

Рассмотрим функцию

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (18)$$

На основании формул Сохоцкого—Племеля легко проверить, что в обыкновенных точках функция $e^{\gamma(z)}$ удовлетворяет однородному граничному условию (14).

Выясним ее поведение вблизи точек $\tau \in \Gamma$. Согласно [6, с. 255],

$$\gamma(z) = (\alpha_\tau + i\beta_\tau) \ln(z - \tau) + \gamma_0(z), \quad (19)$$

где $\gamma_0(z)$ — функция, аналитическая в каждом секторе S_τ , на которые окрестность точки $\tau \in \Gamma$ разбивается контуром Γ .

Множитель $\alpha_\tau + i\beta_\tau$ выражается суммой

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \sum_{\tau} \frac{\mp \ln G(\tau)}{2\pi i}. \quad (20)$$

Легко видеть, что

$$\begin{cases} \alpha_\tau = \sum_{\tau} \alpha_\tau^0 = -\frac{1}{\pi} \sum_{\tau} (\arg G(\tau + 0) - \arg G(\tau - 0)), \\ \beta_\tau = \sum_{\tau} \beta_\tau^0 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} \ln \left| \frac{G(\tau + 0)}{G(\tau - 0)} \right|. \end{cases} \quad (21)$$

Пусть существует рациональная функция, определенная формулой

$$\Pi(z) = \prod_{\tau \in F} (z - \tau)^{\lambda_\tau}, \quad (22)$$

где показатели λ_τ — целые числа, удовлетворяющие условию

$$-1 < \alpha_\tau^0 + \lambda_\tau < 1, \quad \tau = \tau_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Очевидно, что функция

$$X(z) = \Pi(z) e^{\gamma(z)} \quad (24)$$

представляет собой каноническую функцию, которая в силу неравенства (23) удовлетворяет второму условию (13).

Решение $X(z)$ не вполне определяется условиями (23); оно определяется однозначно лишь в том случае, когда α_τ^0 — целое число, и тогда $\lambda_\tau = -\alpha_\tau^0$.

По терминологии Н. И. Мусхелишвили (см. [6, с. 256]) узлы $\tau = \tau_j$, $j = \overline{1, m}$, для которых α_τ^0 — целое число, назовем *особенными*, остальные узлы — *неособенными*.

Целое число

$$\varkappa = \sum_{k=1}^m \lambda_k \quad (25)$$

мы назовем *индексом задачи*. При этом индекс $\varkappa$ не зависит от выбора значений функции $\ln G(t)$, так как

$$G(t) \in H(\Gamma_j), \quad j = \overline{1, m}, \quad \Gamma = \sum_{j=1}^m \Gamma_j.$$

Из (24) следует, что $X(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\varkappa$, т.е. нуль порядка $\varkappa$ при $\varkappa > 0$ и полюс порядка $-\varkappa$, если $\varkappa < 0$; при $\varkappa = 0$ имеем $X(\infty) = 1$. Во всех случаях

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^\varkappa X(z) = 1. \quad (26)$$

Найдем граничные значения канонического решения $X(z)$. Применяя к (24) формулы Сохоцкого—Племеля, получаем

$$X^+(t) = \sqrt{G(t)} X(t), \quad X^-(t) = \frac{X(t)}{\sqrt{G(t)}}, \quad (27)$$

где ветвь корня $\sqrt{G(t)}$ фиксируется формулой $\sqrt{G(t)} = e^{(\ln G(t))/2}$.

Таким образом, $X(t)$ принадлежит классу $H^*(\Gamma)$, а также классу $H(\Gamma)$ в окрестностях узлов τ_j , $j = \overline{1, m}$, и обращается в нуль на них. Наконец, в окрестностях особенных узлов она принадлежит классу H_ε^* , оставаясь ограниченной.

Тогда функция

$$\phi(z) = X(z)p(z), \quad (28)$$

где $p(z)$ — произвольный полином, представляет собой также решение задачи из данного класса. Верно и обратное: всякое решение $\phi(z)$ из данного класса дается формулой (28) при надлежащем выборе полиномов $p(z)$. Действительно, из равенств

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t), \quad X^+(t) = G(t)X^-(t)$$

получаем

$$\frac{\phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\phi^-(t)}{X^-(t)} \quad \text{на } \Gamma$$

в обыкновенных точках Γ_j , $j = \overline{1, m}$, как предельные значения функции, голоморфной во всей плоскости, кроме (может быть) узлов и точки $z = \infty$. Вблизи узлов она может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы; следовательно, узлы — устранимые особые точки. Так как $\phi(z)$ имеет на бесконечности конечный порядок, то

$$\frac{\phi(z)}{X(z)} \text{ — полином.}$$

Утверждение доказано.

Используя каноническую функцию $X(z)$, на основе равенства $X^+(t) = G(t)X^-(t)$ получим

$$\frac{\phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{\tilde{g}(t)}{X^+(t)} \quad \text{на } \Gamma.$$

Так как по условию функция $\phi(z)$ остается ограниченной вблизи узлов, на которых $X(z)$ обращается в нуль в этих узлах, то вблизи узлов

$$\left| \frac{\phi(z)}{X(z)} \right| < \frac{c}{|z - \tau|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Следовательно, $\phi(z)/X(z)$ — кусочно голоморфная функция, которая имеет конечный порядок на бесконечности.

Таким образом, задача (12) приводится к задаче о скачке из теории краевых задач аналитических функций, решение которой можно выписывать явным образом (см. [6, с. 311]).

Мы остановимся на классе решений, исчезающих на бесконечности, которое часто используется в приложениях:

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{g}(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_{\kappa-1}(z) & \text{при } \kappa \geq 0, \\ \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{g}(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} & \text{при } \kappa < 0, \end{cases} \quad (29)$$

где $X^\pm(z)$ определяется как предельное значение канонической функции (24), $P_{\kappa-1}(z)$ — полином степени не выше $\kappa - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $P_{\kappa-1}(z) = 0$ при $\kappa < 0$.

При $\kappa < 0$ решение данного класса существует тогда и только тогда, когда выполняется еще следующее условие:

$$\int_{\Gamma} \frac{\tau^k \tilde{g}(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\kappa - 1. \quad (30)$$

Как следует из интегрального представления (4), решение исчезает в бесконечно удаленной точке. Подставляя в краевое условие (10) равенство $\phi^\pm(\infty) = 0$, получим $g(\infty) = 0$. Следовательно, чтобы задача линейного сопряжения для полуплоскости имела решение, исчезающее на бесконечности, свободный член краевого условия должен на бесконечности обращаться в нуль. Это выполнимо при $g(t) = o(|t|^{-\delta})$ при $t \rightarrow \infty$, где $\delta > 0$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теорем 1 и 3 и условия задачи линейного сопряжения. Тогда в случае $\kappa = \text{Ind } G(t) > 0$ задача линейного сопряжения безусловно разрешима, и при этом общее решение уравнения (1) дается формулой

$$u(z) = e^{\Omega_1} \cdot \left[\frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{g}(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_{\kappa-1}(z) + T f^0 \right], \quad (31)$$

причем это решение зависит линейно от κ произвольных постоянных.

В случае $\kappa = \text{Ind } G(t) < 0$ решение данного класса, исчезающее на бесконечности, существует тогда и только тогда, когда выполнено условие (30), выражающее, что $\phi(\infty) = 0$. При соблюдении этих условий единственное решение задачи дается формулой (31) с $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$.

Кроме того, функция $u(z)$ в особых точках $z = 0$ и $z = \infty$, а также в узловых точках $\tau = \tau_j \in F$ контура Γ имеет следующее поведение:

$$u(z) = \begin{cases} O(e^{-\text{Re } \Omega_1(z)}) & \text{при } z \rightarrow 0, \\ O((z - \tau_j)^{\varepsilon_j}) & \text{при } z \rightarrow \tau_j, j = \overline{1, m}, \text{ где } -1 < \varepsilon_j, \\ O(1) & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (32)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
2. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

4. Мещерякова Е. С., Солдатов А. П. Задача Римана—Гильберта в семействе весовых пространств Гёльдера // Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 4. — С. 518–527.
5. Михайлов Л. Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе, 1963.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
7. Раджабов Н. Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
8. Расулов А. Б., Солдатов А. П. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши—Римана с сингулярными коэффициентами // Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 5. — С. 637–650.
9. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63, № 1. — С. 1–189.
10. Солдатов А. П. Об интеграле Помпею и некоторых его обобщениях // Вестн. ЮУрГУ. Мат. модел. програм. — 2021. — 14, № 1. — С. 53–67.
11. Усманов З. Д. Обобщенные системы Коши—Римана с сингулярной точкой. — Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1993.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Расулов Абдурауф Бабаджанович

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: rasulzoda55@gmail.com, RasulovAB@mpei.ru

Наталья Витальевна Якивчик

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: YakivchikNV@mpei.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 124–133
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-124-133

УДК 004.91

ИНСТРУКЦИЯ
ПО ПОДГОТОВКЕ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА
«ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ»

© 2024 г. Н. А. АРХИПОВА, Е. Е. БУКЖАЛЁВ,
А. В. ОВЧИННИКОВ, А. А. ШИРОНИН

Посвящается великому педагогу пианисту Карлу Черни (1791–1857)

Аннотация. Краткая инструкция по подготовке файлов для журнала «Итоги науки и техники. Современная математика. Тематические обзоры».

Ключевые слова: научные публикации, издательская система L^AT_EX, допечатная подготовка, редактирование.

INSTRUCTIONS
FOR PREPARING MANUSCRIPTS FOR THE JOURNAL
“ITOGI NAUKI I TEKHNIKI. CONTEMPORARY
MATHEMATICS. THEMATIC SURVEYS”

© 2024 N. A. ARKHIPOVA, E. E. BUKZHALYOV,
A. V. OVCHINNIKOV, A. A. SHIRONIN

Dedicated to the great piano pedagogue Carl Czerny (1791–1857)

ABSTRACT. This is a brief instruction for preparing files for “Progress in Science and Technology. Contemporary Mathematics. Thematic Surveys.”

Keywords and phrases: scientific publications, publishing system L^AT_EX, prepress, editing.

AMS Subject Classification: 00-XX

Работа выполнена при финансовой поддержке Пенсионного фонда России (СНИЛС № 000-000-000 00).

Н. А. Архипова выражает благодарность коллективу Отдела научной информации по фундаментальной и прикладной математике Всероссийского института научной и технической информации.

А. А. Широ́нин выражает благодарность учёному секретарю ВИНТИ И. Е. Камневой за полезные обсуждения.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Содержимое архивного файла itogi-2024.zip.

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. Instruction-2024.tex | - tex-файл инструкции; |
| 2. Instruction-2024.pdf | - pdf-файл инструкции; |
| 3. template.tex | - заготовка для создания файла статьи; |
| 4. itogirus2024.cls | - файл класса документа (стилевой файл); |
| 5. amsbib.sty | - стилевой файл для набора библиографии; |
| 6. amsbib.pdf | - инструкция к файлу amsbib.sty; |
| 7. viniti.eps | - логотип ВИНТИ в формате eps; |
| 8. viniti.pdf | - логотип ВИНТИ в формате pdf; |
| 9. Публичные правила.pdf | - публичные правила передачи авторских прав; |
| 10. Заявление.docx | - бланк заявления о присоединении к правилам. |

1.2. Об издании. «Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры» — научный рецензируемый журнал, издаваемый с 1995 года Отделом научной информации по фундаментальной и прикладной математике Всероссийского института научной и технической информации Российской академии наук (ВИНИТИ РАН). Основатель, научный редактор и составитель журнала — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов выступают как известные отечественные и зарубежные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, так и молодые учёные, делающие первые шаги в науке. Как показывает многолетняя практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом. Начиная с 2016 г. издание выходит в свет в электронной сетевой форме; все выпуски находятся в открытом доступе. Публикация материалов для всех авторов бесплатна; авторский гонорар не выплачивается.

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС 77-82877 от 25.02.2022 и имеет Международный стандартный серийный номер ISSN 2782-4438; см. ссылки

<https://rkn.gov.ru/mass-communications/reestr/media/?id=909491>

<https://portal.issn.org/resource/issn/2782-4438>

Журнал публикует исследовательские и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики: алгебре, топологии, теории чисел, математической логике, дифференциальной геометрии, функциональному анализу, теории вероятностей, вещественному и комплексному анализу, асимптотическим методам, обыкновенным дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными, математической физике, а также по прикладным аспектам математики и её приложениям в естественных и технических науках.

Русская версия выпусков серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры» выходит в свет в электронном виде и публикуется на сайте ВИНТИ РАН, Общероссийском математическом портале mathnet.ru и в Научной электронной библиотеке:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi>

http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=into&option_lang=rus

https://www.elibrary.ru/title_about_new.asp?id=9534

Все выпуски серии реферируются и индексируются следующими базами данных: Реферативный журнал «Математика», РИНЦ (eLibrary), Mathematical Reviews

<https://mathscinet.ams.org/mathscinet/serials/profile?seriesId=4193>,

Серия переводится в полном объеме в журнале *Journal of Mathematical Sciences*, выпускаемом издательством Springer Nature — подразделением всемирно известного издательского холдинга Springer). *Journal of Mathematical Sciences* реферируется и индексируется следующими базами данных: ANVUR, Baidu, CLOCKSS, CNKI, CNPIEC, Dimensions, EBSCO, Gale, Google Scholar, INIS Atomindex, INSPIRE, Japanese Science and Technology Agency (JST), Mathematical Reviews, Naver, OCLC WorldCat Discovery Service, Portico, ProQuest, SCImago, SCOPUS, TD Net Discovery

Service, UGC-CARE List (India), Wanfang, zbMATH. Электронная версия *Journal of Mathematical Science* доступна на сайте

<http://link.springer.com/journal/10958>

1.3. Юридические аспекты. Согласно действующему законодательству, *одновременно* с рукописью (файлами) статьи авторы должны представить в редакционную коллегию для рассмотрения на предмет публикации экспертное заключение о возможности опубликования материалов в открытой печати, полученное по месту работы автора (если авторов несколько — по месту работы одного из авторов). Заверенное подписями экспертов и печатью учреждения экспертное заключение должно быть отсканировано (формат файла — PDF) и приложено к файлам статьи *до рассмотрения её редакционной коллегией и принятия в печать*.

Представление статьи в журнал означает, что авторы *согласны на публикацию* статьи в журнале и что *в случае принятия её в печать* передадут Всероссийскому институту научной и технической информации (ВИНИТИ РАН) исключительную лицензию на использование статьи в оригинальной и переводной версиях журнала. Согласие на передачу исключительной лицензии оформляется в форме подписания *каждым из авторов* статьи заявления о присоединении к «Публичным правилам передачи исключительных прав на статьи для опубликования в научных изданиях ВИНИТИ РАН», утвержденным 17.04.2019 г., *после принятия* статьи к публикации.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлекцией на предмет соответствия тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлекцией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц (например, не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т. п.), произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

В конце статьи (после списка литературы) автоматически помещается Декларация авторов, содержащая информацию о финансировании, конфликте интересов и различных финансовых и нефинансовых интересах, связанных с публикацией работы.

2. ПОДГОТОВКА РАБОТЫ

Работа должна быть написана на русском языке. В редакцию представляются $\text{\TeX}$ - и PDF-файлы работы, подготовленные в издательской системе $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала `itogirus2024.cls`. Файлы статьи (включая файлы с рисунками), а также PDF-файл экспертного заключения о возможности опубликования материалов в открытой печати необходимо собрать в один ZIP-архив и прислать в редакцию по электронной почте math@viniti.ru. $\text{\TeX}$ - и PDF-файлы должны иметь идентичное содержание; в случае незначительных различий приоритет имеет PDF-файл; при наличии существенных различий статья отклоняется или направляется авторам для доработки.

При подготовке текста статьи рекомендуется использовать руководства [1–3]. В качестве шаблона можно использовать файл `template.tex`. При подготовке библиографического списка необходимо использовать пакет `amsbib.sty` (см. ниже).

При несоблюдении авторами приведённых ниже правил редакция вправе вернуть работу авторам для доработки или отклонить ее.

Объём статьи не должен превышать 10-15 страниц журнального текста. В отдельных случаях по согласованию с редакцией к публикации принимаются работы большего объёма, которые разбиваются на части (главы) и публикуются в нескольких последовательных выпусках журнала.

2.1. Преамбула $\TeX$ -файла. Следующие пакеты загружаются автоматически и не требуют указания в преамбуле:

```
amsfont.sty
amsgen.sty
amsmath.sty
amssty.sty
amstex.sty      - различные макросы Американского математического общества;
amsthm.sty      - оформление теорем;
array.sty       - расширенные возможности набора массивов и таблиц;
cite.sty        - расширенные возможности набора библиографических ссылок;
enumerate.sty   - расширенные возможности набора списков (перечней);
latexsym.sty    - определения некоторых символов LaTeX'a;
verbatim.sty
```

Кроме того, автоматически загружаются пакеты `babel.sty` с опцией `[russian]` и `inputenc.sty` с опцией `[cp1251]` (таким образом, набор должен быть выполнен в кодировке Windows).

Другие необходимые автору стилевые пакеты можно подключить командой `\usepackage{...}` (см. руководства по $\LaTeX$ 'у).

В преамбуле должны присутствовать команды

```
\currentyear{...}
\currentvolume{...}
```

аргументами которых являются год выхода в свет и номер тома выпуска. При отсутствии этих команд компилятор $\LaTeX$ 'а выдаст ошибку. Автору рекомендуется записать в преамбуле эти команды с пустыми аргументами.

В преамбуле записываются также определения новых макрокоманд и окружений.

2.1.1. Макроопределения. При определении макрокоманд желательно использовать команды

```
\newcommand
\renewcommand
```

Использование команды `\def` также допустимо.

Весьма нежелательно вводить сокращения для длинных имен стандартных команд, например,

```
\newcommand{\a}{\alpha}
\newcommand{\b}{\beta}
\newcommand{\LRA}{\Longrightarrow}
```

Набирать длинные имена этих команд требуется полностью. Так, вместо `$$\a\LRA\b$` нужно набрать `$$\alpha\Longrightarrow\beta$`.

Однако сокращения типа

```
\newcommand{\bR}{\mathbb{R}}
\newcommand{\codim}{\operatorname{codim}}
\newcommand{X}[1][n]{x_1, \dots, x_{\#1}}
```

не только допустимы, но и весьма желательны, поскольку позволяют «одним нажатием клавиши» изменить оформление.

Многие авторы используют для всех своих работ одну и ту же преамбулу, содержащую несколько десятков (а то и сотен) макроопределений «на все случаи жизни». Большая просьба оставлять в преамбуле только те макрокоманды, которые действительно используются в статье!

Категорически запрещается введение сокращений для стандартных окружений вроде

```
\newcommand{\beq}{\begin{equation}}
\newcommand{\eeq}{\end{equation}}
```

2.1.2. *Окружения для оформления «теорем».* Для оформления определений, теорем и т. п. используются окружения, определяемые следующим образом (см. преамбулу данного файла):

```
\newtheorem{thm}{Теорема}
\newtheorem*{thm*}{Теорема}
```

(версия со звёздочкой нумеруемая). Доступны два стиля оформления таких окружений: `\theoremstyle{plain}` (используется по умолчанию для утверждений, требующих доказательств: теорем, лемм, следствий из них и т. п.) — заголовок теоремы печатается полужирным шрифтом, текст — курсивом, и `\theoremstyle{definition}` — заголовок печатается полужирным шрифтом, текст — обычным (используется для утверждений, не требующих доказательств: определений, замечаний и т. п.).

В случае, если статья содержит большое число утверждений, нумерацию можно начать заново в каждом разделе `\subsection{}`; это делается при помощи команд типа

```
\newtheorem{thm}{Теорема}[subsection]
```

которые помещаются в преамбуле Т_ЕX-файла. Нумерацию формул в этом случае также нужно сделать двойной (т.е. вида (1.23), где 1 — номер раздела, 23 — номер формулы в разделе); такая нумерация получится, если в преамбуле указать команду

```
\newtheorem{equation}{subsection}
```

2.2. Заголовок статьи. После команды `\begin{document}` в Т_ЕX-файле указывается команда переключения языка набора `\Russian` и далее заголовочные сведения.

I. Название статьи — команда `\title[...]{...}{...}` с тремя аргументами:

```
\title[Краткое название статьи на рус. яз. для колонтитула]
      {Полное название статьи на русском языке}
      {Полное название статьи на английском языке}
```

Необязательный первый аргумент может быть опущен, если полное название статьи целиком умещается в колонтитуле.

II. Сведения об авторах указываются отдельно для каждого автора с помощью набора команд `\author[...]{...}{...}`, `\address{...}`, `\email{...}`.

1. Фамилия, имя, отчество (при наличии) автора указываются при помощи команды

```
\author[...]{...}{...} с тремя аргументами:
\author[Фамилия, имя <отчество> полностью на родном языке автора]
      {Инициалы, фамилия на русском языке}
      {Инициалы, фамилия на английском языке}
```

Например:

```
\author[Замолодчиков Александр Борисович]
      {А.~Б.~Замолодчиков}{А.~Б.~Zamolodchikov}
\author[Замолодчиков Алексей Борисович]
      {Ал.~Б.~Замолодчиков}{Al.~B.~Zamolodchikov}
\author[Иванов Вячеслав Всеволодович]
      {Вяч. Вс. Иванов}{Vyach.~Vs.~Ivanov}
\author[Newton Isaac]{И.~Ньютон}{I.~Newton}
\author[Poincar\`e Henri]{А.~Пуанкаре}{H.~Poincar\`e}
```

Для каждого автора требуется *отдельная* команда `\author`.

2. Для каждого автора обязательно указывается хотя бы одна аффилиация (место работы) при помощи команды `\address{...}`. Команда имеет *один* аргумент, содержащий *название* и, возможно, *местоположение* научного учреждения, в котором работает автор, на языке страны, в которой расположено учреждение, или на английском языке (в случае языков, не использующих латиницу или кириллицу, например, грузинского или китайского, можно использовать название на русском или английском языках); почтовый адрес и индекс указывать не нужно. Указание местоположения опускается, если оно однозначно определяется названием учреждения. Для каждого автора команда `\address`

располагается после команды `\author`. Если требуется указать несколько аффилиаций для одного автора, то все они указываются в *одной* команде `\address` и разделяются переносом строки (команда `\\`). Примеры:

```
\address{Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;\\
        Всероссийский институт научной и технической информации, Москва}
\address{Императорский Новоросси́йский университет, Одесса, Росси́йская Империя}
\address{Челябинский государственный университет; \\
        Южно-Уральский государственный университет, Челябинск}
\address{Trinity College, Oxford, England}
\address{Шанхайский университет} или \address{Shanghai University}
\address{Карлов университет, Прага} или \address{Univerzita Karlova v Praze}
```

У каждого автора в обязательном порядке должна быть приведена хотя бы одна аффилиация (либо пометка «безработный»).

3. Адрес электронной почты каждого автора — команда `\email`; если адресов несколько, то они указываются в одной команде `\email` через запятую. У каждого автора в обязательном порядке должен быть приведен хотя бы один электронный адрес (либо пометка «не указан»).

III. Ключевые слова (словосочетания) на русском языке вводятся с помощью команды `\keywords{...}`, имеющей *один* аргумент. Они должны адекватно отражать содержание работы, быть краткими и пригодными для формирования поискового запроса (так, например, словосочетания « (f, ξ, η, ρ) -структура» или «необходимые и достаточные условия существования и единственности неотрицательного слабого решения вырожденной краевой задачи на неограниченной области» в качестве ключевых слов не подходят).

Ключевые слова на английском языке вводятся с помощью команды `\ENGkeywords{...}` и являются переводом ключевых слов на русский язык. Лучше использовать терминологически верный перевод, чем дословный (например, русское словосочетание «принцип сжимающих отображений» лучше перевести как «Banach's fixed-point theorem»).

IV. Код универсальной десятичной классификации (УДК) — команда `\UDC{...}` с *одним* аргументом; подобрать код авторы могут на сайте

<https://teacode.com/online/udc/51/51.html>

Можно использовать несколько кодов УДК; все они приводятся в *одной* команде `\UDC` и разделяются запятой или точкой с запятой. Обратите внимание, что *первый* код УДК для статей по математике должен начинаться с цифр «51»; в противном случае работа не может быть отнесена к предметной области «математика» и будет отклонена как не соответствующая тематическому профилю издания.

V. Индекс Mathematics Subject Classification Американского математического общества — команда `\subjclass{...}` с *одним* аргументом. Рубрикатор доступен по адресу

<https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html>

Команды `\keywords`, `\ENGkeywords`, `\UDC`, `\subjclass` могут должны располагаться в любом порядке, но обязательно перед окружением `{abstract}`, содержащим аннотацию статьи.

VI. Аннотация — краткое (не более 10-15 строк) изложение результатов, полученных в статье; оформляется в теле окружения `{abstract}`. В аннотации не допускается использование громоздких формул, а также ссылок на текст работы (в том числе на номера формул и теорем) и библиографический список.

Перевод аннотации на английский язык оформляется в теле окружения `{ENGabstract}`, которое размещается после окружения `{abstract}`.

Следующие *необязательные* команды позволяют указать дополнительную информацию о публикации.

VII. Посвящение оформляется при помощи команды `\dedicatory{...}` (один аргумент). При наличии этой команды потребуется также *перевод* посвящения, который оформляется при помощи команды `\ENGdedicatory{...}` (один аргумент).

VIII. Благодарности. Сведения о *финансовой поддержке* работы можно указать при помощи команды `\funding{...}`, которую необходимо поместить после окружения `{ENGabstract}`.

Авторы могут выразить не связанную с финансовыми обстоятельствами благодарность физическим лицам и учреждениям, используя команду `\thanks{...}`. Таких команд может быть несколько (например, каждый автор может выразить свою признательность независимо от других авторов).

IX. Конфликт интересов и финансовые интересы, связанные с публикуемым материалом, если таковые имеются, могут быть заявлены соответственно в аргументах команд

```
\ConflictOfInterest{...}
\FinanceInterest{...}
```

2.3. Общие принципы. При подготовке статьи в системе L^AT_EX 2_ε запрещается использовать ручное форматирование. Нельзя оформлять заголовки при помощи явного указания шрифтов, например, так:

```
\vspace*{5mm} {\bf 1. Введение.}
```

Нужно использовать команды секционирования (см. раздел 2.4), снабжая их, если необходимо, метками `\label{...}` для последующего оформления перекрестных ссылок, например,

```
\subsection{Введение}\label{sec1:Introduction}
```

Запрещена также ручная нумерация формул, утверждений типа «теорема» и библиографических ссылок:

```
\medskip {\bf Теорема 1} (см. [1]).
{\it Пифагоровы штаны во все стороны равны:}
$$ c^2=a^2+b^2. \eqno(1)$$
```

ТАК (↑) набирать нельзя!!

Обязательным является использование окружений, автоматически нумерующих формулы (см. ниже раздел 2.7), команд `\label`, `\ref`, `\eqref`, `\pageref` для генерации перекрестных ссылок и команд `\bibitem` (в составе окружения `{thebibliography}`) и `\cite` для генерации библиографических ссылок. Список литературы набирается с использованием стилевого пакета `amsbib.sty` (см. ниже).

2.4. Структура статьи. Каждая статья состоит из разделов, которые начинаются с команд `\subsection{}`. (Разделы типа `\section{}` должны содержать не менее 10-15 страниц текста, поэтому они используются только в статьях большого объёма.) При необходимости можно использовать команду `\subsubsection{}`.

2.5. Набор текста на русском языке. Набор текста на русском языке обеспечивается макропакетом `babel.sty`, который подключается автоматически. В этом пакете определяются некоторые привычные русскоязычным математикам команды типа `\tg`, `\ctg`, `\ch`, `\sh`, `\th`, которые дают на печати tg, ctg, ch, sh, th. Пакет `babel.sty` предоставляет специальные расширенные возможности набора русского текста:

- (i) кавычки-ёлочки: "`<кавычки>`" или `<<кавычки>>` дают «кавычки»;
- (ii) длинное тире: "----" даёт —
- (iii) тире между фамилиями (не препятствует переносу в фамилиях): "--~". Например, при наборе "`<метод Гарднера>--~Грина--~Крускала--~Миуры`" получится «метод Гарднера—Грина—Крускала—Миуры» (перенос сделан автоматически);
- (iv) дефис, не препятствующий переносу: "=". Например, перенос в слове «функционально-дифференциальный» получится автоматически, если набрать `функционально=дифференциальный`.

Обратите внимание, что переход к новому абзацу не может располагаться внутри неоконченного предложения. Например, недопустим такой текст:

Из доказанных утверждений вытекает следующая

Теорема. Если $n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$, то $(1+x)^{-1} \geq 1+nx$.

Нужно так:

Из доказанных утверждений вытекает следующая теорема.

Теорема. Если $n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$, то $(1+x)^{-1} \geq 1+nx$.

2.6. Набор списков (перечней). Для набора списков (как, например, в п. 2.5) необходимо использовать окружение `{enumerate}`. Для предотвращения путаницы при ссылках на нумерованные формулы и на элементы перечня настоятельно рекомендуется избегать в перечнях нумерацию арабскими цифрами (со скобками или без); лучше использовать нумерацию заглавными и строчными римскими цифрами, заглавными и строчными латинскими буквами, со скобками вокруг них или без таковых. Примеры:

```
\begin{enumerate}[\bf I.]
\item Собаки:
  \begin{enumerate}[(A)]
    \item большие:
      \begin{enumerate}[(a)]
        \item овчарки;
        \item ретриверы;
      \end{enumerate}
    \item маленькие;
  \end{enumerate}
\item Кошки:
  \begin{enumerate}[(i)]
    \item лохматые;
    \item лысые;
  \end{enumerate}
\item Попугаи:
  \begin{enumerate}[(A)]
    \item говорящие;
    \item поющие.
  \end{enumerate}
\end{enumerate}
```

```
I. Собаки:
  (A) большие:
    а) овчарки;
    б) ретриверы;
  (B) маленькие;
II. Кошки:
  (i) лохматые;
  (ii) лысые;
III. Попугаи:
  (1) говорящие;
  (2) поющие.
```

Не забывайте, что текст после точки должен начинаться с заглавной буквы!

2.7. Набор формул. Формулы в строке набираются обычным образом: $\$2+2=4\$$. Выключные формулы набираются при помощи окружений $\mathcal{AMS-LAT\TeX}$:

```
\begin{equation} ... \end{equation}
\begin{multline} ... \end{multline}
\begin{gather} ... \end{gather}
\begin{align} ... \end{align}
\begin{alignat} ... \end{alignat}
```

а также их ненумеруемых версий «со звездочками». Окружения «старого» $\mathcal{L\TeX}$ 'а типа `{eqnarray}` не работают: в выходном DVI- или PDF-файле вместо соответствующей формулы будет напечатано сообщение об ошибке. Так, набор

```
\begin{eqnarray}
\sin^2x+\cos^2x=1.
\end{eqnarray}
```

даст на выходе

Нельзя использовать окружение eqnarray !!
Используйте окружения align, gather
и другие средства $\mathcal{AMS-LAT\TeX}$

Нумеруемые формулы обязательно выделяются в отдельную строку. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

Дроби, расположенные в строке текста или в индексах, желательно писать через косую черту. Дроби в выключных формулах обязательно должны быть оформлены в виде

$$\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}}$$

при помощи команды `\frac{...}{...}`; использование для набора дроби Т_ЕX-команды `\over` нежелательно. Сложные формулы, в том числе содержащие громоздкие дроби, интегралы, знаки суммирования, произведения, предела, максимума и т.п., нужно выносить в отдельную строку.

Уважаемые авторы! Пожалуйста, избегайте «ручного украшения формул» в соответствии со своими представлениями о красоте набора, не вставляйте при наборе формул лишних пробелов и иных символов; например, не набирайте, пожалуйста,

$$\sin\,,\,\sim\,,2\backslash\,,\,x\backslash\,,\,+ \backslash\,,\cos\,,\,\sim\,,2\backslash\,,\,x\backslash\,,\,=\backslash\,,\,1\backslash\,,$$

желая получить $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ с увеличенными пробелами между символами. Напишите просто `\sin^2x+\cos^2x=1`. На выходе тоже будет очень красиво: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Всё равно все лишние символы будут удалены при обработке Вашего файла (либо статья будет отклонена по причине несоблюдения правил, изложенных в данной инструкции), так что сэкономьте время себе (на набор ненужных украшений) и Т_ЕXническому редактору (на их ликвидацию).

2.8. Чертежи. Рисунки, таблицы, диаграммы и пр. включаются непосредственно в текст работы; они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы.

Рисунки должны быть хорошего качества, желательно чёрно-белыми (без оттенков серого), максимальный размер рисунка — 12 × 18 см.

Графика должна быть представлена в формате EPS; в векторных изображениях все шрифты следует перевести в кривые. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

Иллюстрации могут быть также изготовлены с использованием макропакетов PStricks, XYPic, tikz.

2.9. Список литературы. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Не допускаются ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах.

В списке литературы сначала помещаются все источники на русском языке (в порядке русского алфавита), а затем источники на иностранных языках (в порядке латинского алфавита).

Для оформления библиографических ссылок необходимо использовать пакет `amsbib.sty` (файл и описание прилагается). Пакет `amsbib.sty` подключается в преамбуле командой `\usepackage{amsbib}`. Опцию `[hyper]`, позволяющую генерировать в документе работающие гиперссылки, подключать не нужно!

Ссылка на журнальную статью должна содержать список авторов, полное название статьи, название журнала, номер тома (и выпуска при наличии), год выхода в свет, номера первой и последней страниц, разделенные тире.

Ссылка на книгу должна содержать список авторов, полное название книги, издательство, город(а), в котором она выпущена, и год издания. Возможна также дополнительная информация (список редакторов, том, серия, номер издания и т.п.).

Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов и т. п.) должна содержать список авторов, название статьи, полную информацию о книге (см. предыдущий абзац), страницы (первая и последняя, разделенные тире).

Препринты (в том числе работы, депонированные в ВИНТИ) и диссертации считаются книгами, в качестве издательства для них должен быть полностью указан институт или университет. Для препринтов необходимо также указывать номер.

При оформлении перекрестной ссылки в тексте статьи необходимо все метки перечислять в аргументе одной команды `\cite{...}`, при этом порядок меток значения не имеет, так как на

печати ссылки будут упорядочены по возрастанию номеров, а последовательно идущие номера будут заменены интервалами (т.е. вместо «см. [7, 2, 5, 3, 6, 1, 4]» будет напечатано «см. [1–7]»).
Неправильный набор:

```
\cite{A1}, \cite{A2}, \cite{A3}, \cite{A4}, \cite{A5}, \cite{A6}, \cite{A7}
\cite{A1}--\cite{A7}
```

Правильный набор:

```
\cite{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7}
```

Исключение составляет случай, когда ссылка сопровождается дополнительной информацией; в этом случае правильным будет, например, такой набор:

```
\cite[с.~71]{A1}, \cite[гл.~I]{A7}, \cite{A2, A3, A4, A5, A6}.
```

2.10. Иностранные слова. Фамилии и инициалы иностранных авторов указываются в русской транскрипции. Статья не должна содержать терминологии на иностранных языках, если существует общепринятый перевод терминов на русский язык. Не допускается использование букв русского алфавита в формулах (за исключением индексов, помещаемых в аргументе команды `\text{...}`, например, $T_{\text{внеш}}$, $\$T_{\text{внеш}}\$$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гуссенс М., Миттельбах Ф., Самарин А., *Путеводитель по пакету L^AT_EX и его расширению L^AT_EX 2_ε*, Мир, М., 1999.
- [2] Котельников И., Чеботаев П., *L^AT_EX по-русски*, Сибирский хронограф, Новосибирск, 2004.
- [3] Львовский С. М., *Набор и верстка в системе L^AT_EX*, МЦНМО, М., 2003.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Пенсионного фонда России (СНИЛС № 000-000-000 00).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Архипова Наталия Александровна

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: math@viniti.ru, arhipova@viniti.ru

Букжалёв Евгений Евгеньевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: math@viniti.ru, ovchinnikov@viniti.ru

Овчинников Алексей Витальевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: math@viniti.ru, ovchinnikov@viniti.ru

Широнин Александр Алексеевич

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: math@viniti.ru, shironin@viniti.ru

CONTENTS

Periodic solutions of a differential equation with relay nonlinearity with delay (<i>D. D. Bain</i>)	3
Analytical estimates of the accuracy of wind profile reconstruction from lidar scanning data (<i>N. A. Baranov</i>)	13
Construction of regularized asymptotics for the solution of a singularly perturbed mixed problem on the half-axis for the inhomogeneous Schrödinger-type equation with the potential $V(x) = x$ (<i>A. G. Eliseev, P. V. Kirichenko</i>)	27
Maximum flow in parallel networks with connected arcs (<i>Ia. M. Erusalimskiy, V. A. Skorohodov, V. A. Rusakov</i>)	44
Moment functions for a solution of a stochastic system of partial differential equations (<i>L. Yu. Kabantsova</i>)	53
Green's formulas for the Kipriyanov Δ_B -operator in the weighted linear form (<i>L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov</i>)	68
Treatment of symmetry in the Ritz method for the Schrödinger equation in crystals with a basis (<i>N. B. Melnikov, B. I. Reser</i>)	74
On the asymptotic stability of one equation with a discrete retarded argument (<i>M. V. Mulyukov</i>)	83
On the reconstruction of solutions of the Cauchy problem for the singular heat equation (<i>M. V. Polovinkina</i>)	89
On the construction of solutions of the inhomogeneous biharmonic equation in problems of mechanics of thin isotropic plates (<i>V. N. Popov, O. V. Germider</i>)	100
l -Problem of moments in problems of optimal control and state estimation for multidimensional fractional linear systems (<i>S. S. Postnov</i>)	107
Linear conjugation problem for the Cauchy–Riemann equation with a strong singularity in the lowest coefficient in a domain with piecewise smooth boundary (<i>A. B. Rasulov, N. V. Yakivchik</i>)	115
Instructions for preparing manuscripts for the journal “Itogi Nauki i Tekhniki. Contemporary Mathematics. Thematic Surveys” (<i>N. A. Arkhipova, E. E. Bukzhalyov, A. V. Ovchinnikov, A. A. Shironin</i>)	124

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович