ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 235

Москва 2024

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 235 (2024)

Дата публикации 13 мая 2024 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска	А. С. Бондарев
Научный редактор выпуска	Е. Е. Букжалёв
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534
https://journals.rcsi.science/2782-4438/index

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 235

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXV».

ВОРОНЕЖ, 26–30 АПРЕЛЯ 2024 г.

Часть 1

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 3–14
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-3-14

УДК 517.9

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРАХ

© 2024 г. **А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА, Л. Н. КОСТИНА**

Аннотация. В работе введено понятие эквивалентных операторов, т.е. операторов, имеющих одинаковые состояния обратимости, и установлена их связь со слабо подобными и подобными операторами. Найдены состояния обратимости некоторых классов линейных операторов, в частности, оператора с инволюцией и оператора с компактной резольвентой. Рассмотрены подходы к построению эквивалентного оператора. Приведены примеры эквивалентных операторов.

Ключевые слова: состояния обратимости, эквивалентные операторы, сильно эквивалентные операторы, слабо подобные операторы, подобные операторы.

ON EQUIVALENT OPERATORS

© 2024 **A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA, L. N. KOSTINA**

Abstract. In this paper, we introduce the concept of equivalent operators, i.e., operators with the same invertibility states, and establish their connection with weakly similar and similar operators. We find the invertibility states of some classes of linear operators, in particular, operators with involution and operators with compact resolvent. We discuss approaches to constructing equivalent operators and give examples of equivalent operators.

Keywords and phrases: invertibility states, equivalent operators, strongly equivalent operators, weakly similar operators, similar operators.

AMS Subject Classification: 47A99, 47B01

1. Введение. В работах [2], [3] было введено понятие состояний обратимости $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A)$ (см. определение 3.1) для линейного замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, действующего между банаховыми пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Операторы, имеющие одинаковые состояния обратимости, будем называть эквивалентными (см. определение 3.2). При этом спектры эквивалентных операторов не обязательно должны совпадать. Метод эквивалентных операторов состоит в том, что для изучаемого оператора строится (ставится в соответствие) эквивалентный ему оператор, для которого состояние обратимости известны или проще вычисляемы.

Отметим статьи [3–7, 25–27], в которых обсуждалось понятие состояний обратимости различных операторов и вычислялись состояния обратимости для некоторых классов операторов.

В данной работе сделана попытка систематизации метода эквивалентных операторов, приведены примеры его применения, а также описаны связь и различия подобных и эквивалентных операторов, подобных и слабо подобных операторов.

Отметим также работы [16–20], в которых не используется понятие состояний обратимости, но используются основные результаты из [2], касающиеся совпадения состояний обратимости разностных и дифференциальных операторов.

Работы [8, 28, 29] также не содержат определения состояний обратимости, но в них установлена эквивалентность (в смысле обратимости) некоторых операторов и операторных матриц второго порядка. Наконец, упомянем работу [38], в которой доказана эквивалентность операторного полинома n-й степени операторной матрицы n-го порядка.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 описаны используемые функциональные и операторные пространства. В разделе 3 приведены основные определения (определение 3.1 состояния обратимости оператора и определение 3.2 эквивалентных операторов), несколько лемм, касающихся свойств состояния обратимости, а также примеры операторов, находящихся в определенных состояниях обратимости. В разделе 4 рассмотрены подобные операторы, их свойства и их связь с эквивалентными операторами и слабо подобными операторами. В разделе 5 приведены примеры эквивалентных и спектрально (сильно) эквивалентных операторов. В разделе 6 дано определение фредгольмовых (полуфредгольмовых) операторов и приведены соответствующие примеры.

2. Основные обозначения. Напомним стандартные обозначения. Как обычно, через $\mathbb{Z}$ обозначена группа целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}, t \geqslant 0\}$.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — банахово пространство ограниченных линейных операторов (гомеоморфизмов), $\operatorname{End}\mathcal{X} = \operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов (эндоморфизмов) со стандартной нормой

$$\|Xx\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|, \quad x \in \mathcal{X}, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{X},$$

$\operatorname{Aut}\mathcal{X}$ — группа обратимых операторов (автоморфизмов) из $\operatorname{End}\mathcal{X}$. Символом I обозначен тождественный оператор, а символом $J \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — оператор инволюции. Напомним, что оператор $J \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется инволюцией, если $J^2 = I$.

Далее в примерах используются следующие функциональные пространства. Символом $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{Y})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначено банахово пространство суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$) последовательностей векторов из банахова пространства $\mathcal{Y}$. Нормы в этих пространствах задаются формулами

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathcal{Y}}^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathcal{Y}}, \quad x \in l_\infty.$$

Через $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{Y})$ обозначим пространство всех двусторонних комплексных последовательностей (необязательно ограниченных) $x : \mathbb{Z} \to \mathcal{Y}$ с поточечным умножением

$$(xy)(n) = x(n)y(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x, y \in l^\infty.$$

Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и суммируемых со степенью p функций с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{Y}}^p \, dt\right)^{1/p}, \quad x \in L_p, \quad p \in [1, \infty),$$

со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{Y}$. Через $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$ обозначим банахово пространство существенно ограниченных (классов эквивалентности) функций с нормой

$$\|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{Y}}.$$

Пространство L_1 является банаховой алгеброй со сверткой функций

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau, \quad f, g \in L_1,$$

в качестве операции умножения. Для функций из L_1 определим преобразование Фурье формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in L_1.$$

Преобразование Фурье стандартным образом расширяется на функции из L_2.

Все введенные функциональные пространства являются однородными (см. [3]).

3. Эквивалентные операторы. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — замкнутый линейный оператор, имеющий плотную в $\mathcal{X}$ область определения $D(A)$. Так как далее мы рассматриваем только замкнутые операторы, то термин замкнутый будем опускать. В $D(A)$ введем норму графика

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}.$$

Определение 3.1 (см. [3])**.** Рассмотрим следующие условия:

(1) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (оператор A инъективен);
(2) $1 \leqslant n \leqslant \dim \operatorname{Ker} A \leqslant \infty$;
(3) $\operatorname{Ker} A$ — дополняемое подпространство либо в $D(A)$, либо в $\mathcal{X}$;
(4) $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$ (оператор A нормально разрешим), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \operatorname{Ker} A} \frac{\|Ax\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} A)},$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} A) = \inf\limits_{x_0 \in \operatorname{Ker} A} \|x - x_0\|$;
(5) оператор A равномерно инъективен (корректен), т.е. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$ (в этом случае $\|Ax\| \geqslant \gamma \|x\|$);
(6) $\operatorname{Im} A$ — замкнутое, дополняемое в $\mathcal{Y}$ подпространство и, следовательно, $\gamma(A) > 0$;
(7) $\operatorname{Im} A$ — замкнутое подпространство из $\mathcal{Y}$ коразмерности $1 \leqslant m = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A \leqslant \infty$, где $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A = \dim \mathcal{Y}/\operatorname{Im} A$;
(8) $\operatorname{Im} A = \mathcal{Y}$, т.е. оператор A сюръективен;
(9) оператор A непрерывно обратим.

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $S_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant 9$, то будем говорить, что оператор A находится в состоянии S_0. Множество состояний оператора A обозначим символом $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A)$. Множество состояний обратимости, относящиеся к ядру, обозначим $\mathrm{St}_{\mathrm{Ker}}(A)$, по образу — $\mathrm{St}_{\mathrm{Im}}(A)$. Также заметим, что обычно перечисляются не все возможные состояния обратимости из $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A)$ ($\mathrm{St}_{\mathrm{Ker}}(A)$, $\mathrm{St}_{\mathrm{Im}}(A)$), а те, которые исследуются у данного конкретного оператора.

Приведенное определение понятия множества состояний обратимости линейных операторов было дано (с некоторыми вариациями) и использовалось в [2–7, 25–27] не только для линейных операторов, но и для линейных отношений. Отметим работу [37], в которой свойства из определения 3.1 рассматривались по отдельности, и для операторов $I - ST$ и $I - TS$, $T, S \in \operatorname{End} \mathcal{X}$, доказывалось одновременное выполнение некоторых отдельных свойств определения 3.1.

Пример 3.1. Очевидно, $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(I) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(J) = \{9\}$ и $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A) = \{9\}$ для любого $A \in \operatorname{Aut} \mathcal{X}$.

Пример 3.2. Пусть пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде прямой суммы замкнутых подпространств $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ и P_1, P_2 — два проектора, осуществляющих это разложение, т.е. $\mathcal{X}_k = \operatorname{Im} P_k$, $k = 1, 2$. Каждому оператору $A \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ поставим в соответствие матрицу

$$A \sim \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij} = P_i A P_j$, i, $j = 1, 2$, $A_{ii} \in \operatorname{End} \mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, $A_{21} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, $A_{12} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1)$.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$. *Тогда* $\mathcal{X}/\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}/\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1$.

Доказательство следует из представления любого вектора $x \in \mathcal{X}$ в виде $x = x_1+x_2$, где $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $x_2 \in \mathcal{X}_2$, и определения фактор-пространства.

Пусть $A_{12} = 0$, т.е. оператор A имеет блочную нижнетреугольную матрицу. Введем следующие подпространства:

$$\mathcal{X}_1^0 = \bigl\{x \in \mathcal{X}_1 \bigm| x \in \operatorname{Ker} A_{11},\ A_{21}x \in \operatorname{Im} A_{22}\bigr\}, \quad \mathcal{X}_2^0 = \operatorname{Im} A_{22} + A_{21}(\operatorname{Ker} A_{11}).$$

Тогда для оператора A имеет место следующая лемма 3.2, позволяющая вычислить размерности $\dim \operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A$.

Лемма 3.2 (см. [40, с. 23])**.** *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) $\operatorname{Im} A_{11}$ — *замкнутое подпространство и* $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A_{11} < \infty$;
(ii) $\operatorname{Im} A_{22}$ — *замкнутое подпространство и* $\dim \operatorname{Ker} A_{22} < \infty$;
(iii) $\dim \mathcal{X}_1^0 < \infty$;
(iv) $\operatorname{codim} \mathcal{X}_2^0 < \infty$.

Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A_{22} + \dim \mathcal{X}_1^0, \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} A = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A_{11} + \operatorname{codim} \mathcal{X}_2^0.$$

Таким образом, оператор A находится в состоянии $\{2, 7\}$ с конечными числами n и m.

Пример 3.3 (см. также [27, пример 2])**.** Введем два оператора

$$C : l_p = l_p(\mathbb{N}, \mathcal{X}) \to l_p, \quad R : l_p \to l_p,$$

действующих по формулам

$$(Cx)(n) = x(n+1), \quad Rx(n) = p(n)x(n-1), \quad (Rx)(1) = 0,$$

где $x \in l_p$ и

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p(n) = \begin{cases} 1 & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Очевидно, что оператор $I - CR$ действует следующим образом:

$$((I - CR)x)(n) = \begin{cases} x(n) & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n, \end{cases}$$

и образ оператора $I - CR$ является замкнутым и дополняемым подпространством в l_p. Поэтому $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(I - CR) = \{2, 6\}$.

Пример 3.4 (см. [15])**.** Рассмотрим оператор $I + K$ из $\operatorname{End} \mathcal{X}$, где K — компактный оператор. Если точка -1 не входит в спектр $\sigma(K)$ оператора K, то $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(I + K) = \{9\}$. Если же $-1 \in \sigma(K)$, то $I + K \notin \operatorname{Aut} \mathcal{X}$, $\dim \operatorname{Ker}(I + K) < \infty$, $\operatorname{St}_{\mathrm{Ker}}(I + K) = \{2\}$, $\operatorname{St}_{\mathrm{Im}}(I + K) = \{7\}$ согласно лемме 3.1.

Определение 3.2. Два линейных оператора $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1$ и $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$ называются эквивалентными, если $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(A_1) = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(A_2)$.

Лемма 3.3. *Множество* $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(A)$ *не изменится, если оператор* $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *умножить слева на* $U \in \operatorname{Aut} \mathcal{Y}$ (*или справа на* $V \in \operatorname{Aut} \mathcal{X}$).

Доказательство. Пусть $U \in \operatorname{Aut} \mathcal{Y}$, $V \in \operatorname{Aut} \mathcal{X}$. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} AV = \dim \operatorname{Ker} A, \quad \operatorname{Im} AV = \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{Ker} UA = \operatorname{Ker} A, \quad \operatorname{Im} UA = U \operatorname{Im} A. \qquad \square$$

Замечание 3.1. Константы $\gamma(A)$ и $\gamma(UA)$, а также $\gamma(A)$ и $\gamma(AV)$ отличаются, но в определении 3.1 используется не конкретное значение этих констант, а условие $\gamma(A) > 0$. При $\gamma(A) > 0$ величины $\gamma(UA)$ и $\gamma(AV)$ также положительны.

Следствие 3.1 (см. [27, лемма 1])**.** Пусть операторы $A \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ и $B \in \operatorname{End} \mathcal{Y}$ связаны соотношением $A = UBV$, где U и V — обратимые операторы из $\operatorname{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ и $\operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, соответственно. Тогда $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(A) = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(B)$.

Существует несколько подходов к построению эквивалентного оператора. Один из них состоит в построении таких обратимых операторов U и V, при умножении на которые слева и справа (или справа и слева) получается эквивалентный оператор, множество состояний обратимости которого или хорошо известно, или легко вычисляется.

В случае выполнения условий леммы 3.3 имеют место следующие свойства (см. [27, леммы 2, 9]).

Лемма 3.4.

(i) *Если ядро оператора B дополняемо в $\mathcal{Y}$ и известен проектор $P_{\operatorname{Ker} B} \in \operatorname{End}\mathcal{Y}$ на ядро* $\operatorname{Ker} B$*, то ядро оператора A также дополняемо в $\mathcal{X}$ и оператор $P_{\operatorname{Ker} A} = V^{-1}P_{\operatorname{Ker} B}V$ является проектором на ядро* $\operatorname{Ker} A$.

(ii) *Если образ оператора B замкнут и дополняем в $\mathcal{Y}$, $P_{\operatorname{Im} B} \in \operatorname{End}\mathcal{Y}$ — проектор на* $\operatorname{Im} B$*, то образ оператора A также дополняем в $\mathcal{X}$ и $P_{\operatorname{Im} A} = UP_{\operatorname{Im} B}U^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — проектор на образ* $\operatorname{Im} A$.

Для построения эквивалентного оператора не всегда возможно применить конструкцию из леммы 3.3. Поэтому иногда приходится пользоваться более сложной конструкцией и строить сопровождающий оператор.

Определение 3.3 (см. [6, определение 2])**.** Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Оператор $B \in \operatorname{End}\mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ — комплексное банахово пространство, называется сопровождающим для оператора A, если существуют линейные операторы $R \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $T \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, $K : D(A) \to \mathcal{Y}$, $N : \mathcal{Y} \to D(A)$, обладающие следующими свойствами:

(i) $\operatorname{Im} A = R^{-1}(\operatorname{Im} B)$;
(ii) $\operatorname{Im} B = T^{-1}(\operatorname{Im} A)$;
(iii) $RT = I + \alpha B$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ — некоторое число;
(iv) $K : D(A) \to \mathcal{Y}$ — ограниченный оператор (с нормой графика в $D(A)$);
(v) $N : \mathcal{Y} \to D(A)$ — ограниченный оператор, если в $D(A)$ рассматривать норму пространства $\mathcal{X}$;
(vi) каждый из операторов K и N осуществляет изоморфизм пространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} B$.

Теорема 3.1 (см. [6, теорема 1])**.** *Оператор A и сопровождающий оператор B эквивалентны.*

Таким образом, для построения эквивалентного оператора можно использовать не только лемму 3.3, но и определение 3.3. Именно такой подход используется для дифференциальных операторов, заключающийся в построении сопровождающего разностного оператора (см., например, [7]).

Сравним свойства из определения 3.3 с формулой из леммы 3.3. Для этого положим $\alpha = 0$, т.е. п. (iii) определения 3.3 имеет вид $RT = I$. Так как R и T — обратимые операторы, то $R = T^{-1}$ и $T = U$. В частном случае, в условиях следствия 3.1, операторы K и N взаимно обратны и $V = K$. Таким образом, условия леммы 3.3 можно рассматривать как частный случай более общей схемы построения эквивалентного оператора.

Отметим, что в [7, определение 6] операторы $A \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ и $B \in \operatorname{End}\mathcal{Y}$ назывались эквивалентными, если они связаны соотношением $A = UBV$, где $U \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ и $V \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — обратимые операторы. Условия определения 3.1 и [7, определение 6] идентичны.

Определение 3.4. Два оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $B : D(B) \subset \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ называются спектрально эквивалентными (или сильно эквивалентными), если они эквивалентны и их спектры совпадают, т.е. $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(A - \lambda I)^{-1} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(B - \lambda I)^{-1}$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. Подобные операторы, слабо подобные операторы, метод операторов преобразования и их связь с эквивалентными операторами.

Определение 4.1. Два оператора $B_i : D(B_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует такой обратимый оператор U, что $UD(B_2) = D(B_1)$ и $B_1Ux = UB_2x$, $x \in D(B_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора B_1 в оператор B_2, или сплетающим оператором (терминологию см. в [30, 35]).

Подобные операторы обладают рядом свойств, перечисленных в следующей лемме.

Лемма 4.1. *Пусть A_i, $i = 1, 2$, — подобные операторы и U — оператор преобразования.*

(i) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, *где* $\sigma_d(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ — *дискретный, непрерывный и остаточный спектры оператора A.*

(ii) *Если e_0 — собственный вектор оператора A_2, отвечающий собственному значению λ_0, то Ue_0 — собственный вектор оператора A_1, отвечающий тому же собственному значению λ_0.*

(iii) *Если P — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ оператора A_2, то спектральный проектор $\widetilde{P}$, построенный по тому же множеству σ для оператора A_1, определяется формулой $\widetilde{P} = UPU^{-1}$.*

(iv) *Если оператор A_2 допускает разложение относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, то оператор A_1 допускает разложение относительно прямой суммы $\mathcal{X} = U\mathcal{X}_1 \oplus U\mathcal{X}_2$.*

(v) *Если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_2 : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ (класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной группы операторов вида*

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad T_1 : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}.$$

Из следствия 3.1 и леммы 4.1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Подобные операторы спектрально эквивалентны.*

В отличие от подобных операторов, спектры эквивалентных операторов могут не совпадать. Например, пусть $A \in \operatorname{Aut}\mathcal{X}$ и $1 \notin \sigma(A)$. Тогда $A^{-1}A = I$. В спектр оператора $A^{-1}A$ входит единица, которой не было в спектре оператора A. При этом согласно лемме 3.3 операторы A и $A^{-1}A$ эквивалентны.

Отметим, что эквивалентные операторы не обязаны быть подобными.

Также, в случае выполнения условий леммы 3.3, отметим схожесть формулы проекторов на образ и ядро эквивалентных операторов из следствия 3.1 с формулой из п. (iii) леммы 4.1.

Далее остановимся на связи понятия слабого подобия (см. определение 4.2) с понятием эквивалентных матриц (см. определение 4.3) и эквивалентных операторов.

Пусть $\operatorname{Matr}(\mathbb{C}^n)$ — подпространство всех комплексных матриц n-го порядка, $\operatorname{Matr}(n, m, \mathbb{C})$ — пространство матриц размера $n \times m$. В стандартном учебнике [31, с. 92] приводится следующее определение.

Определение 4.2. Две матрицы $A, B \in \operatorname{Matr}(n, m, \mathbb{C})$ называются эквивалентными, если найдутся такие невырожденные матрицы $P \in \operatorname{Matr}(\mathbb{C}^n)$, $Q \in \operatorname{Matr}(\mathbb{C}^m)$, что $A = PBQ$.

Отметим, что основополагающим свойством эквивалентных матриц является равенство их рангов; в множестве $\operatorname{Matr}(n, m, \mathbb{C})$ имеется $\min(n, m) + 1$ классов эквивалентности.

Обобщением понятия эквивалентных матриц является понятие слабого подобия матриц (см. [33, с. 248], [36, с. 46]).

Определение 4.3. Пусть $A, B \in \operatorname{Matr}(\mathbb{C}^n)$. Матрицы A и B называются слабо подобными, если существуют такие невырожденные матрицы $P, Q \in \operatorname{Matr}(\mathbb{C}^n)$, что $A = PBQ$.

Отметим, что подобные матрицы являются слабо подобными и любая невырожденная матрица слабо подобна единичной. Более того (см. [36, с. 51]), каждая матрица $A \in \operatorname{Matr}(\mathbb{C}^n)$ слабо подобна диагональной матрице с единицами и нулями на главной диагонали.

Замечание 4.1. Формула $A = PBQ$ из определения 4.3 полностью идентична условию следствия 3.1. Таким образом, слабо подобные операторы эквивалентны. И слабо подобные операторы, и эквивалентные операторы можно рассматривать как обобщение понятия подобных операторов.

Отметим, что кроме эквивалентных операторов, обобщением понятия подобных операторов являются сплетаемые операторы, т.е. требуется выполнение равенства $AQ = QB$, $QD(B) = D(A)$, но оператор Q, в отличие от подобия, может не быть обратим и (или) ограниченным. Тогда оператор Q называется сплетающим оператором, A и B — сплетаемыми операторами, а соответствующий метод — методом операторов преобразования.

Посмотреть историю и применение метода операторов преобразования можно в [30, 35, 39, 41]. Важно отметить, что так как оператор Q не обязан быть обратимым (ограниченным), то сплетаемые операторы могут не быть эквивалентными операторами (и подобными операторами).

5. Примеры. В этом разделе приведем примеры эквивалентных операторов.

Пример 5.1 (см. также [27])**.** Рассмотрим два ограниченных оператора: оператор $I - CR$ из примера 3.3 и оператор $I - RC$, где R и C определены в примере 3.3. Известно (см., например, [21, гл. 1, § 1]), что $\sigma(RC)\setminus\{0\} = \sigma(CR)\setminus\{0\}$; случай $0 \in \sigma(RC)$ также исследован в [13, теорема 6.5]. Непосредственный подсчет показывает, что $(I - RC)x = \{x(1), x(2), 0, x(4), 0, \dots\}$.

Теорема 5.1 (см. [27, теорема 1])**.** *Операторы $I - CR$ и $I - RC$ эквивалентны, т.е.*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(I - CR) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(I - RC).$$

Отметим, что для оператора $I - CR$ легко строится проектор на образ оператора

$$(Px)(n) = \begin{cases} 0 & \text{для четных } n, \\ 1 & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Тогда с использованием леммы 3.4 можно получить проектор на образ ему эквивалентного оператора $I - RC$ (соответствующая формула приведена в [27, пример 2]).

Пример 5.2. Для любой функции $\alpha \in L_1(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор свертки A_α, определенный формулой

$$(A_\alpha x)(t) = (\alpha * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(\tau)x(t-\tau)\,d\tau, \quad \alpha \in L_1, \quad x \in L_p.$$

Рассмотрим оператор $A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J$, действующий по формуле

$$(A_{\alpha,\beta}x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(t-\tau)x(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t+\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad \alpha, \beta \in L_1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Такой оператор в [34] назывался интегральным оператором с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов. При α, $\beta \in L_1 \cap L_2$ в [1] такой интегральный оператор называется интегральным оператором с полукарлемановским ядром. В [1, 34] операторы $A_{\alpha,\beta}$ исследовались сведением с помощью преобразования Фурье к операторам умножения вида

$$\widehat{A}_{\alpha,\beta} y = \widehat{\alpha} y + \widehat{\beta} J y, \quad y \in L_2.$$

Далее (см. [13]), каждой функции $y \in L_2$ ставится в соответствие пара функций $\overline{y} = \{y_+, y_-\}$, где $y_\pm(t) = y(\pm t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда оператор $\widehat{A}_{\alpha,\beta}$ спектрально эквивалентен оператору (см. [34]):

$$(B_{\alpha,\beta}\overline{y})(t) = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}(t) & \widehat{\beta}(t) \\ \widehat{\beta}(-t) & \widehat{\alpha}(-t) \end{pmatrix} \overline{y}(t) = Q(t)y(t), \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathbb{C}^2$. Таким образом, спектры операторов $A_{\alpha,\beta}$ и $B_{\alpha,\beta}$ совпадают, а спектр последнего легко вычисляется.

Теорема 5.2. *l Пусть операторы $A_{\alpha,\beta}$ и $B_{\alpha,\beta}$ заданы формулами* (1) *и* (2) *соответственно. Тогда* $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, A_{\alpha,\beta} = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, B_{\alpha,\beta}$.

Отметим, что исследование свойств операторов $A_{\alpha,\beta}$ можно найти в [1, 14, 24, 34].

Пример 5.3. Сведение дифференциального оператора первого порядка с инволюцией к оператору Дирака (см. [22, 23]). В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Ax)(t) = x'(t) + q(t)x(1-t), \quad t \in [0,1], \quad D(A) = \{x \in W_2^1[0,1] : x(0) = x(1)\}.$$

Переход от оператора A к соответствующему оператору Дирака осуществляется следующим образом. Пусть $y(t) = \{x(t), x(1-t)\} = \{y_1(t), y_2(t)\}$.

Из [23, лемма 1] вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Оператор A спектрально эквивалентен оператору $B : D(B) \subset L_2([0,1],\mathbb{C}^2) \to L_2([0,1],\mathbb{C}^2)$ вида*

$$(By)(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y'(t) + \begin{pmatrix} 0 & q(t) \\ q(1-t) & 0 \end{pmatrix} y(t), \quad t \in [0,1],$$

и $y_1(1/2) = y_2(1/2)$.

Пример 5.4 (см. также [4]). Обозначим через S оператор одностороннего сдвига последовательностей из $l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$: $S \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$, $p \in [1,\infty)$. Рассмотрим разностный оператор $D \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$ вида

$$D = S^2 + B_1 S + B_2,$$

где $B_1, B_2 \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$ и $(B_k x)(n) = B_k(n)x(n)$, $k = 1,2$, $x \in l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$ — операторы умножения на операторные функции. Также введем оператор $\mathcal{D} \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X}^2)$, $\mathcal{D} = \mathcal{S} + \mathcal{B}$, где операторы $\mathcal{S}, \mathcal{B} \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X}^2)$ определяются равенствами

$$\mathcal{S}x = (Sx_1, Sx_2), \quad (\mathcal{B}x)(n) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix} x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = (x_1,x_2) \in l_p(\mathbb{Z},\mathcal{X}^2).$$

Другими словами, оператор D определяется в $l_p \times l_p$ матрицей вида

$$\begin{pmatrix} S & -I \\ B_2 & S + B_1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.4 (см. [4, теорема 1]). $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(D) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{D})$.

Отметим, что в [5] рассматривался более сложный случай разностного оператора высшего порядка, который также сводился к матричному разностному оператору. Мы его не приводим ввиду громоздкости.

Пример 5.5 (см. также [7]). Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор. Рассмотрим операторный полином второй степени

$$\mathcal{A} = B_0 A^2 + B_1 A + B_2 : D(A^2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

с областью определения $D(\mathcal{A}) = \{x \in D(A), Ax \in D(A)\}$, где $B_k \in \operatorname{End}\mathcal{X}$. Также введем оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A)$, с помощью операторной матрицы

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & B_0 A + B_1 \end{pmatrix},$$

т.е. $\mathbb{A}(x_1,x_2) = (Ax_1 - x_2, B_2 x_1 + B_0 A x_2 + B_1 x_2)$, $(x_1,x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A)$.

Теорема 5.5 (см. [7, теорема 1]). *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ эквивалентны, т.е.* $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{A}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathbb{A})$.

Отметим, что в [5] был рассмотрен операторный полином степени n при условии $A \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ и также осуществлено его сведение к матричному оператору. Наконец, самый общий случай сведения дифференциальных и разностных полиномов n-го порядка к эквивалентному матричному оператору приведен в [38] (его мы также не рассматриваем ввиду громоздкости).

Отметим работу [8], в которой произведено сведение линейных дифференциальных операторов к эквивалентным операторам, заданным операторными матрицами второго порядка.

Пример 5.6 (см. [9]). Рассмотрим семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t,s),\ -\infty < s \leqslant t < +\infty\}$ из $\operatorname{End}\mathcal{X}$, т.е. пусть выполнены следующие условия:

(i) семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно на $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : s \leqslant t\}$;

(ii) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$, $-\infty < \tau \leqslant s \leqslant t < +\infty$;

(iii) $\mathcal{U}(t,t) = I$ для всех $t \in \mathbb{R}$;

(iv) $\sup\limits_{0 \leqslant t-s \leqslant 1} \|\mathcal{U}(t,s)\| = K < \infty$.

Семейству ставится в соответствие оставляется линейный оператор

$$\mathcal{L}_u : D(\mathcal{L}_u) \subset L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}),$$

с такой областью определения, что функция $x \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ включается в $D(\mathcal{L}_u)$, если существует функция $f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, удовлетворяющая почти для всех $s \leqslant t$ из $\mathbb{R}$ равенству

$$x(t) = \mathcal{U}(t,s)x(s) - \int\limits_s^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau;$$

при этом считается $\mathcal{L}_u x = f$. Таким образом, определен абстрактный параболический оператор $\mathcal{L}_u = -d/dt + A(t) : D(\mathcal{L}_u) \subset L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, где $\mathcal{U}$ — семейство эволюционных операторов для линейного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши.

Рассмотрим также полугруппу $\{T_u(t), t \geqslant 0\}$ операторов из банаховой алгебры $\mathrm{End}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ вида

$$(T_u(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad x \in (\mathbb{R}, \mathcal{X}), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

Из [9, теорема 2] вытекает следующий результат.

Теорема 5.6. $\mathrm{St_{inv}}(\mathcal{L}_u) = \mathrm{St_{inv}}(I - T_u(1))$.

Рассмотрим оператор $D : l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \to l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$, определяемый формулой

$$(Dx)(n) = x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad x \in l_2(\mathbb{Z}, \mathcal{X}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 5.7 (см. [9, теорема 3])**.** $\mathrm{St_{inv}}(\mathcal{L}_u) = \mathrm{St_{inv}}(D)$.

Пример 5.7 (см. [10–12])**.** Зададим пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ инволюцию по формуле $(Jx)(n) = x(-n)$, $x \in l_p$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in [1, \infty)$. Это простейший вид инволюции в l_p — отражение. Отметим, что существуют и другие виды инволюции. Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ определим оператор

$$A_\alpha : D(A_\alpha) \subset l_p \to l_p, \quad A_\alpha = \alpha I, \quad D(A_\alpha) = \{x \in l_p, \alpha x \in l_p\}.$$

Рассмотрим оператор

$$A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J, \quad \alpha, \beta \in l^\infty, \qquad A_{\alpha,\beta} = \alpha I + \beta J, \quad D(A_{\alpha,\beta}) = D(A_\alpha) \cap D(A_\beta). \tag{3}$$

Каждой последовательности $x \in l_p$, $1 \leqslant p < \infty$, поставим в соответствие пару последовательностей $\overline{x} = (x_+, x_-)$, где $x_\pm(n) = x(\pm n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, $\overline{x} \in l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ или $\overline{x} : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}^2$; обозначим через $U : l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, $Ux = \overline{x}$, оператор, осуществляющий это соответствие. Очевидно, что $\mathrm{Ker}\, U = \{0\}$, $\mathrm{Im}\, U = l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$. Таким образом, оператор U осуществляет взаимно однозначное соответствие между $l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C})$ и $l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ и имеет обратный.

С помощью такой замены оператор $A_{\alpha,\beta}$, действующий в пространстве l_2, сводится к спектрально эквивалентному оператору $B_{\alpha,\beta} : D(B_{\alpha,\beta}) \subset l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \to l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, действующему по формуле

$$(B_{\alpha,\beta}\overline{x})(n) = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \beta(-n) & \alpha(-n) \end{pmatrix} \overline{x}(n) = Q(n)\overline{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

При этом спектр оператора $B_{\alpha,\beta}$ есть объединение спектров матриц второго порядка $Q(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и легко вычисляется.

Теорема 5.8. *Пусть операторы $A_{\alpha,\beta}$ и $B_{\alpha,\beta}$ заданы формулами* (3) *и* (4) *соответственно. Тогда* $\mathrm{St_{inv}}\, A_{\alpha,\beta} = \mathrm{St_{inv}}\, B_{\alpha,\beta}$.

6. Фредгольмовы операторы.

Определение 6.1 (см. [2]). Если оператор A находится в одном из состояний $\{1,7\}$, $\{2,7\}$, $\{2,8\}$, причем $n, m < \infty$, то он называется фредгольмовым оператором (или ФЭ=оператором). Если оператор A находится в одном из состояний $\{1,7\}$, $\{2,7\}$, $\{2,8\}$, причем только одно из чисел n, m конечно, то он называется полуфредгольмовым: Φ_+-оператором, если $n < \infty$, и Φ_--оператором, если $m < \infty$. Число $\operatorname{Ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \operatorname{codim} \operatorname{Im} A$ называется индексом фредгольмова оператора.

Определение 6.1 полностью согласуется с определением фредгольмова оператора из [32]. В этой статье рассмотрены также различные определения фредгольмова оператора и связь между определениями.

Приведем примеры фредгольмовых операторов.

Пример 6.1. Оператор A из примера 3.3, имеющий нижнетреугольную матрицу, фредгольмов.

Пример 6.2. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — оператор с компактной резольвентой, т.е. его спектр состоит из собственных значений конечной кратности и не имеет предельных точек. Так как нас интересуют состояния обратимости, то возможны два случая: $0 \in \sigma(A)$ и $0 \notin \sigma(A)$. Во втором случае $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A) = \{9\}$. Пусть теперь $0 \in \sigma(A)$. Тогда $P_0 = P(\{0\}, A)$ — соответствующий спектральный проектор, $I = P_0 + P^0$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}_0 = \operatorname{Im} P_0$, сужение $A|_{\mathcal{X}_0}$ оператора A на подпространство $\mathcal{X}_0$ есть нильпотентный оператор, размерность ядра $\dim \operatorname{Ker} A$ которого совпадает с алгебраической кратностью собственного значения нуль. Таким образом, $\mathcal{X}_0$ состоит из нильпотентных векторов и является замкнутым дополняемым подпространством в $\mathcal{X}$. Оператор $A|_{\mathcal{X}^0}$ обратим, и обратный к нему является ограниченным компактным оператором.

Теорема 6.1. *Оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ с компактной резольвентой является фредгольмовым.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е. Л., Кириченко Б. И.* О спектральных функциях интегральных операторов Карлемана с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов// Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*, № 6. — С. 1219–1231.
2. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений// Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — *73*, № 2. — С. 3–68.
3. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 1 (409). — С. 77–128.
4. *Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 2015. — *79*, № 2. — С. 3–20.
5. *Баскаков А. Г., Харитонов В. Д.* Спектральный анализ операторных полиномов и разностных операторов высокого порядка// Мат. заметки. — 2017. — *101*, № 3. — С. 330–345.
6. *Баскаков А. Г., Диденко В. Б.* О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — *82*, № 1. — С. 3–16.
7. *Баскаков А. Г., Диденко В. Б.* Спектральный анализ операторных полиномов и дифференциальных операторов второго порядка// Мат. заметки. — 2020. — *108*, № 4. — С. 490–506.
8. *Баскаков А. Г., Кабанцова Л. Ю., Коструб И. Д., Смагина Т. И.* Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 10–20.
9. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов// Функц. анал. прилож. — 1996. — *30*, № 3. — С. 1–11.
10. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства разностных операторов с инволюцией// Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.). — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2023. — С. 7–11.

11. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Об ограниченных разностных операторах с инволюцией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *229.* — С. 12–21.
12. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Некоторые свойства разностных операторов с инволюцией// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2023. — № 2. — С. 36 – 45.
13. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 11. — С. 3–42.
14. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Об алгебре интегральных операторов с инволюцией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *230.* — С. 41–49.
15. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Костина Л. Н., Ускова Н. Б.* О состояниях обратимости оператора с компактной резольвентой// Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 4–6 декабря 2023 г.). — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2024. — С. 36 – 40.
16. *Бесаева С. В.* О спектре разностных отношений и дифференциальных операторов в весовых пространствах последовательностей и функций// Алгебра анализ. — 2014. — *26*, № 4. — С. 1–21.
17. *Бичегкуев М. С.* К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Мат. сб. — 2013. — *204*, № 11. — С. 3–20.
18. *Бичегкуев М. С.* Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — *75*, № 4. — С. 3–20.
19. *Бичегкуев М. С., Бесаева С. В.* О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 2. — С. 16–21.
20. *Бичегкуев М. С.* О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Функц. анал. прилож. — 2010. — *44*, № 1. — С. 80–83.
21. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
22. *Бурлуцкая М. Ш.* Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения. — Воронеж: Научная книга, 2020.
23. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — *14*, № 1. — С. 10–20.
24. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Об алгебрах операторов в функциональных пространствах с инволюцией// Мат. 22 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посв. 300-летию РАН (Саратов, 28–31 января 2024 г.), 2024. — С. 65–68.
25. *Диденко В. Б.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 2. — С. 226–240.
26. *Диденко В. Б.* О состояниях обратимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — *14*, № 2. — С. 136–144.
27. *Диденко В. Б.* Спектральные свойства операторов AB и BA// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 2. — С. 196–209.
28. *Дуплищева А. Ю.* О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2015. — *15*, № 1. — С. 31–37.
29. *Кабанцова Л. Ю.* Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2017. — *17*, № 3. — С. 285–293.
30. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
31. *Кострикин А. И.* Введение в линейную алгебру. Часть I. — М.: Физматлит, 2004.
32. *Крачковский С. Н., Диканский А. С.* Фредгольмовы операторы и их обобщения// в кн.: Итоги науки. Математика. Математический анализ. — М.: ВИНИТИ РАН, 1968. — С. 39–71.
33. *Курбатов В. Г.* Алгебра. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2022.
34. *Пальчиков А. Н.* Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 3. — С. 80–83.
35. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
36. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦМНО, 2004.

37. *Barnes B. A.* Common operator properties of the linear operators RS and SR// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — *126*, № 4. — P. 1055–1061.
38. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Spectral properties of an operator polynomial with coefficients in a Banach algebra// в кн.: Frames and Harmonic Analysis. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2018. — С. 93–114.
39. *Kravchenko V. V., Sitnik S. M.* Transmutation Operators and Applications. — Cham: Birkhäuser, 2020.
40. *Litvinchuk G. S., Spitkovski I. M.* Factorization of Measurable Matrix Functions. — Basel: Birkhäuser, 1987.
41. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. — London: Academic Press, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич (Baskakov Anatolii Grigorievich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `anatbaskakov@yandex.ru`

Гаркавенко Галина Валериевна (Garkavenko Galina Valerievna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `g.garkavenko@mail.ru`

Ускова Наталья Борисовна (Uskova Natalia Borisovna)
Воронежский государственный технический университет
(Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)
E-mail: `nat-uskova@mail.ru`

Костина Любовь Николаевна (Kostina Lyubov Nikolaevna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `kostinalubov@bk.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 15–33
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-15-33

УДК 519.24

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОЙ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ И МАРКОВСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

© 2024 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, Д. А. ЧЕРКАШИН**

Посвящается светлой памяти академика НАНУ В. Г. Барьяхтара (1930–2020)

Аннотация. Дано краткое введение в теорию перколяции. В рамках дискретной теории перколяции на бесконечных графах разработан метод аппроксимации вероятности перколяции, основанный на конструировании последовательности «аппроксимирующих» бесконечных графов специального типа, называемых иерархическими. Вычисление вероятности перколяции для графов такого типа сводится к анализу подходящего марковского ветвящегося процесса с дискретным временем.

***Ключевые слова*:** бесконечный граф, вероятность перколяции, ветвящийся случайный процесс, надкритический режим, отношение связности.

HIERARCHICAL MODELS IN DISCRETE PERCOLATION THEORY AND MARKOV BRANCHING PROCESSES

© 2024 **Yu. P. VIRCHENKO, D. A. CHERKASHIN**

Dedicated to the bright memory of NASU academician V. G. Baryakhtar (1930–2020)

Abstract. A brief introduction to percolation theory is given. Within the framework of the discrete percolation theory on infinite graphs, we develop a method for approximating the percolation probability based on the construction of a sequence of infinite graphs of a special type called the hierarchical graphs. The calculation of the percolation probability for graphs of this type is reduced to the analysis of a suitable Markov branching process with discrete time.

***Keywords and phrases*:** infinite graph, percolation probability, branching random process, supercritical regime, connectedness relation.

***AMS Subject Classification*:** 60K35, 60J85

1. Введение. Считается, что теория перколяции берет свое начало с работ Дж. Хаммерсли [17, 19, 21]. Это действительно так с точки зрения возникновения идеологически новой постановки задач в рамках теории вероятностей. Однако по мере развития этой теории при широкой, логически завершенной трактовке понятий теории перколяции стало понятным, что представление о перколяции возникло в математике значительно раньше при решении задачи Гальтона—Ватсона (см., например, [16]); в процессе развития оно превратилось в теорию марковских ветвящихся случайных процессов (см., например, [11]). К настоящему времени теория перколяции уже утвердилась как полноправный раздел теории вероятностей. Появились монографии [13, 20, 22] и обзорные статьи (см., например, [7, 18]), которые подвели итог определенному этапу развития теории. К настоящему времени теория перколяции, как и всякая развитая математическая теория, подошла к состоянию, когда сформулировано множество сложных проблем, требующих для своего решения принципиально новых математических методов, которые вряд ли окажутся простыми и универсальными. Настоящая работа направлена на разработку как раз такого нетрадиционного подхода к решению задач из наиболее разработанного направления теории, которое называется *дискретной теорией перколяции*. В этой работе мы касаемся только тех задач дискретной теории, в которых перколяция рассматривается как ненаправленный процесс.

Математически общая концепция теории перколяции базируется на трех взаимосвязанных математических структурах (см. [2]). Во-первых, на множестве V, которое мы будем называть *пространством погружения*, должно быть определено бинарное симметричное отношение φ, на основе которого вводится понятие о связности или несвязности подмножеств из cV; при этом само множество V должно быть связным. Во-вторых, должно быть определено расстояние $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ между элементами из V, относительно которого V является полным метрическим пространством, а отношение φ непрерывно. В третьих, на семействе $\mathcal{W} = 2^V$ должна быть определена *структура измеримости*, т.е. σ-алгебра $\mathfrak{W}$ семейств $\mathcal{A}$ подмножеств из V. Эта σ-алгебра должна быть согласована с топологией и отношение φ должно быть измеримым. На σ-алгебре вводится σ-аддитивная (вообще говоря, конечная) мера P. Нормированную на единицу конечную меру P будем называть вероятностью и обозначать через $\Pr\{\mathcal{A}\}$ ее значения для каждого измеримого семейства $\mathcal{A}$. При выполнении перечисленных трех условий, можно говорить, что определена *перколяционная структура*, в рамках которой можно ставить и решать задачи о наличии с ненулевой вероятностью связей между различными подмножествами из V. В частности, ставить вопрос о наличии *перколяции* (протекании на бесконечность) в случае, если V является некомпактным метрическим пространством. Конечно же, описанная точка зрения на природу теории перколяции является очень общей и в дальнейшем в настоящей работе мы не будем ее анализировать в столь абстрактной форме. Конкретные объекты теории перколяции, которые укладываются в описанную математическую схему, приводятся в обзорных работах [7–10].

Предметом нашего рассмотрения является так называемая *дискретная теория перколяции*, в которой V является счетным множеством. В этом случае определение отношения связности, топологии и структуры измеримости «случайных» подмножеств из V и меры P сильно упрощается. Краткое введение в это направление теории перколяции дано в следующем разделе. В дискретном случае оказывается возможной разработка более или менее общих приближенных аналитических методов вычисления перколяционных характеристик (отметим, что они немногочисленны и, как правило, довольно трудоемки). При их использовании очень сложно давать эффективную оценку точности получаемых приближений. Примеры таких вычислений приведены, например, в монографии [22]. В основном они базируются на так называемом *кластерном разложении* и контурном методе оценки точности приближений. Попытки усовершенствования этого метода представлены, например, в [4, 27]. Более того, эти методы не позволяют вычислять для сколько-нибудь общих объектов исследования дискретной теории перколяции так называемый *порог перколяции* c_*, даже в простейшем случае, когда мера P определяется посредством бернуллиевского случайного поля на V. Под вычислением мы понимаем построение приближений с указанием гарантированных оценок их точности так, чтобы можно было утверждать, что эти приближения сходятся к истинному порогу c_*. В описанной ситуации очень сложно доказывать какие-либо общие утверждения о качественных свойствах перколяционных характеристик. Например, с физической точки зрения совершенно очевидно, что так называемая *вероятность перколяции* $P(c)$ для бернуллиевского случайного поля является монотонно возрастающей функцией от концентрации c, однако доказательство этого факта оказывается весьма непростым (см. по этому поводу [1, 15]). Более того, функция $P(c)$ является, по-видимому, вогнутой при $c > c_*$ в случае бернуллиевского поля. Авторам не известно ни доказательство этого факта, ни его опровержение. В связи с этим актуальным является разработка какого-либо общего аналитического подхода для приближенного решения задач дискретной теории перколяции, который бы позволил, хотя бы частично, устранить указанные выше недостатки применяемых в ней расчетных аналитических методов. В настоящей работе сделана попытка построения такого метода основанного на специальных перколяционных моделях, которые авторы называют *иерархическими*. Этот термин выбран нами по аналогии с *иерархическими моделями Ф. Дайсона*, используемыми в равновесной статистической механике решеточных систем при изучении так называемых *фазовых переходов* для гиббсовских случайных полей на кристаллических решетках (см. по этому поводу [12]).

План предлагаемой работы состоит в следующем. В разделе 2 дано введение в систему понятий дискретной теории перколяции, в разделе 3 описана система понятий теории марковских цепей специального типа, которые мы называем *марковскими ветвящимися случайными процессами с марковским измельчением*. На их свойствах основан анализ определяемых нами иерархических моделей. В разделе 4 вводятся в рассмотрение иерархические модели. Наконец, в разделе 5 определяются последовательные аппроксимации вероятности перколяции бернуллиевского случайного поля на бесконечных *локально компактных* графах.

2. Задачи дискретной теории перколяции. В *дискретной теории перколяции*, вследствие счетности множества V, введение отношения связанности основано на понятии *графа* (или, более общó, гиперграфа).

Пусть имеется не более чем счетное множество V элементов, которые в дальнейшем будем обозначать строчными латинскими буквами u, v, w, x, y, z. Число элементов в подмножествах W этого *пространства погружения* обозначаем $|W|$. В частности, если W бесконечно, то будем писать $|W| = \infty$. Положим, что на множестве V задано бинарное симметричное отношение φ, которое называется *отношением смежности*. Если пара различных элементов $\{x, y\} \subset V$ находится в отношении φ, то этот факт будем записывать в виде $\varphi(x, y)$, либо $x\varphi y$. При этом $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Графом Γ называется пара $\langle V, \varphi\rangle = \Gamma$. Элементы множества V в этом случае называются его *вершинами*, а подмножества W вершин — *конфигурациями*. Наоборот, семейства конфигураций называем множествами. Для каждой вершины $x \in V$ кардинальное число $|\{y \in V : \varphi(x, y)\}|$ называется ее степенью. Если это число бесконечно, то считают, что степень вершины бесконечна.

Имеется взаимно однозначное соответствие между всеми конфигурациями W из V и дихотомическими функциями $n(x)$, $x \in V$, принимающими значения в $\{0, 1\}$. Стандартная биекция (функтор) $\mathsf{W}[\cdot] : \{n(x); x \in V\} \mapsto 2^V$ устанавливается формулой $W = \mathsf{W}[n] = \{x : n(x) = 1\}$. Таким образом, определение фиксированной конфигурации $W \subset V$ эквивалентно определению соответствующей ей функции $n(x)$, $x \in V$.

Для всякой конфигурации $W \subset V$ пара $\langle W, \varphi_W\rangle = \Gamma_W$, определяемая сужением φ_W на конфигурацию W отношения φ, называется подграфом Γ_W графа Γ.

Каждая последовательность $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y\rangle$ вершин из V, в которой $x_{j-1}\varphi x_j$, $j \in I_n$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ называется *путем* на Γ из вершины x в вершину y. Число n компонент последовательности называется длиной пути $\gamma(x, y)$; этот факт будем записывать в виде $\mathsf{d}(\gamma(x, y)) = n$. Если последовательность $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots\rangle$ бесконечна, $x_{j-1}\varphi x_j$, $j \in \mathbb{N}$, то такой путь называется бесконечным путем с начальным узлом x. При этом полагаем $\mathsf{d}(\gamma(x)) = \infty$.

Если для указанных выше последовательностей $\gamma(x, y)$ и $\gamma(x)$ выполняется условие $x_j \in W$, то говорят, что такие пути расположены в конфигурации W. При этом $\{x, y\} \subset W$, концевые вершины пути $\gamma(x, y)$ называются *связанными на* W. Этот факт будем записывать в виде $x \overset{W}{\sim} y$, или, если это не вызывает недоразумений, кратко $x \sim y$. Таким образом, на пространстве погружения определено бинарное отношение связанности.

Очевидным образом, отношение связности симметрично (т.е. наряду с $x \sim y$, имеет место $y \sim x$), рефлексивно ($x \sim x$) и транзитивно (т.е. для любых трех вершин x, y, z из $x \sim z$ и $z \sim y$ вытекает $x \sim y$). Наличие перечисленных свойств отношения связанности указывает на то, что оно является *отношением эквивалентности*. Согласно общему свойству таких отношений (см., например, [6]), любая конфигурация W разбивается однозначным образом на дизъюнктивные конфигурации $\{W_j; j \in \mathbb{N}\}$ связанных между собой вершин, причем все эти конфигурации не связаны между собой. В теории перколяции они называются *кластерами*. Аналогично, ввиду указанной выше биекции между конфигурациями и дихотомическими функциями, любая такая функция $n(x)$, $x \in V$ определяет взаимно однозначным образом набор кластеров в V.

Как уже было сказано во введении по поводу построения перколяционной модели, *пространство погружения* V должно быть связным. В этом случае граф Γ называется *связным*. Пусть вершина x принадлежит конфигурации W. Тогда в наборе кластеров $\{W_j; j \in \mathbb{N}\}$ этой конфигурации имеется единственный кластер, который ее содержит; будем обозначать его $W(x)$. Число вершин в каждом кластере W_k из набора, соответствующего конфигурации W, будем обозначать $|W_k| \equiv \mathrm{Card}(W_k)$. В том же случае, когда кластер W_k бесконечен, будем писать $|W_k| = \infty$.

На любом графе для каждой фиксированной конфигурации W возможно введение метрики. Расстояние $\mathrm{dist}(x, y)$ между любыми двумя вершинами x и y из конфигурации $W \subset V$, принадлежащих одному и тому же кластеру $W(x) = W(y)$ в ней, определяется формулой

$$\mathrm{dist}(\gamma(x, y)) = \min\big\{\mathsf{d}(\gamma(x, y));\ \{\gamma(x, y)\} \subset W\big\}.$$

Эта формула гарантирует выполнение всех требований, предъявляемых к понятию расстояния. Положив $\mathrm{dist}(x, y) = \infty$ в случае, когда x и y не связаны или, по крайней мере, одна из этих вершин не принадлежит W, мы согласуем метрику с введенным отношением связности.

Путь $\gamma(x, y)$ (соответственно, бесконечный путь $\gamma(x)$) называется несамопересекающимся, если для любых двух вершин x_j и x_k, $j \neq k$, из последовательности $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y\rangle$ (соответственно, $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle$) выполняется $x_j \neq x_k$, $\{j, k\} \subset I_n \cup \{0\}$ (соответственно, $\{j, k\} \subset \mathbb{N}_+$). Любые две вершины из одного и того же кластера могут быть связаны несамопересекающимся конечным путем.

Наибольший интерес в дискретной теории перколяции представляет случай, когда исходный граф Γ перколяционной модели бесконечен, т.е. $|V| = \infty$. Кроме того, среди всех бесконечных графов представляют интерес такие, у которых степень каждой вершина конечна. Это условие гарантирует, что метрика на графе Γ определяет на нем *локально компактную топологию*. Поэтому такие графы, в дальнейшем, мы называем *локально компактными*.

Заметим, что в теории, излагаемой в [22], требуется выполнение более жесткого условия, а именно, чтобы степени всех вершин были равномерно ограничены. При условии конечности степеней всех вершин, конечность кластера эквивалентна конечности любого расположенного в нем несамопересекающего пути. В таком случае бесконечность локально компактного графа Γ эквивалентна наличию в нем сколь угодно удаленных друг от друга вершин.

Здесь мы не обсуждаем вопрос о какой-либо классификации необозримого множества бесконечных графов. Тип бесконечных графов, для которых ставятся и решаются задачи дискретной теории перколяции, определяется требованиями ее приложений. Бесконечные графы, используемые в статистической математической физике и теории случайных процессов, по отношению к которым приложима теория перколяции, бывают в основном двух типов. Это так называемые *древесные бесконечные графы*, о которых пойдет речь в следующем разделе, и *периодические графы* (см. [3, 22]), которые используются в статистической механике решетчатых систем (см. [24]). В настоящей работе будем использовать (см. раздел 4) бесконечные графы *иерархического типа*, построение которых осуществляется на основе комбинирования математических механизмов, используемых при построении графов указанных двух типов.

Наконец, для того чтобы синтезировать такую структуру измеримости для моделей дискретной теории перколяции, чтобы отношение связанности (или, эквивалентно, отношение φ смежности на графе) было измеримым, нужно определиться с *пространством элементарных событий* $\mathcal{W}$. Это требование связано в первую очередь с приложениями теории перколяции. Очевидным образом, нужно считать, что $\mathcal{W}$ составляет семейство всех конфигураций $W \subset V$. Структура измеримости — σ-алгебра $\mathfrak{W}$ — должна порождаться не более чем счетным классом множеств конфигураций, которые являются *случайными событиями.* Так как $\mathrm{Card}\, 2^V = \aleph_1$, то конкретный выбор этого класса должен быть регламентирован какими-либо дополнительными соображениями. Для того чтобы отношение связности было измеримым, нужно в качестве класса $\mathfrak{W}_0$ случайных событий, порождающего σ-алгебру $\mathfrak{W}$, выбрать все так называемые *цилиндрические множества* $\mathcal{A}[X] = \{W \subset V : X \subset W, |X| < \infty\}$ конфигураций, определяемых всевозможными конечными наборами X из V. Легко видеть, что класс $\mathfrak{W}_0$ цилиндрических событий счетен, и поэтому минимальная σ-алгебра $\mathfrak{W}$, содержащая этот класс, является счетнопорожденной (см. [6]).

Пусть $X \subset V$. Введем в рассмотрение множества конфигураций

$$\mathcal{C}[X] = \Big\{W \subset V : x \overset{W}{\sim} y,\ \{x, y\} \subset X\Big\}.$$

Теорема 1. *Для любой конфигурации $Z \subset V$ на любом конечном графе и на любом бесконечном локально компактном графе множество $\mathcal{C}[Z]$ конфигураций измеримо.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда Γ — бесконечный граф. Множество $\mathcal{C}[Z]$ представимо в виде не более чем счетного пересечения

$$\mathcal{C}[Z] = \bigcap_{\{x,y\}\subset Z} \mathcal{C}[\{x,y\}].$$

Тогда достаточно доказать измеримость каждого из множеств $\mathcal{C}[\{x,y\}]$.

Пусть $\gamma(x,y) = \langle x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y\rangle$ — произвольный конечный путь на Γ. Множество $\mathcal{C}[X]$, $X = \{\gamma(x,y)\}$, $|X| < \infty$, измеримо, так как его можно представить в виде

$$\mathcal{C}[X] = \{W \subset V : \{\gamma(x,y)\} \subset W\}.$$

Так как $\mathcal{C}[\{x,y\}]$ есть объединение цилиндрических множеств,

$$\mathcal{C}[\{x,y\}] = \bigcup_{\{\gamma(x,y)\}\subset V} \bigl\{W \subset V : \{\gamma(x,y)\} \subset W\bigr\},$$

то справедливость утверждения для пары вершин конечного графа очевидна ввиду конечности множества всех возможных несамопересекающихся путей $\gamma(x,y)$ на конечном графе.

Для доказательства справедливости утверждения в случае бесконечных локально компактных графов Γ заметим, что у таких графов наборы вершин $V_N = \{z \in V : \mathrm{dist}(x,z) < N\}$ конечны. Рассмотрим сужения Γ_{V_N} графа Γ (они необязательно являются связными) при $N \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение множества

$$\mathcal{C}_N[\{x,y\}] = \bigl\{W \subset V : \exists\{\gamma(x,y)\} \subset W \cap V_N\bigr\},$$

которые, как указано выше, измеримы. Тогда измеримость множества $\mathcal{C}[\{x,y\}]$ следует из его представления в виде теоретико-множественного предела измеримых множеств

$$\mathcal{C}[\{x,y\}] = \lim_{N\to\infty} \mathcal{C}_N[\{x,y\}]. \qquad \square$$

Доказанное утверждение дает основу для постановки и решения задач о вычислении вероятности связанности для любого конечного набора вершин графа Γ. Тем самым оно подводит итог построению моделей дискретной теории перколяции, так как определены три взаимосвязанных математических структуры: связность, топология и измеримость, необходимость которых требуется для задания *перколяционной структуры.* Следствием теоремы 1 является, в частности, следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$ — связный бесконечный локально компактный граф. Тогда для любой вершины $x \in V$ множество*

$$\mathcal{C}[x] = \bigl\{x : \exists(\gamma(x) \subset V : \mathsf{d}(\gamma(x)) = \infty)\bigr\}$$

конфигураций W измеримо.

Доказательство следует из того факта, что все множества

$$\mathcal{C}_N[x] \equiv \bigcup_{y\in V:\mathrm{dist}(x,y)>N} \bigl\{W \subset V : y \overset{W}{\sim} x\bigr\}$$

измеримы как счетные объединения измеримых множеств, и представления $\mathcal{C}[x]$ в виде теоретико-множественного предела

$$\mathcal{C}[x] = \lim_{N\to\infty} \mathcal{C}_N(x). \qquad \square$$

Заметим, что множество $\mathcal{C}(x)$ состоит из всех конфигураций, содержащих какой-либо бесконечный путь $\gamma(x)$,

$$\mathcal{C}[x] = \lim_{N\to\infty} \bigl\{\exists(\{\gamma(x,y)\} \subset V : \mathsf{d}(\gamma(x,y)) > N)\bigr\}$$

или, эквивалентно, содержащих хотя бы один бесконечный кластер.

Определение 1. Если на σ-алгебре $\mathfrak{W}$ графа Γ определена такая мера P, что для фиксированной вершины $x \in V$ вероятность $P[x] = \Pr\{W \subset V : W \in \mathcal{C}[x]\}$ положительна, то говорят, что для меры P из этой вершины существует перколяция.

Одной из центральных проблем теории перколяции является установление условий для графа Γ и меры P, которые приводят к существованию перколяции из какой-либо его вершины.

Для построения σ-аддитивной меры $\mathsf{P}(\cdot) \equiv \Pr\{\cdot\}$ на σ-алгебре $\mathfrak{W}$, связанной с графом $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$, нужно определить ее на алгебре, порождаемой всеми цилиндрическими множествами $\mathcal{A}[X]$, $X \subset V$, $|X| < \infty$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы мера P удовлетворяла соотношениям *согласованности* на классе $\mathfrak{C}$ множеств конфигураций, которые образует так называемую c-систему (по этому поводу см. [5]). Такой класс $\mathfrak{C}$ состоит из всех множеств $\mathcal{A}[X]\cap\bar{\mathcal{A}}[Y]$ конфигураций с $X \cup Y \subset V$, $|X \cup Y| < \infty$, где $\bar{\mathcal{A}}[Y] = \{W \subset V : Y \cap W = \varnothing\}$.

Теорема 3. *Класс $\mathfrak{C}$ образует c-систему.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\mathcal{A}[X]\cap\bar{\mathcal{A}}[Y] = \varnothing$, если $X\cap Y \neq \varnothing$. Согласно определению c-системы (см. [5]) пересечение каждой пары ее элементов и дополнение до $\mathcal{W}$ каждого ее элемента должны быть представимы в виде дизъюнктивных объединений конечных наборов элементов этой же системы. Для того чтобы имело место включение $W \in \mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]$, необходимо и достаточно, чтобы $X \subset W$ и $W \cap Y = \varnothing$.

Пересечение двух элементов c-системы имеет вид

$$\Big(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]\Big) \cap \Big(\mathcal{A}[X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y']\Big) = \mathcal{A}[X \cup X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y \cup Y']. \tag{1}$$

Далее, заметим, что

$$\complement\Big(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]\Big) = \big\{W \subset V : X \not\subset W\big\} \cup \big\{W \subset V : W \cap Y \neq \varnothing\big\}.$$

Расклассифицируем все конфигурации W, входящие в это множество, согласно набору пар $\langle X', Y'\rangle$, в которых $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, где $X' = X \cap \complement W$, $Y' = Y \cap W$ и $X' \cup Y' \neq \varnothing$, так как по крайней мере один набор из этой пары не пуст. Тогда каждой конфигурации W соответствует одна и только одна пара $\langle X', Y'\rangle$. При такой классификации справедливо разложение по элементам класса $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned}
&\big\{W \subset V : W \not\subset X\big\} \cup \big\{W \cap Y \neq \varnothing\big\} = \\
&\qquad = \bigcup_{\substack{X'\subset X,\ Y'\subset Y:\\ X'\cup Y'\neq\varnothing}} \Big\{W \subset V : X' \cup (Y \setminus Y') \subset \complement W,\ Y' \cup (X \setminus X') \subset W\Big\} = \\
&\qquad\qquad = \bigcup_{\substack{X'\subset X,\ Y'\subset Y:\\ X'\cup Y'\neq\varnothing}} \mathcal{A}\big[Y' \cup (X \setminus X')\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X' \cup (Y \setminus Y')\big],
\end{aligned} \tag{2}$$

которое является дизъюнктивным, так как для каждых двух различных пар $\langle X'_j, Y'_j\rangle$, $X'_j \subset X$, $Y'_j \subset Y_j$, удовлетворяющих условию $X'_j \cup Y'_j \neq \varnothing$, $j \in \{1, 2\}$, с учетом (1), имеем

$$\begin{aligned}
&\Big[\mathcal{A}\big[Y'_1 \cup (X \setminus X'_1)\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X'_1 \cup (Y \setminus Y'_1)\big]\Big] \cap \Big[\mathcal{A}\big[Y'_2 \cup (X \setminus X'_2)\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X'_2 \cup (Y \setminus Y'_2)\big]\Big] = \\
&\qquad = \mathcal{A}\big[(Y'_1 \cup Y'_2) \cup (X \setminus (X'_1 \cap X'_2))\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[(X'_1 \cup X'_2) \cup (Y \setminus (Y'_1 \cap Y'_2))\big] = \varnothing,
\end{aligned}$$

где

$$\Big((Y'_1 \cup Y'_2) \cup \big(X \setminus (X'_1 \cap X'_2)\big)\Big) \cap \Big((X'_1 \cup X'_2) \cup \big(Y \setminus (Y'_1 \cap Y'_2)\big)\Big) \neq \varnothing,$$

если $X'_1 \neq X'_2$ либо $Y'_1 \neq Y'_2$. □

Следствие 1. *Аддитивная мера P, заданная на классе множеств $\mathfrak{C}$ конфигураций, продолжается однозначным образом на порождаемую им минимальную σ-алгебру. Для задания меры $\mathsf{P}(\cdot) = \Pr\{\cdot\}$ на классе $\mathfrak{C}$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям*

$$\Pr\Big\{\Big(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]\Big) \cap \Big(\mathcal{A}[X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y']\Big)\Big\} = \Pr\Big\{\mathcal{A}\big[X \cup X'\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[Y \cup Y'\big]\Big\}, \tag{3}$$

$$\sum_{X' \subset X, Y' \subset Y} \Pr\Big\{\mathcal{A}\big[Y' \cup (X \setminus X')\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X' \cup (Y \setminus Y')\big]\Big\} = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из результатов [26]. Равенство (3) следует из (1), а условие (4) — из (2) и требования аддитивности меры P. □

Равенства (3), (4) называем *условиями согласованности* при задании меры P на классе $\mathfrak{C}$.

В общем случае определение меры на бесконечных графах является математической проблемой. Примеры ее постановки и решения демонстрируются в статистической механике решеточных моделей (см. [24]) и конструктивной квантовой теории поля (см. [25]), в рамках которых приходится устанавливать существование так называемого *термодинамического предела* распределений вероятностей для гиббсовских случайных полей. Мы не будем здесь обсуждать эту проблему в общем случае, а ограничимся только определением меры P в случае *однородного бернуллиевского случайного поля* $\{\tilde{n}(x); x \in V\}$ на произвольном бесконечном графе. Это связано с тем, что практически все полученные к настоящему времени результаты в дискретной теории перколяции связаны именно с мерой P такого типа. Здесь и далее знак тильда указывает на то, что отмеченный математический объект является случайным.

Определение 2. Случайное дихотомическое поле $\{\tilde{n}(x); x \in V\}$, определяемое на не более чем счетном множестве V на основе набора вероятностей

$$p(X) \equiv \Pr\{\mathcal{A}[X]\} = c^{|X|}, \quad X \subset V,$$

при фиксированном значении $c \in [0,1]$, называется однородным бернуллиевским полем.

Таким образом, однородное бернуллиевское поле полностью определяется значением вероятности $\Pr\{\tilde{n}(x) = 1\} = c$. Параметр $c \in [0,1]$ — вероятность заполнения фиксированной вершины — называем *концентрацией.* При этом $\mathsf{E}\tilde{n}(x) = c$, $x \in V_\Gamma$.

Теорема 4. *Для любого не более чем счетного множества V набор функций $p(X)$, $n \in \mathbb{N}$, определяет меру каждого из измеримых множеств $\mathcal{A}$ конфигураций $W \subset V$.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнимость (3) и (4). Так как при $X \cap Y = \varnothing$, $X' \cap Y' = \varnothing$ имеем

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]) = c^{|X|}(1-c)^{|Y|}, \quad \mathsf{P}(\mathcal{A}[X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y']) = c^{|X'|}(1-c)^{|Y'|},$$

то условие (3) выполняется очевидным образом. При $X \cap X' = Y \cap Y' = \varnothing$ имеем

$$\mathsf{P}\Big(\big(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]\big) \cap \big(\mathcal{A}[X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y']\big)\Big) = c^{|X|+|X'|}(1-c)^{|Y|+|Y'|}.$$

Условие (4) получается с учетом дизъюнктивности разложения (2):

$$\Pr\Bigg\{\bigcup_{\substack{X' \subset X, \\ Y' \subset Y}} \mathcal{A}\big[Y' \cup (X \setminus X')\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X' \cup (Y \setminus Y')\big]\Bigg\} =$$

$$= \sum_{\substack{X' \subset X, \\ Y' \subset Y}} \Pr\Big\{\mathcal{A}\big[Y' \cup (X \setminus X')\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X' \cup (Y \setminus Y')\big]\Big\} =$$

$$= \Bigg(\sum_{X' \subset X} c^{|X \setminus X'|}(1-c)^{|X'|}\Bigg)\Bigg(\sum_{Y' \subset Y} c^{|Y'|}(1-c)^{|Y \setminus Y'|}\Bigg) = 1. \quad \square$$

3. Ветвящиеся случайные процессы с дискретным временем. Циклом на графе Γ называется конечная последовательность $\langle x_0, x_1, \dots, x_n = x_0 \rangle$, в которой $x_{j-1} \varphi x_j$, $j = 1, \dots, n$.

Определение 3. Связный граф Γ, не имеющий циклов, называется древесным.

Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — древесный граф, у которого имеется отмеченная вершина (с меткой $\mathbf{0}$), которую будем считать *начальной.* Ввиду отсутствия циклов любой путь с началом в этой вершине является несамопересекающимся. По этой причине для любой вершины $x \in V$ существует единственный путь, связывающий ее с вершиной $\mathbf{0}$; длина этого пути равна $\mathrm{dist}(\mathbf{0}, x)$. Можно так ввести бесконечный дизъюнктивный набор конфигураций S_m, $m \in \mathbb{N}$, вершин, что $S_m = \{x \in V : \mathrm{dist}(\mathbf{0}, x) = m\}$. Очевидно, $V = \{\mathbf{0}\} \cup \bigcup\limits_m S_m$. Конфигурации S_m будем называть *поколениями. Индексом ветвления* любой вершины $x \neq \mathbf{0}$ для такого графа будем называть ее степень, уменьшенную на единицу.

Теорема 5. *Каждая вершина у древесного графа из S_m смежна с какой-либо одной вершиной $x \in S_{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.*

Доказательство. Утверждение следует из существования единственного пути в вершину x из вершины $\mathbf{0}$. Такой путь на $(m-1)$-м шаге должен пройти через некоторую вершину $y \in S_{m-1}$. □

Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — бесконечный локально компактный древесный граф с начальной вершиной $\mathbf{0}$. В этом случае индексы ветвления всех вершин конечны и все наборы S_m, $m \in \mathbb{N}$, также конечны. Бесконечный граф такого типа будем называть *однородным* (деревом Кэйли), если индекс ветвления у всех вершин $x \neq \mathbf{0}$ одинаков и равен степени нулевой вершины. Каждая вершина $x \in S_m$ из дерева Кэйли с индексом ветвления n смежна ровно с n вершинами $y \in S_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}_+$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

В этом разделе рассмотрим задачу теории перколяции из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе Γ при заданном бернуллиевском случайном поле $\tilde{n}(x)$, $x \in \Gamma$.

Введем в рассмотрение марковские цепи $\langle \tilde{X}_m \subset S_m;\ m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ со значениями в виде конечных *случайных наборов* вершин из S_m, т.е. эти случайные последовательности обладают изменяющимся *пространством S_m, $m \in \mathbb{N}_+$ состояний.* Будем называть их *марковскими цепями с ветвлением.*

Идентифицируем каждую вершину графа Γ рассматриваемого типа посредством системы меток, которую построим индукцией по номеру m поколения S_m, содержащего рассматриваемую вершину. Пусть индекс ветвления графа Γ равен n. Если $x \in S_m$, $m \in \mathbb{N}$, то эта вершина представляется взаимно однозначным образом последовательностью $\langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$, где $j_k \in I_n$, $k \in I_m$. При $m = 1$ поставим в соответствие каждой вершине $x \in S_1$, $x\varphi\mathbf{0}$ однокомпонентную последовательность $\langle j_1 \rangle$, $j_1 \in I_n$. Пусть всем вершинам из $\bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$ поставлены в соответствие метки $\langle j_1, j_1, \ldots, j_k \rangle$. Зафиксируем одну из таких вершин в наборе S_m. Она имеет индекс ветвления n. Это означает, что она смежна с n вершинами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $x\varphi y_k$, $k \in I_n$, из набора S_{m+1}, так как расстояние от каждой из этих вершин до $\mathbf{0}$ на единицу больше, чем расстояние от вершины x. Присвоим этим вершинам метки $\langle j_1, j_1, \ldots, j_m, j_{m+1} \rangle$. Таким образом, мы пометили все вершины из S_{m+1}, ввиду произвольности выбранной вершины $x \in S_m$ и того факта, что каждая из вершин в S_{m+1} смежна с какой-либо вершиной из S_m.

Введем на пространствах S_m состояний цепи инъекцию $\mathsf{T} : 2^{S_m} \mapsto 2^{S_{m-1}}$ сужения, которая действует в каждом из наборов S_m, переводя каждую вершину $\langle j_1, j_1, \ldots, j_m \rangle$ в вершину $\langle j_1, j_1, \ldots, j_{m-1} \rangle$, где $S_0 = \{\mathbf{0}\}$. При этом считаем, что $\mathsf{T}\varnothing = \varnothing$.

Любая марковская цепь полностью определяется распределением вероятностей $P_0(A)$ в начальном состоянии A и условной вероятностью перехода

$$P^{(m)}(A, A') = \Pr\left\{ \tilde{X}_m = A \in S_m \;\middle|\; \tilde{X}'_{m-1} = A' \in S_{m-1} \right\}$$

за один шаг ее эволюции. В нашем случае $A \subset S_0 = \{\mathbf{0}\}$, т.е. $A = \{\mathbf{0}\}$ с вероятностью 1. Тогда распределение вероятностей в любой момент $m \in \mathbb{N}$ определяется на основе уравнения марковской цепи

$$P_m(A) = \sum_{A' \subset S_{m-1}} P^{(m)}(A, A') P_{m-1}(A'), \quad A \in S_m.$$

Для конструируемой марковской цепи с ветвлением условная вероятность $P^{(m)}(A,A')$ такова, что $\mathsf{T}\tilde{X}_m \subset \tilde{X}'_{m-1}$ с вероятностью 1, т.е. уравнение принимает вид

$$P_m(A) = \sum_{A'\subset S_{m-1}:\mathsf{T}A\subset A'} P^{(m)}(A,A')P_{m-1}(A'), \quad A\subset S_m.$$

Заметим, что в случае $\mathsf{T}A = A'$ набор $A\subset S_m$ представим в виде дизъюнктивного разложения

$$A = \bigcup_{x\in A'} A_x, \quad \mathsf{T}A_x = \{x\}, \quad |A_x| \leqslant n,$$

т.е. в A_x входят такие вершины y из набора S_m, для каждой из которых существует такое $j\in I_n$, что $y = \langle x, j\rangle$. Отсюда следует, что $|A| = \sum_{x\in\mathsf{T}A} |A_x|$.

Будем говорить, что марковская цепь с ветвлением обладает *марковским измельчением* (см. [5]), если

$$P^{(m)}(A,A') = \prod_{x\in A'} p(A_x), \tag{5}$$

где $p(A) = \Pr\{\tilde{X} = A\}$, $A\subset S_1$ — распределение вероятностей на 2^{S_1}, $S_1 = I_n$.

Введем производящую функцию случайной величины $\tilde{n}_m = |\tilde{X}_m|$,

$$F_m(\zeta) = \sum_{A\subset S_m} \zeta^{|A|} P_m(A),$$

и положим

$$G(\zeta) \equiv F_1(\zeta) = \sum_{A\subset I_n} \zeta^{|A|} P_1(A).$$

Теорема 6. *Производящая функция $F_m(\zeta)$ удовлетворяет функционально-разностному уравнению*

$$F_{m+1}(\zeta) = F_m(G(\zeta)), \quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{6}$$

При этом $F_0(\zeta) = \zeta$.

Доказательство. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
F_{m+1}(\zeta) &= \sum_{A\subset S_{m+1}} \zeta^{|A|} P_{m+1}(A) = \sum_{A\subset S_{m+1}} \zeta^{|A|} \sum_{\substack{A'\subset S_m:\\ \mathsf{T}A\subset A'}} P_m(A') \prod_{x\in A'} p(A_x) = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{\substack{A\subset S_{m+1}:\\ \mathsf{T}A\subset A'}} \biggl(\prod_{x\in\mathsf{T}A} \zeta^{|A_x|} p(A_x)\biggr) p_0^{|A'\setminus\mathsf{T}A|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{B\subset A'} \sum_{\langle\varnothing\ne A_x\subset I_n; x\in B\rangle} \biggl(\prod_{x\in B} \zeta^{|A_x|} p(A_x)\biggr) p_0^{|A'\setminus B|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{B\subset A'} \biggl(\prod_{x\in B} \sum_{\varnothing\ne A_x\subset I_n} \zeta^{|A_x|} p(A_x)\biggr) p_0^{|A'\setminus B|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{B\subset A'} \bigl(G(\zeta) - p_0\bigr)^{|B|} p_0^{|A'\setminus B|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A) \bigl[G(\zeta)\bigr]^{|A'|} = F_m(G(\zeta)),
\end{aligned}$$

где $p_0 = p(\varnothing)$; здесь использована связь $\sum_{x\in A'} |A_x| = |A|$. □

Заметим, что, в отличие от рассмотренных в [11] ветвящихся случайных процессов с неразличимыми частицами, мы ввели более обширный класс случайных процессов с дискретным временем, которые назвали марковскими цепями с марковским измельчением.

В теории случайных ветвящихся марковских процессов имеется так называемый *надкритический режим*, наличие которого полностью определяется распределением $p(\cdot)$ на S_1 и при реализации которого выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \Pr\left\{\tilde{n}_m > 0\right\} > 0,$$

вместе с утверждением о существовании предела. Так как

$$\Pr\{\tilde{n}_m > 0\} = \sum_{\varnothing\neq A\subset S_m} P_m(A) = 1 - P_m(\varnothing) = 1 - F_m(0),$$

то наличие надкритического режима означает, что предел $q = \lim\limits_{m\to\infty} F_m(0)$ существует и он меньше 1. Если этот предел равен 1, то траектория случайного процесса с вероятностью 1 обрывается ($\tilde{n}_m = 0$ начиная с какого-то номера). Если же предел q существует, но меньше 1, то траектория случайного процесса обрывается с вероятностью q, а с вероятностью $1 - q$ уходит на бесконечность.

Для установления критерия наличия надкритического режима у введенных случайных процессов заметим, что производящая функция $G(\xi)$ является полиномом, неотрицательным, возрастающим и выпуклым при $\xi \in [0, 1]$ и удовлетворяющим условию $G(1) = 1$.

Лемма 1. *Пусть $G(\xi)$ — производящая функция распределения вероятностей $p(\cdot)$ на $2^{I_n} = S_1$. Возможны следующие случаи.*

1. *Если $G(0) = 0$, то уравнение $G(\xi) = \xi$ имеет два решения $\xi = 0$ и $\xi = 1$.*
2. *Если $G(0) > 0$, то это уравнение имеет не более двух решений, причем*
   (a) *если $G'(1) \leqslant 1$, то имеется единственное решение $\xi = 1$;*
   (b) *если $G'(1) > 1$, то существуют два решения, из которых одно $\xi = 1$, а второе — $\xi_* = q < 1$.*

Доказательство. Так как функция выпукла, то уравнение имеет не более двух решений. В силу условия $G(1) = 1$ оно всегда имеет решение $\xi = 1$. Кроме того, в случае $G(0) = 0$ имеется второе решение $\xi = 0$. Если же реализуется условие (2a), то вся кривая $\eta = G(\xi)$ на плоскости $\langle \xi, \eta\rangle$ находится над прямой $\eta = \xi$ при $\xi \in [0, 1]$. Если бы она пересекалась с этой прямой в точке $\xi_* < 1$, то она более не пересекала бы эту прямую при $\xi \in (\xi_*, 1)$ в силу выпуклости. Это противоречит равенству $G(1) = 1$. Напротив, если реализуется условие (2b), то кривая $\eta = G(\xi)$ обязана пересечь прямую $\eta = \xi$ на интервале $(0, 1)$, так как в противном случае в точке ее пересечения $\xi = 1$ должно выполняться неравенство $G'(1) \leqslant 1$. □

Таким образом, пограничное (критическое) положение занимают распределения $p(\cdot)$, подчиненные условию

$$\sum_{A\subset I_n} |A| p(A) = 1.$$

Лемма 2. *Если производящая функция $G(\xi)$ удовлетворяет условию $G(0) = 0$, то для любого $\xi \in (0, 1)$ последовательность $\langle G^{(n)}(\xi);\ n \in \mathbb{N}\rangle$, $G^{(n+1)}(\xi) = G(G^{(n)}(\xi))$, $G^{(1)}(\xi) = G(\xi)$ стремится к 0 при $n \to \infty$. В случае $G'(1) \leqslant 1$ эта последовательность стремится к 1, а в случае $G'(1) > 1$ она стремится к единственному решению ξ_* уравнения $G(\xi) = \xi$ в интервале $(0, 1)$.*

Доказательство. В случае $G(0) = 0$, так как кривая $\eta = G(\xi)$, согласно лемме 1, находится под прямой $\eta = \xi$ при $\xi \in (0, 1)$, то $G(\xi) < \xi$ и последовательность $\xi_n = G^{(n)}(\xi)$ является убывающей. Следовательно, она имеет предел и по причине убывания ее предел равен 0. В случае $G'(1) \leqslant 1$, согласно той же лемме, кривая $\eta = G(\xi)$ находится над прямой при $\xi \in (0, 1)$, $G(\xi) > \xi$, и поэтому последовательность возрастает, ее предел существует и не может быть меньше 1. Наконец, в случае $G'(1) > 1$ она убывает при $\xi > \xi_*$ и возрастает при $\xi < \xi_*$. Отсюда вытекает утверждение леммы. □

Теорема 7. *Надкритический режим существует тогда и только тогда, когда распределение вероятностей $p(\cdot)$ либо удовлетворяет условию $p(\varnothing) = 0$, либо $p(\varnothing) > 0$, но*

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) > 1.$$

В последнем случае вероятность его реализации равна $1 - q$, где q — единственное отличное от 1 решение уравнения

$$q = \sum_{A \subset I_n} q^{|A|} p(A). \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $G(0) = 0$. В этом случае, согласно (6), имеет место равенство $F_{m+1}(0) = F_m(G(0)) = F_m(0)$. Применяя индукцию по $m \in \mathbb{N}$, получаем

$$\lim_{m \to \infty} F_m(0) = F_0(0) = 0.$$

Это означает, что траектория процесса с вероятностью 1 уходит на бесконечность. Следовательно, надкритический режим реализуется с той же вероятностью.

Пусть теперь $1 > G(0) > 0$. Согласно (6), применяя индукцию по $m \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$F_m(0) = F_{m-1}(G(0)) = \cdots = G^{(m)}(0).$$

Отсюда, согласно лемме 2, при $G'(1) \leqslant 1$, предел $\lim\limits_{m \to \infty} F_m(0)$ существует и равен 1, т.е. надкритический режим отсутствует. Если же $G'(1) > 1$, то предел $\lim\limits_{m \to \infty} F_m(0) = q \in (0, 1)$ также существует и — ввиду непрерывности функции G — удовлетворяет условию

$$q = \lim_{m \to \infty} G^{(m)}(0) = G\Big(\lim_{m \to \infty} G^{(m-1)}(0)\Big) = G(q),$$

т.е. является единственным решением уравнения (7) в интервале $(0, 1)$. □

Рассмотрим теперь задачу о перколяции из вершины $\mathbf{0}$ однородного древесного графа Γ при условии, что на множестве V вершин графа задано случайное однородное бернуллиеское поле $\{\tilde{n}(x);\ x \in V\}$, определяемое концентрацией $c \in (0, 1)$. Каждая случайная реализация $\tilde{n}(x)$, $x \in V$, индуцирует на основе конфигурации $W = \{x : \tilde{n}(x) = 1\}$ отношение смежности $\tilde{\varphi}_W$ и, следовательно, случайный граф $\langle W, \tilde{\varphi}_W \rangle$. Для этого графа условная вероятность того, что вершина x из фиксированного поколения исходного графа Γ, при условии ее связанности с $\mathbf{0}$, связана также с вершинами из следующего поколения, имеющими метки $\langle x, j \rangle$, $j \in A \subset I_n$, равна $p(A) = c^{|A|}(1 - c)^{n - |A|}$. Перколяция на таком случайном графе, т.е. существование на нем бесконечной траектории $\gamma(\mathbf{0})$, означает, что у сконструированного в этом разделе случайного марковского ветвящегося процесса с дискретным временем существует надкритический режим. С этой точки зрения следствием теоремы 7 является следующее утверждение.

Теорема 8. *Перколяция из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе существует при $c \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда $c > c_*$, где c_* — так называемый порог перколяции, который определяется как единственное решение $c_* \in (0, 1)$ уравнения*

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) = 1, \quad p(A) = c^{|A|}(1 - c)^{n - |A|}. \tag{8}$$

При этом вероятность $P(c)$ ее реализации при $c > c_*$ равна $(1 - Q(c))$, где $Q(c)$ — вероятность отсутствия перколяции, которая является единственным отличным от единицы решением уравнения

$$Q(c) = \sum_{A \subset I_n} Q^{|A|}(c) p(A) = \big(1 - c + cQ\big)^n.$$

Таким образом, задача о перколяции из вершины $\mathbf{0}$ сводится к отысканию условия на параметр c, при котором алгебраическое уравнение (8) для функции $Q(c)$ имеет решение, не равное тождественно единице.

4. Иерархические модели. Пусть $\Gamma_0 = \langle V_0, \varphi_0 \rangle$ — конечный связный граф с отмеченной вершиной $\mathbf{0}$. Пусть в множестве V_0 зафиксирован набор $A^{(0)}$, не содержащий нулевую вершину. Этот набор будем называть *внешней границей* графа Γ_0, а пару $\langle \Gamma_0, A^{(0)} \rangle$ — *оснащенным графом.*

Сконструируем бесконечный локально компактный *иерархический граф* Γ, порождаемый оснащенным графом $\langle \Gamma_0, A^{(0)} \rangle$. С этой целью прежде всего определим операцию *склеивания* пары графов по выделенной вершине.

Пусть $\Gamma'(x') = \langle V', \varphi' \rangle$ и $\Gamma''(x'') = \langle V'', \varphi'' \rangle$ — пара графов с отмеченными в них вершинами x' и x'', соответственно. Определим граф $\Gamma'(x') * \Gamma''(x'')$, набор вершин которого представляется множеством $V' \cup (V'' \setminus \{x''\})$, а набор Φ смежных пар, определяющих отношение смежности, образуется из наборов Φ' и Φ'' пар смежности в графах $\Gamma'(x')$ и $\Gamma''(x'')$ с учетом переобозначения вершины x'' на x', по которой происходит склеивание, $\left(\bar{\Phi}' \cup \bar{\Phi}'' \right)_{x''=x'}$.

Определим рекуррентно, посредством применения операции склеивания, графы $\Gamma^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}_+$. Пусть имеется бесконечный набор $\mathfrak{G}$ графов, изоморфных графу $\langle \Gamma_0, A^{(0)} \rangle$ с точки зрения отношения связности. Занумеруем вершины из $A^{(0)}$ графа Γ_0, которые будем называть вершинами первого поколения, присвоив им метки $\langle j_1 \rangle$, $j_1 = 1, \ldots, n$.

На первом шаге выберем n графов из набора $\mathfrak{G}$ с нулевыми вершинами $\mathbf{0}_{j_1}$. Эти графы обозначим Γ_{0,j_1}, $j_1 = 1, \ldots, n$, а наборы их граничных вершин обозначим, соответственно, A_{j_1}, $j_1 = 1, \ldots, n$. Построим на их основе граф $\Gamma^{(1)} = \langle V^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle$ последовательными приклеиваниями выбранных графов. Сначала приклеим к граничной вершине $x_1 = \langle 1 \rangle$ графа Γ_0 вершину $\mathbf{0}_1$ графа $\Gamma_{0,1}$, т.е. образуем граф $\Gamma_0(\langle 1 \rangle) * \Gamma_{0,1}(\mathbf{0}_1)$ так, что после склеивания у вершины x_1 осталось прежнее обозначение $x_1 = \langle 1 \rangle$. Затем выберем в наборе $A^{(0)}$ граничных вершин графа Γ_0, для следующей склейки его с вершиной $\mathbf{0}_2$ графа $\Gamma_{0,2}$, вершину $x_2 = \langle 2 \rangle$. Образовав склейку $[\Gamma_0(\langle 1 \rangle) * \Gamma_{0,1}(\mathbf{0}_1)](\langle 2 \rangle) * \Gamma_{0,2}(\mathbf{0}_2)$ так, что у вершины склейки осталось обозначение $\langle 2 \rangle$, выберем в Γ_0 следующую вершину $x_3 = \langle 3 \rangle$ для последующей склейки и проделаем такую же операцию. Поступая далее таким же образом, последовательно получим графы

$$\underbrace{\Big[\ldots \Big[}_{m-1} \Gamma_0(\langle 1 \rangle) * \Gamma_{0,1}(\mathbf{0}_1) \underbrace{\Big] (\langle 2 \rangle) * \cdots * \Gamma_{0,m-1}(\mathbf{0}_{m-1}) \Big]}_{m-1} (\langle m \rangle) * \Gamma_{0,m}(\mathbf{0}_m), \quad m = 1, \ldots, n.$$

Тогда на последнем шаге построения получим граф $\Gamma^{(1)} = \langle V^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle$, имеющий $((n+1)|V| - n)$ вершин и набор граничных вершин $A^{(1)} = \bigcup\limits_{j_1=1}^{n} A_{j_1}$ второго поколения с n^2 элементами. Этим элементам присвоим метки $\langle j_1, j_2 \rangle$ так, что каждая метка $\langle j_1, j_2 \rangle$ с $j_2 = 1, \ldots, n$ принадлежит A_{j_1}.

Заменив в описанным выше построении граф Γ_0 на граф $\Gamma^{(1)}$, а набор $A^{(0)}$ его граничных вершин на набор $A^{(1)}$, проделаем по отношению к нему снова такую же процедуру приклеиваний n^2 изоморфных друг другу графов Γ_{0,j_1,j_2} из набора $\mathfrak{G}$, которые следуют в этом наборе вслед за выбранными на предыдущем шаге. Каждый из них обладает набором граничных вершин A_{j_1,j_2} и нулевой вершиной $\mathbf{0}_{j_1,j_2}$. В результате посредством приклеиваний выбранных графов к графу $\Gamma^{(1)}$ получим новый граф $\Gamma^{(2)} = \langle V^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle$, который имеет $((n+1)((n+1)|V| - n) - n)$ вершин. Среди них имеется набор $A^{(2)} = \bigcup\limits_{j_2=1}^{n} A_{j_1,j_2}$, состоящий из n^3 граничных вершин третьего поколения. Поступая таким же образом далее, последовательно построим последовательность графов $\Gamma^{(l)} = \langle V^{(l)}, \varphi^{(l)} \rangle$, $l \in \mathbb{N}$ с наборами $A^{(l)} = \bigcup\limits_{j_l=1}^{n} A_{j_1,j_2,\ldots,j_l}$ граничных вершин l-го поколения. Число таких вершин у каждого графа $\Gamma^{(l)}$ равно n^l.

Определение 4. Бесконечный граф $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$, соответствующий конечному графу Γ_0, который является теоретико-множественным пределом $\Gamma^{(l)} \to \Gamma$ при $l \to \infty$ с набором $V = \lim\limits_{l \to \infty} V^{(l)}$ вершин и отношением смежности $\varphi = \lim\limits_{l \to \infty} \varphi^{(l)}$, назовем *иерархическим графом, порождаемым графом* $\Gamma_0 = \langle V_0, \varphi_0 \rangle$.

Очевидно, иерархический граф $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ локально компактен, так как он порождается склеиванием локально компактных конечных связных графов из набора $\mathfrak{G}$, причем на каждом этапе приклеивается только лишь конечный набор графов, каждый раз с новыми вершинами склейки. Порождаемый таким образом иерархический граф обладает выделенной вершиной $\mathbf{0}$. Вершины иерархического графа Γ, помеченные в результате его построения всеми метками $\langle j_1, \ldots, j_m \rangle$, $m \in \mathbb{N}$, являются его *вершинами сочленения* между *блоками* $\Gamma_{j_1,\ldots,j_m}$, которые образуются в процессе его построения посредством склеивания конечных графов $\Gamma_{0,j_1,\ldots,j_m}$. Это означает, что любой путь, соединяющий вершины из блоков $\Gamma_{j_1,\ldots,j_m}$ и $\Gamma_{j_1,\ldots,j_m,j_{m+1}}$, обязательно пройдет через вершину $\langle j_1, \ldots, j_m \rangle$.

Пусть на иерархическом графе Γ определено однородное бернуллиевское поле $\{\tilde{n}(x);\ x \in V\}$ с параметром $c \in (0, 1)$. Для такого графа определено случайное событие

$$\mathfrak{A}_\infty = \Big\{ W \subset V :\ \exists (\gamma(\mathbf{0}) :\ \{\gamma(\mathbf{0})\} \subset W,\ |\gamma(\mathbf{0})| = \infty) \Big\}$$

наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$. Таким образом, определена *иерархическая перколяционная модель* $\Upsilon(\Gamma_0, A^{(0)})\rangle$. Такие иерархические перколяционные модели могут обладать свойством, которое позволяет строить на их основе аппроксимации решений задач перколяции для бесконечных локально компактных графов довольно общего вида.

Обозначим через $\mathfrak{A}_m(B)$, $B \subset S_m$, случайное событие, состоящее в том, что для любой вершины из B существует путь из $\mathbf{0}$ с конечной вершиной в B, а для любой вершины из $S_m \setminus B$ такой путь отсутствует. Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого набора $B \subset S_m$, удовлетворяющего условию $\{x\} = \mathsf{T}B \neq \varnothing$ при $x \in S_{m-1}$, условная вероятность события $\mathfrak{A}_m\big(B\big)$ при условии $x \sim \mathbf{0}$ равна*

$$\Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, x \sim \mathbf{0}\big\} = \Pr\big\{W \subset V^{(m)} : W \cap S_m = B\big\} = p(B).$$

Доказательство. Равенство следует из того, что, в силу независимости значений случайного поля $\tilde{n}(z)$, $z \in V$, появление любого пути $\tilde{\gamma}(x, y)$ на конфигурациях $W \subset V^{(m)}$, который связывает вершину x с вершинами $y \in B$, и отсутствие пути, который бы связывал вершину x с вершинами из $(V^{(m)})_x \setminus B$, $\mathsf{T}(V^{(m)})_x = \{x\}$, не зависит от части случайной реализации поля $\tilde{n}(z)$, $z \in V$ в вершинах $z \in V^{(m)} \setminus (V^{(m)})_x$. □

Пусть отношение $x \sim A$ означает, что вершина x связана с каждой вершиной из A. Следствием леммы 3 является следующее утверждение.

Лемма 4. *Для любых наборов $B \subset S_m$ и $B' \subset S_{m-1}$, $\mathsf{T}B \subset B'$ имеют место формулы*

$$\Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, \mathfrak{A}_{m-1}(B')\big\} = p_0^{|B' \setminus \mathsf{T}B|} \Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, \mathfrak{A}_{m-1}(\mathsf{T}B)\big\}, \tag{9}$$

$$\Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, \mathfrak{A}_{m-1}(\mathsf{T}B)\big\} = \prod_{x \in \mathsf{T}B} p(B_x), \tag{10}$$

где $p_0 = \Pr\{W \subset I_n : \neg(\mathbf{0} \overset{W}{\sim} S_1)\}$ — вероятность отсутствия связи вершины $\mathbf{0}$ с множеством S_1, а $p(B_x) = \Pr\big\{W \subset I_n :\ \mathbf{0} \overset{W}{\sim} B_x,\ \neg(\mathbf{0} \overset{W}{\sim} S_1 \setminus B_x)\big\}$ — вероятности связанности вершины $\mathbf{0}$ с B_x и отсутствия у нее связи с $S_1 \setminus B_x$, $x \in \mathsf{T}B$.

Построим теперь марковскую цепь с ветвлением на бесконечном древесном однородном графе $\bar{\Gamma}$, которая обладает марковским измельчением, с подходящим распределением вероятностей $p(A)$, $A \subset 2^{I_n}$, $n = |A^{(0)}|$, для которой задача перколяции из начальной вершины эквивалентна задаче перколяции исходной перколяционной модели. Для этого выберем подходящим образом наборы S_m, $m \in \mathbb{N}$, для ее пространств состояний. Входящие в них вершины являются вершинами сочленения иерархического графа с метками $\langle j_1, \ldots, j_m \rangle$, $m \in \mathbb{N}$, $j_k \in I_n$, $k \in I_m$ с $n = |A^{(0)}|$. Условную вероятность перехода $P^{(m)}(A, A')$ определим формулой (5), в которой распределение вероятностей на 2^{I_n} вводится следующим образом.

Пусть $\mathfrak{A}(A) = \big\{W \subset V^{(0)} :\ \mathbf{0} \overset{W}{\sim} A,\ \neg(\mathbf{0} \overset{W}{\sim} I_n \setminus A)\big\}$ — классы конфигураций, которые являются дизъюнктивными для различных наборов $A \subset A^{(0)}$. Тогда $p(A) = \Pr\{\mathfrak{A}(A)\}$. При этом имеет место соотношение $\sum\limits_{A\subset I_n} p(A) = 1$. Новую перколяционную модель, определяемую ветвящейся марковской цепью с марковским измельчением, обозначим $\overline{\Upsilon}(\Gamma_0, A^{(0)})$. Пусть $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})$ и $\overline{\mathfrak{A}}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})$ — случайные события наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$ для моделей $\Upsilon(\Gamma_0, A^{(0)})$ и $\overline{\Upsilon}(\Gamma_0, A^{(0)})$ соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Для перколяционных моделей* $\Upsilon(\Gamma_0, A^{(0)})$ *и* $\overline{\Upsilon}(\Gamma_0, A^{(0)})$ *имеет место равенство*

$$\Pr\big\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\big\} = \Pr\big\{\overline{\mathfrak{A}}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\big\}.$$

Доказательство. Пусть Γ — бесконечный иерархический локально компактный граф с набором вершин сочленения $\langle j_1, \dots, j_m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда, согласно возрастанию номера поколения m, любой бесконечный путь $\gamma(\mathbf{0})$ из начальной вершины обязательно последовательно пройдет через вершины с метками $\langle j_1, \dots, j_m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ ограничению каждого пути $\gamma(\mathbf{0})$, входящего в случайное событие $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\}$ на граф $\Gamma^{(m)}$, однозначно соответствует путь $\gamma(\mathbf{0}, z)$, $z \in A^{(m)}$ длины m.

Пусть $\mathfrak{A}_m = \big\{\tilde{n}(x),\ x \in V :\ \exists(z \in S_m :\ \mathbf{0} \overset{\mathsf{W}[\tilde{n}]}{\sim} z)\big\}$ — случайное событие в перколяционной иерархической модели, при котором существует путь $\gamma(\mathbf{0})$ с конечной вершиной среди набора вершин сочленения S_m. Тогда

$$\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\} = \lim_{m\to\infty} \mathfrak{A}_m.$$

Покажем, что мера события $\mathfrak{A}_m$ совпадает с мерой соответствующего события для марковской цепи.

Далее, пусть $F_m(\zeta)$ — введенная ранее производящая функции ветвящейся марковской цепи с марковским измельчением. Вычислим производящую функцию

$$\overline{F}_m(\zeta) = \sum_{\varnothing\neq B\subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathfrak{A}(B)\},$$

для которой имеет место равенство

$$F_m(\zeta) = \overline{F}_m(\zeta) + \Pr\big\{W \subset S_m : W = \varnothing\big\}.$$

Для этого применим формулу полной вероятности:

$$\Pr\{\mathfrak{A}_m(B)\} = \sum_{\substack{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}:\\ B'\supset \mathsf{T}B}} \Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B)\,\big|\,\mathfrak{A}_{m-1}(B')\big\} \Pr\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\}.$$

Так как для любого непустого множества $B \subset S_m$ при $\mathsf{T}B_x = \{x\}$ справедливо такое дизъюнктивное разложение $B = \sum\limits_{x\in\mathsf{T}B} B_x$, что $\mathfrak{A}_m(B) = \bigcap\limits_{x\in\mathsf{T}B} \mathfrak{A}_m\big(B_x\big)$, то с учетом (9) и (10) находим

$$\begin{aligned}
\overline{F}_m(\zeta) &= \sum_{\varnothing\neq B\subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathfrak{A}_m(B)\} = \\
&= \sum_{\varnothing\neq B\subset S_m} \zeta^{|B|} \sum_{\substack{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}:\\ B'\supset \mathsf{T}B}} p_0^{|B'\setminus \mathsf{T}B|} \Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B)\,\big|\,\mathfrak{A}_{m-1}(\mathsf{T}B)\big\} \Pr\big\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\big\} = \\
&= \sum_{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}} \Pr\big\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\big\} \sum_{\substack{\varnothing\neq B\subset S_m:\\ B'\supset \mathsf{T}B}} p_0^{|B'\setminus \mathsf{T}B|} \prod_{x\in\mathsf{T}B} \zeta^{|B_x|} p(B_x) = \\
&= \sum_{B'\subset S_{m-1}} \Pr\big\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\big\} \sum_{\varnothing\neq C\subset B'} p_0^{|B'\setminus C|} \prod_{x\in C} \sum_{\substack{\langle\varnothing\neq B_x;\\ x\in C\rangle}} \zeta^{|B_x|} p(B_x) = \\
&= \sum_{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}} \Pr\big\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\big\} \sum_{\varnothing\neq C\subset B'} p_0^{|B'\setminus C|} \Big(G(\zeta) - p_0\Big)^{|C|} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\varnothing \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\left\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\right\}\left(G^{|B'|}(\zeta) - p_0^{|B'|}\right) =$$
$$= \overline{F}_{m-1}(\zeta) - \sum_{\varnothing \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\left\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\right\} p_0^{|B'|}.$$

Наконец, принимая во внимание равенство

$$\Pr\left\{W \subset S_m : W = \varnothing\right\} = \Pr\left\{W \subset S_{m-1} : W = \varnothing\right\} + \sum_{\varnothing \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\left\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\right\} p_0^{|B'|},$$

получаем $F_m(\zeta) = F_{m-1}\big(G(\zeta)\big)$. Ввиду совпадения уравнения для производящей функции $F_m(\zeta)$, связанной с иерархической перколяционной моделью, с производящей функцией соответствующей ей марковской цепи и совпадения их начальных состояний, находящихся с вероятностью 1 в вершине $\{\mathbf{0}\}$, согласно леммам 1 и 2, условия на положительность вероятности $\Pr\left\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\right\}$ точно такие, как и для вероятности наличия перколяции марковской цепи. $\square$

5. Аппроксимации моделей перколяции на локально компактных графах. Пусть имеется связный бесконечный локально компактный граф $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$. Для произвольной конфигурации W вершин из Γ определим набор

$$\partial_+ W = \left\{x \notin W : \exists (y \in W : x \sim y)\right\},$$

который назовем его *внешней границей*. В частности, это определение распространяется на любой кластер $W(z)$, содержащий фиксированную вершину z. Точно так же введем набор

$$\partial_- W = \left\{x \in W : \exists (y \notin W : x \sim y)\right\},$$

который назовем *внутренней границей* конфигурации W; в частности, $\partial_- W(z)$ — внутренняя граница кластера $W(z)$.

Очевидно, что внутренняя граница конечного кластера на локально компактном графе представляет собой конечный набор вершин. По определению, каждая вершина внешней границы конечного кластера W смежна с какой-либо вершиной из W. Поэтому внешняя граница конечного кластера также является конечным набором. В противном случае в W нашлась бы вершина, которая смежна с бесконечным набором вершин из $\partial_+ W$.

Пусть W — конечный кластер в Γ. Вершину $z \in V \setminus W$ назовем внешней по отношению W, если существует бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(z)$ с начальной вершиной z, который не пересекает W, $\{\gamma(z)\} \cap W = \varnothing$. В противном случае вершину z назовем внутренней по отношению к W. Любой бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(z)$, начиняющийся во внутренней вершине z кластера W, обязательно пересекает его внутреннюю и внешнюю границы, так как такой путь на каком-либо шаге должен попасть в вершину вне W. Первая из таких вершин, по порядку из входящих в состав пути, как раз и будет вершиной внешней границы кластера W, а предшествующая ей — вершиной из внутренней границы.

Лемма 5. *Любой конечный кластер W в локально компактном графе может иметь лишь конечный набор внутренних вершин.*

Доказательство. Допустим противное, что в кластере W набор $\operatorname{Int} W$ его внутренних вершин бесконечен. Рассмотрим для каждой вершины $x \in \operatorname{Int} W$ соответствующее ей множество бесконечных несамопересекающихся путей. У каждого из этих путей имеется вершина u первого пересечения внешней границы $\partial_+ W$. Пусть $x \in \operatorname{Int} W$ и $g(x)$ — бесконечный несамопересекающийся путь. Его начальная часть $\gamma(x, u)$ состоит из внутренних вершин, кроме последней вершины u. Так как $|\partial_+ W| < \infty$ и $|\operatorname{Int} W| = \infty$, то среди всех вершин $u \in \partial_+ W$ найдется такая, для которой набор $X(u) = \{x \in \operatorname{Int} W : \gamma(x, u)\}$ бесконечен. Степень вершины u конечна. Среди всех вершин, смежных с вершиной u, найдутся такие, которые являются внутренними; они принадлежат $\partial_- W$. Выберем из них ту вершину v, через которую происходит бесконечное множество путей $\gamma(x, u)$, определяющих набор вершин $X(u)$.

При сделанном предположении о бесконечности множества $\mathrm{Int}\, W$ функционал $\mathsf{d}(u,x)$ не может быть ограниченным на $X(u)$, так как число всех путей ограниченной длины внутри кластера из вершины u ограниченной длины на локально компактном графе конечно, и поэтому число конечных вершин x внутри W тоже должно быть конечным. Тогда среди всех вершин из $X(u)$, пути $\gamma(x,u)$ которых проходят через вершину v, можно выделить последовательность $\langle x_k; k \in \mathbb{N}\rangle$, для которой $\mathsf{d}(u,x_k)$ монотонно возрастает. Следовательно, имеется бесконечный путь с началом в выбранной вершине v, полностью состоящий из внутренних вершин; это противоречит тому, что v — внутренняя по отношению к кластеру W. $\square$

Кластер W назовем *полным*, если он не имеет внутренних вершин. Ввиду конечности набора внутренних вершин конечного кластера его всегда можно сделать полным, добавив к нему все его внутренние вершины, при этом оставляя пополненный кластер конечным. Появление новых внутренних вершин при такой операции пополнения невозможно.

Рассмотрим в локально компактном бесконечном графе $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$ конечный граф $\Gamma^{(0)} = \langle V^{(0)}, \varphi^{(0)}\rangle$, выбрав $V^{(0)} \subset V$, где $V^{(0)} = W \cup \partial_+ W$, W — конечный полный кластер, содержащий отмеченную вершину $\mathbf{0}$, а $\varphi^{(0)}$ — сужение φ на $V^{(0)}$. Предположим, что $A^{(0)} = \partial_+ W$ является набором его внешних граничных вершин. На основе графа $\Gamma^{(0)}$ построим иерархический граф $\bar{\Gamma}$, определяемый $\Gamma^{(0)}$ с набором граничных вершин $A^{(0)}$. Перколяционную модель, основанную на иерархическом графе $\bar{\Gamma}$, будем называть *аппроксимирующей*, если для любого значения концентрации $c \in (0,1)$ однородного бернуллиевского случайного поля $\tilde{n}(x)$, $x \in V$, $x \in \bar{\Gamma}$, имеет место неравенство $\Pr\big\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\big\} \leqslant \Pr\big\{\mathfrak{A}_\infty(\bar{\Gamma})\big\}$.

Далее, пусть $\langle W_m; m \in \mathbb{N}\rangle$ — бесконечная расширяющаяся последовательность полных кластеров на локально компактном графе Γ, содержащих отмеченную вершину $\mathbf{0}$ этого графа. На основе этой последовательности определим последовательность графов

$$\Big\langle \Gamma_m^{(0)} = \big\langle V^{(0,m)} = W_m \cup \partial_+ W_m,\ \varphi^{(0,m)}\big\rangle;\ m \in \mathbb{N}_+ \Big\rangle,$$

где $\varphi^{(0,m)}$ — сужения отношения φ на $V^{(0,m)}$ с соответствующими им наборами $A^{(0,m)} = \partial_+ W_m$ граничных вершин, $m \in \mathbb{N}$. Определим последовательность иерархических графов $\bar{\Gamma}_m$, соответствующих графам $\Gamma_m^{(0)}$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть граф Γ допускает такой выбор последовательности $\langle W_m;\ m \in \mathbb{N}\rangle$, когда все графы $\bar{\Gamma}_m$ определяют иерархические модели $\overline{\Upsilon}(\Gamma_m^{(0)}, A^{(0,m)})$, являющиеся аппроксимирующими.

Докажем утверждение, которое позволяет решать задачу перколяции на бесконечном локально компактном графе Γ со сколь угодно большой точностью, если граф допускает построение описанной выше последовательности аппроксимирующих моделей.

Теорема 10. *Для последовательности $\Upsilon(\Gamma_m^{(0)}, A^{(0,m)})$, $m \in \mathbb{N}$, перколяционных моделей, аппроксимирующих бесконечный локально компактный граф Γ с отмеченной вершиной $\mathbf{0}$, соответствующая ей последовательность $\langle \bar{P}^{(m)}(c);\ m \in \mathbb{N}\rangle$ вероятностей перколяции однородного бернуллиевского случайного поля $\tilde{n}(x)$, $x \in V$, с концентрацией $c \in (0,1)$ на графах $\overline{\Gamma}_m = \langle V^{(m)}, \varphi^{(m)}\rangle$ стремится при $m \to \infty$ к вероятности перколяции $P(c)$ из вершины $\mathbf{0}$ на графе $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_d(\Gamma)$ — случайное событие, состоящее в том, что конфигурация W бернуллиевского поля $\{\tilde{n}(x); x \in V\}$ с концентрацией $c = \Pr\big\{\tilde{n}(x) = 1\big\} \in (0,1)$ содержит какой-либо несамопересекающийся путь $\gamma(\mathbf{0}, z)$ из отмеченной "вершины $\mathbf{0}$, имеющий длину d. Соответственно, $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)$ — случайное событие, когда конфигурация W этого поля содержит какой-либо несамопересекающийся путь $\gamma(\mathbf{0})$ бесконечной длины. Так как любой бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(\mathbf{0})$ на бесконечном графе представим в виде склейки $\gamma(\mathbf{0}, z) * \gamma(z)$ несамопересекающихся путей $\gamma(\mathbf{0}, z)$ длины d и бесконечного пути $\gamma(z)$, то имеет место соотношение $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma) \subset \mathfrak{A}_d(\Gamma)$, а событие $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)$ является пределом событий $\mathfrak{A}_d(\Gamma)$, $d \to \infty$:

$$\lim_{d\to\infty} \mathfrak{A}_d(\Gamma) = \mathfrak{A}_\infty(\Gamma).$$

Поэтому

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}_d(\Gamma)\}, \quad \lim_{d\to\infty} \Pr\{\mathfrak{A}_d(\Gamma)\} = \Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\}.$$

Далее, пусть $\Gamma_l^{(0)} = \langle V^{(0,l)}, \varphi^{(0,l)}\rangle$ — конечные графы с наборами $A^{(0,l)} = \{x_k^{(l)};\ 1,\ldots,n^{(l)}\}$ граничных вершин, $|A^{(0,l)}| = n^{(l)}$ таковы, что $V^{(l)} \subset V^{(l+1)}$. Они являются подграфами графа Γ, содержащими вершину $\mathbf{0}$ и порождаемые полными кластерами $W^{(l)} \ni \mathbf{0}$, так что

$$V^{(0,l)} = W^{(l)} \cup \partial_+ W^{(l)}, \quad A^{(0,l)} = \partial_+ W^{(l)}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Положив $d = \max\{\mathsf{d}(\gamma(\mathbf{0},z)) : x \in A^{(0,l)}\}$ в конечном графе $\Gamma_l^{(0)}$, находим, что справедливо включение $\mathfrak{A}_d(\Gamma) \subset \mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})$, т.е. $\mathfrak{A}_d(\Gamma)$ содержится в событии о наличии перколяции на графе $\Gamma_l^{(0)}$ на его внешнюю границу. Тогда

$$\Pr\{\mathfrak{A}_d(\Gamma)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}.$$

Учитывая предыдущее предельное соотношение, имеем

$$\Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\} \xrightarrow[l\to\infty]{} \Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\}.$$

Построим для каждого значения $l \in \mathbb{N}$, посредством процедуры подклеивания изоморфных друг другу экземпляров графа $\Gamma_l^{(0)}$ с вершиной $\mathbf{0}$ конечную последовательность графов

$$\Gamma_l^{(1)} = \langle V^{(1,l)}, \varphi^{(1,l)}\rangle, \quad \Gamma_l^{(2)} = \langle V^{(2,l)}, \varphi^{(2,l)}\rangle, \quad \ldots, \quad \Gamma_l^{(m)} = \langle V^{(m,l)}, \varphi^{(m,l)}\rangle,$$

как это описано в разделе 4, используя для этого граничные вершины $x_k^{(l)}$ графа $\Gamma_l^{(0)}$, $k = 1,\ldots,n^{(l)}$. Предел $\lim\limits_{m\to\infty} \Gamma_l^{(m)} \equiv \overline{\Gamma}_l$ является графом, который порождает последовательность аппроксимирующих иерархических перколяционных моделей $\Upsilon(\Gamma_l^{(0)}, A^{(0,l)})$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} = \lim_{m\to\infty} \Pr\{\mathfrak{A}_m(\Gamma_l^{(m)})\}.$$

Так как все бесконечные пути $\gamma(\mathbf{0})$ на графе $\bar{\Gamma}_l$ проходят через его вершины сочленения, которые являются граничными вершинами у графа $\Gamma_l^{(0)}$, то $\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l) \subset \mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})$ и поэтому

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}.$$

Наконец, ввиду того, что построенные иерархические перколяционные модели $\Upsilon(\Gamma_l^{(0)}, A^{(0,l)})$ являются аппроксимирующими для графа Γ, выполняется неравенство

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}.$$

Следовательно, переходя к пределу $l \to \infty$ в цепочке неравенств

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}$$

и воспользовавшись полученными выше предельными соотношениями, приходим к утверждению теоремы. $\square$

Доказанное утверждение ничего не говорит о точности аппроксимаций. Для установления гарантированных оценок точности аппроксимаций необходима дополнительная информация о структуре графа Γ. Отметим также, что несмотря на то, что из доказанной теоремы следует существование предела $\lim\limits_{l\to\infty} c_*^{(l)}$ последовательности $\langle c_*^{(l)};\ l \to \infty\rangle$ порогов перколяции аппроксимирующих перколяционных моделей, ввиду сделанного замечания, отсюда не следует, что этот предел равен порогу перколяции c_* однородного бернуллиеского поля с $c \in (0,1)$ на графе Γ.

6. Заключение. Несмотря на прозрачность определения приближений, описанных в настоящей работе, их построение сталкивается с серьезными техническими трудностями при увеличении порядка. Они связаны не только с увеличением сложностью анализа ветвящейся марковской цепи с марковским измельчением, соответствующей заданному порядку аппроксимации, при росте порядка аппроксимации. Это является следствием резкого возрастания степени полинома в (8) и рутинностью вычисления его коэффициентов ввиду быстрого возрастания числа необходимых кластеров. Дополнительные сложности проистекают ввиду усложнения перечисления кластеров. Например, в случае периодических графов при увеличении числа вершин в кластерах появляются такие, у которых в двумерном случае имеются отверстия, а в трехмерном и, тем более при более высокой размерности, появляются топологически нетривиальные кластеры. Нужно заметить, что точно такие же проблемы возникают при вычислении членов кластерного разложения для вероятности перколяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонова Е. С., Вирченко Ю. П.* Свойство монотонности вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на бесконечных графах// Науч. вед. БелГУ. Сер. Физ. Мат. — 2010. — *11 (82)*, № 20. — С. 28–61.
2. *Вирченко Ю. П.* Перколяция// в кн.: Математическая физика. Энциклопедия. — Российская энциклопедия, 1998.
3. *Вирченко Ю. П.* Периодический граф// в кн.: Математическая физика. Энциклопедия. — М.: Российская энциклопедия, 1998.
4. *Вирченко Ю. П., Толмачёва Ю. А.* Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решётке// Укр. мат. ж. — 2005. — *57*, № 10. — С. 1315–1326.
5. *Вирченко Ю. П., Шпилинская О. Л.* Точечные случайные поля с марковскими измельчениями и геометрия фрактально неупорядоченных сред// Теор. мат. физ. — 2000. — *124*, № 3. — С. 490–505.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
7. *Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф.* Теория перколяции и некоторые приложения// в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей, математическая статистика и теоретическая кибернетика. Т. 2. — М.: ВИНИТИ, 1986. — С. 53–110.
8. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, I// Теор. мат. физ. — 1983. — *55*, № 2. — С. 246–256.
9. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, II// Теор. мат. физ. — 1983. — *55*, № 3. — С. 419–430.
10. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, III// Теор. мат. физ. — 1985. — *65*, № 3. — С. 371–379.
11. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
12. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.
13. *Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
14. *Черкашин Д. А., Вирченко Ю. П.* Иерархические решеточные модели теории перколяции// в кн.: Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXV (*Кондаурова Д. Э.*, ред.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2024. — С. 364–366.
15. *Antonova E. S., Virchenko Yu. P.* Monotonicity of the probability of percolation for Bernoulli random fields on periodic graphs// J. Math. Sci. — 2011. — *175*, № 1. — P. 86–90.
16. *Barucha-Reid A. T.* Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. — New York: Mc Grow-Hill, 1960.
17. *Broadbent S. R., Hammersley J. M.* Percolation processes, I. Crystals and mazes// Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1957. — *53*. — P. 629–641.
18. *Essam J. W.* Percolation Theory// Rep. Prog. Phys. — 1986. — *43*. — P. 833–912.
19. *Frisch C. M., Hammersley J. M.* Percolation processes and related topics// J. SIAM. — 1963. — *11*. — P. 894–918.
20. *Grimmett G.* Percolation. — New York: Springer-Verlag, 1999.
21. *Hammersley J. M.* Percolation processes: lower bounds for the critical probability// Ann. Math. Stat. — 1957. — *28*, № 3. — P. 790–795.

22. *Kesten H.* Percolation Theory for Mathematicians. — Boston: Birkhäuser, 1982.
23. *Nummelin E.* General Irreducible Markov Chains and Non-negative Operators. — New York: Cambridge Univ. Press, 1984.
24. *Ruelle D.* Statistical Mechanics. Rigorous Results. — Benjamin, 1969.
25. *Simon R.* The $P(\varphi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
26. *Virchenko Yu. P., Shpilinskaya O. L.* Spaces of random sets in $\mathbb{R}^d$// Lobachevsky Math. J. — 2023. — *44*, № 3. — P. 1043–1059.
27. *Virchenko Yu. P., Tolmacheva Yu. A.* Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory// in: Studies in Mathematical Physics Research (*Benton C. V.*, ed.). — New York: Nova Science, 2004. — P. 155–175.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович (Virchenko Yurii Petrovich)
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
(V. G. Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia)
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Черкашин Дмитрий Андреевич (Cherkashin Dmitrii Andreevich)
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
(V. G. Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia)
E-mail: `dmt.cherkashin@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 34–39
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-34-39

УДК 519.117, 517.587

ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВ С БИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ОРТОГОНАЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

© 2024 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. С помощью единого подхода получен ряд новых комбинаторных тождеств с биномиальными коэффициентами и ортогональными многочленами. Эти тождества содержат многочлены Эрмита, многочлены Лежандра, многочлены Чебышева первого и второго рода, многочлены Гегенбауера и многочлены Кравчука.

Ключевые слова: комбинаторное тождество, биномиальные коэффициенты, ортогональные многочлены, многочлены Эрмита, многочлены Лежандра, многочлены Чебышева, многочлены Гегенбауера, многочлены Кравчука.

AN APPROACH TO OBTAINING IDENTITIES WITH BINOMIAL COEFFICIENTS AND ORTHOGONAL POLYNOMIALS

© 2024 **V. A. VOBLYI**

Abstract. A series of new combinatorial identities with binomial coefficients and orthogonal polynomials is obtained by using a unified approach. These identities contain Hermite polynomials, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials of the first and second kind, Gegenbauer polynomials, and Krawtchouk polynomials.

Keywords and phrases: combinatorial identity, binomial coefficients, orthogonal polynomials, Hermite polynomials, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials, Gegenbauer polynomials, Krawtchouk polynomials.

AMS Subject Classification: 05A19, 33C45

Тождества с биномиальными коэффициентами встречаются не только в комбинаторном анализе, но также во многих разделах математики. В частности, они часто возникают при перечислении одного и того же класса графов разными способами (см. [4–6]). Тождества с многочленами Кравчука используются в задачах криптографии, теории кодирования и при перечислении графов (см. [3, 11, 14]).

В статье с помощью единого подхода получено большое количество новых комбинаторных тождеств с биномиальными коэффициентами, тригонометрическими функциями, гиперболическими функциями и многочленами Эрмита, многочленами Лежандра, многочленами Чебышева первого и второго рода, многочленами Гегенбауера и многочленами Кравчука.

Теорема 1. *Для любых целых чисел $p \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и любого целого числа q верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} (2k-n)^{2p+1} = \binom{n+2m}{m}^{q} n^{2p+1}. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим левую часть тождества (1) через S_n. После замены индекса суммирования $k = n - i$, $i = n - k$ имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} (2k-n)^{p} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{n-i+m}^{q} (n-2i)^{2p+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{i+m}^{q} (n-2i)^{2p+1},$$

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} (2k-n)^{2p+1} + (-1)^{2p+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^{q} (2k-n)^{2p+1} =$$
$$= \binom{n+2m}{n+m}^{q} n^{2p+1} - \binom{n+2m}{m}^{q} (-n)^{2p+1} = 2\binom{n+2m}{m}^{q} n^{2p+1}. \quad \square$$

С учетом инвариантности биномиального коэффициента и нечетности второго сомножителя относительно замены индекса суммирования $k = n - i$ доказательство теорем 2–8 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Для любых целых чисел $p \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и любого целого числа q верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+2m}{2k+m}^{q} (2k-n)^{2p+1} = \binom{2n+2m}{m}^{q} n^{2p+1}. \tag{2}$$

Теорема 3. *Для любых целых чисел $p \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и любого целого числа q верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} \left(2^{2k-n} - 2^{n-2k}\right) = \binom{n+2m}{m}^{q} \left(2^{n} - 2^{-n}\right). \tag{3}$$

Теорема 4. *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа q и любого действительного числа x верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} \sin((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} \sin(nx). \tag{4}$$

Теорема 5. *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа q и любого действительного числа x верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} \operatorname{arctg}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} \operatorname{arctg}(nx). \tag{5}$$

Теорема 6. *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа q и любого действительного числа x верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} \operatorname{sh}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} \operatorname{sh}(nx). \tag{6}$$

Теорема 7. *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа q и любого действительного числа x верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} \operatorname{th}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} \operatorname{th}(nx). \tag{7}$$

Теорема 8. *Пусть* $\mathrm{sn}(x|r)$ *— эллиптическая функция Якоби. Для любого целого числа* $m \geqslant 0$*, любого целого числа* q *и любых действительных чисел* x*,* r *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} \mathrm{sn}((2k-n)x|r) = \binom{n+2m}{m}^{q} \mathrm{sn}(nx|r). \tag{8}$$

Замечание 1. Нечетность эллиптической функции Якоби $\mathrm{sn}(x|r)$ см. в [1, с. 384]. Так как $\mathrm{sn}(x|1) = \mathrm{th}(x)$, то формула (7) является следствием формулы (8).

Теорема 9. *Пусть* $H_n(x)$ *— многочлен Эрмита. Для любых целых чисел* $m \geqslant 0$*,* $r \geqslant 0$*, любого целого числа* q *и любого действительного числа* x *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} H_{2r+1}(nx). \tag{9}$$

Доказательство. Для многочленов Эрмита известна формула (см. [1, с. 583])

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Вводя обозначение S_n для левой части равенства (4) и заменяя индекс суммирования ($k = n - i$, $i = n - k$) получим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{n-i+m}^{q} H_{2r+1}((n-2i)x) =$$
$$= (-1)^{2r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x);$$

$$2S_n = \left[1 + (-1)^{2r+1}\right] \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x) +$$
$$+ \binom{n+2m}{n+m}^{q} H_{2r+1}(nx) + (-1)^{2r+1} \binom{n+2m}{m}^{q} H_{2r+1}(-nx) = 2\binom{n+2m}{m}^{q} H_{2r+1}(nx),$$

что равносильно равенству (4). □

Для многочленов Лежандра $P_n(x)$, многочленов Чебышева первого рода $T_n(x)$, многочленов Чебышева второго рода $U_n(x)$ и многочленов Гегенбауэра $C_n^{(\lambda)}(x)$ известны следующие формулы (см. [1, с. 583]):

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x),$$
$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x), \quad C_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\lambda)}(x).$$

Поэтому доказательство теорем 10–13 аналогично доказательству теоремы 9.

Теорема 10. *Пусть* $P_n(x)$ *— многочлен Лежандра. Для любых целых чисел* $m \geqslant 0$*,* $r \geqslant 0$*, любого целого числа* q *и любого действительного числа* x *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} P_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} P_{2r+1}(nx). \tag{10}$$

Теорема 11. *Пусть* $T_n(x)$ *— многочлен Чебышева первого рода. Для любых целых чисел* $m \geqslant 0$*,* $r \geqslant 0$*, любого целого числа* q *и любого действительного числа* x *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} T_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} T_{2r+1}(nx). \tag{11}$$

Теорема 12. *Пусть $U_n(x)$ — многочлен Чебышева второго рода. Для любых целых чисел $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, любого целого числа q и любого действительного числа x верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q U_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q U_{2r+1}(nx). \tag{12}$$

Теорема 13. *Пусть $C_n^{(\lambda)}(x)$ — многочлен Гегенбауера. Для любых целых чисел $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, любого целого числа q и любых действительных чисел x, λ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q C_{2r+1}^{(\lambda)}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q C_{2r+1}^{(\lambda)}(nx). \tag{13}$$

Многочлены Кравчука $P_k(m;n)$ могут быть определены с помощью производящей функции (см. [14, с. 132]):

$$(1-z)^m(1+z)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} P_k(m;n)z^k.$$

Теорема 14. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел p, r, m и любого целого числа q верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} = \binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{2r} n^{2p+1}. \tag{14}$$

Доказательство. Для многочленов Кравчука известны формулы (см. [11])

$$P_s(n-i,n) = (-1)^s P_s(i,n), \quad P_s(0,n) = \binom{n}{s}, \quad P_s(n,n) = (-1)^s \binom{n}{s}.$$

Вводя обозначение S_n для левой части равенства 8 и заменяя индекс суммирования ($k = n-i$, $i = n-k$) получим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{n-i+m}^q P_{2r}(n-i,n)(n-2i)^{2p+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{i+m}^q (-1)^{2r} P_{2r}(i,n)(2i-n)^{2p+1}(-1)^{2p+1},$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} = \\ &= \binom{n+2m}{n+m}^q P_{2r}(n,n)n^{2p+1} + \binom{n+2m}{m}^q P_{2r}(0,n)n^{2p+1} = 2\binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{2r} n^{2p+1}, \end{aligned}$$

что равносильно равенству (13). □

В силу нечетности произведения сомножителей в каждом слагаемом относительно замены индекса суммирования $k = n - i$ доказательство теорем 15–22 аналогично доказательству теоремы 14.

Теорема 15. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел p, r, m и любого целого числа q верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_r^2(k,n)(2k-n)^{2p+1} = \binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{r}^2 n^{2p+1}. \tag{15}$$

Теорема 16. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел p, r, m и любого целого числа q верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+2m}{2k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} = \binom{2n+2m}{m}^q \binom{n}{2r} n^{2p+1}. \tag{16}$$

Теорема 17. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел m, r и любого целого числа q верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+2m}{k+m}^{q}P_{2r+1}(k,n)=-\binom{n+2m}{m}^{q}\binom{n}{2r+1}. \tag{17}$$

Теорема 18. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел m, r, s и любого целого числа q верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+2m}{k+m}^{q}P_{2s}(k,n)P_{2r+1}(k,n)=-\binom{n+2m}{m}^{q}\binom{n}{2s}\binom{n}{2r+1}. \tag{18}$$

Теорема 19. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел m, r, s и любого целого числа q верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+2m}{k+m}^{q}P_{s}^{2}(k,n)P_{2r+1}(k,n)=-\binom{n+2m}{m}^{q}\binom{n}{s}^{2}\binom{n}{2r+1}. \tag{19}$$

Теорема 20. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита. Для любых целых неотрицательных чисел m, r, s, любого целого числа q и любого действительного числа x верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+2m}{k+m}^{q}P_{2s}(k,n)H_{2r+1}((2k-n)x)=\binom{n+2m}{m}^{q}\binom{n}{2s}H_{2r+1}(nx). \tag{20}$$

Теорема 21. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита. Для любых целых неотрицательных чисел m, r, s, любого целого числа q и любого действительного числа x верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+2m}{k+m}^{q}P_{s}^{2}(k,n)H_{2r+1}((2k-n)x)=\binom{n+2m}{m}^{q}\binom{n}{s}^{2}H_{2r+1}(nx). \tag{21}$$

Теорема 22. *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука,для любых целых неотрицательных чисел m, s, любого целого числа q и любого действительного числа x верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+2m}{k+m}^{q}P_{s}^{2}(k,n)\sin((2k-n)x)=\binom{n+2m}{m}^{q}\binom{n}{s}^{2}\sin(nx). \tag{22}$$

В заключение отметим, что тождества (1)–(22) отсутствуют в известных книгах, содержащих множества тождеств с биномиальными коэффициентами [7, 9, 11, 12, 14, 17–22, 24, 25], а также в книгах с тождествами для ортогональных многочленов [2,11,12], книге [13] и статьях, содержащих тождества для многочленов Кравчука [11, 23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. *Брычков Ю. А.* Специальные функции, производные, интегралы, ряды и другие формулы. — М.: Наука, 1983.
3. *Воблый В. А.* Об одном тождестве для многочленов Кравчука// в кн.: Мат. XX Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий: КНТУ, 2018. — С. 22–25.
4. *Воблый В. А.* О комбинаторном тождестве, связанном с перечислением графов// в кн.: Мат. XXI Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий: КНТУ, 2019. — С. 30–31.
5. *Воблый В. А.* Два комбинаторных тождества, связанных с перечислением графов// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211.* — С. 11–14.
6. *Воблый В. А.* Новые тождества из перечисления графов// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *229.* — С. 33–36.

7. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2009.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
9. *Грэхем А., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.
10. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. — Новосибирск: Наука, 1977.
11. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Миронова В. А.* Многочлены Кравчука и их применение в задачах криптографии и теории кодирования// Мат. вопр. криптогр. — 2015. — *6*, № 1. — С. 33–56.
12. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1982.
13. *Леонтьев В. К.* Избранные задачи комбинаторного анализа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
14. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции.. — М.: Наука, 1981.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции.. — М.: Наука, 1983.
17. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы.. — М.: Наука, 1986.
18. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
19. *Charalambides C. A.* Enumerative Combinatorics. — Boca Raton: CRC Press, 2018.
20. *Gould H. W.* Combinatorial Identities. — Morgantown: West Virginia University, 1972.
21. *Kaucky J.* Combinatoricke Identity. — Bratislava: Veda, 1975.
22. *Lovasz L.* Combinatorial Problems and Exercises. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2007.
23. *Podesta R. A.* New identities for binary Krawtchouk polynomials, binomial coefficients and Catalan numbers/ `arXiv:1603.09156v2 [math.CO]`.
24. *Spivey M. Z.* The Art of Proving Binomial Identities. — Boca Raton: CRC Press, 2019.
25. *Tomescu J.* Problems in Combinatorics and Graph Theory. — New York: Wiley, 1986.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 40–56
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-40-56

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. **В. И. КОРЗЮК, Я. В. РУДЬКО**

Посвящается Safkagosu

Аннотация. Для нелинейного биволнового уравнения, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временной полуоси задаются условия Дирихле и Неймана. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. С помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок проводится исследование разрешимости этих уравнений, а также зависимости от начальных данных и гладкости их решений. Для рассматриваемой задачи доказана единственность решения и установлены условия, при выполнении которых существует классическое решение. При невыполнении условий согласования строится задача с условиями сопряжения, а при недостаточно гладких данных — слабое решение.

Ключевые слова: классическое решение, смешанная задача, условия согласования, метод характеристик, нелинейное биволновое уравнение.

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH THE DIRICHLET AND NEUMANN CONDITIONS FOR A NONLINEAR BIWAVE EQUATION

© 2024 **V. I. KORZYUK, J. V. RUDZKO**

Dedicated to Safkagosu

Abstract. For a nonlinear biwave equation given in the first quadrant, we consider a mixed problem in which the Cauchy conditions are specified on the spatial half-line, and the Dirichlet and Neumann conditions are specified on the time half-line. The solution is constructed by the method of characteristics in an implicit analytical form as a solution of a certain integro-differential equations. By the method of continuation with respect to a parameter and a priori estimates, the solvability of these equations, the dependence on the initial data, and the smoothness of solutions are examined. For the problem considered, the uniqueness of the solution is proved and the conditions of the existence of classical solution are established. If the matching conditions are not met, then a problem with conjugation conditions is constructed, and if the data is not sufficiently smooth, then a mild solution is constructed.

Keywords and phrases: classical solution, mixed problem, matching conditions, method of characteristics, nonlinear biwave equation.

AMS Subject Classification: 35Axx, 35C15, 35D99, 35Lxx

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075-15-2022-284).

1. Постановка задачи. В области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box_a \Box_b u(t,x) = \mathcal{F}[u](t,x) := f\Big(t,\ x,\ u(t,x),\ \partial_t u(t,x),\ \partial_x u(t,x),$$
$$\partial_t^2 u(t,x),\ \partial_t\partial_x u(t,x),\ \partial_x^2 u(t,x),\ \partial_t^3 u(t,x),\ \partial_t^2\partial_x u(t,x),\ \partial_t\partial_x^2 u(t,x),\ \partial_x^3 u(t,x)\Big), \quad (1)$$

где $\Box_a = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ — оператор Д'Аламбера, f — функция, заданная на множестве $[0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^{10}$, a и b — заданные положительные действительные числа, $0 < a \leqslant b$. К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$\partial_t u(0,x) = \varphi_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = \varphi_1(x), \quad \partial_t^2 u(0,x) = \varphi_2(x), \quad \partial_t^3 u(0,x) = \varphi_3(x), \quad x \in [0,\infty), \quad (2)$$

и граничные условия

$$u(t,0) = \mu_0(t), \quad \partial_x u(t,0) = \mu_1(t), \quad t \in [0,\infty), \quad (3)$$

где φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0 и μ_1 — функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$.

Задача (1)–(3) в линейном случае при $f(t,x,\boldsymbol{u}) = f(t,x)$ была изучена в [4,5,16]. В [2] фактически была рассмотрена задача (1) с граничными условиями $u(t,0) = \partial_x^2 u(t,0) = 0$ и условиями Коши, содержащими дельта-функцию, при $f(t,x,\boldsymbol{u}) = -m\partial_t^2 u$. Более общий линейный случай задачи был рассмотрен в [19], однако там исследовалось обобщенное решение в пространствах Соболева, а не классическое. В [6,15] рассматривались многомерные линейные обобщения задачи для уравнений вида (1), однако там авторам не удалось вывести энергетическое неравенство для аналога граничных условий (3), и, следовательно, решить задачу (1)–(3). В [24] при помощи интегральных преобразований и метода отражений была изучена смешанная задача для уравнения (2) при $f(t,x,\boldsymbol{u}) = f(t,x) - m\partial_t^2 u$ с однородными граничными условиями вида $u(t,0) = \partial_x^2 u(t,0) = 0$; также было отмечено, что случай условий (3) более сложен и требует других методов изучения.

Также следует отметить работу [20], где был проведен симметрийный анализ уравнения (1) при $a = b = 1$ и были найдены некоторые частные решения. Относительно линейного уравнения (1) при $a = b = 1$ следует упомянуть тот факт, что для него хорошо проработана теория смешанных задач с условиями Гурса на характеристиках [1,3,22,25,27], но это нельзя сказать про нелинейный вариант уравнения.

В настоящей работе задача (1)–(3) исследуется в классической постановке. Мы рассмотрим как строго гиперболический случай, т.е. $a \neq b$, так и для нестрого гиперболический, т.е. $a = b$. При этом мы будем использовать подход, ранее примененный к нелинейным уравнениям второго порядка и изложенный в работах [10–13].

2. Строго гиперболическое уравнение. В этом разделе мы полагаем, что уравнение (1) строго гиперболическое, т.е. выполнено условие $a \neq b$.

2.1. Интегро-дифференциальное уравнение. Область Q характеристиками $x - at = 0$ и $x - bt = 0$ разделим на три подобласти:

$$Q^{(1)} = \{(t,x) \mid x - at > 0 \wedge x - bt > 0\},$$
$$Q^{(2)} = \{(t,x) \mid x - at > 0 \wedge x - bt < 0\},$$
$$Q^{(3)} = \{(t,x) \mid x - at < 0 \wedge x - bt < 0\}.$$

В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$, $j = 1,2,3$, рассмотрим интегро-дифференциальные уравнения

$$u^{(1)}(t,x) = K^{(1)}\big[u^{(1)}\big](t,x) = \mathcal{A}_1\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x) +$$
$$+ \int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (4)$$

$$u^{(2)}(t,x) = K^{(2)}\big[u^{(2)}\big](t,x) = \mathcal{A}_2\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_1,\mu_2\big](t,x) + \int\limits_{t-x/b}^{t} \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \\ + \int\limits_{0}^{t-x/b} \mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau, \quad (t,x)\in\overline{Q^{(2)}}, \quad (5)$$

$$u^{(3)}(t,x) = K^{(3)}\big[u^{(3)}\big](t,x) = \mathcal{A}_3\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_1,\mu_2\big](t,x) + \int\limits_{t-x/b}^{t} \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \\ + \int\limits_{t-x/a}^{t-x/b} \mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \int\limits_{0}^{t-x/a} \mathcal{A}_3^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u^{(3)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau, \quad (t,x)\in\overline{Q^{(3)}}, \quad (6)$$

где использованы обозначения

$$\mathcal{A}_1\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x) = \frac{a^2\varphi_0(x-bt)+a^2\varphi_0(x+bt)-b^2\varphi_0(x-at)-b^2\varphi_0(x+at)}{2(a^2-b^2)} + \\ + \frac{1}{4a^3b-4ab^3}\Bigg(\int\limits_0^{x+bt}\big(2a^3\varphi_1(\xi)-2ab\varphi_2(\xi)(bt-\xi+x)-a\varphi_3(\xi)(bt-\xi+x)^2\big)\,d\xi + \\ + \int\limits_{x-bt}^{0}\big(2a^3\varphi_1(\xi)-2ab\varphi_2(\xi)(bt+\xi-x)-a\varphi_3(\xi)(bt+\xi-x)^2\big)\,d\xi + \\ + \int\limits_0^{x+at}\big(2ab\varphi_2(\xi)(at-\xi+x)+b\varphi_3(\xi)(at-\xi+x)^2-2b^3\varphi_1(\xi)\big)\,d\xi + \\ + \int\limits_{x-at}^{0}\big(2ab\varphi_2(\xi)(at+\xi-x)+b\varphi_3(\xi)(at+\xi-x)^2-2b^3\varphi_1(\xi)\big)\,d\xi\Bigg),$$

$$\mathcal{A}_2\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x) = \int\limits_0^{x+at}\frac{(at-\xi+x)\,(2a\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(at-\xi+x))-2b^2\varphi_1(\xi)}{4a^3-4ab^2}d\xi + \\ + \int\limits_0^{x-at}\frac{2b^2\varphi_1(\xi)-(at+\xi-x)\,(2a\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(at+\xi-x))}{4a^3-4ab^2}d\xi + \\ + \int\limits_0^{x+bt}\frac{2a^2\varphi_1(\xi)-(bt-\xi+x)\,(2b\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(bt-\xi+x))}{4a^2b-4b^3}d\xi + \\ + \int\limits_0^{bt-x}\frac{2a^2\varphi_1(\xi)+2b\varphi_2(\xi)(-bt+\xi+x)-\varphi_3(\xi)(-bt+\xi+x)^2}{4b(a-b)^2}d\xi + \\ + \int\limits_0^{a(t-x/b)}\frac{2ab\varphi_2(\xi)(abt-ax-b\xi)+\varphi_3(\xi)(a(x-bt)+b\xi)^2-2b^4\varphi_1(\xi)}{2ab(a-b)^2(a+b)}d\xi - \int\limits_0^{t-x/b}\frac{ab\mu_1(\xi)}{a-b}d\xi +$$

$$+\frac{(a-b)\left(a^2\varphi_0(bt+x)-b^2(\varphi_0(x-at)+\varphi_0(at+x))\right)+a^2(a+b)\varphi_0(bt-x)}{2(a-b)^2(a+b)}+$$
$$+\frac{b(b-a)(a+b)\mu_0(t-x/b)-b^3\varphi_0(a(t-x/b))}{(a-b)^2(a+b)},$$

$$\mathcal{A}_3\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x)=\int\limits_0^{t-x/a}\frac{ab(a^2-b^2)\mu_1(\xi)}{(a-b)^2(a+b)}d\xi-$$
$$-\int\limits_0^{b(t-x/a)}\frac{4a^4\varphi_1(\xi)+4ab\varphi_2(\xi)(a(\xi-bt)+bx)-2\varphi_3(\xi)(a(\xi-bt)+bx)^2}{4ab(a-b)^2(a+b)}d\xi+$$
$$+\int\limits_0^{bt-x}\frac{2a^2\varphi_1(\xi)-2b\varphi_2(\xi)(bt-\xi-x)-\varphi_3(\xi)(\xi+x-bt)^2}{4b(a-b)^2}d\xi-$$
$$-\int\limits_0^{x+bt}\frac{(bt-\xi+x)\,(2b\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(bt-\xi+x))-2a^2\varphi_1(\xi)}{4b(a-b)(a+b)}d\xi-$$
$$-\int\limits_0^{a(t-x/b)}\frac{4ab\varphi_2(\xi)(a(x-bt)+b\xi)-2\varphi_3(\xi)(a(x-bt)+b\xi)^2+4b^4\varphi_1(\xi)}{4ab(a-b)^2(a+b)}d\xi-$$
$$-\int\limits_0^{at-x}\frac{2a\varphi_2(\xi)(at-\xi-x)+\varphi_3(\xi)(-at+\xi+x)^2-2b^2\varphi_1(\xi)}{4a(a-b)^2}d\xi+$$
$$+\int\limits_0^{x+at}\frac{(at-\xi+x)\,(2a\varphi_2(\xi)+\varphi_3(\xi)(at-\xi+x))-2b^2\varphi_1(\xi)}{4a(a-b)(a+b)}d\xi-\int\limits_0^{t-x/b}\frac{ab\mu_1(\xi)}{a-b}d\xi,$$

$$\mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\varphi_3\big](t,x)=\mathcal{A}_1\big[0,0,0,\varphi_3\big](t,x),\quad \mathcal{A}_j^{\mathrm{com}}\big[\varphi_3\big](t,x)=\mathcal{A}_j\big[0,0,0,\varphi_3,0,0\big](t,x),\quad j=2,3.$$

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ уравнений (4)–(6):

$$u(t,x)=u^{(j)}(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q^{(j)}},\quad j=1,2,3. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a\neq b,\quad f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0\in C^4([0,\infty)),\quad \varphi_1\in C^3([0,\infty)),\quad \varphi_2\in C^2([0,\infty)),\quad \varphi_3\in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0\in C^4([0,\infty)),\quad \mu_1\in C^3([0,\infty)).$$

Функция u принадлежит классу $C^4(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3) тогда и только тогда, когда она является трижды непрерывно дифференцируемым решением уравнений (4)–(6) и выполняются условия согласования

$$\mu_0(0)=u_0(0), \tag{8}$$
$$\mu_0'(0)=u_1(0),\quad \mu_1(0)=u_0'(0), \tag{9}$$
$$\mu_0''(0)=u_2(0),\quad \mu_1'(0)=u_1'(0), \tag{10}$$
$$\mu_0'''(0)=u_3(0),\quad \mu_1''(0)=u_2'(0), \tag{11}$$

$$\mu_0''''(0) = (a^2+b^2)u_2''(0) - a^2b^2u_0''''(0) + f\Big(0,0,u_0(0),u_1(0),u_0'(0),\\ u_2(0),u_1'(0),u_0''(0),u_3(0),u_2'(0),u_1''(0),u_0'''(0)\Big), \quad \mu_1'''(0) = u_3'(0). \tag{12}$$

Доказательство. 1. Пусть функция $u \in C^4(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Решение u задачи (1)–(3) ищем в виде $u = v + w$, где v является решением однородного биволнового уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями

$$\begin{cases} \Box_a\Box_b v(t,x) = 0, & (t,x) \in Q,\\ \partial_t^i v(0,x) = \varphi_i(x), & i = 0,1,2,3, \quad x \in [0,\infty),\\ \partial_x^i v(t,0) = \mu_i(t), & i = 0,1, \quad t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{13}$$

а w — решение задачи

$$\begin{cases} \Box_a\Box_b w = \mathcal{F}[u](t,x)w(t,x) = \mathcal{F}[v+w], & (t,x) \in Q,\\ \partial_t^i w(0,x) = 0, & i = 0,1,2,3, \quad x \in [0,\infty),\\ \partial_x^i w(t,0) = 0, & i = 0,1, \quad t \in [0,\infty). \end{cases} \tag{14}$$

Результаты работ [4] позволяют записать

$$v(t,x) = \begin{cases} \mathcal{A}_1\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x), & (t,x) \in \overline{Q^{(1)}},\\ \mathcal{A}_2\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x), & (t,x) \in \overline{Q^{(2)}},\\ \mathcal{A}_3\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x), & (t,x) \in \overline{Q^{(3)}}, \end{cases} \tag{15}$$

и

$$w(t,x) = \int_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau \tag{16}$$

при $(t,x) \in \overline{Q^{(1)}}$,

$$w(t,x) = \int_{t-x/b}^{t} \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \int_0^{t-x/b} \mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau \tag{17}$$

при $(t,x) \in \overline{Q^{(2)}}$ и

$$w(t,x) = \int_{t-x/b}^{t} \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \int_{t-x/a}^{t-x/b} \mathcal{A}_2^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau +\\ + \int_0^{t-x/a} \mathcal{A}_3^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v+w](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau \tag{18}$$

при $(t,x) \in \overline{Q^{(3)}}$. Формулы (15)–(18) фактически влекут представления (4)–(7). Условия согласования (8)–(12) выводятся путем дифференцирования начальных (2) и граничных условий (3), как это сделано в [12].

2. Предположим, что имеют место представления функции u в виде (4)–(7) и выполнены условия (8)–(12). В силу условий гладкости

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty)),$$

аналогично работе [14], заключаем, что $u \in C^4(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1,2,3$. Подставив (4)–(7) в уравнение (1) и условия (2), (3), убеждаемся, что функция $u^{(j)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в

$\overline{Q^{(j)}}$, и при этом функция $u^{(1)}$ удовлетворяет начальным условиям (2), а функция $u^{(3)}$ — краевым условиям (3). Чтобы при этом функция u принадлежала классу $C^4(\overline{Q})$, необходимо и достаточно совпадения на характеристиках $x = at$ и $x = bt$ значений функций $u^{(j)}$ и их всех частных производных до четвертого порядка включительно, т.е.

$$\begin{aligned}\partial_t^k\partial_t^p u^{(1)}(t, x = bt) = \partial_t^k\partial_t^p u^{(2)}(t, x = bt),\\ \partial_t^k\partial_t^p u^{(2)}(t, x = at) = \partial_t^k\partial_t^p u^{(3)}(t, x = at),\end{aligned}\qquad 0 \leqslant k + p \leqslant 4.$$

Для этого достаточно условий (8)–(12), что можно вывести из представлений (4)–(7), действуя в точности по алгоритму, изложенному в [12–14]. □

2.2. Разрешимость интегро-дифференциальных уравнений. Перепишем уравнение (4) в операторном виде

$$u(t, x) = J[u](t, x) + g(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \tag{19}$$

где

$$g(t, x) = \mathcal{A}_1\big[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big](t, x), \quad J[v] = \int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[v](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\, d\tau.$$

Для уравнения (19) рассмотрим семейство уравнений с параметром $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$u_\varepsilon(t, x) - \varepsilon(J[u_\varepsilon] - J[0])(t, x) = g(t, x) + J[0](t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{20}$$

Легко видеть, что любое решение u_ε уравнения (20) при $\varepsilon = 1$ является решением уравнения (19) и наоборот. Теперь наша цель — решить уравнение (20) при $\varepsilon = 1$. Для этого воспользуемся методом продолжения по параметру (см. [18,26]). В таком случае нужно показать, что оператор, стоящий в левой части уравнения, удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной и получить априорную оценку решения.

Введем множество $\Omega_m = \big\{(t, x) \mid (t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \wedge x + bt \leqslant m\big\}$, $m \in \mathbb{N}$ и предположим, что функция f удовлетворяет условию Липшица:

$$\big|f(t, x, \boldsymbol{u}_1) - f(t, x, \boldsymbol{u}_2)\big| \leqslant L(t, x)\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_1 \tag{21}$$

где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0, \infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0, \infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0, \infty)), \quad \varphi_3 \in C([0, \infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда оператор $J\colon C^3(\Omega_m) \mapsto C^3(\Omega_m)$ является липшицевым.

Доказательство. При условиях гладкости, указанных в условии утверждения, аналогично теореме 1 можно проверить, что оператор J действует из пространства $C^3(\Omega_m)$ в пространство $C^3(\Omega_m)$.

Оценим разность $\|J[u_1] - J[u_2]\|_{C^3(\Omega_m)}$. Имеем

$$\big|(J[u_1] - J[u_2])(t, x)\big| = \left|\int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_1](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\, d\tau - \int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_2](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \Big|\mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_1](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x) - \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_2](\tau, \cdot)\big](t - \tau, x)\Big|\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{|4a^3b-4ab^3|}\int\limits_0^t \Bigg| \int\limits_0^{x+a(t-\tau)} b\big(x-\xi+a(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_{x-a(t-\tau)}^0 b\big(x-\xi-a(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi - \\ - \int\limits_0^{x+b(t-\tau)} a\big(x-\xi+b(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi - \int\limits_{x-b(t-\tau)}^0 a\big(x-\xi-b(t-\tau)\big)^2 U(\tau,\xi)d\xi \Bigg| d\tau \quad (22)$$

для всех $(t,x)\in\Omega_m$, где $U=\mathcal{F}[u_1]-\mathcal{F}[u_2]$. В силу условия Липшица (21) и непрерывности подинтегральных функции в выражении (22) существует такая константа M, зависящая только от чисел a и b, что верно неравенство

$$\Big|\big(J[u_1]-J[u_2]\big)(t,x)\Big| \leqslant M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \sum_{k=0}^3\sum_{p=0}^k \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_1(\tau,\xi)-\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_2(\tau,\xi)\Big|d\xi + \\ + M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^3\sum_{p=0}^k \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_1(\tau,\xi)-\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_2(\tau,\xi)\Big|d\xi, \quad (t,x)\in\overline{\Omega_m}. \quad (23)$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$\Big\|J[u_1]-J[u_2]\Big\|_{C(\Omega_m)} \leqslant 2MS(\Omega_m)\|u_1-u_2\|_{C^3(\Omega_m)}, \quad (24)$$

где $S(\Omega_m)$ — мера (Лебега) множества Ω_m. По такой же схеме устанавливаются оценки вида

$$\Big\|\partial_t^k\partial_x^p J[u_1]-\partial_t^k\partial_x^p J[u_2]\Big\|_{C(\Omega_m)} \leqslant M_{k,p}\|u_1-u_2\|_{C^3(\Omega_m)}, \quad k,p=0,1,2,3, \quad 1\leqslant p+k\leqslant 3, \quad (25)$$

где $M_{k,p}$ — константы, зависящие только от чисел a и b. В таком случае имеет место неравенство

$$\Big\|J[u_1]-J[u_2]\Big\|_{C^3(\Omega_m)} \leqslant \mathfrak{L}\|u_1-u_2\|_{C^3(\Omega_m)}$$

т.е. оператор $J\colon C^3(\Omega_m)\mapsto C^3(\Omega_m)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\mathfrak{L}$, зависящей только от чисел a и b. □

Теперь задача состоит в получении априорной оценки вида

$$\|u_\varepsilon\|_{C^3(\Omega_m)} \leqslant C\Big\|g+J[0]\Big\|_{C^3(\Omega_m)} \quad (26)$$

для всех возможных решений u_ε уравнения (20) при всяком $\varepsilon\in[0,1]$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от g, $u^{(1)}$ и ε.

Итак, пусть выполнены условия утверждения 1. Тогда имеем

$$\Big|u_\varepsilon(t,x)\Big| = \Big|g(t,x)+J[0](t,x)+\varepsilon\big(J[u_\varepsilon](t,x)-J[0](t,x)\big)\Big| \leqslant \\ \leqslant \Big\|g+J[0]\Big\|_{C(\Omega_m)} + \Big|J[u_\varepsilon](t,x)-J[0](t,x)\Big| = \\ = C_r + \Bigg|\int\limits_0^t \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[u_\varepsilon](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x) - \mathcal{A}_1^{\mathrm{com}}\big[\mathcal{F}[0](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau\Bigg|, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad (27)$$

где $C_r = \|g + J[0]\|_{C(\Omega_m)}$. Продолжая оценивание величины $|u_\varepsilon(t,x)|$ как в доказательстве утверждения 1, получим неравенство

$$\big|u_\varepsilon(t,x)(t,x)\big| \leqslant C_r + M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\big| d\xi + \\ + M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\big| d\xi, \quad (t,x)\in\Omega_m. \quad (28)$$

Из (28) в силу условия $0 < a < b$ следует

$$\big|u_\varepsilon(t,x)(t,x)\big| \leqslant C_r + 2M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\big| d\xi, \quad (t,x)\in\Omega_m. \quad (29)$$

Рассуждая аналогичным образом, приходим к неравенствам

$$\Big|\partial_t^i\partial_x^j u_\varepsilon(t,x)(t,x)\Big| \leqslant C_r^{(i,j)} + M^{(i,j)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau,\xi)\Big| d\xi, \quad (t,x)\in\Omega_m \quad (30)$$

для неотрицательных целых чисел i и j, удовлетворяющих условию $1 \leqslant j+i \leqslant 2$, где

$$C_r^{(i,j)} = \big\|\partial_t^i\partial_x^j(g + J[0])\big\|_{C(\Omega_m)}$$

и $M^{(i,j)}$ — константы, зависящие только от чисел a и b и множества Ω_m. Для производных третьего порядка неравенство несколько другое:

$$\Big|\partial_t^i\partial_x^j u_\varepsilon(t,x)\Big| \leqslant C_r^{(i,j)} + M^{(i,j)}\int\limits_0^t \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k} \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau, x+a(t-\tau))\Big| + \\ + \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau, x-a(t-\tau))\Big| + \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau, x+b(t-\tau))\Big| + \\ + \Big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(\tau, x-b(t-\tau))\Big| d\tau, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad i+j=3, \quad (31)$$

Складывая неравенства (29)–(31), приходим к оценке

$$U_\varepsilon(t,x) \leqslant C_r^{(1)} + M^{(1)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} U_\varepsilon(t,x)d\xi + M^{(1)}\int\limits_0^t \big|U_\varepsilon(\tau,x+a(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-a(t-\tau))\big| + \\ + \big|U_\varepsilon(\tau,x+b(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-b(t-\tau))\big| d\tau, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad (32)$$

где

$$U_\varepsilon(t,x) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{p=0}^{k}\big|\partial_t^{k-p}\partial_x^p u_\varepsilon(t,x)\big|, \quad C_r^{(1)} = C_r + \sum_{k=1}^{3}\sum_{p=0}^{k} C_r^{(k-p,p)}, \quad M^{(1)} = 2M + \sum_{k=1}^{3}\sum_{p=0}^{k} M^{(k-p,p)}.$$

Применяя к (32) многомерную лемму Гронуолла, получаем

$$U_\varepsilon(t,x) \leqslant C_{\exp}C_r^{(1)} + C_{\exp}M^{(1)}\int\limits_0^t \big|U_\varepsilon(\tau,x+a(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-a(t-\tau))\big| + \\ + \big|U_\varepsilon(\tau,x+b(t-\tau))\big| + \big|U_\varepsilon(\tau,x-b(t-\tau))\big| d\tau, \quad (t,x)\in\Omega_m, \quad (33)$$

где $C_{\exp}$ — некоторая константа, зависящая только от чисел a и b и множества Ω_m. Теперь, применив итеративно четыре раза обычное неравенством Гроноулла к неравенству (33), как в [23], придем к оценке

$$U_\varepsilon(t,x) \leqslant C_{\exp}^{(1)} C_{\exp} C_r^{(1)}, \quad (t,x) \in \Omega_m, \tag{34}$$

где $C_{\exp}^{(1)}$ — некоторая константа, зависящая только от чисел a и b и множества Ω_m. Заметим, что в силу определения величин U_ε и $C_r^{(1)}$ неравенство (34) есть альтернативная запись априорной оценки (26), где $C = C_{\exp}^{(1)} C_{\exp}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда для всех возможных решений u_ε уравнения (20) при всяком $\varepsilon \in [0,1]$ справедлива оценка (26), где C — некоторая постоянная, не зависящая от $g + J[0]$, u_ε и ε.

Рассмотрим оператор A_ε, действующий по правилу

$$A_\varepsilon[v](t,x) = v(t,x) - \varepsilon(J[v] - J[0])(t,x).$$

Легко видеть, что из утверждения 1 следует липшицевость оператора A_ε, а из утверждения 2 — коэрцитивность (в смысле [18]) при всех $\varepsilon \in [0,1]$. Кроме того, функция $[0,1] \ni \varepsilon \mapsto A_\varepsilon$ непрерывна (в смысле полунормы пространства липшицевых операторов; см. [18]). Поскольку оператор A_ε при $\varepsilon = 0$ непрерывно обратим в пространстве $C^3(\Omega_m)$, то согласно [18, теорема 4] он обратим для всех $\varepsilon \in [0,1]$ в том же пространстве. Таким образом, уравнение (20) разрешимо при $\varepsilon = 1$ на множестве Ω_m в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций, причем согласно построению, его решение единственно. Значит, уравнение (19) также имеет единственное решение в классе пространстве $C^3(\Omega_m)$ для любого $g \in C^3(\Omega_m)$, а в силу произвольности m и того факта, что $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, — в пространстве $C^3(\overline{Q^{(1)}})$. Таким же образом доказывается существование и единственность решений уравнений (5) и (6) в классах $C^3(\overline{Q^{(2)}})$ и $C^3(\overline{Q^{(3)}})$ соответственно. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда решения уравнений (4)–(6) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.

Доказательство. Существование и единственность решений уравнений (4)–(6) доказаны ранее. Непрерывная зависимость решений от начальных данных фактически следует из [26, следствие 4.2]. □

2.3. Классическое решение.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), *где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *имеет в классе $C^4(\overline{Q})$ единственное решение и тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(12). *Это решение определяется формулами* (4)–(7).

Доказательство вытекает из теорем 1 и 2. □

2.4. Неоднородные условия согласования. Подобно тому, как это было сделано в [10–14], рассмотрим теперь задачу (1)–(3) в случае, когда условия согласования (8)–(12) частично или полностью не выполняются.

Согласно теореме 1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u, или ее производных, или все вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 3. *Если для заданных функций f, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0, μ_1 не выполняются однородные условия согласования* (8)–(12), *то какими бы гладкими ни были функции f, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0, μ_1, задача* (1)–(3) *при $a \neq b$ не имеет классического решения, определенного на $\overline{Q}$.*

Доказательство вытекает из теоремы 1. □

Пусть заданные функции уравнения (1) и условий (2), (3) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 3:

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty)).$$

Так как условия согласования (8)–(12), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывную функцию u:

$$\big[(u)^+ - (u)^-\big](t, x = bt) = \frac{b(\mu_0(0) - \varphi_0(0))}{a-b}, \tag{35}$$

$$\big[(u)^+ - (u)^-\big](t, x = at) = \frac{a(\varphi_0(0) - \mu_0(0))}{a-b}, \tag{36}$$

Здесь символом $(\cdot)^\pm$ обозначены предельные значения функции u и ее частных производных с разных сторон на кривой $x = r(t)$:

$$(u)^\pm(t, x = r(t)) = \lim_{\delta \to 0+} u(t, r(t) \pm \delta).$$

Таким образом, если заданные функции задачи (1)–(3) не удовлетворяют однородным условиям согласования (8)–(12), то решение задачи (1)–(3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристиках $x - at = 0$ и $x - bt = 0$.

В качестве условий сопряжения могут быть выбраны условия (35) и (36). Теперь задачу (1)–(3) можно сформулировать, используя условия сопряжения (35) и (36), следующим образом.

Задача (1)–(3) **с условиями сопряжения на характеристиках.** Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничному условию (3) и условиям сопряжения (35), (36).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для ее численной реализации.

Следует отметить, что выбор условий согласования (35) и (36) в случае невыполнения условий согласования (8)–(12) не единствен, т.е. вместо (35) и (36) условий можно выбирать другие условия. Это связано с тем, что различные процессы могут быть описаны одними и теми же дифференциальными уравнениями, но разными интегральными законами сохранения, и поэтому различие таких процессов проявляется лишь на разрывных решениях (см. [17]). Хотя чисто математически решение задачи (1)–(3) с условиями сопряжения (35) и (36) является корректно определенным. С другой стороны, если выполнено условие (8), то условия сопряжения (35) и (36) становятся однородными, что, в некоторой степени, физически естественно; для этого случая далее будет доказано, что решение можно будет построить непрерывным.

Введем обозначение $\widetilde{Q} = \overline{Q} \setminus \{(t,x) \mid x - at = 0 \vee x - bt = 0\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *с условиями сопряжения* (35) *и* (36) *имеет в классе $C^4(\widetilde{Q})$ единственное решение u. Это решение определяется формулами* (4)–(7)*.*

Доказательство вытекает из предыдущих рассуждений. □

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Смешанная задача* (1)–(3) *с условиями сопряжения* (35) *и* (36) *имеет в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ единственное решение u тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)*. Это решение определяется формулами* (4)–(7)*.*

Доказательство вытекает из теорем 1, 2, 4 и проведенных выше рассуждений. Действительно, если $\mu_0(0) - \varphi_0(0) = 0$, то решение u на множестве $\{(t,x) \mid x - at = 0 \vee x - bt = 0\}$ является непрерывным в силу (35) и (36). Следовательно, кроме того, что $u \in C^4(\widetilde{Q})$, это решение является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$. □

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21)*, где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *с условиями сопряжения* (35) *и* (36) *имеет единственное решение u:*

(i) *в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C^1(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8) *и* (9)*;*
(ii) *в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(10)*;*
(iii) *в классе $C^4(\widetilde{Q}) \cap C^3(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(11)*.*

Это решение определяется формулами (4)–(7)*.*

Доказательство аналогично [10–12]. □

2.5. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (1)–(3) в случае, когда функции f, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, μ_0, μ_1 не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. Пусть $a \neq b$. Функцию u, представимую в виде (4)–(7), назовём слабым решением задачи (1)–(3).

Замечание 1. Любое классическое решение задачи (1)–(3) является также слабым решением этой задачи.

Также очевидно, что если выполнены дополнительные условия гладкости

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^1([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^4([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^3([0,\infty))$$

и условия согласования (8)–(12), то слабое решение задачи (1)–(3) при $a \neq b$ является классическим.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача (1)–(3) единственное слабое решение u из класса $C^3(\widetilde{Q})$.

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (4)–(6) и принадлежность их решений классу трижды непрерывно дифференцируемых функций следует из теоремы 2. ☐

Для слабого решения можно повысить гладкость, если частично выполняются условия согласования (8)–(11), как это сделано в следующей теореме.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия*

$$a \neq b, \quad f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (21), где L — функция класса $C(\overline{Q})$.Тогда смешанная задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение u:

(i) *в классе $C^3(\widetilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условие (8);*
(ii) *в классе $C^3(\widetilde{Q}) \cap C^1(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (8) и (9);*
(iii) *в классе $C^3(\widetilde{Q}) \cap C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (8)–(10);*
(iv) *в классе $C^3(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (8)–(11).*

Доказательство аналогично доказательству теорем 5 и 6. ☐

Замечание 2. Если нелинейность f уравнения (1) не зависит от частных производных третьего порядка, то слабое решение можно искать в классе $C^2(\widetilde{Q})$.

3. Нестрого гиперболическое уравнение. В этом разделе полагаем, что уравнение (1) нестрого гиперболическое, т.е. выполнено условие $a = b$. Само по себе исследование нестрого гиперболического случая имеет ряд дополнительных трудностей, среди которых можно выделить:

(a) дополнительные условия гладкости и согласования по сравнению со строго гиперболическим случаем [5, 7–9];
(b) некоторые сложности, связанные с выводами априорных оценок в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций.

Из-за второй вышеперечисленной трудности ограничимся рассмотрением нелинейности, зависящей от независимых переменных, неизвестной функции и ее производных до второго порядка включительно, т.е. положим, что нелинейность f уравнения представима в более простом виде

$$f\Big(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, u_{ttt}, u_{ttx}, u_{txx}, u_{xxx}\Big) = f\Big(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}\Big). \tag{37}$$

3.1. Интегро-дифференциальное уравнение. Как и в предыдущем разделе, разделим область Q характеристикой $x - at = 0$ на две подобласти:

$$\Omega^{(1)} = \big\{(t,x) \mid x - at > 0\big\}, \quad \Omega^{(2)} = \big\{(t,x) \mid x - at < 0\big\},$$

В замыкании $\overline{\Omega^{(j)}}$ каждой из подобластей $\Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$, рассмотрим интегро-дифференциальные уравнения

$$u^{(1)}(t,x) = B^{(1)}\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x) + \int\limits_0^t \widetilde{B}^{(1)}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau, \quad (t,x) \in \overline{\Omega^{(1)}}, \tag{38}$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t,x) = B^{(2)}\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_1,\mu_2\big](t,x) + \int\limits_{t-x/a}^{t} \widetilde{B}^{(1)}\big[\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau + \\ + \int\limits_0^{t-x/a} \widetilde{B}^{(2)}\big[\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau,\cdot)\big](t-\tau,x)\,d\tau, \quad (t,x) \in \overline{\Omega^{(2)}}, \end{aligned} \tag{39}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} B^{(1)}\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\big](t,x) = \int\limits_0^{x-at} \frac{\varphi_3(\xi)\left((x-\xi)^2 - a^2t^2\right) - 6a^2\varphi_1(\xi) - 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi + \\ + \int\limits_0^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(\xi) + \varphi_3(\xi)\left(a^2t^2 - (x-\xi)^2\right) + 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi - \\ - \frac{t(a(\varphi_0'(at+x) - \varphi_0'(x-at)) + \varphi_1(x-at) + \varphi_1(at+x))}{4} + \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{(2)}\big[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\mu_0,\mu_1\big](t,x) = \int\limits_0^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(\xi) + \varphi_3(\xi)\left(a^2t^2 - (x-\xi)^2\right) + 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi + \\ + \int\limits_0^{at-x} \frac{\varphi_3(\xi)\left((x-\xi)^2 - a^2t^2\right) - 6a^2\varphi_1(\xi) - 2a^2t\varphi_2(\xi)}{8a^3}\,d\xi + \\ + \frac{x^2\varphi_2(at-x)}{2a^2} - \frac{x^2\varphi_1'(at-x)}{2a} - \frac{x^2\varphi_0''(at-x)}{2} + \frac{x\mu_0'\left(t-x/a\right)}{a} + x\mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + \mu_0\left(t - \frac{x}{a}\right) - \\ - x\varphi_0'(at-x) + \frac{tx\varphi_1'(at-x)}{2} + \frac{at\varphi_0'(at-x)}{4} - \frac{at\varphi_0'(at+x)}{4} + \frac{atx\varphi_0''(at-x)}{2} - \frac{3x\varphi_1(at-x)}{2a} - \\ - \frac{tx\varphi_2(at-x)}{2a} - \frac{\varphi_0(at-x)}{2} + \frac{\varphi_0(at+x)}{2} + \frac{t\varphi_1(at-x)}{4} - \frac{t\varphi_1(at+x)}{4}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{B}^{(1)}\big[\varphi_3\big](t,x) = B^{(1)}\big[0,0,0,\varphi_3\big](t,x), \quad \widetilde{B}^{(2)}\big[\varphi_3\big](t,x) = B^{(2)}\big[0,0,0,\varphi_3,0,0\big](t,x).$$

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u, совпадающую на замыкании $\overline{\Omega^{(j)}}$ области $\Omega^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ уравнений (38) и (39):

$$u(t,x) = u^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{\Omega^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \tag{40}$$

Аналогично пп. 2.1 и 2.2 можно доказать следующие теоремы.

Теорема 9. *Пусть выполняются условия*

$$a = b, \quad f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$

$$\varphi_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^2([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^4([0,\infty)).$$

Функция u принадлежит классу $C^4(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1) *с* (37), *начальным условиям* (2) *и граничным условиям* (3) *тогда и только тогда, когда она является дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнений* (38) *и* (39) *и выполняются условия согласования* (8)–(12) *и*

$$\begin{aligned}
D^5\mu_0(0) = {} & \big(a\varphi_0'''(0) + \varphi_1''(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{xx}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),u_{xx}=\varphi_0''(0)\Big)+\\
&+\big(a\varphi_1''(0)+\varphi_2'(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{tx}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),u_{tx}=\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\
&+\big(a\varphi_2'(0)+\varphi_3(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{tt}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),u_{tt}=\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\
&+\big(a\varphi_0''(0)+\varphi_1'(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{x}}\Big(0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),u_x=\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\
&+\big(a\varphi_1'(0)+\varphi_2(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u_{t}}\Big(0,0,\varphi_0(0),u_t=\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\
&+\big(a\varphi_0'(0)+\varphi_1(0)\big)\frac{\partial f}{\partial u}\Big(0,0,u=\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\
&+a\frac{\partial f}{\partial x}\Big(0,x=0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)+\\
&+\frac{\partial f}{\partial t}\Big(t=0,0,\varphi_0(0),\varphi_1(0),\varphi_0'(0),\varphi_2(0),\varphi_1'(0),\varphi_0''(0)\Big)-\\
&-a^5D^5\varphi_0(0)-a^4D^4\varphi_1(0)+2a^3\varphi_2'''(0)+2a^2\varphi_3''(0)-aD^4\mu_1(0). \qquad (41)
\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Отличие состоит в том, что необходимость условия (41) не может быть строго обоснована дифференцированием начальных (2) и граничных (3) условий, но может быть выведена лишь формально дифференцированием краевых условий. Однако это можно сделать путем приравнивания величин $\partial_t^k\partial_x^p u^{(1)}(t,at) - \partial_t^k\partial_x^p u^{(2)}(t,at)$ при $k+p=4$, где функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ заданы формулами (38) и (39) соответственно, как это сделано в [13]. □

Теорема 10. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q}\times\mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f имеет вид (37) *и удовлетворяет условию Липшица* (21), *где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда решения уравнений* (38) *и* (39) *существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2. □

3.2. Классическое решение.

Теорема 11. *Пусть выполняются условия*

$$a=b, \quad f\in C^2(\overline{Q}\times\mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^2([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^4([0,\infty))$$

и пусть функция f имеет вид (37) *и удовлетворяет условию Липшица* (21), *где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *имеет в классе $C^4(\overline{Q})$ единственное решение и* *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (8)–(12) *и* (41). *Это решение определяется формулами* (38)–(40).

Доказательство вытекает из теорем 9 и 10. □

3.3. Слабое решение. В случае нестрого гиперболического уравнения помимо классического решения рассмотрим слабые решения.

Определение 2. Пусть $a = b$. Функцию u, представимую в виде (38)–(40), назовём слабым решением задачи (1)–(3).

Очевидно, что если выполнены дополнительные условия гладкости

$$f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^4([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C^2([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^5([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^4([0,\infty))$$

и условия согласования (8)–(12) и (41), то слабое решение задачи (1)–(3) при $a = b$ является классическим.

Введем множество $\widetilde{\Omega} = \overline{Q} \setminus \{(t,x) \mid x = at\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть выполняются условия*

$$a = b, \quad f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}),$$
$$\varphi_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \varphi_1 \in C^2([0,\infty)), \quad \varphi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \varphi_3 \in C([0,\infty)),$$
$$\mu_0 \in C^3([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty))$$

и пусть функция f имеет вид (37) *и удовлетворяет условию Липшица* (21), *где L — функция класса $C(\overline{Q})$. Тогда смешанная задача* (1)–(3) *единственное слабое решение u из класса $C^2(\widetilde{\Omega})$.*

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (38) и (39), а также принадлежность их решений классу дважды непрерывно дифференцируемых функций следует из теоремы 2. □

Условия согласования для непрерывности слабого решения в нестрого гиперболическом случае более сильные, чем в строго гиперболическом случае. Можно показать, что если дополнительно к условиям теоремы 12 потребовать выполнения равенств

$$\varphi_0(0) = \mu(0), \quad \mu_1'(0) = \varphi_1(0) - a\mu_1(0) + a\varphi_0'(0),$$

то слабое решение будет непрерывным.

4. Применение полученных результатов к теории балок. Рассмотрим полубесконечную линейную упругую изотропную однородную балку постоянного сечения балку с постоянными параметрами: ρ — плотность материала балки, A — площадь сечения балки, E — модуль упругости, G — модуль сдвига, I — второй момент площади сечения, κ — коэффициент сдвига Тимошенко, $q(t,x)$ — распределенная нагрузка (сила, приложенная к единице длины), $m := \rho A$, $J := \rho I$.

Согласно теории Тимошенко (см. [21]) прогиб балки удовлетворяет в области $(t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ уравнению

$$\left(\frac{mJ}{\kappa AG}\partial_t^4 - \left(J + \frac{EIm}{\kappa AG}\right)\partial_t^2\partial_x^2 + EI\partial_x^4 + m\partial_x^2\right) w(t,x) = \left(1 + \frac{J}{\kappa AG}\partial_t^2 - \frac{EI}{\kappa AG}\partial_x^2\right) q(t,x),$$
$$(t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \quad (42)$$

где t — время, x — координата. Для корректного описания процесса колебаний балки уравнение (42) необходимо снабдить начальными и граничными условиями. В качестве начальных условий можно выбрать

$$w(0,x) = w_0(x), \quad \partial_t w(0,x) = w_1(x), \quad \partial_t^2 w(0,x) = \varphi_2(x), \quad \partial_t^3 w(0,x) = w_3(x), \quad x \in [0,\infty), \quad (43)$$

а граничные условия должны задаваться исходя из способа закрепления конца $x = 0$ балки. Предположим, что конец $x = 0$ балки жестко защемлен. Тогда приходим к граничным условиям (см. [21])
$$w(t,0) = 0, \quad \partial_x w(t,0) = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{44}$$
Заметим, что уравнение (42) можно представить в виде
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\kappa G}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(t,x) = \\ = \left(\frac{\kappa AG}{Jm} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{EI}{Jm}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) q(t,x) - \frac{\kappa AG}{J}\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t,x). \tag{45}$$
Оно является линейным уравнением вида (1). Следовательно, существование и единственность классического решения задачи (42)–(44) при определенных условиях гладкости и согласования может быть доказана с помощью теорем 3 и 11. Кроме того, используя теоремы 7 и 12, можно обосновать наличие слабого решения задачи (42)–(44). Полученные результаты является исчерпывающим решением начально-краевой задачи для защемленной полубесконечной балки в случае оператора Тимошенко, сформулированной в [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богатов А. В., Гилев А. В., Пулькина Л. С.* Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками// Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2022. — *27*, № 139. — С. 214–230.
2. *Гайдук С. И., Кулешов А. А.* Об одной смешанной задаче из теории колебаний балок// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2009. — № 1. — С. 47–51.
3. *Гилев А. В., Кечина О. М., Пулькина Л. С.* Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2021. — *27*, № 3. — С. 14–21.
4. *Корзюк В. И., Винь Н. В.* Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2016. — № 1. — С. 69–79.
5. *Корзюк В. И., Винь Н. В.* Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2017. — № 1. — С. 38–52.
6. *Корзюк В. И., Конопелько О. А., Чеб Е. С.* Граничные задачи для уравнений четвертого порядка гиперболического и составного типов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2010. — *36*. — С. 87–111.
7. *Корзюк В. И., Козловская И. С., Козлов А. И.* Задача Коши для нестрого гиперболического уравнения на полуплоскости с постоянными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 6. — С. 714–725.
8. *Корзюк В. И., Мандрик А. А.* Граничные задачи для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 2. — С. 209–219.
9. *Корзюк В. И., Мандрик А. А.* Первая смешанная задача для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка в ограниченной области// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 788–802.
10. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2023. — *43*. — С. 48–63.
11. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое решение второй смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Диффер. уравн. — 2023. — *59*, № 9. — С. 1222–1239.
12. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое решение первой смешанной задачи в криволинейном квадранте для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Диффер. уравн. — 2023. — *59*, № 8. — С. 1070–1083.
13. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Диффер. уравн. — 2022. — *58*, № 2. — С. 174–184.
14. *Корзюк В. И., Столярчук И. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 77–88.
15. *Корзюк В. И., Чеб Е. С.* Смешанные задачи для биволнового уравнения// Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. — 2005. — № 1. — С. 63–68.

16. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Тху Л. Т.* Решение первой смешанной задачи для нестрого биволнового уравнения// Докл. НАН Беларуси. — 2011. — *55*, № 4. — С. 5–13.
17. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — Москва: Наука, 1978.
18. *Треногин В. А.* Глобальная обратимость нелинейных операторов и метод продолжения по параметру// Докл. РАН. — 1996. — *350*, № 4. — С. 455–457.
19. *Buryachenko K. O.* Solvability of inhomogeneous boundary-value problems for fourth-order differential equations// Ukr. Math. J. — 2012. — *63*, № 8. — P. 1165–1175.
20. *Fushchych W. I., Roman O. V., Zhdanov R. Z.* Symmetry reduction and some exact solutions of nonlinear biwave equations// Repts. Math. Phys. — 1996. — *37*, № 2. — P. 267–281.
21. *Harrevelt S. D.* Eigenvalue Analysis of the Timoshenko Beam Theory with a Damped Boundary Condition. — Delft: Tech. Univ. Delft, 2012.
22. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* On one boundary-value problem for a nonlinear equation with the iterated wave operator in the principal part// Georgian Math. J. — 2008. — *15*, № 3. — P. 541–554.
23. *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Cauchy Problem for a Semilinear Nonstrictly Hyperbolic Equation on a Half-Plane in the Case of a Single Characteristic. — ResearchGate, 2023.
24. *Ortner N., Wagner P.* Solution of the initial-boundary-value problem for the simply supported semi-infinite Timoshenko beam// J. Elast. — 1996. — *42*. — P. 217–241.
25. *Sitnik S. M., Shakhobiddin T. K.* Solution of the Goursat problem for a fourth-order hyperbolic equation with singular coefficients by the method of transmutation operators// Mathematics. — 2023. — *11*, № 4. — 951.
26. *Trenogin V. A* Invertibility of nonlinear operators and parameter continuation method// in: Spectral and Scattering Theory (*Ramm A. G.*, ed.). — Boston: Springer, 1998. — P. 189–197.
27. *Utkina E. A.* Dirichlet problem for a fourth-order equation// Differ. Equations. — 2011. — *47*, № 4. — P. 599–603.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075-15-2022-284).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Корзюк Виктор Иванович (Korzyuk Viktor Ivanovich)
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь;
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
(Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus;
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)
E-mail: `korzyuk@bsu.by`

Рудько Ян Вячеславович (Rudzko Jan Viaczaslavavicz)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь;
(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)
E-mail: `janycz@yahoo.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 57–67
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-57-67

УДК 517.587, 519.622

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. **В. Г. КУРБАТОВ, Е. Д. ХОРОШИХ, В. Ю. ЧУРСИН**

Аннотация. Рассматривается уравнение $\ddot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с матричным коэффициентом A. Это уравнение имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение x при любом непрерывном ограниченном свободном члене f тогда и только тогда, когда спектр матрицы A не пересекает полуось $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$. Решение x при этом задается формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)\,ds, \quad G(t) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1}.$$

Обсуждается задача приближенного нахождения функции Грина $G(t)$ с помощью разложения её в ряд Лагерра. Подбирается значение параметра масштабирования τ многочленов Лагерра, обеспечивающее наибольшую точность.

Ключевые слова: многочлены Лагерра, ортогональные ряды, функция Грина, задача об ограниченных решениях, оптимизация, параметр масштабирования.

APPLYING LAGUERRE'S FUNCTIONS FOR APPROXIMATE CALCULATION OF GREEN'S FUNCTION OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

© 2024 **V. G. KURBATOV, E. D. KHOROSHIKH, V. YU. CHURSIN**

Abstract. We consider the equation $\ddot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, with the matrix coefficient A. This equation has a unique solution x, which is bounded on $\mathbb{R}$, for any continuous bounded inhomogeneity f if and only if the spectrum of the matrix A does not intersect the semi-axis $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$. In this case, the solution x is defined by the formula

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)\,ds, \quad G(t) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1}.$$

We discuss the problem of approximate calculation of Green's function $G(t)$ using its expansion into Laguerre's series. The scale parameter τ in Laguerre's polynomials is chosen to ensure the highest accuracy.

Keywords and phrases: Laguerre's polynomials, orthogonal series, Green's function, bounded solutions problem, optimization, scale parameter.

AMS Subject Classification: 65F60, 33C45, 97N50

Введение. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) - Ax(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

с комплексным матричным коэффициентом A размера $M \times M$. *Задачей об ограниченных решениях* для этого уравнения называют задачу о нахождении ограниченного на $\mathbb{R}$ решения x при условии, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^M$ непрерывна и ограничена (см. [3–5, 9, 11]). Задача об ограниченных решениях является разновидностью краевых задач — краевые условия заключаются в ограниченности решения на $\pm\infty$.

Предположим, что спектр $\sigma(A)$ матрицы A не пересекает множество $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$. В этом случае (теорема 4) при любой непрерывной ограниченной f задача об ограниченных решениях имеет единственное ограниченное решение, и это решение задается формулой

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,ds,$$

где

$$G(t) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1},$$

а знак $\sqrt{}$ означает главное значение корня, определенное на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ и принимающее значения в правой комплексной полуплоскости.

Таким образом, решение задачи об ограниченных решениях сводится к нахождению *функции Грина* G. Очевидно, $G(-t) = G(t)$. Поэтому достаточно найти только $G(t)$ при $t \geqslant 0$.

Даже при небольших значениях порядка M матрицы A вычислить функцию Грина можно только приближенно. Желательно найти приближение функции Грина G в виде аналитического выражения, зависящего от t (а не только ее значения на некотором достаточно густом дискретном множестве). Точная функция Грина G представляет собой матрицу, состоящую из M^2 элементов, каждый из которых является линейной комбинацией из M функций типа $t \mapsto e^{-\sqrt{\lambda_k}|t|}$, где λ_k — собственные значения матрицы A.

В настоящей работе приближение к G ищется в виде

$$G_{N,\tau,A}(t) = \sum_{n=0}^{N} Q_{n,\tau,A}\, l_{n,\tau}(t), \quad t \geqslant 0,$$

где N — небольшое натуральное число, $Q_{n,\tau,A}$ — некоторые постоянные матричные коэффициенты, называемые *коэффициентами Лагерра*, а функции (зависящие от параметра $\tau > 0$)

$$l_{n,\tau}(t) = \sqrt{\tau}\, e^{-\frac{\tau t}{2}} L_n(\tau t), \quad t \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

называемые *функциями Лагерра*, представляют собой дополненные экспоненциальным весом *многочлены Лагерра* (см. [8, 10, 14, 15]):

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\big(t^n e^{-t}\big)^{(n)}, \quad t \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Известно, что функции Лагерра $l_{n,\tau}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\infty)$. Поэтому разложение функции Грина в ряд по функциям Лагерра заведомо существует.

Понятно, что скорость сходимости ряда Лагерра к функции G может зависеть от параметра масштабирования (сжатия-растяжения) τ. Основной задачей настоящей статьи является нахождение значения τ, обеспечивающего точность, близкую к максимально возможной. Ранее задача нахождения τ, обеспечивающего максимальную скорость сходимости, изучалась в [7, 12, 16, 18, 19, 21–23]. Во всех этих работах (за исключением [16]) речь шла о разложении в ряд Лагерра импульсной характеристики. Некоторые идеи из [12, 18, 19, 21–23] использованы в настоящей работе. В [16] рассматривалась задача об ограниченных решениях для уравнения первого порядка и использовался другой метод нахождения коэффициентов.

В разделе 1 приведены некоторые сведения о функциях от матриц. В разделе 2 описан основной объект исследования — дифференциальное уравнение второго порядка (3) — и явная формула для функции Грина задачи об ограниченных решениях. В разделе 3 определены функции Лагерра как многочлены Лагерра с экспоненциальным весом, зависящие от параметра масштабирования τ, и описана общая идея разложения функции Грина в ряд по функциям Лагерра. В разделе 4 выведены вычислительные формулы для коэффициентов разложения функции Грина в ряд по функциям Лагерра. В разделе 5 проведено обсуждение основных свойств вспомогательной функции ξ, представляющей собой основную часть оценки точности приближения функции Грина частичной суммой ряда Лагерра. В разделе 6 приведена оценка точности приближения функции Грина частичной суммой ряда Лагерра, а в разделе 7 — алгоритм нахождения τ, обеспечивающего наибольшую точность приближения. В разделе 8 описаны результаты численного эксперимента.

1. Функциональное исчисление. Пусть $M \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathbb{C}^{M\times M}$ линейное пространство всех комплексных матриц размера $M \times M$; $\mathbf{1} \in \mathbb{C}^{M\times M}$ означает единичную матрицу.

Для матрицы $C = \{C_{ij}\} \in \mathbb{C}^{M\times M}$ обозначим через $\|C\|_{2\to 2}$ норму, индуцированную евклидовой нормой на $\mathbb{C}^M$, а через

$$\|C\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} |C_{ij}|^2} \tag{1}$$

— норму Фробениуса. Легко показать, что

$$\|AB\|_F \leqslant \|A\|_{2\to 2}\cdot\|B\|_F, \quad \|AB\|_F \leqslant \|A\|_F\cdot\|B\|_{2\to 2}, \quad \|A\|_{2\to 2} \leqslant \|A\|_F.$$

Обозначим через $\sigma(C)$ спектр матрицы C.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{M\times M}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее спектр $\sigma(A)$ матрицы A, $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Результатом применения функции f к матрице A называют матрицу

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\,(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}\,d\lambda,$$

где Γ лежит в U и окружает $\sigma(A)$ (см. [6, 13, 20]). Наиболее важным для приложений примером функции f является функция $\exp_t(\lambda) = e^{\lambda t}$. Результат ее применения к матрице A обозначают символом $\exp_t(A)$ или e^{At}. Известно (см. [1, 6, 20]), что экспоненциальная функция обладает следующими свойствами:

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}, \quad \bigl(e^{At}\bigr)' = Ae^{At}, \quad e^{A\cdot 0} = \mathbf{1}.$$

Предложение 1 (см. [4, с. 43], [6, теорема 11.35])**.** *Пусть*

$$\beta = \max\bigl\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\bigr\}.$$

Тогда для любого $\gamma > \beta$ найдется такое K, что

$$\|e^{At}\| \leqslant K\,e^{\gamma t}, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Обратно, если для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ выполняется оценка (2) (*с некоторым K*), *то $\beta \leqslant \gamma$.*

Предложение 2 (теорема об отображении спектра [13, теорема 10.28])**.** *Для любых A и f выполняется соотношение*

$$\sigma\bigl(f(A)\bigr) = \bigl\{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\bigr\}.$$

Предложение 3. *Пусть функция g является аналитической в окрестности $\sigma(A)$, а f является аналитической в окрестности $g\bigl(\sigma(A)\bigr)$. (В этом случае, очевидно, композиция $f\circ g$ определена и аналитична в окрестности $\sigma(A)$.) Тогда матрица $\bigl(f\circ g\bigr)(A)$ совпадает с функцией f от матрицы $g(A)$:*

$$f\bigl(g(A)\bigr) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\nu)\bigl(\nu\mathbf{1} - g(A)\bigr)^{-1}\,d\nu,$$

где контур Γ окружает $\sigma\bigl(g(A)\bigr)$.

Доказательство. Для контура Γ_1, окружающего спектр матрицы A, имеем

$$\big(f\circ g\big)(A)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} f\big(g(\lambda)\big)(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\nu)}{\nu-g(\lambda)}\,d\nu\bigg)(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\nu)\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}}{\nu-g(\lambda)}\,d\lambda\bigg)\,d\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\nu)\big(\nu\mathbf{1}-g(A)\big)^{-1}\,d\nu=f\big(g(A)\big).\quad\square$$

2. Функция Грина. Настоящая работа посвящена представлению решения задачи об ограниченных решениях для дифференциального уравнения $\ddot{x}(t)-Ax(t)=f(t)$. В теореме 4 (см. ниже) приводится точная формула для ее решения.

Обозначим через $C=C\big(\mathbb{R},\mathbb{C}^M\big)$ линейное пространство всех непрерывных ограниченных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^M$, а через $C^2=C^2\big(\mathbb{R},\mathbb{C}^M\big)$ — линейное пространство всех дважды непрерывно дифференцируемых функций x, для которых $x,\dot{x},\ddot{x}\in C$.

Теорема 4 (см. [17]). *Пусть $A\in\mathbb{C}^{M\times M}$, причем спектр A не пересекает отрицательную действительную полуось*

$$\mathbb{R}_-=\big\{z\in\mathbb{R}:z\leqslant 0\big\}.$$

Тогда для любой функции $f\in C$ уравнение

$$\ddot{x}(t)-Ax(t)=f(t),\quad t\in\mathbb{R},\tag{3}$$

имеет единственное решение $x\in C^2$, которое задается формулой

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(t-s)f(s)\,ds,\tag{4}$$

где

$$G(t)=-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1}.\tag{5}$$

Здесь символом $\sqrt{}$ обозначено главное значение корня, определенное на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ и принимающее значения в открытой правой комплексной полуплоскости.

Функцию G называют *функцией Грина* задачи об ограниченных решениях.

Очевидно, $G(-t)=G(t)$. Поэтому для построения полной функции Грина G достаточно найти лишь $G(t)$ при $t\geqslant 0$. Мы будем заниматься приближенным вычислением $G(t)$ при $t\geqslant 0$, и использовать обозначение

$$G_A(t)=-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}t}(\sqrt{A})^{-1},\quad t\geqslant 0.$$

3. Функции Лагерра. *Многочленами Лагерра* (см. [14, 15]) функции

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\big(t^ne^{-t}\big)^{(n)},\quad t\geqslant 0,\quad n=0,1,\dots.$$

Очевидно, функции L_n действительно являются многочленами степени n. Известно (см. [8, с. 59], [10, § 8]), что многочлены L_n образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\infty)$ относительно весовой функции $t\mapsto e^{-t}$:

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-t}L_n(t)\,L_m(t)\,dt=\delta_{nm},\quad n,m=0,1,\dots,$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Пусть $\tau>0$ — произвольное число; оно играет роль масштаба времени. Функции

$$l_{n,\tau}(t)=\sqrt{\tau}\,e^{-\frac{\tau}{2}t}L_n(\tau t),\quad t\geqslant 0,\quad n=0,1,\dots,\tag{6}$$

будем называть *функциями Лагерра.* Очевидно, они образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\infty)$ без веса:

$$\int_0^\infty l_{n,\tau}(t)\, l_{m,\tau}(t)\, dt = \delta_{nm}, \quad n,m = 0,1,\dots.$$

Поскольку функции Лагерра (6) образуют ортонормированный базис в $L_2[0,\infty)$, функцию Грина G_A можно разложить в сходящийся по норме L_2 *ряд Лагерра*

$$G_A = \sum_{n=0}^\infty Q_{n,\tau,A}\, l_{n,\tau}.$$

Коэффициенты

$$Q_{n,\tau,A} = \int_0^\infty G_A(t)\, l_{n,\tau}(t)\, dt \tag{7}$$

будем называть *коэффициентами Лагерра.* Будем использовать N-ю частичную сумму

$$G_{N,\tau,A}(t) = \sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,A}\, l_{n,\tau}(t) \tag{8}$$

ряда Лагерра с небольшим N (значительно меньшим M) для приближения G_A. Функции Лагерра выбраны для приближения G_A, поскольку элементы матрицы (5) представляют собой линейные комбинации экспоненциальных функций $t \mapsto e^{-\sqrt{\lambda_k}|t|}$, где λ_k — собственные значения матрицы A, умноженных на многочлены, а функции Лагерра (6) имеют похожий вид. Конечно, показатели λ_k и $\tau/2$ не совпадают. Но у нас есть возможность брать $\tau > 0$ по своему усмотрению. Следует ожидать, что чем лучше $\tau/2$ приближает λ_k в некотором среднем смысле, тем быстрее ряд Лагерра сходится к функции G_A.

Целью работы является нахождение τ, для которого точность (при заданном N)

$$\big\|G_A - G_{N,\tau,A}\big\|_{L_2[0,\infty)} = \sqrt{\int_0^\infty \big\|G_A(t) - G_{N,\tau,A}(t)\big\|_F^2\, dt}$$

является близкой к наименьшей возможной и которое тем самым целесообразно использовать для приближения функции Грина частичной суммой (8) ряда Лагерра.

4. Вычисление коэффициентов Лагерра. Для $\lambda \notin \mathbb{R}_-$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$g_\lambda(t) = -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad t > 0,$$

где корень понимается в смысле главного значения (см. формулировку теоремы 4). Отметим, что значение функции Грина G_A при $t \geqslant 0$ можно понимать не только как функцию $\lambda \mapsto -e^{-\lambda t}\lambda$ от $\sqrt{A}$ (как мы делали ранее), но и (в силу предложения 3) как функцию $g_A(t)$.

Обозначим через $q_{n,\tau,\lambda}$ коэффициенты Лагерра функции g_λ в ортонормированном базисе $l_{n,\tau}$:

$$q_{n,\tau,\lambda} = \int_0^\infty g_\lambda(t)\, l_{n,\tau}(t)\, dt, \quad \lambda \notin \mathbb{R}_-. \tag{9}$$

Предложение 5. *Пусть $\lambda \notin \mathbb{R}_-$. Тогда*

$$q_{n,\tau,\lambda} = -\frac{\sqrt{\tau}(2\sqrt{\lambda} - \tau)^n}{\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda} + \tau)^{n+1}}, \quad n = 0,1,\dots.$$

Доказательство сводится к прямым, но длинным вычислениям (см. [7]). □

Следствие 6. *Пусть* $\lambda \notin \mathbb{R}_-$. *Тогда*

$$\overline{q_{n,\tau,\lambda}} = q_{n,\tau,\bar{\lambda}},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Доказательство. Напомним, что $\tau > 0$, а $\sqrt{}$ означает главное значение корня (см. определение в формулировке теоремы 4), в силу чего $\overline{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\bar{\lambda}}$. Дальнейшее ясно из предложения 5. $\square$

Следствие 7. *Пусть* $\lambda \notin \mathbb{R}_-$. *Тогда коэффициенты* (9) *могут быть вычислены рекуррентно*:

$$q_{0,\tau,\lambda} = -\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda}+\tau)}, \quad q_{n+1,\tau,\lambda} = \frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\, q_{n,\tau,\lambda}.$$

Доказательство вытекает из предложения 5. $\square$

Следствие 8. *Пусть спектр матрицы* $A \in \mathbb{C}^{M\times M}$ *не пересекается с* $\mathbb{R}_-$. *Тогда коэффициенты* (7) *могут быть вычислены рекуррентно*:

$$Q_{0,\tau,A} = -\sqrt{\tau}\big(\sqrt{A}\big)^{-1}(2\sqrt{A}+\tau\mathbf{1})^{-1}, \quad Q_{n+1,\tau,A} = (2\sqrt{A}-\tau\mathbf{1})(2\sqrt{A}+\tau\mathbf{1})^{-1}\, Q_{n,\tau,A}. \tag{10}$$

Доказательство. В силу формулы (5) имеем

$$G_A(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma g_\lambda(t)\,(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda.$$

Отсюда и из формулы (7) видно (см. [2, теорема 10.9′]), что

$$Q_{n,\tau,A} = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma g_\lambda(t)\,(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda\Big)\, l_{n,\tau}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\int\limits_0^\infty g_\lambda(t)\,l_{n,\tau}(t)\,dt\right)(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma q_{n,\tau,\lambda}\,(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda.$$

Остается сослаться на следствие 7. $\square$

Предлагается вычислять *коэффициенты Лагерра* $Q_{n,\tau,A}$ с помощью следствия 8. Матрицу $\sqrt{A}$ удобно вычислить заранее, например, по одному из алгоритмов, описанных в [20], или встроенной командой `MatrixPower` пакета Mathematica (см. [24]). После того, как матрицы $Q_{n,\tau,A}$ вычислены, можно построить приближение (8). Подчеркнем, что $G_{N,\tau,A}$ — функция переменной t.

5. Функция ξ.

Для $\lambda \notin \mathbb{R}_-$ и $N \in \mathbb{N}$ обозначим через $\xi(N,\tau,\lambda)$ квадрат точности приближения функции g_λ ее N-й частичной суммой ряда Лагерра по L_2-норме:

$$\xi(N,\tau,\lambda) = \int\limits_0^\infty \Big|g_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\, l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt. \tag{11}$$

Данную формулу можно переписать в виде

$$\xi(N,\tau,\lambda) = \Big\|g_\lambda - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\, l_{n,\tau}\Big\|_{L_2}^2 = \Big\|\sum_{n=N+1}^\infty q_{n,\tau,\lambda}\, l_{n,\tau}\Big\|^2 = \sum_{n=N+1}^\infty |q_{n,\tau,\lambda}|^2. \tag{12}$$

Предложение 9. *Пусть* $\lambda \notin \mathbb{R}_-$. *Тогда*

$$\xi(N,\tau,\lambda) = \frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{|2\sqrt{\lambda}+\tau|^2 - |2\sqrt{\lambda}-\tau|^2}\cdot\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2N+2}.$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 5, равенством (12) и формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\xi(N,\tau,\lambda)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|q_{n,\tau,\lambda}\right|^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\tau|2\sqrt{\lambda}-\tau|^{2n}}{|\lambda|\cdot|2\sqrt{\lambda}+\tau|^{2n+2}}=$$

$$=\frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{(2\lambda+\tau)^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2n}=\frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{(2\lambda+\tau)^2}\left(\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2N+2}\Bigg/\left(1-\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^2\right)\right)=$$

$$=\frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{|2\sqrt{\lambda}+\tau|^2-|2\sqrt{\lambda}-\tau|^2}\cdot\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2N+2}. \quad \square$$

Аналог следующего утверждения впервые был получен в [18, 19]. Основные этапы доказательства рассматриваемого варианта можно найти в [21, следствие 7].

Предложение 10. *Для производной функции* (11) *справедливо представление*

$$\frac{\partial\xi(N,\tau,\lambda)}{\partial\tau}=-2d_{N+1}\,\mathrm{Re}\big(q_{N+1,\tau,\lambda}\,q_{N,\tau,\bar{\lambda}}\big),$$

где $d_n=n/(2\tau)$, *а* Re — *операция взятия действительной части комплексного числа.*

6. Оценка точности. Цель этого раздела — получить оценку $\left\|G_A-G_{N,\tau,A}\right\|_{L_2[0,\infty)}$. В этом разделе и далее мы используем в $\mathbb{C}^{M\times M}$ норму Фробениуса (1).

Рассмотрим вначале случай, когда матрица A является диагональной.

Предложение 11. *Пусть* $D\in\mathbb{C}^{M\times M}$ — *диагональная матрица с диагональными элементами* $\lambda_k\notin\mathbb{R}_-$, $k=1,2,\dots,M$. *Тогда для величины*

$$\left\|G_D-G_{N,\tau,D}\right\|_{L_2[0,\infty)}=\sqrt{\int_0^\infty\left\|G_D(t)-G_{N,\tau,D}(t)\right\|_F^2\,dt}$$

справедлива оценка

$$\left\|G_D-G_{N,\tau,D}\right\|_{L_2[0,\infty)}=\sqrt{\sum_{k=1}^{M}\xi(N,\tau,\lambda_k)}\leqslant\sqrt{M\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k)},$$

где ξ — *функция* (11).

Доказательство. Согласно предположению матрица D имеет вид

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&\lambda_M\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad G_D(t)=\begin{pmatrix}g_{\lambda_1}(t)&0&\dots&0\\0&g_{\lambda_2}(t)&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&g_{\lambda_M}(t)\end{pmatrix}$$

и

$$G_{N,\tau,D}(t)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{n=0}^{N}q_{n,\tau,\lambda_1}\,l_{n,\tau}(t)&0&\dots&0\\0&\sum\limits_{n=0}^{N}q_{n,\tau,\lambda_2}\,l_{n,\tau}(t)&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&\sum\limits_{n=0}^{N}q_{n,\tau,\lambda_M}\,l_{n,\tau}(t)\end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу определения нормы Фробениуса,

$$\big\|G_D(t)-G_{N,\tau,D}(t)\big\|_F^2=\sum_{k=1}^M\Big|g_{\lambda_k}(t)-\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda_k}\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2.$$

В результате имеем

$$\sqrt{\int_0^\infty\big\|G_D(t)-G_{N,\tau,D}(t)\big\|_F^2\,dt}=\sqrt{\int_0^\infty\sum_{k=1}^M\Big|g_{\lambda_k}(t)-\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda_k}\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt}=$$

$$=\sqrt{\sum_{k=1}^M\int_0^\infty\Big|g_{\lambda_k}(t)-\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda_k}\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt}=\sqrt{\sum_{k=1}^M\xi(N,\tau,\lambda_k)}.$$

Покажем, что выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^M\xi(N,\tau,\lambda_k)\leqslant M\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k).$$

Положим $a_k=\xi(N,\tau,\lambda_k)$ и $b=\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k)$. Для этих чисел имеем

$$a_1\leqslant b,\quad a_2\leqslant b,\quad \dots,\quad a_k\leqslant b,\quad \dots,\quad a_M\leqslant b,$$
$$a_1+a_2+\dots+a_k+\dots+a_M\leqslant Mb,$$

что является другой формой записи нашей оценки. □

Предположим, что матрица A *диагонализуема*; это значит, что существуют такие обратимая матрица T и диагональная матрица D, что $A=TDT^{-1}$. Очевидно, диагональные элементы матрицы D являются собственными значениями матрицы A, а столбцы матрицы T — соответствующими собственными векторами. Ясно, что для диагонализуемой матрицы A

$$G_A(t)=TG_D(t)T^{-1},\qquad t\geqslant 0,$$
$$G_{N,\tau,A}(t)=\sum_{n=0}^N TQ_{n,\tau,D}T^{-1}\,l_{n,\tau}(t),\qquad t\geqslant 0.$$

Теорема 12. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{M\times M}$ и $\lambda_k\notin\mathbb{R}_-$, $k=1,2,\dots,M$, — собственные значения A. Тогда имеет место оценка снизу*

$$\sqrt{\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k)}\leqslant\|G_A-G_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)},\tag{13}$$

а при условии, что A диагонализуема, — оценка сверху

$$\|G_A-G_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)}\leqslant\varkappa(T)\sqrt{\sum_{k=1}^M\xi(N,\tau,\lambda_k)}\leqslant\varkappa(T)\sqrt{M\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k)},\tag{14}$$

где $\varkappa(T)=\|T\|_{2\to2}\cdot\|T^{-1}\|_{2\to2}$ — число обусловленности матрицы T, а ξ — функция (11).

Доказательство. Пусть λ — собственное значение матрицы A и v — соответствующий нормированный собственный вектор. Поскольку $G_A(t)$ и $Q_{n,\tau,\lambda}$ — функции $\lambda\mapsto q_\lambda(t)$ и $\lambda\mapsto q_{n,\tau,\lambda}$ от матрицы A соответственно, то v — собственный вектор матриц $G_A(t)$ и $Q_{n,\tau,\lambda}$, соответствующий собственным числам $g_\lambda(t)$ и $q_{n,\tau,\lambda}$:

$$G_A(t)v=q_\lambda(t)v,\quad G_{N,\tau,A}(t)v=\Big(\sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}(t)\Big)v=\Big(\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}(t)\Big)v.$$

Отсюда

$$\big\|G_A - G_{N,\tau,A}\big\|_{L_2} \geqslant \big\|(G_A - G_{N,\tau,A})v\big\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_0^\infty \big\|\big(G_A(t) - G_{N,\tau,A}(t)\big)v\big\|^2\,dt} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_0^\infty \Big\|\Big(q_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}(t)\Big)v\Big\|^2\,dt} = \sqrt{\int\limits_0^\infty \Big|q_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}(t)\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2 \cdot \|v\|^2\,dt} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_0^\infty \Big|q_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}(t)\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt} = \sqrt{\xi(N,\tau,\lambda)}.$$

Из этого неравенства следует оценка (13). Оценка (14) вытекает из предложения 11 и неравенства

$$\big\|TBT^{-1}\big\|_F \leqslant \big\|T\big\|_{2\to2}\cdot\big\|B\big\|_F\cdot\big\|T^{-1}\big\|_{2\to2} = \varkappa(T)\cdot\big\|B\big\|_F.$$

Действительно, имеем

$$\big\|G_A - G_{N,\tau,A}\big\|_{L_2[0,\infty)} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_0^\infty \big\|G_A(t) - G_{N,\tau,A}(t)\big\|_F^2\,dt} = \sqrt{\int\limits_0^\infty \Big\|TG_D(t)T^{-1} - \sum_{n=0}^N TQ_{n,\tau,D}T^{-1}\,l_{n,\tau}(t)\Big\|_F^2\,dt} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_0^\infty \|T\|_{2\to2}^2\cdot\|T^{-1}\|_{2\to2}^2\cdot\Big\|G_D(t) - \sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,D}\,l_{n,\tau}(t)\Big\|_F^2\,dt} =$$

$$= \varkappa(T)\sqrt{\int\limits_0^\infty \Big\|G_D(t) - \sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,D}\,l_{n,\tau}(t)\Big\|_F^2\,dt} = \varkappa(T)\cdot\big\|G_D - G_{N,\tau,D}\big\|_{L_2[0,\infty)} = \varkappa(T)\sqrt{\sum_{k=1}^M \xi(N,\tau,\lambda_k)}.$$

Теорема доказана. □

7. Алгоритм выбора τ. Рассмотрим функцию

$$\rho(N,\tau) = \sum_{k=1}^M \xi(N,\tau,\lambda_k), \tag{15}$$

где λ_k — собственные значения матрицы A, а $\xi(N,\tau,\lambda_k)$ вычисляются с помощью предложения 9. Точка минимума τ_0 функции $\rho(N,\cdot)$ легко находится численно. Мы рекомендуем взять τ_0 в качестве оптимального значения τ, а соответствующее значение $\sqrt{\rho_0}$ использовать для получения оценки величины $\big\|G_A - G_{N,\tau_0,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}$ в соответствии с теоремой 12. Если величина точности $\big\|G_A - G_{N,\tau_0,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}$ недостаточна, число N слагаемых ряда Лагерра можно увеличить. Также легко вычислить $\max\limits_k \sqrt{\xi(N,\tau,\lambda_k)}$, после чего это число также можно использовать для оценок в соответствии с теоремой 12.

Подчеркнем, что мы находим τ, обеспечивающее не минимум $\big\|G_A - G_{N,\tau_0,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}$, а лишь минимум оценки (14), имеющей место при условии, что матрица A диагонализуема.

Формула из предложения 10 для $\partial\xi(N,\tau)/\partial\tau$ существенно упрощает поиск минимума. Кроме того, она позволяет численно убедиться в том, что (при фиксированном N) функция $\tau \mapsto \partial\rho(N,\tau)/\partial\tau$ является строго возрастающей. Таким образом, минимум у функции $\rho(N,\cdot)$ единственный.

8. Численный эксперимент. Вычисления проводились с помощью пакета Mathematica (см. [24]).

Создадим матрицу A размера $M\times M$, состоящую из случайных комплексных чисел, равномерно распределенных в $[-10,10]\times[-10i,10i]$. Поскольку элементы матрицы являются случайными числами, вероятность того, что ее спектр пересекает множество $\mathbb{R}_-$, равна нулю. Тем самым мы попадаем в условия теоремы 4. По тем же соображениям равна нулю вероятность получения кратных собственных значений. Поэтому условия теоремы 12 можно считать выполненными.

Вначале возьмем $M=10$. Вычислим с помощью пакета Mathematica собственные значения и собственные векторы матрицы A и сформируем матрицу T, приводящую A к диагональному виду. Далее вычислим матрицу $G_A(t)$ в виде аналитического выражения, зависящего от параметра t. Возьмем $N=8$ и сформируем выражение $\xi(N,\tau,\lambda)$ в соответствии с формулой из предложения 9. Затем сформируем функцию ρ в соответствии с формулой (15) (собственные значения и собственные векторы матрицы A даже для больших M легко и с большой точностью находятся с помощью QR-алгоритма, встроенного в команду `Eigensystem` пакета Mathematica). Найдем точку τ_0, в которой ρ достигает минимального значения и дальнейшие вычисления будем проводить с этим значением τ. Значение ρ в точке минимума также запомним и обозначим его через ρ_0.

Вычислим коэффициенты Лагерра по формулам (10) и сформируем матрицу $G_{N,\tau,A}(t)$, зависящую от параметра t, по формуле (8). Поскольку M и N невелики, удается вычислить

$$\big\|G_A-G_{N,\tau_0,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}=\sqrt{\int\limits_0^\infty\big\|G_A(t)-G_{N,\tau_0,A}(t)\big\|_F^2\,dt}.$$

Согласно теореме 12 справедлива оценка

$$\big\|G_A-G_{N,\tau,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}\leqslant\varkappa(T)\sqrt{\rho_0}.$$

Вычислим ее левую и правую части:

$$0{,}0282817\leqslant 0{,}10984.$$

Мы видим, что зазор в этой оценке небольшой. Повторение эксперимента приводит к похожей величине зазора.

Возьмем теперь $M=200$ и $N=20$. Выполним на этот раз только часть предыдущих вычислений, необходимую для нахождения $\varkappa(T)$ и ρ_0 (остальные вычисления, например, нахождение матрицы $G_A(t)$ в виде формулы, зависящей от параметра t, провести не удается из-за большого значения M). Вычисления показывают, что оценка $\varkappa(T)\sqrt{\rho_0}$ обычно находится в промежутке [0,01; 0,3]. Построение приближения (8) для $M=200$ проходит достаточно быстро.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А. В., Перов А. И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.–Ижевск: РХД, 2004.
2. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1967.
3. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. — Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1994.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Курбатов В. Г., Курбатова И. В.* Вычислительные методы спектральной теории. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2022.
7. *Курбатов В. Г., Хороших Е. Д.* Применение функций Лагерра для вычисления импульсной характеристики// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2024. — № 1. — С. 39–49.
8. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.-Л.: ГИФМЛ, 1963.
9. *Левитан Б. П., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
10. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1985.

11. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.
12. *Прохоров С. А., Куликовских И. М.* Условие оптимальности фильтров Мейкснера// Ж. радиоэлектрон. — 2015. — № 4. — С. 1–14.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
14. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. — М.-Л.: ГИФМЛ, 1962.
15. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979.
16. *Хороших Е. Д.* Разложение функции Грина задачи об ограниченных решениях в ряд по функциям Лагерра// Сб. тр. Межвуз. науч. конф. «Математика, информационные технологии, приложения» (Воронеж, 27 апреля 2023). — Воронеж: Научная книга, 2023. — С. 514–520.
17. *Чурсин В. Ю.* Функция Грина задачи об ограниченных решениях для дифференциального уравнения второго порядка// Вестн. ф-та прикл. мат., информ. мех. Воронеж. гос. ун-та. — 2024. — *17*. — С. 141–151.
18. *Belt H. J. W., den Brinker A. C.* Optimal parametrization of truncated generalized Laguerre series// Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (Munich, Germany, April 21-24, 1997). — Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1997. — Vol. 5. — P. 3805-3808.
19. *Clowes G. J.* Choice of the time-scaling factor for linear system approximation using orthonormal Laguerre functions// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — *10*. — P. 487–489.
20. *Higham N. J.* Functions of matrices: Theory and computation. — Philadelphia, PA: SIAM, 2008.
21. *Khoroshikh E. D., Kurbatov V. G.* An approximation of matrix exponential by a truncated Laguerre series/ `arXiv:2312.07291`.
22. *Moore G.* Orthogonal polynomial expansions for the matrix exponential// Linear Algebra Appl. — 2011. — *435*, № 3. — P. 537–559.
23. *Terekhov A. V.* Preconditioning for time-harmonic Maxwell's equations using the Laguerre transform/ `arXiv:2309.11023`.
24. *Wolfram S.* The Mathematica Book. — New York: Wolfram Media, 2003.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Курбатов Виталий Геннадьевич (Kurbatov Vitalii Gennadievich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `kv51@inbox.ru`

Хороших Евгения Дмитриевна (Khoroshikh Evgeniya Dmitrievna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `xoroshix2002@mail.ru`

Чурсин Виктор Юрьевич (Chursin Victor Yurievich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `4pupil@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 68–77
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-68-77

УДК 514.765

УРАВНЕНИЯ ВАЙНГАРТЕНА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ГРУППАХ ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ТИПА

© 2024 г. В. А. КЫРОВ

Аннотация. В данной статье изучаются поверхности на трехмерных группа Ли гельмгольцева типа, которые задают действия групп движений гельмгольцевых геометрий, являющихся геометриями локальной максимальной подвижности. В работе для этих групп Ли приводятся левоинвариантные метрики и связности Леви-Чивиты, которые были найдены ранее. Для поверхностей групп Ли гельмгольцева типа вычисляются порождающие их спиноры, которые удовлетворяют уравнениям Дирака и Вайнгартена. Выводятся также условия совместности для уравнений Вайнгартена.

***Ключевые слова*:** группа Ли, поверхность на группе Ли, уравнение Дирака, уравнение Вайнгартена, уравнение Кодацци.

WEINGARTEN EQUATIONS FOR SURFACES ON HELMHOLTZ-TYPE GROUPS

© 2024 V. A. KYROV

Abstract. In this paper, we study surfaces on three-dimensional Helmholtz-type Lie groups that define the actions of groups of motions of Helmholtz geometries, which are geometries of local maximal mobility. In this paper, we present left-invariant metrics and Levi-Civita connections for these Lie groups, which were found earlier. For surfaces of Helmholtz-type Lie groups, we calculate the spinors that generate them, which satisfy the Dirac and Weingarten equations. We also derive compatibility conditions for the Weingarten equations.

***Keywords and phrases*:** Lie group, surface on a Lie group, Dirac equation, Weingarten equation, Codazzi equation.

***AMS Subject Classification*:** 53C30

1. Введение. Г. Г. Михайличенко были найдены следующие геометрии локальной максимальной подвижности (см. [6, с. 54]):

псевдогельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = \frac{(y_1 - y_2)^\beta}{(x_1 - x_2)^\alpha}; \tag{1}$$

собственно гельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right] \exp\left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right); \tag{2}$$

дуально-гельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = (x_1 - x_2) \exp \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \tag{3}$$

причем $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, f — функция пары точек (аналог евклидова расстояния) плоскости $\mathbb{R}^2$, а $1 = (x_1, y_1)$ и $2 = (x_2, y_2)$ — точки этой плоскости.

Группы движений этих геометрий, т.е. преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$, сохраняющих функции (1)–(3), являются подгруппами аффинной группы плоскости и задаются соответственно следующими уравнениями (см. [2–4]):

$$x' = e^{\alpha a}x + b, \qquad y' = e^{\beta a}y + c; \tag{4}$$

$$x' = xe^{-\gamma a}\cos a - ye^{-\gamma a}\sin a + b, \qquad y' = xe^{-\gamma a}\sin a + ye^{-\gamma a}\cos a + c; \tag{5}$$

$$x' = e^{a}x + b, \qquad y' = -ae^{a}x + e^{a}y + c, \tag{6}$$

причем a, b, c — параметры групп движений.

1.1. Матричные группы Ли и их алгебры Ли. Группы движений (4)–(6) можно рассмотреть как результат эффективного действия следующих неунимодулярных матричных групп Ли:

$$G_1: \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$G_2: \begin{pmatrix} e^{-\gamma z}\cos z & -e^{-\gamma z}\sin z & x \\ e^{-\gamma z}\sin z & e^{-\gamma z}\cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$G_3: \begin{pmatrix} e^{z} & 0 & x \\ -ze^{z} & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где (x, y, z) — точка группы Ли, а α, β, γ — постоянные. Эти группы Ли в данной статье называются группами гельмгольцева типа. Заметим, что если в (7) допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то получится группа Sol (см. [1, 8, 9]).

Алгебры Ли групп Ли из списка (7)–(9) вычисляются просто. Их образующие e_1, e_2 и e_3 соответственно равны:

алгебра Ли AG_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

алгебра Ли AG_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\gamma & -1 & 0 \\ 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

алгебра Ли AG_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый коммутатор для всех трех алгебр Ли нулевой, а остальные различные:

$$AG_1: \quad [e_2, e_3] = -\beta e_2, \qquad [e_3, e_1] = \alpha e_1; \tag{10}$$

$$AG_2: \quad [e_2, e_3] = e_1 + \gamma e_2, \quad [e_3, e_1] = e_2 - \gamma e_1; \tag{11}$$

$$AG_3: \quad [e_2, e_3] = -e_2, \qquad [e_3, e_1] = e_1 - e_2. \tag{12}$$

Легко доказать неизоморфность и разрешимость этих алгебр Ли). Каждая из этих трех алгебр Ли является полупрямой суммой двумерного абелева радикала с образующими e_1 и e_2 и одномерной подалгебры с образующей e_3. Алгебры Ли AG_1–AG_3 изоморфны алгебрам Ли из классификации

Бианки трёхмерных вещественных алгебр Ли. Так, алгебра AG_1 изоморфна алгебре VI_a, $0 < |a| < 1$; для доказательства нужно перейти к новому базису

$$e_1 = \frac{1}{2}(f_2 + f_3), \quad e_2 = \frac{1}{2}(f_2 - f_3), \quad e_3 = \frac{\alpha}{a-1} f_1$$

при α и β разного знака и к базису

$$e_2 = \frac{1}{2}(f_2 + f_3), \quad e_1 = \frac{1}{2}(f_2 - f_3), \quad e_3 = \frac{\alpha}{a-1} f_1$$

при α и β одного знака. Алгебра AG_2 изоморфна алгебре VII_a, $a > 0$; для доказательства нужно перейти к новому базису

$$e_1 = f_3, \quad e_2 = f_2, \quad e_3 = -f_1$$

и ввести обозначение $\gamma = a$. Алгебра AG_3 изоморфна алгебре IV, в чем легко убедиться, перейдя к базису

$$e_1 = -f_2, \quad e_2 = f_3, \quad e_3 = f_1.$$

1.2. Левоинвариантные метрики. Левоинвариантные метрики для исследуемых групп Ли вычислены в [5]. Приведем результаты относительно ортонормированного базиса:

для группы G_1:

$$ds^2 = e^{-2\alpha z} dx^2 + e^{-2\beta z} dy^2 + e^{-(\alpha+\beta)z} dz^2;$$

для группы G_2:

$$ds^2 = e^{2\gamma z}(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

для группы G_3:

$$ds^2 = (1 + z^2)e^{-2z} dx^2 + 2ze^{-2z} dxdy + e^{-2z} dy^2 + e^{-2z} dz^2.$$

1.3. Связность Леви-Чивиты. Связность на группах Ли G_1, G_2 и G_3 также ранее была вычислена в [5]. Результаты вычислений следующие:

для группы G_1:

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_3, & \nabla_{e_1} e_2 = 0, & \nabla_{e_1} e_3 = -\alpha e_1, \\
\nabla_{e_2} e_1 = 0, & \nabla_{e_2} e_2 = \beta e_3, & \nabla_{e_2} e_3 = -\beta e_2, \\
\nabla_{e_3} e_1 = 0, & \nabla_{e_3} e_2 = 0, & \nabla_{e_3} e_3 = 0;
\end{array}$$

для группы G_2:

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{e_1} e_1 = -\gamma e_3, & \nabla_{e_1} e_2 = 0, & \nabla_{e_1} e_3 = \gamma e_1, \\
\nabla_{e_2} e_1 = 0, & \nabla_{e_2} e_2 = -\gamma e_3, & \nabla_{e_2} e_3 = \gamma e_2, \\
\nabla_{e_3} e_1 = e_2, & \nabla_{e_3} e_2 = -e_1, & \nabla_{e_3} e_3 = 0;
\end{array}$$

для группы G_3:

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{e_1} e_1 = e_3, & \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{1}{2} e_3, & \nabla_{e_1} e_3 = -e_1 + \frac{1}{2} e_2, \\
\nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_3, & \nabla_{e_2} e_2 = e_3, & \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2} e_1 - e_2, \\
\nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, & \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1, & \nabla_{e_3} e_3 = 0.
\end{array}$$

Заметим, что если в группе G_1 допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то её связность совпадет со связностью группы Sol (см. [1]).

2. Представление Вейерштрасса. Воспользуемся методом, предложенный И. А. Таймановым и апробированный в [1, 7].

Пусть G — одна из трёх групп Ли G_1, G_2, G_3. Обозначим через Σ поверхность, погруженную в G; пусть $f : \Sigma \to G$ — погружение, $z = x + iy$ — конформный параметр на Σ, $I = e^{2\varphi} dz d\bar{z}$ — индуцированная метрика.

Рассмотрим L-расслоение над Σ: $L \to E = f^{-1}(TG) \to \Sigma$ и дифференциал

$$d_A : \Omega^1(\Sigma; E) \to \Omega^2(\Sigma; E),$$

который действует на E-значных 1-формах следующим образом:

$$d_A\omega = d'_A\omega + d''_A\omega,$$

где

$$\omega = u\,dz + u^*\,d\bar{z}, \quad d'_A\omega = -\nabla_{\bar{\partial} f} u\,dz \wedge d\bar{z}, \quad d''_A\omega = \nabla_{\partial f} u^*\,dz \wedge d\bar{z}.$$

Тогда деривационные уравнения принимают вид:

$$d_A(df) = 0, \tag{13}$$

$$d_A(*df) = ie^{2\varphi} HN\,dz \wedge d\bar{z}, \tag{14}$$

где H — средняя кривизна, N — нормальный вектор, $*dz = -i\,dz$, $*d\bar{z} = i\,d\bar{z}$. Так как метрика левоинвариантна, то полагаем

$$\Psi = f^{-1}\partial f, \quad \Psi^* = f^{-1}\bar{\partial} f.$$

В результате деривационные уравнения принимают следующий вид:

$$\partial\Psi - \bar{\partial}\Psi^* + \nabla_\Psi \Psi^* - \nabla_{\Psi^*}\Psi = 0, \tag{15}$$

$$\partial\Psi + \bar{\partial}\Psi^* + \nabla_\Psi \Psi^* + \nabla_{\Psi^*}\Psi = e^{2\varphi} H f^{-1}(N). \tag{16}$$

Так как G — группа Ли, то в её алгебре Ли можно выбрать ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 по отношению к скалярному произведению в алгебре Ли. Тогда справедливо разложение:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k, \quad \Psi^* = \sum_{k=1}^{3} \bar{Z}_k e_k.$$

Равенства (15) и (16) записываются в виде

$$\sum_{j=1}^{3} (\partial\bar{Z}_j - \bar{\partial} Z_j) e_j + \sum_{j,k=1}^{3} (Z_j \bar{Z}_k - \bar{Z}_j Z_k) \nabla_{e_j} e_k = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \big(\partial\bar{Z}_j + \bar{\partial} Z_j\big) e_j + \sum_{j,k=1}^{3} \big(Z_j \bar{Z}_k + \bar{Z}_j Z_k\big) \nabla_{e_j} e_k =$$
$$= 2iH\Big[\big(\bar{Z}_2 Z_3 - \bar{Z}_3 Z_2\big) e_1 + \big(\bar{Z}_3 Z_1 - \bar{Z}_1 Z_3\big) e_2 + \big(\bar{Z}_1 Z_2 - \bar{Z}_2 Z_1\big) e_3\Big]. \tag{18}$$

В [1] доказано, что

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi^*, \Psi^* \rangle = 0, \quad \langle \Psi, \Psi^* \rangle = \frac{1}{2} e^{2\varphi}.$$

Это эквивалентно равенствам

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0, \quad |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + |Z_3|^2 = \frac{1}{2} e^{2\varphi}.$$

Из первого равенства вытекает:

$$Z_1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad Z_3 = \psi_1 \bar{\psi}_2. \tag{19}$$

Ниже нам понадобятся следующие формулы:

$$Z_1\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 Z_2 = -\frac{i}{2}\big(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4\big); \tag{20a}$$

$$Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1 Z_3 = \frac{i}{2}\big(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big); \tag{20b}$$

$$Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 Z_3 = -\frac{1}{2}\big(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big); \tag{20c}$$

$$Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 Z_3 = \frac{i}{2}\big(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big); \tag{20d}$$

$$Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 Z_3 = -\frac{1}{2}\big(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big); \tag{20e}$$

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = \frac{1}{2}\big(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4\big). \tag{20f}$$

С учетом последнего деривационные уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где U и V — потенциалы поверхности. Индуцированная метрика и левый сдвиг нормального вектора равны

$$I = e^{2\varphi}\,dz\,d\bar{z} = \big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)^2\,dz\,d\bar{z},$$

$$f^{-1}(N) = e^{-\varphi}\Big[i\big(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)e_1 - \big(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)e_2 + \big(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2\big)e_3\Big].$$

Пусть ψ определен на поверхности M с комплексным параметром z, $P \in M$. Подставим ψ в формулу (19) для компонент Z_1, Z_2, Z_3 вектора

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k = f^{-1}\partial f.$$

Затем решим линейное дифференциальное уравнение $f_z = f\Psi$ на группе G с начальным условием $f(P) = g \in G$. В результате получаем требуемую поверхность как отображение $f : M \to G$.

Дифференциал Хопфа равен

$$\omega = A\,dz^2, \quad A = \langle \nabla_{f_z} f_z, N\rangle.$$

Точные вычисления дают:

$$A = \langle \Psi_z, N\rangle + \left\langle \sum_{j,k=1}^{3} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \right\rangle = \Big(\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2\Big) + \left\langle \sum_{j,k=1}^{3} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \right\rangle. \tag{22}$$

Далее, воспользовавшись уравнениями Дирака, получим

$$\varphi_z e^{\varphi} = \bar{\psi}_1\partial\psi_1 + \psi_2\partial\bar{\psi}_2 + \big(\psi_1\partial\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2\partial\psi_2\big),$$

где согласно уравнению Дирака выражение в скобках записывается в виде

$$\psi_1\partial\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2\partial\psi_2 = (\bar{V} - U)\psi_1\bar{\psi}_2.$$

Вместе с формулой для дифференциала Хопфа будем иметь систему:

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \psi_2 \\ \bar{\psi}_2 & -\psi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial\psi_1 \\ \partial\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_z e^{\varphi} + (U - \bar{V})\psi_1\bar{\psi}_2 \\ A - \Big\langle \sum\limits_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \Big\rangle \end{pmatrix}.$$

3. Группа G_1. В уравнениях (17) и (18) воспользуемся связностью Леви-Чивиты группы G_1. Тогда

$$\partial\bar Z_1-\bar\partial Z_1-\alpha\big(Z_1\bar Z_3-\bar Z_1Z_3\big)=0, \tag{23a}$$
$$\partial\bar Z_2-\bar\partial Z_2-\beta\big(Z_2\bar Z_3-\bar Z_2Z_3\big)=0, \tag{23b}$$
$$\partial\bar Z_3-\bar\partial Z_3=0, \tag{23c}$$
$$\partial\bar Z_1+\bar\partial Z_1-\alpha\big(Z_1\bar Z_3+\bar Z_1Z_3\big)=2iH\big(\bar Z_2Z_3-\bar Z_3Z_2\big), \tag{23d}$$
$$\partial\bar Z_2+\bar\partial Z_2-\beta\big(Z_2\bar Z_3+\bar Z_2Z_3\big)=2iH\big(\bar Z_3Z_1-\bar Z_1Z_3\big), \tag{23e}$$
$$\partial\bar Z_3+\bar\partial Z_3+2\alpha|Z_1|^2+2\beta|Z_2|^2=2iH\big(\bar Z_1Z_2-\bar Z_2Z_1\big). \tag{23f}$$

При подстановке (19) в (23a), (23b), (23d) и (23e) после преобразований получим

$$\partial\psi_2^2+\bar\partial\psi_1^2+\frac{\alpha+\beta}{2}\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big)+\frac{\alpha-\beta}{2}\bar\psi_1\bar\psi_2\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big)=0,$$
$$-\partial\psi_2^2+\bar\partial\psi_1^2-\frac{\alpha+\beta}{2}\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2\big)+\frac{\alpha-\beta}{2}\bar\psi_1\bar\psi_2\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2\big)=2H\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big).$$

При выводе этих равенств мы воспользовались формулами (20).

В точке, где $Z_3=\psi_1\bar\psi_2\neq 0$б эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{gathered}D\psi=\left[\begin{pmatrix}0&\partial\\-\bar\partial&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U&0\\0&V\end{pmatrix}\right]\psi=0,\quad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix},\\
U=\frac{\alpha+\beta}{4}|\psi_1|^2+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_1\frac{\bar\psi_2^{\,2}}{\psi_1}+\frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big),\\
V=-\frac{\alpha+\beta}{4}|\psi_2|^2-\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_2\frac{\bar\psi_1^{\,2}}{\psi_2}+\frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big).\end{gathered}\tag{24}$$

Прямыми вычислениями находим дифференциал Хопфа поверхности в G_1:

$$A=\big(\bar\psi_2\partial\psi_1-\psi_1\partial\bar\psi_2\big)+\frac{\beta-\alpha}{4}\big(\bar\psi_2^4-\psi_1^4\big).$$

Уравнения Вейнгартена принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}\partial\psi_1=\varphi_z\psi_1+\psi_2Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha+\beta}{4}\psi_1^2\bar\psi_2+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_2^3,\qquad \partial\psi_2=-U\psi_1,\\
\bar\partial\psi_1=V\psi_2,\qquad \bar\partial\psi_2=\varphi_{\bar z}\psi_2-\psi_1\bar Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha+\beta}{4}\bar\psi_1\psi_2^2+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_1^3.\end{gathered}\tag{25}$$

Уравнения Вайнгартена в операторной форме выглядят так:

$$(\partial-\tilde A)\psi=0,\quad (\bar\partial-\tilde B)\psi=0,$$

где $\psi=(\psi_1,\psi_2)^\top$,

$$\tilde A=\begin{pmatrix}\varphi_z+\dfrac{\alpha+\beta}{4}Z_3 & Ae^{-\varphi}+\dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_2P_2\\ -H_1 & \dfrac{\alpha+\beta}{4}Z_3-\dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_1P_2\end{pmatrix},$$
$$\tilde B=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha+\beta}{4}\bar Z_3-\dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_2P_1 & H_2\\ -\bar Ae^{-\varphi}+\dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_1P_1 & \varphi_{\bar z}+\dfrac{\alpha+\beta}{4}\bar Z_3\end{pmatrix},$$
$$Z_3=\psi_1\bar\psi_2,\quad P_1=\frac{\bar\psi_1^2}{\psi_1},\quad P_2=\frac{\bar\psi_2^2}{\psi_2},\quad H_1=\left(\frac{H}{2}+\frac{\alpha+\beta}{4}\right)e^{\varphi},\quad H_2=\left(\frac{H}{2}-\frac{\alpha+\beta}{4}\right)e^{\varphi}.$$

Из уравнений Вайнгартена вытекает соотношение

$$(\partial-\tilde A)(\bar\partial-\tilde B)\psi-(\bar\partial-\tilde B)(\partial-\tilde A)\psi=(\tilde A_{\bar z}-\tilde B_z+[\tilde A,\tilde B])\psi=0,$$

где введено обозначение

$$\tilde{R} = \tilde{A}_{\bar{z}} - \tilde{B}_z + [\tilde{A}, \tilde{B}].$$

Уравнение $\tilde{R}\psi = 0$ записывается так:

$$\kappa_1 = \left(\varphi_{z\bar{z}} + \frac{\alpha-\beta}{4}\partial(\bar{\psi}_2 P_1) + H_1H_2 + \left(Ae^{-\varphi} + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_2P_2\right)\left(-\bar{A}e^{-\varphi} + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_1P_1\right)\right)\psi_1 +$$
$$+ \left(A_{\bar{z}}e^{-\varphi} + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\partial}(\bar{\psi}_2P_2) - \frac{H_z}{2}e^{\varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha-\beta}{4}\left(\alpha_{\bar{z}}\bar{\psi}_2P_2 + \bar{\psi}_2P_1\left(Ae^{-\varphi} + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_2P_2\right) + H_2\bar{\psi}_1P_2\right)\right)\psi_2 = 0;$$

$$\kappa_2 = \left(-\frac{H_{\bar{z}}}{2}e^{\varphi} + \bar{A}_ze^{-\varphi} - \frac{\alpha-\beta}{4}\partial(\bar{\psi}_1P_1) - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha-\beta}{4}\left(\varphi_z\bar{\psi}_1P_1 + \bar{\psi}_1P_2\left(-\bar{A}e^{-\varphi} + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_1P_1\right) - H_1\bar{\psi}_2P_1\right)\right)\psi_1 +$$
$$+ \left(-\varphi_{z\bar{z}} - \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\partial}(\bar{\psi}_1P_2) - H_1H_2 - \left(Ae^{-\varphi} + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_2P_2\right)\left(-\bar{A}e^{-\varphi} + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_1P_1\right)\right)\psi_2 = 0,$$

причем учтено, что $\bar{\partial}Z_3 - \partial\bar{Z}_3 = 0$. Приводя подобные и учитывая уравнения Дирака и Вайнгартена, получаем

$$\kappa_1 = \left(\varphi_{z\bar{z}} + H_1H_2 - |A|^2e^{-2\varphi} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 + \frac{(\alpha-\beta)^2}{16}\left(|\psi_1|^4 - 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - 3|\psi_2|^4\right)\right)\psi_1 +$$
$$+ \left(A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^{\varphi} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3\right)\psi_2 = 0;$$
$$\kappa_2 = \left(\bar{A}_ze^{-\varphi} - \frac{H_{\bar{z}}}{2}e^{\varphi} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar{\psi}_1^3\bar{\psi}_2\right)\psi_1 +$$
$$+ \left(-\varphi_{z\bar{z}} - H_1H_2 + |A|^2e^{-2\varphi} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 + \frac{(\alpha-\beta)^2}{16}\left(3|\psi_1|^4 + 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - |\psi_2|^4\right)\right)\psi_2 = 0.$$

Система уравнений Кодацци принимает вид:

$$\kappa_1\bar{\psi}_1 - \bar{\kappa}_2\psi_2 = 0, \quad \kappa_1\bar{\psi}_2 + \bar{\kappa}_2\psi_1 = 0.$$

Окончательно получаем:

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{16}e^{2\varphi} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\left(\psi_1^2\psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2\right) +$$
$$+ \frac{(\alpha-\beta)^2}{16}\left(6|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - |\psi_1|^4 - |\psi_2|^4\right), \tag{26a}$$
$$A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^{\varphi} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\left(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3 - \psi_1^3\psi_2\right) + \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\left(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4\right)\psi_1\bar{\psi}_2. \tag{26b}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхность на группе G_1 задается порождающим спинором (ψ_1, ψ_2), $\psi_1\psi_2 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака* (24)*, Вайнгартена* (25) *и Кодацци* (26)*.*

4. Группа G_2. Далее сделаем аналогичные выводы для группы G_2. Для этого в уравнениях (17) и (18) воспользуемся связностью Леви-Чивиты группы G_2. Имеем:

$$\partial\bar{Z}_1 - \bar{\partial}Z_1 + \gamma\big(Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3\big) + Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3 = 0, \tag{27a}$$
$$\partial\bar{Z}_2 - \bar{\partial}Z_2 - \big(Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3\big) + \gamma\big(Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3\big) = 0, \tag{27b}$$
$$\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3 = 0, \tag{27c}$$
$$\partial\bar{Z}_1 + \bar{\partial}Z_1 + \gamma\big(Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3\big) - \big(Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3\big) = 2iH\big(\bar{Z}_2Z_3 - \bar{Z}_3Z_2\big), \tag{27d}$$
$$\partial\bar{Z}_2 + \bar{\partial}Z_2 + \big(Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3\big) + \gamma\big(Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3\big) = 2iH\big(\bar{Z}_3Z_1 - \bar{Z}_1Z_3\big), \tag{27e}$$
$$\partial\bar{Z}_3 + \bar{\partial}Z_3 - 2\gamma\big(|Z_1|^2 + |Z_2|^2\big) = 2iH\big(\bar{Z}_1Z_2 - \bar{Z}_2Z_1\big). \tag{27f}$$

Как и выше, подставляем (19) в (27a), (27b), (27d) и (27e) и после преобразований получаем:

$$\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 - (\gamma + i)\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big) = 0,$$
$$-\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 + (\gamma - i)\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = 2H\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big).$$

Здесь использованы равенства (20).

В точках, где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 \neq 0$, эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{gathered}
D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\
U = -\frac{\gamma}{2}|\psi_1|^2 - \frac{i}{2}|\psi_2|^2 + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big), \\
V = \frac{\gamma}{2}|\psi_2|^2 + \frac{i}{2}|\psi_1|^2 + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big).
\end{gathered} \tag{28}$$

Прямыми вычислениями находим дифференциал Хопфа поверхности в G_2:

$$A = \big(\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2\big) - i\psi_1^2\bar{\psi}_2{}^2.$$

Как и выше, получаем уравнения Вайнгартена:

$$\begin{gathered}
\partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2Ae^{-\varphi} - \frac{\gamma - i}{2}\psi_1^2\bar{\psi}_2, \qquad \partial\psi_2 = -U\psi_1, \\
\bar{\partial}\psi_1 = V\psi_2, \qquad \bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1\bar{A}e^{-\varphi} - \frac{\gamma - i}{2}\bar{\psi}_1\psi_2^2.
\end{gathered} \tag{29}$$

Операторная форма уравнений Вайнгартена:

$$\big(\partial - \tilde{A}\big)\psi = 0, \quad \big(\bar{\partial} - \tilde{B}\big)\psi = 0,$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varphi_z - \dfrac{\gamma - i}{2}Z_3 & Ae^{-\varphi} \\ -\dfrac{1}{2}(H - \gamma)e^{\varphi} & -\dfrac{\gamma - i}{2}Z_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma - i}{2}\bar{Z}_3 & \dfrac{1}{2}(H + \gamma)e^{\varphi} \\ -\bar{A}e^{-\varphi} & \varphi_{\bar{z}} - \dfrac{\gamma - i}{2}\bar{Z}_3 \end{pmatrix}.$$

Как и выше, запишем уравнение

$$\tilde{R}\psi = 0, \quad \tilde{R} = \tilde{A}_{\bar{z}} - \tilde{B}_z + [\tilde{A}, \tilde{B}].$$

В результате имеем:

$$\kappa_1 = \left(\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi}\right)\psi_1 + \left(A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{1}{2}H_ze^{\varphi}\right)\psi_2 = 0,$$
$$\kappa_2 = \left(\bar{A}_ze^{-\varphi} - \frac{1}{2}H_{\bar{z}}e^{\varphi}\right)\psi_1 - \left(\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi}\right)\psi_2 = 0,$$

причем учтено соотношение $\bar{\partial}Z_3 - \partial\bar{Z}_3 = 0$.

Система уравнений Кодацци принимает вид:

$$\kappa_1\bar{\psi}_1 - \bar{\kappa}_2\psi_2 = 0, \quad \kappa_1\bar{\psi}_2 + \bar{\kappa}_2\psi_1 = 0.$$

Окончательно получаем:

$$\varphi_{z\bar z} + \frac{H^2-\gamma^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi} = 0, \quad A_{\bar z}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^{\varphi} = 0. \tag{30}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Поверхность на группе G_2 задается порождающим спинором (ψ_1,ψ_2), $\psi_1\psi_2\neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака* (28)*, Вайнгартена* (29) *и Кодацци* (30).

5. Группа G_3. Далее сделаем выводы для группы G_3. Сначала в уравнениях (17) и (18) воспользуемся связностью Леви-Чивиты группы G_3. Тогда

$$\partial\bar Z_1 - \bar\partial Z_1 - \big(Z_1\bar Z_3 - \bar Z_1 Z_3\big) = 0, \tag{31a}$$

$$\partial\bar Z_2 - \bar\partial Z_2 + \big(Z_1\bar Z_3 - \bar Z_1 Z_3\big) - \big(Z_2\bar Z_3 - \bar Z_2 Z_3\big) = 0, \tag{31b}$$

$$\partial\bar Z_3 - \bar\partial Z_3 = 0, \tag{31c}$$

$$\partial\bar Z_1 + \bar\partial Z_1 - \big(Z_1\bar Z_3 + \bar Z_1 Z_3\big) = 2iH\big(\bar Z_2 Z_3 - \bar Z_3 Z_2\big), \tag{31d}$$

$$\partial\bar Z_2 + \bar\partial Z_2 + \big(Z_1\bar Z_3 + \bar Z_1 Z_3\big) - \big(Z_2\bar Z_3 + \bar Z_2 Z_3\big) = 2iH\big(\bar Z_3 Z_1 - \bar Z_1 Z_3\big), \tag{31e}$$

$$\partial\bar Z_3 + \bar\partial Z_3 + 2\big(|Z_1|^2 + |Z_2|^2\big) = 2iH\big(\bar Z_1 Z_2 - \bar Z_2 Z_1\big). \tag{31f}$$

Как и выше, после подстановки (19) в (31a), (31b), (31d) и (31e) и несложных преобразований будем иметь:

$$2\partial\psi_2^2 + 2\bar\partial\psi_1^2 + \big((2+i)\psi_1\psi_2 + i\bar\psi_1\bar\psi_2\big)\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big) = 0,$$
$$-2\partial\psi_2^2 + 2\bar\partial\psi_1^2 - \big((2+i)\psi_1\psi_2 - i\bar\psi_1\bar\psi_2\big)\big(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2\big) = 4H\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big).$$

В точках, где $Z_3 = \psi_1\bar\psi_2 \neq 0$, эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{gathered} D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar\partial & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V\end{pmatrix}\right]\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \\ U = \frac{2+i}{4}|\psi_1|^2 + \frac{i}{4}\frac{\bar\psi_1\bar\psi_2^2}{\psi_1} + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big), \\ V = -\frac{2+i}{4}|\psi_2|^2 - \frac{i}{4}\frac{\bar\psi_2\bar\psi_1^2}{\psi_2} + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big). \end{gathered} \tag{32}$$

Дифференциал Хопфа поверхности в G_3:

$$A = \big(\bar\psi_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar\psi_2\big) - \frac{i}{4}\big(\psi_1^2 - \bar\psi_2{}^2\big)^2 = \big(\bar\psi_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar\psi_2\big) - iZ_2^2.$$

Уравнения Вайнгартена:

$$\begin{gathered} \partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2 Ae^{-\varphi} + \frac12\psi_1 Z_3 + iZ_2^2e^{-\varphi}\psi_2 - \frac12\psi_1 Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi}, \qquad \partial\psi_2 = -U\psi_1, \\ \bar\partial\psi_1 = V\psi_2, \qquad \bar\partial\psi_2 = \varphi_{\bar z}\psi_2 - \psi_1\bar Ae^{-\varphi} + \frac12\psi_2\bar Z_3 + i\bar Z_2^2e^{-\varphi}\psi_1 + \frac12\psi_2\bar Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi}. \end{gathered} \tag{33}$$

Операторная форма уравнений Вайнгартена:

$$(\partial - \tilde A)\psi = 0, \quad (\bar\partial - \tilde B)\psi = 0,$$

где $\psi = (\psi_1,\psi_2)^\top$,

$$\tilde A = \begin{pmatrix} \varphi_z + \frac12 Z_3 - \frac12 Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi} & Ae^{-\varphi} + iZ_2^2e^{-\varphi} \\ -\frac{H+1}{2}e^{\varphi} - \frac12\frac{\bar\psi_1}{\psi_1}Z_1 & \frac12 Z_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde B = \begin{pmatrix} \frac12\bar Z_3 & \frac{H-1}{2}e^{\varphi} + \frac12\frac{\bar\psi_2}{\psi_2}\bar Z_1 \\ -\bar Ae^{-\varphi} + i\bar Z_2^2e^{-\varphi} & \varphi_{\bar z} + \frac12\bar Z_3 + \frac12\bar Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi} \end{pmatrix}.$$

Далее необходимо вывести уравнение
$$\tilde{R}\psi = 0, \quad \tilde{R} = \tilde{A}_{\bar{z}} - \tilde{B}_z + [\tilde{A}, \tilde{B}].$$
Ввиду больших технических трудностей это уравнение еще не выведено, поэтому на данный момент уравнений Кодацци не получены.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Поверхность на группе G_3 задается порождающим спинором (ψ_1, ψ_2), $\psi_1\psi_2 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака* (32) *и Вайнгартена* (33).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердинский Д. А., Тайманов И. А.* Поверхности в трехмерных группах Ли// Сиб. мат. ж. — 2005. — *46*, № 6. — С. 1248–1264.
2. *Богданова Р. А.* Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения// Сиб. ж. индустр. мат. — 2009. — *12*, № 46. — С. 12–22.
3. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
4. *Кыров В. А.* Гельмгольцевы пространства размерности два// Сиб. мат. ж. — 2005. — *46*, № 6. — С. 1341–1359.
5. *Кыров В. А.* Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли// Мат. заметки СВФУ. — 2023. — *30*, № 4. — С. 24–36.
6. *Михайличенко Г. Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. — Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алтайск. гос. ун-та, 2016.
7. *Тайманов И. А.* Операторы Дирака и конформные инварианты торов в трехмерном пространстве// Тр. МИАН. — 2004. — *204*. — С. 249–280.
8. *Scott P.* The geometries of 3-manifolds// Bull. London Math. Soc. — 1982. — *15*, № 5. — P. 401–487.
9. *Thurston W. P.* Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry// Bull. Am. Math. Soc — 1982. — *6*, № 3. — P. 357–381.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кыров Владимир Александрович (Kyrov Vladimir Aleksandrovich)
Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск
(Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia)
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 78–86
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-78-86

УДК 51–72, 511.331.1, 537.611.44

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ И ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

© 2024 г. **Н. Б. МЕЛЬНИКОВ, Б. И. РЕЗЕР**

Аннотация. Получены явные выражения коэффициентов в законе T^2 для магнитного момента и химического потенциала в теории Стонера для случая произвольной плотности электронных состояний. Дано обобщение критерия ферромагнтизма Стонера в терминах спин-поляризованных плотностей электронных состояний. В основе доказательства лежит асимптотическое разложение интеграла с функцией Ферми, которое ранее использовалось для свободных электронов.

***Ключевые слова*:** намагниченность, температурная зависимость, ферромагнитные металлы, интеграл Ферми, разложение Зоммерфельда, дзета-функция Римана.

ASYMPTOTIC FORMULAS FOR MAGNETIZATION AND CHEMICAL POTENTIAL OF FERROMAGNETIC METALS AT LOW TEMPERATURES

© 2024 **N. B. MELNIKOV, B. I. RESER**

Abstract. Explicit expressions for the coefficients in the T^2-law for the magnetic moment and chemical potential in Stoner's theory are obtained in the case of an arbitrary electron density of states. A generalization of Stoner's ferromagnetism criterion is given in terms of spin-polarized electron densities of states. The proof is based on the asymptotic expansion of the integral with the Fermi function, which was previously used for free electrons.

***Keywords and phrases*:** magnetization, temperature dependence, ferromagnetic metals, Fermi integral, Sommerfeld expansion, Riemann zeta function.

***AMS Subject Classification*:** 41A60, 82D40

1. Введение. Описание температурной зависимости намагниченности в ферромагнитных металлах и сплавах остается открытой проблемой (см., напр., [3]). При низких температурах основной вклад в намагниченность дают спиновые флуктуации (закон $T^{3/2}$) и стонеровские возбуждения (закон T^2). Анализ экспериментальной кривой намагниченности в железе показывает, что закон $T^{3/2}$ выполняется лишь на небольшом интервале низких температур, при более высоких температурах кривая намагниченности хорошо аппроксимируется законом T^2, но точку перехода указать довольно сложно [4]. Явное выражение для коэффициента в законе $T^{3/2}$ для магнетиков с коллективизированными электронами было получено сначала для свободных электронов

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Электрон», номер госрегистрации 122021000039–4).

в рамках приближения случайных фаз [8], а затем для ферромагнитных металлов и сплавов в рамках динамической теории спиновых флуктуаций (ДСФТ) [4, 9] [1].

Закон T^2 был выведен Стонером в рамках теории среднего поля для свободных электронов с плотностью электронных состояний (ПЭС), пропорциональной $\sqrt{\varepsilon}$ [12]. Явный вид коэффициента при T^2 был получен в двух предельных случаях: сильных и слабых ферромагнетиков. В этих же предельных случаях явный вид коэффициента при T^2 был получен Томпсоном и др. [13] для электронов с произвольной ПЭС. Однако многие ферромагнитные металлы и сплавы не описываются ни одним из этих предельных случаев.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы обосновать закон T^2 для электронов с *произвольной* ПЭС и получить выражение для коэффициента при T^2 в общем случае. Для вывода низкотемпературного разложения для намагниченности и химического потенциала в теории Стонера мы используем асимптотическую формулу для интеграла с функцией Ферми, называемую разложением Зоммерфельда [11] (методы численных расчетов таких интегралов см. в [10]). Применение этой асимптотической формулы к *немагнитной* ПЭС, дает известное асимптотическое разложение химического потенциала *свободных электронов* (см., напр., [1, 7]). Мы применяем разложение Зоммерфельда для интегралов *спин-поляризованных* ПЭС с функцией Ферми.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 приведены уравнения теории среднего поля Стонера. В разделе 3 дан краткий вывод разложения Зоммерфельда, введены необходимые понятия и обозначения. В разделе 4 разложение Зоммерфельда использовано для вывода асимптотического разложения химического потенциала *свободных электронов*. В разделе 5 получено асимптотическое разложение для намагниченности и химического потенциала в теории Стонера для электронов с *произвольной* ПЭС. Проведен анализ полученных результатов в двух предельных случаях: сильных и слабых ферромагнетиков. В Заключении коротко сформулированы основные результаты и указаны возможные приложения.

2. Уравнения теории Стонера. Магнитный момент в ферромагнитных металлах пропорционален среднему спину: $m_z = 2\mu_{\mathrm{B}}\bar{s}_z$, где μ_{B} — магнетон Бора. Теория среднего поля Стонера строится с помощью приближения Хартри—Фока в гамильтониане Хаббарда (см., напр., [9]). Средний спин в теории среднего поля Стонера получается из решения системы уравнений

$$\bar{s}_z = \frac{1}{2}\left(\bar{n}_\uparrow - \bar{n}_\downarrow\right), \quad \bar{n}_{\mathrm{e}} = \bar{n}_\uparrow + \bar{n}_\downarrow, \tag{1}$$

где среднее число электронов $\bar{n}_\sigma$ со спином $\sigma = \uparrow, \downarrow$ или ± 1 вычисляется по формуле

$$\bar{n}_\sigma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu_\sigma(\varepsilon) f(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon. \tag{2}$$

Здесь $\nu_\sigma(\varepsilon) \equiv \nu(\varepsilon + \sigma U \bar{s}_z)$ — спин-поляризованная ПЭС, U — константа взаимодействия, $\nu(\varepsilon)$ — немагнитная ПЭС, а

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1} \tag{3}$$

— функция Ферми, зависящая от двух параметров: химического потенциала μ и температуры T (в энергетических единицах). Спин-поляризованные ПЭС в теории Стонера получаются жестким сдвигом немагнитной ПЭС $\nu(\varepsilon)$ в противоположных направлениях: $\nu_\uparrow(\varepsilon) \equiv \nu(\varepsilon + U\bar{s}_z)$ — сдвигом $\nu(\varepsilon)$ *влево* на $U\bar{s}_z$, а $\nu_\downarrow(\varepsilon) \equiv \nu(\varepsilon - U\bar{s}_z)$ — сдвигом $\nu(\varepsilon)$ *вправо* на $U\bar{s}_z$.

Предполагаем, что все величины нормированы на один атом и одну d-полосу, а немагнитная ПЭС нормирована на один атом, d-полосу и спин:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon = 1. \tag{4}$$

[1] Для магнетиков с локализованными спинами закон $T^{3/2}$ был получен Блохом [6] (см., напр., [2]).

Средне число электронов $\bar{n}_{\mathrm{e}}$ не зависит от температуры и может быть вычислено по немагнитной ПЭС:

$$\bar{n}_{\mathrm{e}} = 2 \int_{-\infty}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}} \nu(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon. \tag{5}$$

Энергия ε_{F} называется *уровнем Ферми* и имеет смысл наибольшей энергии, на которой электронные состояния заполнены при $T = 0$. Значение $\mu(T = 0)$ равно ε_{F}. Значение $\bar{s}_z(T = 0)$ и константа взаимодействия U должны удовлетворять системе уравнений (1) при $T = 0$ для заданных $\nu(\varepsilon)$, ε_{F} и $\bar{n}_{\mathrm{e}}$.

Система уравнений (1) решается относительно двух неизвестных $\bar{s}_z$ и μ при каждом значении параметра $T > 0$. Входными данными являются немагнитная ПЭС $\nu(\varepsilon)$, константа взаимодействия U и уровень Ферми ε_{F} конкретного металла.

3. Асимптотика интеграла с функцией Ферми. Как видно из уравнений (1), нам необходимо получить асимптотическое разложение интегралов с функцией Ферми (2) при низких температурах. Ниже мы даем краткий вывод такого разложения в общем случае.

Теорема 1. *Пусть $g(\varepsilon)$ — произвольная гладкая функция, имеющая первообразную*

$$G(\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\varepsilon} g(\varepsilon')\,\mathrm{d}\varepsilon',$$

которая растет при $\varepsilon \to \infty$ не быстрее некоторой степени ε. Тогда для интеграла с функцией Ферми (3) *при $T \to 0$ справедливо разложение в ряд Тейлора*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} 2(1 - 2^{1-2m})\zeta(2m) G^{(2m)}(\mu) T^{2m}, \tag{6}$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. В частности, ограничиваясь слагаемыми до четвертого порядка включительно, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = G(\mu) + \frac{\pi^2}{6} G''(\mu) T^2 + \frac{7\pi^4}{360} G^{(4)}(\mu) T^4 \ldots \tag{7}$$

Доказательство. Интегрируя по частям интеграл с функцией Ферми, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = G(\varepsilon) f(\varepsilon)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon) \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon. \tag{8}$$

Внеинтегральные члены в правой части выражения исчезают. Действительно, при $\varepsilon \to -\infty$ имеем $G(-\infty) = 0$ и $f(-\infty) = 1$. При $\varepsilon \to \infty$ функция $f(\varepsilon)$ убывает к нулю экспоненциально, а $G(\varepsilon)$ растет не быстрее некоторой степени. Следовательно, для доказательства формулы (6) необходимо получить разложение второго слагаемого в правой части (8) в ряд Тейлора по T в нуле:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon) \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n \frac{\partial^n}{\partial T^n} \int_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \mathrm{d}\varepsilon \Big|_{T=0}. \tag{9}$$

Сначала исследуем первое слагаемое в правой части (9). При $T \to 0$ производная функции Ферми (3), взятая с обратным знаком, стремится к дельта-функции, сдвинутой на μ:

$$-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T} \frac{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}}{(\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1)^2} \to \delta(\varepsilon - \mu). \tag{10}$$

Действительно, при $T \to 0$ верно

$$-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T}\frac{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}}{(\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}+1)^2} \sim \begin{cases} \frac{1}{T}\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}, & \varepsilon < \mu, \\ \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/T}, & \varepsilon > \mu, \\ \frac{1}{T}, & \varepsilon = \mu. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда при $T \to 0$ имеем

$$-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T}\frac{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}}{(\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}+1)^2} \to \begin{cases} 0, & \varepsilon \neq \mu, \\ \infty, & \varepsilon = \mu. \end{cases}$$

Кроме того, используя $f(-\infty) = -1$ и $f(\infty) = 0$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \mathrm{d}\varepsilon = 1.$$

Следовательно, выполнено (10). Тогда первое слагаемое в (9) принимает вид

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon)\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon\bigg|_{T=0} = G(\mu).$$

Далее, рассмотрим n-ю производную интеграла при $T = 0$ в левой части (9):

$$\frac{\partial^n}{\partial T^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \mathrm{d}\varepsilon\bigg|_{T=0}.$$

Делая замену переменной $x = (\varepsilon - \mu)/T$ в интеграле, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \mathrm{d}\varepsilon = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(Tx+\mu)\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Дифференцирование дает

$$\frac{\partial^n}{\partial T^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \mathrm{d}\varepsilon = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n G^{(n)}(Tx+\mu)\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial T^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \mathrm{d}\varepsilon = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{(n)}(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right)^n \mathrm{d}\varepsilon. \tag{12}$$

Теперь покажем, что при $T \to 0$ справедливо

$$\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right)^n \to \begin{cases} I_n\delta(\varepsilon-\mu), & n \text{ — четное}, \\ 0, & n \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{13}$$

Действительно, как видно из (11), степенной множитель в левой части (13) не меняет предела производной функции Ферми при $T \to 0$. Чтобы найти нормировочную константу I_n в (13), необходимо вычислить интеграл

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right)^n \mathrm{d}\varepsilon.$$

Делая замену переменной $x = (\varepsilon - \mu)/T$ в интеграле, получаем

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x x^n}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Разбиваем этот интеграл на два:

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^x x^n}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x x^n}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Делая замену переменной $t=-x$ в первом интеграле, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^x x^n}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^t t^n}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Следовательно, для четных $n=2m$ справедливо

$$I_{2m} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x x^{2m}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x,$$

а для нечетных $n=2m-1$ интеграл равен нулю: $I_{2m-1}=0$. Интегрируя по частям, находим

$$I_{2m} = 4m\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Как известно, интеграл (14) связан с дзета-функцией Римана

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

соотношением (см., напр., [5])

$$\zeta(s) \equiv \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x, \quad s>1, \tag{15}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера. Используя свойства дзета- и гамма-функций:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$$

и $\Gamma(n)=(n-1)!$, записываем интеграл (14) в виде

$$I_{2m} = 4m(1-2^{1-2m})(2m-1)!\zeta(2m) = 2(1-2^{1-2m})(2m)!\zeta(2m). \tag{16}$$

Значения $\zeta(2m)$ даются выражением (см., напр., [5])

$$\zeta(2m) = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}|B_{2m}|.$$

Здесь B_{2m} — $2m$-е число Бернулли, где числа Бернулли B_n определяются соотношением[1]

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Наконец, подставляя (13) в (12), получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial T^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon = \begin{cases} I_{2m}G^{(2m)}(\mu), & n=2m, \\ 0, & n=2m-1. \end{cases} \tag{17}$$

[1] В [1] использованы другие обозначения для чисел Бернулли (подробнее см. [14]).

С учетом (16) имеем

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial T^{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \mathrm{d}\varepsilon = 2(1-2^{1-2m})(2m)!\zeta(2m)G^{(2m)}(\mu). \tag{18}$$

Подставляя (17) и (18) в (9), получаем формулу (6). Ограничиваясь в (6) слагаемыми до четвертого порядка включительно, с учетом $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta(2) = \pi^2/6$ и $\zeta(4) = \pi^4/90$ приходим к выражению (7). □

В дальнейшем в качестве $g(\varepsilon)$ используются ПЭС. В этом случае можно считать, что $g(\varepsilon)$ — гладкая функция, отличная от нуля лишь на конечном отрезке, поэтому условия теоремы 1 выполнены.

4. Асимптотика химического потенциала для свободных электронов. Для свободных электронов среднее число электронов (не зависящая от T величина) дается выражением

$$\bar{n}_{\mathrm{e}} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \bar{n}_{\mathbf{k},\sigma} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} f(\varepsilon_{\mathbf{k},\sigma}).$$

Заменяя суммирование по волновому вектору $\mathbf{k}$ интегрированием по энергии, имеем

$$\bar{n}_{\mathrm{e}} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \nu(\varepsilon) f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon.$$

Асимптотическое разложение химического потенциала для свободных электронов, получается, если положить $g(\varepsilon) = \nu(\varepsilon)$ в теореме 1. Тогда согласно (7) имеем

$$\bar{n}_{\mathrm{e}}/2 = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\varepsilon) f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6} N''(\mu) T^2 + \ldots$$

где $N(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} \nu(\varepsilon')\,\mathrm{d}\varepsilon'$ — число электронных состояний с энергией, не превосходящей μ. При $T = 0$ выполнено $\bar{n}_{\mathrm{e}}/2 = N(\varepsilon_{\mathrm{F}})$. Отсюда следует

$$N(\varepsilon_{\mathrm{F}}) = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6} N''(\mu) T^2 + \ldots \tag{19}$$

Искомое разложение $\mu(T)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$\mu(T) = \mu_0 + \mu_1 T + \mu_2 T^2 + \ldots, \tag{20}$$

где μ_i — коэффициенты разложения, которые необходимо определить. Коэффициент при нулевой степени $\mu_0 \equiv \mu(T=0)$ равен уровню Ферми ε_{F}. Подставляя (20) в (19), получаем

$$0 = \nu(\varepsilon_{\mathrm{F}})\mu_1 T + \left(\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon_{\mathrm{F}})\mu_1^2 + \nu(\varepsilon_{\mathrm{F}})\mu_2 + \frac{\pi^2}{6}\nu'(\varepsilon_{\mathrm{F}})\right) T^2 + \ldots \tag{21}$$

Приравнивая нулю коэффициенты разложения в правой части, получаем уравнения для коэффициентов μ_1 и μ_2:

$$\begin{aligned} &\nu(\varepsilon_{\mathrm{F}})\mu_1 = 0, \\ &\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon_{\mathrm{F}})\mu_1^2 + \nu(\varepsilon_{\mathrm{F}})\mu_2 + \frac{\pi^2}{6}\nu'(\varepsilon_{\mathrm{F}}) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что для свободных электронов $\nu(\varepsilon_{\mathrm{F}}) \neq 0$, записываем разложение для химического потенциала в виде

$$\mu(T) = \varepsilon_{\mathrm{F}} - \frac{\pi^2}{6}\frac{\nu'(\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\nu(\varepsilon_{\mathrm{F}})} T^2 + \ldots \tag{22}$$

5. Асимптотики в теории Стонера для произвольной ПЭС. Переходим к низкотемпературному разложению для намагниченности и химического потенциала в теории Стонера.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$U\frac{2\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})}{\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})+\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})}>1. \tag{23}$$

Тогда справедливы разложения

$$\bar{s}_z(T)=\bar{s}_z(0)-\alpha T^2+\ldots,\quad \mu(T)=\varepsilon_\mathrm{F}-\beta\,T^2+\ldots,$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\pi^2}{6}\,\frac{\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})\nu'_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})-\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})\nu'_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})}{\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})+\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})-2U\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})},\\ \beta&=\frac{\pi^2}{6}\,\frac{\nu'_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})+\nu'_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})-U[\nu'_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})+\nu'_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})]}{\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})+\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})-2U\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F})\nu_\downarrow(\varepsilon_\mathrm{F})}.\end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. Решение системы уравнений (1) при низких температурах имеет вид

$$\bar{s}_z(T)=s_0+s_1T+s_2T^2+\ldots,\quad \mu(T)=\mu_0+\mu_1T+\mu_2T^2+\ldots, \tag{25}$$

где s_i и μ_i — коэффициенты, которые необходимо определить.

В качестве $g(\varepsilon)$ берем спин-поляризованную ПЭС: $g(\varepsilon)=\nu_\sigma(\varepsilon)$. Тогда $G(\varepsilon)=N_\sigma(\varepsilon)$ — число состояний электронов со спином σ и энергией не больше ε при температуре T. Используя формулу (7), с учетом $N'_\sigma(\varepsilon)=\nu_\sigma(\varepsilon)$ имеем

$$\bar{n}_\sigma=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu_\sigma(\varepsilon)f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon=N_\sigma(\mu)+\frac{\pi^2}{6}\nu'_\sigma(\mu)T^2+\ldots \tag{26}$$

Подставляя (25) в (26) и разлагая это выражение в ряд Тейлора до второго порядка по T, находим

$$\begin{aligned}\bar{n}_\sigma=N_\sigma(\mu_0)&+(\mu_1+\sigma Us_1)\nu_\sigma(\mu_0)T+\\&+\left[(\mu_2+\sigma Us_2)\nu_\sigma(\mu_0)+\left(\frac{1}{2}(\mu_1+\sigma Us_1)^2+\frac{\pi^2}{6}\right)\nu'_\sigma(\mu_0)\right]T^2+\ldots\end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя (27) и (25) в первое уравнение теории Стонера (1), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях T в правой и левой частях, получаем три соотношения

$$s_0=\frac{1}{2}(N_\uparrow(\mu_0)-N_\downarrow(\mu_0)), \tag{28}$$

$$s_1=\frac{1}{2}\Big[\mu_1(\nu_\uparrow(\mu_0)-\nu_\downarrow(\mu_0))+Us_1(\nu_\uparrow(\mu_0)+\nu_\downarrow(\mu_0))\Big], \tag{29}$$

$$\begin{aligned}s_2=\frac{1}{2}\Bigg[&\mu_2(\nu_\uparrow(\mu_0)-\nu_\downarrow(\mu_0))+Us_2(\nu_\uparrow(\mu_0)+\nu_\downarrow(\mu_0))\\&+\left(\frac{1}{2}(\mu_1^2+U^2s_1^2)+\frac{\pi^2}{6}\right)(\nu'_\uparrow(\mu_0)-\nu'_\downarrow(\mu_0))+\mu_1Us_1(\nu'_\uparrow(\mu_0)+\nu'_\downarrow(\mu_0))\Bigg].\end{aligned} \tag{30}$$

Действуя аналогично со вторым уравнением теории Стонера (1), получаем еще три соотношения:

$$\bar{n}_\mathrm{e}=N_\uparrow(\mu_0)+N_\downarrow(\mu_0), \tag{31}$$

$$0=\mu_1(\nu_\uparrow(\mu_0)+\nu_\downarrow(\mu_0))+Us_1(\nu_\uparrow(\mu_0)-\nu_\downarrow(\mu_0)), \tag{32}$$

$$\begin{aligned}0=&\,\mu_2(\nu_\uparrow(\mu_0)+\nu_\downarrow(\mu_0))+Us_2(\nu_\uparrow(\mu_0)-\nu_\downarrow(\mu_0))\\&+\left(\frac{1}{2}(\mu_1^2+U^2s_1^2)+\frac{\pi^2}{6}\right)(\nu'_\uparrow(\mu_0)+\nu'_\downarrow(\mu_0))+\mu_1Us_1(\nu'_\uparrow(\mu_0)-\nu'_\downarrow(\mu_0)).\end{aligned} \tag{33}$$

Система уравнений (28) и (31) дает спин $s_0 \equiv \bar{s}_z(0)$ и химический потенциал $\mu_0 \equiv \mu(0)$ при $T = 0$:

$$s_0 = \frac{1}{2}(N_\uparrow(\mu_0) - N_\downarrow(\mu_0)), \quad \bar{n}_\mathrm{e} = N_\uparrow(\mu_0) + N_\downarrow(\mu_0). \tag{34}$$

При условии (23) система уравнений (29) и (32) имеет единственное решение

$$s_1 = 0, \quad \mu_1 = 0. \tag{35}$$

Оставшиеся соотношения (30) и (33) после упрощений принимают вид

$$-\nu_\uparrow(\mu_0)\mu_2 + (1 - U\nu_\uparrow(\mu_0))s_2 = \frac{\pi^2}{6}\nu'_\uparrow(\mu_0),$$
$$-\nu_\downarrow(\mu_0)\mu_2 - (1 - U\nu_\downarrow(\mu_0))s_2 = \frac{\pi^2}{6}\nu'_\downarrow(\mu_0).$$

Решая эту систему и подставляя $\mu_0 = \varepsilon_\mathrm{F}$, получаем формулы (24). $\square$

Действуя аналогично, из теоремы 1 можно получить разложения намагниченности и химического потенциала в теории Стонера и для более высоких степеней, чем T^2.

Проанализируем полученные формулы в двух предельных случаях. Сначала рассмотрим случай, когда значение $\bar{s}_z$ при $T = 0$ настолько велико, что все d-состояния электронов со спином вверх заполнены («сильный ферромагнетик»). Тогда условие (23) не выполнено, а формальная подстановка соотношений $\nu_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F}) = 0$ и $\nu'_\uparrow(\varepsilon_\mathrm{F}) = 0$ в (24) дает $\alpha = 0$. В действительности, как было показано в работе [13], в случае «сильного ферромагнетика» намагниченность имеет экспоненциальную асимптотику

$$\bar{s}_z(T)/\bar{s}_z(0) = 1 - ce^{-a/T} + \dots \tag{36}$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда средний спин $s_0 \equiv \bar{s}_z(0)$ мал: $Us_0 \ll \varepsilon_\mathrm{F}$ («слабый ферромагнетик»). Тогда подставляя разложения

$$\nu_\sigma(\varepsilon_\mathrm{F}) \equiv \nu(\varepsilon_\mathrm{F} + \sigma U s_0) = \nu(\varepsilon_\mathrm{F}) + \sigma U s_0 \nu'(\varepsilon_\mathrm{F}) + \dots,$$
$$\nu'_\sigma(\varepsilon_\mathrm{F}) \equiv \nu'(\varepsilon_\mathrm{F} + \sigma U s_0) = \nu'(\varepsilon_\mathrm{F}) + \sigma U s_0 \nu''(\varepsilon_\mathrm{F}) + \dots.$$

в (24), получаем, что разложение химического потенциала в случае «слабого ферромагнетика» превращается в разложение (22) для свободных электронов, а коэффициент в разложении намагниченности в случае «слабого ферромагнетика» принимает вид

$$\alpha = \frac{\pi^2}{6}\frac{U\left[(\nu'(\varepsilon_\mathrm{F}))^2 - \nu(\varepsilon_\mathrm{F})\nu''(\varepsilon_\mathrm{F}))\right]}{\nu(\varepsilon_\mathrm{F})(1 - U\nu(\varepsilon_\mathrm{F}))}. \tag{37}$$

Нетрудно видеть, что условие (23) в случае «слабого ферромагнетика» есть не что иное, как критерий ферромагнетизма Стонера: $U\nu(\varepsilon_\mathrm{F}) > 1$. В общем случае условие (23) можно рассматривать как обобщение критерия Стонера в терминах спин-поляризованных ПЭС.

6. Заключение. В теории Стонера обоснован закон T^2 для магнитного момента и химического потенциала в случае произвольной плотности электронных состояний. Получены явные формулы (24) для коэффициентов при T^2 в терминах спин-поляризованных плотностей электронных состояний. Указано условие (23), при котором закон T^2 справедлив. Это условие обобщает критерий Стонера. Получено выражение (37) для коэффициента в законе T^2 для намагниченности в случае «слабых ферромагнетиков».

Результаты работы позволят провести качественный анализ влияния электронной структуры на магнитный момент в ферромагнитных металлах и сплавах при низких температурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твердого тела. — М.: Мир, 1979.
2. *Киттель Ч.* Квантовая теория твердых тел. — М.: Наука, 1967.
3. *Мельников Н. Б., Гуленко А. С., Резер Б. И.* Связь магнетизма сплавов 3d-металлов с электронной структурой в теории Стонера и в ДТСФ// Физ. мет. металловед. — 2024. — *125*. — С. 56–61.
4. *Мельников Н. Б., Резер Б. И.* Поперечная восприимчивость и закон $T^{3/2}$ в динамической теории спиновых флуктуаций// Теор. мат. физ. — 2024. — *181*. — С. 358–373.

5. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York: Wiley, 1972.
6. *Bloch F.* Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetika// Z. Phys. — 1932. — *74.* — P. 295–335.
7. *Fetter A. L., Walecka J. D.* Quantum Theory of Many-Particle Systems. — New York: McGraw-Hill, 1971.
8. *Izuyama T., Kim D. J., Kubo R.* Band theoretical interpretation of neutron diffraction phenomena in ferromagnetic metals// J. Phys. Soc. Jpn. — 1963. — *18.* — P. 1025–1042.
9. *Melnikov N. B., Reser B. I.* Dynamic Spin Fluctuation Theory of Metallic Magnetism. — Berlin: Springer, 2018.
10. *Reser B. I.* Numerical method for calculation of the Fermi integrals// J. Phys.: Condens. Matter — 1996. — *8.* — P. 3151–3160.
11. *Sommerfeld A.* Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik// Z. Phys. — 1928. — *47.* — P. 1–32.
12. *Stoner E. C.* Collective Electron Ferromagnetism// Proc. Roy. Soc. A: Math. — 1938. — *165.* — P. 372–414.
13. *Thompson E. D., Wohlfarth E. P., Bryan A. C.* The low temperature variation of the saturation magnetization of ferromagnetic metals and alloys// Proc. Phys. Soc. — 1964. — *83.* — P. 59–70.
14. *Titchmarsh E.C.* The Theory of the Riemann Zeta-Function. — Oxford: Clarendon Press, 1986.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Электрон», номер госрегистрации 122021000039–4).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Мельников Николай Борисович (Mel'nikov Nikolai Borisovich)
Факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
(Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: `melnikov@cs.msu.ru`

Резер Борис Ильич (Reser Boris Ilyich)
Отдел теоретической и математической физики,
Институт физики металлов им. М. Н. Михеева
Уральского отделения РАН, Екатеринбург
(Department of Theoretical and Mathematical Physics,
M. N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
E-mail: `reser@imp.uran.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 87–96
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-87-96

УДК 517.927.4; 517.988.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. **А. Н. НАИМОВ, М. В. БЫСТРЕЦКИЙ**

Аннотация. Исследован вопрос об априорной оценке и существовании периодических решений для двумерной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В терминах свойств главной нелинейной части сформулирована и доказана теорема об априорной оценке периодических решений. В условиях априорной оценки доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования периодических решений.

***Ключевые слова*:** периодическое решение, положительно однородное отображение, априорная оценка, векторное поле, вращение векторного поля, гомотопные пары отображений.

INVESTIGATION OF PERIODIC SOLUTIONS OF A TWO-DIMENSIONAL SYSTEM OF NONLINEAR ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2024 **A. N. NAIMOV, M. V. BYSTRETSKII**

Abstract. The problem of a priori estimate and existence of periodic solutions for a two-dimensional system of nonlinear ordinary second-order differential equations is examined. In terms of the properties of the principal nonlinear part, a theorem on a priori estimate of periodic solutions is formulated and proved. Under the conditions of the a priori estimate, a theorem on necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions is proved.

***Keywords and phrases*:** periodic solution, positive homogeneous mapping, a priori estimate, vector field, degree of a vector field, homotopic pairs of mappings.

***AMS Subject Classification*:** 34C25, 47H11, 55M25

1. Введение. Статья посвящена исследованию периодических решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'' = Q\big(t, x' - B(t,x)\big) + f(t,x,x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $Q, B : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^2$ — непрерывные отображения, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $Q(t+\omega, y) \equiv Q(t,y)$, $B(t+\omega, y) \equiv B(t,y)$ при некотором $\omega > 0$;
(ii) $Q(t, \lambda y) \equiv \lambda^m Q(t,y)$ при некотором $m > 1$ и всех $\lambda > 0$;
(iii) $B(t, \lambda y) \equiv \lambda B(t,y)$ при всех $\lambda > 0$;
(iv) $f(t+\omega, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$;
(v) $(|y_1| + |y_2|)^{-m} |f(t, y_1, y_2)| \rightrightarrows 0$ при $|y_1| + |y_2| \rightharpoonup \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

В системе уравнений (1) выделена главная нелинейная часть $Q\big(t, x' - B(t,x)\big)$, составленная из положительно однородных отображений Q и B. Отображение f называем возмущением. Цель работы — нахождение условий на Q и B, обеспечивающих существование ω-периодических решений системы уравнений (1) при любом возмущении f. Решение $x \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ системы уравнений (1) называем ω-периодическим, если $x(t+\omega) \equiv x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Если x является ω-периодическим решением системы уравнений (1), то пара (x, x') будет нулем вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x,y) := \Bigg(x(t) - x(\omega) - \int\limits_0^t y(s)ds,$$

$$y(t) - y(\omega) - \int\limits_0^t \Big(Q\big(s, y(s) - B(s, x(s))\big) + f\big(s, x(s), y(s)\big)\Big) ds \Bigg), \quad (2)$$

определенного в банаховом пространстве $E := C([0,\omega];\mathbb{R}^2) \times C([0,\omega];\mathbb{R}^2)$ с нормой

$$\|(x,y)\|_E := \|x\|_C + \|y\|_C,$$

где

$$\|x\|_C = \max\big\{|x(t)| : t \in [0,\omega]\big\}.$$

И обратно, если пара $(x,y) \in E$ является нулем векторного поля Φ, то $x' = y$ и x будет ω-периодическим решением системы уравнений (1). Таким образом, существование ω-периодических решений системы уравнений (1) сводится к нахождению нулей вполне непрерывного векторного поля Φ.

Существование ω-периодических решений системы уравнений (1) в настоящей работе исследовано по схеме, состоящей из двух этапов. На первом этапе выясняется, при каких условиях на Q и B для ω-периодических решений имеет место априорная оценка

$$\|x\|_C + \|x'\|_C < M, \quad (3)$$

где число M не зависит от x. Если имеет место априорная оценка (3), то вполне непрерывное векторное поле Φ не обращается в ноль на сферах $\|(x,y)\|_E = r$ радиуса $r \geqslant M$. Тогда согласно теории вполне непрерывных векторных полей (см. [1, с. 135]) определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля Φ на бесконечности, равное вращению (степени отображения) Φ на сфере $\|(x,y)\|_E = r$ при $r \geqslant M$. На втором этапе, применяя методы вычисления вращения векторных полей, выводится формула вычисления $\gamma_\infty(\Phi)$ через числовые характеристики отображений Q и B. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения (см. [1, с. 138]) существует нуль векторного поля Φ; этим доказывается существование ω-периодических решений.

В многомерном случае, когда главная нелинейная часть не зависит от t, существование периодических решений системы уравнений вида (1) исследовано в [2]. Найдены условия априорной оценки и при этих условиях вычислено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$. Если главная нелинейная часть зависит от t, то вычисление $\gamma_\infty(\Phi)$ весьма проблематично.

В настоящей работе исследовано существование ω-периодических решений двумерной системы уравнений (1) предполагая, что Q и B зависят от t. В отличие от [2], множество нулей главной нелинейной части $Q(t, y - B(t,x))$ состоит лишь из одной поверхности $y = B(t,x)$. Сначала сформулирована и доказана теорема об априорной оценке ω-периодических решений. Затем в условиях априорной оценки, на основе результатов работы [3], доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования ω-периодических решений. Доказательство основано на двух утверждениях: формуле вычисления вращения вполне непрерывного векторного поля, порожденного периодической задачей, и инвариантности существования периодических решений при гомотопии главной нелинейной части. Полученные результаты существенно дополняют работу [2].

2. Основные результаты. Сначала исследуем условия, при которых для произвольного ω-периодического решения $x(t)$ системы уравнений (1) имеет место оценка

$$|x'(t)| \leqslant M_0\big(1 + |x(t)|\big), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где число M_0 не зависит от x.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (i)–(v) *и следующее условие*:

(vi) *при каждом фиксированном $t_0 \in \mathbb{R}$ система уравнений*

$$z' = Q(t_0, z), \quad z \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

не имеет ненулевых решений, определенных и ограниченных на $\mathbb{R}$.

Тогда для произвольного ω-периодического решения x системы уравнений (1) *имеет место оценка* (4).

Например, следующее отображение удовлетворяет условиям теоремы 1:

$$Q_{k_1,k_2}(t,z) = |z_1 - iz_2|^{m-k_2}\left(\Re\left(e^{i2\pi k_1 t/\omega}(z_1 - iz_2)^{k_2}\right),\ \Im\left(e^{i2\pi k_1 t/\omega}(z_1 - iz_2)^{k_2}\right)\right),$$

где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, k_1, k_2 — целые числа, $k_2 \geqslant 0$, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Для данного примера выполнение условия (vi) можно проверить, используя [1, теорема 14.3, с. 85].

Условия (i)–(vi) пока не достаточны для априорной оценки (3). Например, возьмем $B(t,y) \equiv Ay$, $f(t,y_1,y_2) \equiv Ay_2$, где A — матрица с собственными значениями $\pm i2\pi/\omega$. В этом случае ω-периодические решения автономной системы $y' = Ay$ являются решениями системы уравнений (1), и для этих решений априорная оценка (3) не верна.

Как отмечено в [2], для априорной оценки (3) необходимо учитывать структуру множества нулей главной нелинейной части $Q(t, y - B(t,x))$. В данном случае множество нулей состоит из одной поверхности $y = B(t,x)$. Предположим, что наряду с условиями (i)–(vi) выполнено следующее условие:

(vii) система уравнений $y' = B(t,y)$ не имеет ненулевых ω-периодических решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (i)–(vii)*. Тогда для ω-периодических решений системы уравнений* (1) *имеет место априорная оценка* (3).

Из теоремы 2 вытекает, что если выполнены условия (i)–(vii), то вполне непрерывное векторное поле Φ, заданное формулой (2), не обращается в ноль на сферах $\|(x,y)\|_E = r$ радиуса $r \geqslant M$ пространства $E := C([0,\omega];\mathbb{R}^2) \times C([0,\omega];\mathbb{R}^2)$. Согласно теории вполне непрерывных векторных полей (см. [1, с. 135]) определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля Φ на бесконечности. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения (см. [1, с. 138]) существует нуль векторного поля Φ; это доказывает существование ω-периодических решений. Поэтому представляется актуальным вычисление $\gamma_\infty(\Phi)$ посредством числовых характеристик отображений Q и B.

Для вычисления $\gamma_\infty(\Phi)$ предположим, что выполнены условия (i)–(vi), а также следующие условия:

(viii) система уравнений $y' = \mu B(t,y)$ при любом $\mu \in (0,1]$ не имеет ненулевых ω-периодических решений;

(ix) $\displaystyle\int\limits_0^\omega B(t,y)dt \neq 0$ при $y \neq 0$.

Введем следующие обозначения: $\gamma_0(Q)$, $\gamma\left(\int_0^\omega B(t,\cdot)dt\right)$ — вращения двумерных векторных полей $Q(t_0,\cdot)$, $\int_0^\omega B(t,\cdot)dt : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ на единичной окружности $|y| = 1$, где t_0 фиксировано; $\gamma_1(Q)$ — вращение двумерного векторного поля $Q(t,y_0)$ на единичной окружности $(\cos(2\pi t/\omega), \sin(2\pi t/\omega))$, $t \in [0,\omega]$, при фиксированном ненулевом y_0.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (i)–(vi) *и* (viii), (**??**)*. Тогда верна формула*

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma\left(\int\limits_0^\omega B(t,\cdot)dt\right) \cdot \begin{cases} \gamma_0(Q), & \text{если } \gamma_0(Q) < 1,\ \gamma_1(Q)/(1-\gamma_0(Q)) \text{ — целое}, \\ 1, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{6}$$

Формула (6) доказана с применением результатов работы [3].

Две пары отображений (Q^0, B^0) и (Q^1, B^1), удовлетворяющие условиям (i)–(iii), (vi), (vii), назовем *гомотопными*, если существует семейство пар отображений $(\tilde{Q}_\lambda, \tilde{B}_\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$, которое непрерывно зависит от λ, удовлетворяет условиям (i)–(iii), (vi), (vii), при каждом $\lambda \in [0,1]$ и $(\tilde{Q}_0, \tilde{B}_0) = (Q^0, B^0)$, $(\tilde{Q}_1, \tilde{B}_1) = (Q^1, B^1)$.

В следующей теореме доказана инвариантность существования ω-периодических решений при гомотопии.

Теорема 4. *Пусть пары отображений (Q^0, B^0), (Q^1, B^1) гомотопны. Если при $Q = \tilde{Q}_0$, $B = \tilde{B}_0$ и любом возмущении f существует ω-периодическое решение системы уравнений* (1), *то при $Q = \tilde{Q}_1$, $B = \tilde{B}_1$ также существует ω-периодическое решение системы уравнений* (1) *при любом возмущении f.*

Из теорем 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Если выполнены условия* (i)–(iii), (vi), (viii), (**??**) *и условие*

$$\gamma\left(\int_0^\omega B(t,\cdot)dt\right)\gamma_0(Q) \neq 0,$$

то существует ω-периодическое решение системы уравнений (1) *при любом возмущении f. Обратно, если выполнены условия* (i)–(iii), (vi), (vii) *и существует ω-периодическое решение системы уравнений* (1) *при любом возмущении f, то имеет место неравенство $\gamma_0(Q) \neq 0$.*

Доказательство теоремы 1. Предположим, что оценка (4) не верна. Тогда найдется такая последовательность ω-периодических решений x_k, $k = 1, 2, \dots$ системы уравнений (1), что

$$|x_k'(t_k)| > k(1 + |x_k(t_k)|)$$

при некоторых $t_k \in [0, \omega]$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$r_k := \|x_k\|_C + \|x_k'\|_C \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Для вектор-функций $y_k(t) = r_k^{-1} x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем:

$$\begin{gathered}\left|y_k'(t_k)\right| > k\left(r_k^{-1} + |y_k(t_k)|\right), \quad \|y_k\|_C + \|y_k'\|_C = 1,\\ y_k(t+\omega) \equiv y_k(t), \quad y_k'(t+\omega) \equiv y_k'(t),\\ r_k^{1-m} y_k''(t) = Q\big(t, y_k'(t) - B(t, y_k(t))\big) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{7}$$

Можно считать, что $t_k \to t_0$ и $\|y_k - y_0\|_C \to 0$ при $k \to \infty$. В данном случае имеем $y_0(t+\omega) \equiv y_0(t)$, $y_0(t_0) = 0$. С другой стороны, покажем, что

$$y_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Этим завершится доказательство теоремы 1.

Проверим, что $y_0(t) \not\equiv 0$. Действительно, если $y_0(t) \equiv 0$, то

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |y_k'(t)| = |y_k'(\tau_k)| \to 1, \quad k \to \infty,$$

и для вектор-функций $z_k(t) = y_k'(\tau_k + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем:

$$\begin{gathered} z_k'(t) = Q(\tau_k + r_k^{1-m} t, z_k(t)) + o(1), \quad |z_k(t)| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},\\ |z_k(0)| \to 1, \quad k \to \infty.\end{gathered}$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Следовательно, $y_0(t) \not\equiv 0$.

Пусть (α, β) — наибольший интервал, где $y_0(t)$ не обращается в ноль. Покажем, что на любом отрезке $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ имеет место неравенство

$$\limsup_{k\to\infty} \max_{a\leqslant t\leqslant b} \frac{|y_k'(t)|}{|y_k(t)|} < M_1, \tag{9}$$

где
$$M_1 > \max\bigl\{|B(s,x_0)| : s\in\mathbb{R},\ x_0\in\mathbb{R}^2,\ |x_0|\leqslant 1\bigr\}.$$
Действительно, если (9) не верно, то при некоторых $s_k\in[a,b]$, $k=k_0,\ldots$, имеем
$$|y_k'(s_k)| > \left(M_1-\frac{1}{k}\right)|y_k(s_k)|,\quad s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} s_0.$$
Тогда для вектор-функций
$$z_k(t)=y_k'\bigl(s_k+r_k^{1-m}t\bigr),\quad t\in\mathbb{R},\quad k=k_0,\ldots,$$
имеем:
$$|z_k(0)| > \left(M_1-\frac{1}{k}\right)|y_k(s_k)|,\quad |z_k(t)|\leqslant 1,\quad t\in\mathbb{R},$$
и согласно (7)
$$z_k'(t)=Q\Bigl(s_k+r_k^{1-m}t,\ z_k(t)-B\bigl(s_k+r_k^{1-m}t,\ y_k(s_k+r_k^{1-m}t)\bigr)\Bigr)+o(1),\quad t\in\mathbb{R}.$$
Переходя к пределу, получаем вектор-функцию $z_0(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:
$$|z_0(0)|\geqslant M_1|y_0(s_0)|,\quad |z_0(t)|\leqslant 1,\quad z_0'(t)=Q\bigl(s_0,z_0(t)-B\bigl(s_0,y_0(s_0)\bigr)\bigr),\quad t\in\mathbb{R}.$$
Учитывая условие (vi), имеем $z_0(t)\equiv B(s_0,y_0(s_0))$. Отсюда в силу выбора M_1 получаем противоречивое неравенство $|z_0(0)|<M_1|y_0(s_0)|$. Таким образом, неравенство (9) верно на любом отрезке $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$.

На фиксированном отрезке $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$ при $k>k_{a,b}$ имеем
$$\ln\frac{|y_k(b)|}{|y_k(a)|}=\int_a^b\bigl(\ln|y_k(t)|\bigr)'dt=\int_a^b\left\langle\frac{y_k'(t)}{|y_k(t)|},\frac{y_k(t)}{|y_k(t)|}\right\rangle dt,$$
где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидовое скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Учитывая (9) и переходя к пределу, получаем неравенства
$$-M_1(b-a)\leqslant\ln\frac{|y_0(b)|}{|y_0(a)|}\leqslant M_1(b-a).$$
Если α конечно, то в неравенстве справа, устремляя a к α, получаем $y_0(\alpha)\neq0$, что противоречит выбору α. Значит, $\alpha=-\infty$. Аналогичным образом, из неравенства слева следует, что $\beta=+\infty$. Следовательно, (8) верно. Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Предположим, что априорная оценка (3) не верна. Тогда существует неограниченная последовательность ω-периодических решений $x_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, системы уравнений (1):
$$r_k:=\|x_k\|_C+\|x_k'\|_C\to\infty,\quad k\to\infty.$$
Для вектор-функций $y_k(t)=r_k^{-1}x_k(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots$, имеем:
$$y_k(t+\omega)\equiv y_k(t),\quad y_k'(t+\omega)\equiv y_k'(t),$$
$$\|y_k\|_C+\|y_k'\|_C=1, \tag{10}$$
$$r_k^{1-m}y_k''(t)=Q\Bigl(t,y_k'(t)-B\bigl(t,y_k(t)\bigr)\Bigr)+o(1),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{11}$$
Можно считать, что $\|y_k-y_0\|_C\to0$ при $k\to\infty$. По теореме 1 имеет место оценка
$$|y_k'(t)|<M_0(r_k^{-1}+|y_k(t)|),\quad t\in\mathbb{R},\quad k=1,2,\ldots,$$
поэтому $y_0(t)\not\equiv0$; иначе получаем противоречие с (10).

Проверим, что при некотором $t_0\in\mathbb{R}$ верно неравенство
$$\limsup_{k\to\infty}\Bigl|y_k'(t_0)-B\bigl(t_0,y_k(t_0)\bigr)\Bigr|>0. \tag{12}$$

Действительно, если (12) не верно, то при любом $t \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\Big(y_k'(t) - B(t, y_k(t))\Big) = 0.$$

Переходя к пределу в равенстве

$$y_k(t) - y_k(\omega) = \int_0^t y_k'(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

получаем, что y_0 является ненулевым ω-периодическим решением системы уравнений $y' = B(t, y)$. Полученное противоречит условию (vii). Следовательно, (12) верно.

Учитывая (12), без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t_0) = v_0, \quad v_0 - B(t_0, y_0(t_0)) \neq 0.$$

Рассмотрим последовательность вектор-функций $z_k(t) = y_k'(t_0 + r_k^{1-m}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$. Для них имеем:

$$\lim_{k\to\infty} z_k(0) = v_0, \quad v_0 - B\big(t_0, y_0(t_0)\big) \neq 0,$$

и в силу (10), (11) получаем

$$|z_k(t)| \leqslant 1, \quad z_k'(t) = Q\Big(t_0 + r_k^{1-m}t,\ z_k(t) - B(t_0 + r_k^{1-m}t,\ y_k\big(t_0 + r_k^{1-m}t)\big)\Big) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В пределе получаем ненулевое ограниченное решение $\big(z_0(t) - B(t_0, y_0(t_0))\big)$ системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Теорема 2 доказана. □

3. Формула вычисления вращения. В этом разделе приведем вывод формулы (6).

Пусть выполнены условия (i)–(vii). Рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_\lambda(x, y) := \Bigg(x(t) - x(\omega) - \int_0^t \Big(\lambda y(s)ds + (1-\lambda)B\big(s, x(s)\big)\Big)ds,$$

$$y(t) - y(\omega) - \int_0^t \Big(Q\big(s, y(s) - \lambda B(s, x(s))\big) + \lambda f\big(s, x(s), y(s)\big)\Big)ds\Bigg), \quad \lambda \in [0, 1]. \tag{13}$$

Докажем существование такого $M_3 > 0$, что

$$\Phi_\lambda(x, y) \neq 0 \quad \text{при любых} \quad (x, y) \in E, \quad \|(x, y)\|_E \geqslant M_3, \quad \lambda \in [0, 1]. \tag{14}$$

Предположим, что такое M_3 не существует. Тогда найдутся такие последовательности $(x_k, y_k) \in E$, $\lambda_k \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\Phi_{\lambda_k}(x_k, y_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad r_k := \|(x_k, y_k)\|_E \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Для $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = r_k^{-1}(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$\tilde{x}_k'(t) = \lambda_k \tilde{y}_k(t) + (1-\lambda_k)B\big(t, \tilde{x}_k(t)\big), \quad \tilde{x}_k(t+\omega) \equiv \tilde{x}_k(t), \tag{15}$$

$$r_k^{1-m}\tilde{y}_k'(t) = Q\Big(t, \tilde{y}_k(t) - \lambda_k B\big(t, \tilde{x}_k(t)\big)\Big) + o(1), \quad \tilde{y}_k(t+\omega) \equiv \tilde{y}_k(t), \tag{16}$$

$$\|\tilde{x}_k\|_C + \|\tilde{y}_k\|_C = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|\tilde{x}_k - \tilde{x}_0\|_C \to 0$ и $\lambda_k \to \lambda_0$ при $k \to \infty$, где $\tilde{x}_0(t+\omega) \equiv \tilde{x}_0(t)$. Если $\tilde{x}_0(t) \equiv 0$, то для вектор-функций $z_k(t) = \tilde{y}_k(t_k + r_k^{1-m}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\|\tilde{y}_k\|_C = |\tilde{y}_k(t_k)|$, имеем:

$$z_k'(t) = Q\big(t_k + r_k^{1-m}t,\ z_k(t)\big) + o(1), \quad |z_k(t)| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

и $|z_k(0)| \to 1$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Следовательно, $\tilde{x}_0(t) \not\equiv 0$.

Заметим, что если при любом $t \in \mathbb{R}$ имеет место предел $\tilde{y}_k(t) - \lambda_k B(t, \tilde{x}_k(t)) \to 0$ при $k \to \infty$, то, переходя к пределу в (15), получаем ненулевое ω-периодическое решение $\tilde{x}_0$ системы уравнений $y' = B(t, y)$, что условию (vii). Поэтому можно считать, что при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$ существует ненулевой предел

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\tilde{y}_k(t_0) - \lambda_k B\big(t_0, \tilde{x}_k(t_0)\big)\Big) = v_0 \neq 0.$$

Для вектор-функций $w_k(t) = \tilde{y}_k(t_0 + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, в силу (16) имеем:

$$w_k'(t) = Q\Big(t_0 + r_k^{1-m}t,\ w_k(t) - \lambda_k B\big(t_0 + r_k^{1-m}t,\ x_k\big(t_0 + r_k^{1-m}t\big)\big)\Big) + o(1), \quad |w_k(t)| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

Переходя к пределу, получаем:

$$w_0'(t) = Q\Big(t_0, w_0(t) - \lambda_0 B\big(t_0, \tilde{x}_0(t_0)\big)\Big), \quad \big|w_0(t)\big| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$w_0(0) - \lambda_0 B\big(t_0, \tilde{x}_0(t_0)\big) = v_0 \neq 0.$$

Следовательно, $v = w_0 - \lambda_0 B\big(t_0, \tilde{x}_0(t_0)\big)$ является ненулевым ограниченным решением системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Таким образом, утверждение (14) доказано. Из него согласно известным свойствам вращения векторных полей (см. [1, с. 137, 160] вытекают равенства

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_1)\gamma_\infty(\Psi_2), \tag{17}$$

где $\gamma_\infty(\Psi_1)$, $\gamma_\infty(\Psi_2)$ — вращения векторных полей

$$\Psi_1(x) := x(t) - x(\omega) - \int_0^t B\big(s, x(s)\big)ds, \quad \Psi_2(y) := y(t) - y(\omega) - \int_0^t Q\big(s, y(s)\big)ds$$

на сферах больших радиусов пространства $C([0,\omega]; \mathbb{R}^2)$. Для вычисления $\gamma_\infty(\Psi_2)$ применим результаты работы [3]:

$$\gamma_\infty(\Psi_2) = \begin{cases} \gamma_0(Q), & \text{если } \gamma_0(Q) < 1,\ \gamma_1(Q)/(1 - \gamma_0(Q)) \text{ целое}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{18}$$

Если выполнены условия (viii) и (ix), то верна формула

$$\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma\left(\int_0^\omega B(t, \cdot)dt\right). \tag{19}$$

Действительно, рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(x) := x(t) - x(\omega) - \int_0^t B\big(s, x(s)\big)ds - (1 - \lambda)\int_t^\omega B\big(s, x(s)\big)ds, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Можно непосредственно проверить, что $\Psi_\lambda(x) \neq 0$ при любых $x \in C([0,\omega]; \mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$, $\lambda \in [0, 1]$. Отсюда следует равенство $\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma_\infty(\Psi_0)$. Для векторного поля Ψ_0 согласно определению вращения вполне непрерывных векторных полей в банаховом пространстве (см. [1, с.Ё135]) имеем

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = \gamma\left(\int_0^\omega B(t, \cdot)dt\right).$$

Следовательно, формула (19) верна. Из (17)–(19) вытекает формула (6).

4. Инвариантность существования периодических решений. В этом разделе докажем теорему 4. Сначала проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 4 *существуют такие положительные числа* M_2, σ_2, *что для любых* $\lambda \in [0,1]$ *и вектор-функции* $x \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, *удовлетворяющей условиям*

$$x^{(j)}(t+\omega) \equiv x^{(j)}(t), \quad j=0,1,2, \quad \|x\|_C + \|x'\|_C > M_2,$$

имеет место оценка

$$\Big\| x'' - \tilde{Q}_\lambda\Big(\cdot, x' - \tilde{B}_\lambda(\cdot, x)\Big)\Big\|_C > \sigma_2\big(\|x\|_C + \|x'\|_C\big)^m. \tag{20}$$

Доказательство. Предположим, что указанные числа M_2, σ_2 не существуют. Тогда найдутся такие последовательности $\lambda_k \in [0,1]$, $x_k \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, $k=1,2,\ldots$, что

$$x_k^{(j)}(t+\omega) \equiv x_k^{(j)}(t), \quad j=0,1,2,$$
$$r_k := \|x_k\|_C + \|x_k'\|_C \to \infty, \quad k\to\infty,$$
$$\Big\| x_k'' - \tilde{Q}_{\lambda_k}\Big(\cdot, x_k' - \tilde{B}_{\lambda_k}(\cdot, x_k)\Big)\Big\|_C < \frac{1}{k}\big(\|x_k\|_C + \|x_k'\|_C\big)^m.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = r_k^{-1}x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots$. Для них имеем:

$$y_k^{(j)}(t+\omega) \equiv y_k^{(j)}(t), \quad j=0,1,2, \qquad \|y_k\|_C + \|y_k'\|_C = 1,$$
$$r_k^{1-m}y_k''(t) = \tilde{Q}_{\lambda_k}\Big(t, y_k'(t) - \tilde{B}_{\lambda_k}\big(t, y_k(t)\big)\Big) + o(1), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k \to \lambda_0$ и $\|y_k - y_0\|_C \to 0$ при $k\to\infty$. Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 2, приходим к противоречию. Лемма 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4. Докажем, что если при $Q = \tilde{Q}_0$, $B = \tilde{B}_0$ и любом возмущении f существует ω-периодическое решение системы уравнений (1), то при $Q = \tilde{Q}_1$, $B = \tilde{B}_1$ также существует ω-решение системы уравнений (1) при любом возмущении f.

Выберем числа $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N = 1$ так, чтобы при любых λ_{j-1}, λ_j и вектор-функции $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющей условиям $y^{(j)}(t+\omega)\equiv y^{(j)}(t)$, $j=0,1$, имело место неравенство

$$\Big\|\tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\Big(\cdot, y'\tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(\cdot,y)\Big) - \tilde{Q}_{\lambda_j}\Big(\cdot, y' - \tilde{B}_{\lambda_j}(\cdot,y)\Big)\Big\|_C \leqslant \frac{1}{4}\sigma_2\big(\|y\|_C + \|y'\|_C\big)^m.$$

Воспользовавшись оценкой (20), покажем, что при каждом $j = 1,\ldots N$ верно следующее утверждение: если при $Q = \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}$, $B = \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}$ и любом возмущении f существует ω-периодическое решение системы уравнений (1), то при $Q = \tilde{Q}_{\lambda_j}$, $B = \tilde{B}_{\lambda_j}$ и любом возмущении f также существует ω-периодическое решение системы уравнений (1).

Зададим произвольное возмущение f. Для любой вектор-функции $y\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющей условиям периодичности $y(t+\omega)\equiv y(t)$, $y'(t+\omega)\equiv y'(t)$, в силу условия (v) имеет место неравенство

$$\big\|f(\cdot,y,y')\big\|_C \leqslant \frac{1}{4}\sigma_2\big(\|y\|_C + \|y'\|_C\big)^m + K_{f,\sigma_2};$$

здесь K_{f,σ_2} — положительное число, зависящее лишь от f и σ_2. Выберем число

$$L > \max\Big(M_2, \big(2\sigma_2^{-1}K_{f,\sigma_2}\big)^{1/m}\Big),$$

и определим возмущение

$$g_L(t,y_1,y_2) = f(t,y_1,y_2) + \eta\big(|y_1|+|y_2|\big)\Big(\tilde{Q}_{\lambda_j}\big(t, y_2 - \tilde{B}_{\lambda_j}(t,y_1)\big) - \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\big(t, y_2 - \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(t,y_1)\big)\Big),$$

где $\eta(s)\in C(\mathbb{R})$, $0\leqslant \eta(s)\leqslant 1$ при всех $s\in\mathbb{R}$, $\eta(s)=1$ при $|s|\leqslant L$ и $\eta(s)=0$ при $|s|\geqslant L+1$.

Согласно предположению существует ω-периодическое решение x системы уравнений (1) при $Q = \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}$, $B = \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}$ и возмущении g_L. Проверим, что

$$\|x\|_C + \|x'\|_C \leqslant L,$$

откуда следует, что x является ω-периодическим решением системы уравнений (1) при $Q=\tilde{Q}_{\lambda_j}$, $B=\tilde{B}_{\lambda_j}$ и возмущении f. Действительно, если

$$\|x\|_C+\|x'\|_C>L,$$

то согласно оценке (20) и выбору числа L имеем:

$$\sigma_2\big(\|x\|_C+\|x'\|_C\big)^m<\Big\|x''-\tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\Big(\cdot,x'-\tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(\cdot,x)\Big)\Big\|_C\leqslant$$
$$\leqslant\big\|f(\cdot,x,x')\big\|_C+\Big\|\tilde{Q}_{\lambda_j}\Big(\cdot,x'-\tilde{B}_{\lambda_j}(\cdot,x)\Big)-\tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\Big(\cdot,x'-\tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(\cdot,x)\Big)\Big\|_C\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sigma_2\big(\|x\|_C+\|x'\|_C\big)^m+K_{f,\sigma_2}.$$

Отсюда приходим к противоречию:

$$\|x\|_C+\|x'\|_C\leqslant\big(2\sigma_2^{-1}K_{f,\sigma_2}\big)^{1/m}<L.$$

Теорема 4 доказана. □

Доказательство теоремы 5. *Необходимость.* Пусть выполнены условия (i)–(iii), (vi), (vii) и пусть система уравнений (1) имеет ω-периодическое решение при любом возмущении f. Докажем, что имеет место неравенство $\gamma_0(Q)\neq 0$. Предположим, что $\gamma_0(Q)=0$. В этом случае пара (Q,B), согласно результатам работы [3], гомотопна паре $(Q_{k_1,0},B)$, где

$$Q_{k_1,0}(t,y)=|y|^m\left(\cos\frac{2\pi k_1 t}{\omega},\ \sin\frac{2\pi k_1 t}{\omega}\right),\quad k_1=\gamma_1(Q).$$

Поэтому в наших условиях и в силу теоремы 4 система уравнений

$$x''=Q_{k_1,0}\big(t,x'-B(t,x)\big)+f(t,x,x'),\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{21}$$

имеет ω-периодическое решение при любом возмущении f. С другой стороны, покажем, что при некотором возмущении f система уравнений (21) не имеет ω-периодических решений.

Положим

$$f(t,y_1,y_2)=Ay_2+g(t),\quad t\in\mathbb{R},\quad y_1,y_2\in\mathbb{R}^2,$$

где

$$g(t)=\left(\cos\frac{2\pi k_1 t}{\omega},\ \sin\frac{2\pi k_1 t}{\omega}\right),\quad A=\frac{2\pi k_1}{\omega}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$A^\top g(t)+g'(t)\equiv 0,\quad \langle g(t),g(t)\rangle\equiv 1,\quad t\in\mathbb{R};$$

здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидовое скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Если x — решение системы уравнений (21) при заданном f, то имеем:

$$\big(\langle x'(t),g(t)\rangle\big)'=\big\langle x''(t),g(t)\big\rangle+\big\langle x'(t),g'(t)\big\rangle=$$
$$=\Big\langle\big|x'(t)-B(t,x(t))\big|^m g(t)+Ax'(t)+g(t),\ g(t)\Big\rangle+\big\langle x'(t),g'(t)\big\rangle=$$
$$=\big|x'(t)-B(t,x(t))\big|^m+\big\langle x'(t),A^\top g(t)\big\rangle+1+\big\langle x'(t),g'(t)\big\rangle=\big|x'(t)-B(t,x(t))\big|^m+1\geqslant 1.$$

Отсюда следует, что при заданном f система уравнений (21) не имеет ω-периодических решений.

Достаточность. Пусть выполнены условия (i)–(iii), (vi), (viii), (**??**) и условие

$$\gamma\left(\int\limits_0^\omega B(t,\cdot)dt\right)\gamma_0(Q)\neq 0.$$

Тогда для векторного поля Φ, заданного формулой (2), в силу теорем 2 и 3 определено его вращение на бесконечности $\gamma_\infty(\Phi)$, причем $\gamma_\infty(\Phi)\neq 0$. Отсюда согласно принципу ненулевого вращения (см. [1, с. 138]) вытекает существование нуля векторного поля Φ, что доказывает существование ω-периодического решения системы уравнений (1) при любом возмущении f. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
2. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Диффер. уравн. — 2024. — *60*, № 3. — С. 312–321.
3. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Кобилзода М. М.* О разрешимости одного класса периодических задач на плоскости// Диффер. уравн. — 2021. — *57*, № 2. — С. 203–209.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Наимов Алижон Набиджанович (Naimov Alizhon Nabidzhanovich)
Вологодский государственный университет
(Vologda State University, Vologda, Russia)
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Быстрецкий Михаил Васильевич (Bystretskii Mikhail Vasil'evich)
Вологодский государственный университет
(Vologda State University, Vologda, Russia)
E-mail: pmbmv@bk.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 97–108
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-97-108

УДК 517.977.1

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2024 г. **Е. В. РАЕЦКАЯ**

Аннотация. Для динамической системы в частных производных второго порядка с тремя краевыми условиями при помощи метода каскадной декомпозиции решается задача построения функций управления и состояния в аналитическом виде. Получены два критерия полной управляемости: один на основе сюръективности некоторой матрицы, второй идентичен критерию Калмана. Выделен класс функций, определяющих аналитический вид функций управления и состояния. Разработан метод построения функций управления и состояния в аналитическом виде.

Ключевые слова: динамическая система с частными производными, полная управляемость, программное управление, метод каскадной декомпозиции.

SOLUTION OF ONE CONTROL PROBLEM FOR A DYNAMICAL SYSTEM IN PARTIAL DERIVATIVES

© 2024 **E. V. RAETSKAYA**

Abstract. For a second-order dynamic system in partial derivatives with three boundary conditions, the problem of constructing control and state functions in analytical form is solved by the cascade decomposition method. Two criteria of complete controllability are obtained. The first criterion is based on the surjectivity property of a certain matrix. The second criterion is identical to the Kalman criterion. A class of functions is identified that determine the analytical form of control and state functions. A method for constructing control and state functions in analytical form is developed.

Keywords and phrases: dynamic system with partial derivatives, complete controllability, program control, cascade decomposition method.

AMS Subject Classification: 93B05

1. Введение. Рассматривается динамическая система в частных производных

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} + D\frac{\partial u(t,s)}{\partial s} \tag{1}$$

с условиями

$$\text{(a) } x(0,s) = \alpha(s), \quad \text{(b) } x(T,s) = \beta(s), \quad \text{(c) } x(t,0) = \gamma(t), \tag{2}$$

где $x(t,s) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,s) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,S]$; B, D — матрицы соответствующих размеров. Функции в условиях (2) удовлетворяют условиям согласования

$$\alpha(0) = \gamma(0), \quad \beta(T) = \gamma(T). \tag{3}$$

Систему (1) называют полностью управляемой, если существует функция управления $u(t,x)$, под воздействием которой система переводится из произвольного начального состояния (2)(a) в

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20012).

произвольное конечное состояние (2)(b) за время $[0,T]$ для любого $T>0$, при этом выполняется условие (2)(c) и условия согласования.

Наряду с выявлением свойства управляемости как возможности управления системой важнейшей задачей является построение в явном виде функции управления $u(t,s)$ и функции состояния $x(t,s)$, удовлетворяющей заданным условиям. Именно эту, построенную в явном виде, пару функций *управление—состояние* будем называть *аналитическим решением задачи управления.* На данный момент известно большое количество работ, посвященных исследованию свойства полной управляемости различных систем (см., например, [1,2,6–8,15]). Однако имеется значительный дефицит методов и алгоритмов построения функций управления и состояния в аналитической форме. Большинство работ, посвященных данной тематике, презентуют методы построения искомых функций в приближенной форме. Целью же данной работы является построение именно аналитического решения задачи управления.

Основным методом исследования является метод каскадной декомпозиции, заключающийся в поэтапном переходе к редуцированным системам в подпространствах. Основы метода были разработаны в [9] с целью исследования полной управляемости классической системы управления. Затем этот метод модифицировался и применялся в [5, 10, 16, 17] для исследования свойств робастности, инвариантности, наблюдаемости, управляемости. Именно такой подход позволил получить положительные результаты при решении задач управления для ряда динамических систем в [4, 11, 12, 18–22] и провести структурный анализ аналитического решения задачи управления для системы в частных производных в [13].

В [14] указанным методом решена задача управления для системы

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = B\frac{\partial x^k(t,s)}{\partial s^k} + Du(t,s)$$

с условиями (2)(a), (2)(b). Там же была выделена определяющая функция — часть состояния из самого узкого подпространства, которая определяет вид аналитического решения.

В настоящей работе для системы вида (1) с дополнительным условием (2)(c) решается задача управления, которая подразумевает:

(a) выявление свойств матричных коэффициентов B и D, влекущих полную управляемость системы (1);
(b) установление свойств функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и $\gamma(t)$ в условиях (2), достаточных для реализации управляемого процесса;
(c) построение функции управления $u(t,s)$ и соответствующей функции состояния $x(t,s)$ в аналитическом виде для полностью управляемой системы.

Здесь выявляется класс определяющих функций, элементы которого определяеют вид аналитического решения задачи управления. Устанавливаются условия, при выполнении которых каждой определяющей функции будет соответствовать единственная пара управление—состояние.

2. Базисные положения метод каскадной декомпозиции. Алгоритм метода каскадной декомпозиции, реализующийся для полностью управляемой системы, включает три основных этапа: прямой ход, центральный этап, обратный ход.

Прямой ход заключается в поэтапной редукции системы (1). В силу конечномерности исходного пространства $\mathbb{R}^n$ процесс полностью реализуется за конечное, равное p, число шагов $(0 \leqslant p \leqslant n)$. На заключительном шаге данного этапа выявляется полная управляемость или неуправляемость системы. Также в процессе редукции выявляются свойства функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и $\gamma(t)$, достаточные для реализации управляемого процесса.

В случае установления полной управляемости осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции, включающему построение определяющей функции в той или иной форме.

Затем реализуется обратный ход декомпозиции, подразумевающий сначала пошаговое восстановление функции состояния $x(t,s)$, удовлетворяющей заданным условиям (2), затем построение соответствующей функции управления $u(t,s)$.

Здесь идет речь о решении задачи программного управления, т.е. сначала на базе (той или иной формы) определяющей функции строится функция состояния $x(t,s)$; затем рассчитывается функция $u(t,s)$. Устанавливаются условия, при выполнении которых каждой определяющей функции будет соответствовать единственная пара управление—состояние.

Таким образом, результатом реализации алгоритма каскадной декомпозиции является построение такой пары функций управление—состояние, что решением уравнения (1), с применением рассчитанной функции $u(t,s)$, будет именно рассчитанная функция $x(t,s)$, удовлетворяющая условиям (2).

Метод каскадной декомпозиции базируется на свойстве нетеровости матричного коэффициента $D:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, которому соответствуют разложения пространств в прямые суммы

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Coim} D \dotplus \operatorname{Ker} D, \quad \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} D \dotplus \operatorname{Coker} D, \tag{4}$$

где $\operatorname{Ker} D$ — ядро D; $\operatorname{Im} D$ — образ D; $\operatorname{Coker} D$ — дефектное подпространство, $n_0=\dim\operatorname{Coker} D$; $\operatorname{Coim} D$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker} D$ в $\mathbb{R}^n$; при этом сужение $\tilde{D}$ оператора D на $\operatorname{Coim} D$ имеет обратный $\tilde{D}^{-1}$. Проекторы на подпространства $\operatorname{Ker} D$ и $\operatorname{Coker} D$ обозначаются через P и Q, соответственно. Оператор $\tilde{D}^{-1}(I-Q)$ называется полуобратным к D и обозначается D^- (через I здесь и далее обозначен тождественный оператор в соответствующем пространстве). Операторы и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково. Обозначим $n_0=\dim\operatorname{Coker} D_0$, $m_0=\dim\operatorname{Ker} D_0$.

Лемма 1 (см. [3]). *Соотношение*

$$Dx=y, \quad x\in\mathbb{R}^m, \quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

эквивалентно системе

$$x=D^-y+f, \quad Qy=0. \tag{6}$$

Первое из приведенных выражений представляет собой решение уравнения (5)*, найденное с точностью до произвольного элемента* $f\in\operatorname{Ker} D$*,* $f=Px$*, а второе — условие корректности системы* (5).

3. Исследование исходной системы. В зависимости от вида матрицы D возможны два случая: $n=n_0$ и $n>n_0$.

В случае $n=n_0$ система (1) имеет вид

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}$$

и является неуправляемой.

При выполнении условия $n>n_0$, в силу леммы 1, реализуется переход от системы (1) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial s} = F(t,s)+f(t,s), \tag{7}$$

$$Q\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = QB\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}, \tag{8}$$

с функцией

$$F(t,s) = D^-\left(\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} - B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right), \tag{9}$$

и произвольной функцией $f(t,s)\in\operatorname{Ker} D$.

Здесь возможны два случая: $n>n_0=0$ и $n>n_0>0$. Рассмотрим их подробно.

При выполнении условия $n>n_0=0$ уравнение (8) принимает вид $0=0$, так как $n_0=0$ — это случай сюръективной матрицы D с нулевым проектором Q.

При наличии удовлетворяющей условиям (2) функции $x(t,s)$ функция $u(t,s)$ находится как решение дифференциального уравнения (7).

В случае сюръективной матрицы D система (1) является полностью управляемой. Осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции — построению функции состояния.

3.1. Схема построения функции $x(t,s)$. Строится функция $X(t,s)$, удовлетворяющая условиям (2)(a), (2)(b):

$$X(0,s)=\alpha(s), \quad X(T,s)=\beta(s).$$

Функция $X(t,s)$ называется определяющей функцией. Определяющая функция может быть построена в различных формах, например, в полиномиальной, дробно-рациональной, экспоненциальной и т. д.

Построенной определяющей функции $X(t,s)$ ставится в соответствие функция $\widetilde{x(t)}$, названная здесь *невязкой*, определяемая формулой

$$\widetilde{x(t)}=\gamma(t)-X(t,0). \tag{10}$$

Затем строится функция состояния в виде

$$x(t,s)=X(t,s)+\widetilde{x(t)}. \tag{11}$$

Построенная таким образом функция состояния будет удовлетворять условиям (2); при этом выполняются условия согласования

$$x(0,0)=\alpha(0)=\gamma(0), \quad x(T,0)=\beta(0)=\gamma(T).$$

3.2. Схема построения функции $u(t,s)$. Подстановка построенной на базе выбранной определяющей функции $X(t,s)$ функции $x(t,s)$ вида (11) в уравнение (7) позволяет найти функцию $u(t,s)$ как решение дифференциального уравнения в виде

$$u(t,s)=U(t,s)+\widetilde{u(t,s)}, \tag{12}$$

где

$$U(t,s)=\int\limits_0^s F(t,\tau)d\tau, \quad \widetilde{u(t,s)}=\int\limits_0^s f(t,\tau)d\tau+C(t). \tag{13}$$

Функция $\widetilde{u(t,s)}$ не оказывает влияние на реализацию динамического процесса, так как при подстановке выражения (12) для функции $u(t,s)$ в уравнение (1) первое слагаемое в правой части выражения (13) для $\widetilde{u(t,s)}$ нейтрализуется коэффициентом D: $Df(t,s)=0$, а функция $C(t)$, являющаяся результатом интегрирования, нейтрализуется операцией дифференцирования по переменной s. Далее будем называть функцию $U(t,s)$ *главной частью управления*, а функцию $\widetilde{u(t,s)}$ — *вариативной частью управления.*

3.3. О решении задачи управления в случае $\operatorname{Coker} D=\{0\}$. Вид функции $X(t,s)$ однозначно определяет вид функции состояния (11) и вид главной части управления (13). Без ущерба для реализации динамического процесса можно выбрать положить $\widetilde{u(t,s)}=0$.

Определение 1. В случае $\operatorname{Coker} D=\{0\}$ решением задачи управления (1)–(2) будем называть пару функций $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида (13) и (11) соответственно.

Теорема 1. *В случае $n_0=0$ система* (1) *является полностью управляемой. При выполнении условий* (3) *каждой определяющей функции $X(t,s)\in \boldsymbol{X}$ соответствует единственное решение задачи управления $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида* (13) *и* (11) *соответственно.*

Следует заметить, что процесс декомпозиции связан с расщеплением функции состояния на компоненты из подпространств. Полная реализация каскадной декомпозиции в случае выявления полной управляемости системы имеет результатом построение в той или иной форме функции состояния, удовлентворяющей условиям (2). Соответствующее управление всегда находится в виде (12) как решение уравнения (7).

При выполнении условия $n>n_0>0$ реализуется первый шаг декомпозиции исходной системы.

4. Исследование системы первого шага. В соответствии со свойствами матрицы D функция состояния расщепляется на компоненты из подпространств следующим образом:

$$x(t,s) = x_1(t,s) + u_1(t,s), \tag{14}$$

где $x_1(t,s) = Qx(t,s) \in \operatorname{Coker} D$, $u_1(t,s) = (I-Q)x(t,s) \in \operatorname{Im} D$. Функции $x_1(t,s)$ и $u_1(t,s)$ будем называть функциями псевдосостояния и псевдоуправления первого шага расщепления соответственно. С учетом обозначений:

$$B_1 = QBQ, \quad D_1 = QB(I-Q), \quad G_1 = QB,$$
$$\alpha_{10}(s) = Q\alpha(s), \quad \alpha_{11}(s) = G_1\frac{\partial\alpha(s)}{\partial s},$$
$$\beta_{10}(s) = Q\beta(s), \quad \beta_{11}(s) = G_1\frac{\partial\beta(s)}{\partial s},$$
$$\gamma_1(t,0) = Q\gamma(t), \quad w_1(t) = (I-Q)\gamma(t).$$

на первом шаге расщепления производится эквивалентный переход от системы (8) к системе первого шага расщепления

$$\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} = B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s} + D_1\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial s}. \tag{15}$$

Кроме того, производится эквивалентный переход от условий (2) к условиям

$$x_1(0,s) = \alpha_{10}(s), \qquad x_1(T,s) = \beta_{10}(s), \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t}\right|_{t=0} = \alpha_{11}(s), \quad \left.\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t}\right|_{t=T} = \beta_{11}(s), \tag{17}$$

$$\text{(a) } x_1(t,0) = \gamma_1(s), \qquad x\text{(b) } u_1(t,0) = w_1(t). \tag{18}$$

Исследование системы первого шага расщепления (15) базируется на свойстве нетеровости матричного коэффициента $D_1 : \operatorname{Coker} D \to \operatorname{Im} D$, с $n_1 = \dim \operatorname{Coker} D_1$. Здесь возможны два случая: $n_0 = n_1$ и $n_0 > n_1$.

В случае $n_0 = n_1$ система (15) имеет вид

$$\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} = B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s}$$

и является неуправляемой. При выполнении условия $n_0 > n_1$ реализуется переход от системы (15) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial s} = F_1(t,s) + f_1(t,s), \tag{19}$$

$$Qx_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} = Q_1B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s} \tag{20}$$

с функцией

$$F_1(t,s) = D_1^-\left(\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} - B_1\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s}\right) \tag{21}$$

и произвольной функцией $f_1(t,s) \in \operatorname{Ker} D_1$.

Здесь возможны два случая: $n_0 > n_1 = 0$ и $n_0 > n_1 > 0$. Рассмотрим их подробно.

При выполнении условия $n_0 > n_1 = 0$ уравнение (20) принимает вид $0 = 0$, так как $n_1 = 0$ — это случай сюръективной матрицы D_1 с нулевым проектором Q_1.

При наличии удовлетворяющей условиям (16)–(17) функции $x_1(t,s)$ функция $u_1(t,s)$ находится как частное решение дифференциального уравнения (19), удовлетворяющее условию (18)(b).

В случае сюръективной матрицы D_1 осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции первого шага декомпозиции — построению функции псевдосостояния первого шага расщепления $x_1(t,s)$.

4.1. Схема построения функции $x_1(t,s)$. В качестве определяющей функции $X_1(t,s)$ выбирается любая функция, удовлетворяющая условиям (16)–(17). Построенной определяющей функции $X_1(t,s) \in \boldsymbol{X}_1$ ставится в соответствие функция $\widetilde{x_1(t)}$ (невязка), определяемая формулой

$$\widetilde{x_1(t)} = \gamma_1(t) - X_1(t,0). \tag{22}$$

Затем строится функция состояния в виде

$$x_1(t,s) = X_1(t,s) + \widetilde{x_1(t)}. \tag{23}$$

Построенная таким образом функция псевдосостояния первого шага расщепления $x_1(t,s)$ будет удовлетворять условиям (16)–(17).

4.2. Схема построения функции $u_1(t,s)$. Подстановка функции $x_1(t,s)$ вида (23) в правую часть выражения (21) позволяет найти функцию псевдоуправления первого шага расщепления $u_1(t,s)$ как решение дифференциального уравнения (19) с построенной таким образом функцией $F_1(t,s)$ в виде

$$u_1(t,s) = U_1(t,s) + \widetilde{u_1(t,s)}, \tag{24}$$

где

$$U_1(t,s) = \int\limits_0^s F_1(t,\tau)d\tau + C_1(t), \quad \widetilde{u_1(t,s)} = \int\limits_0^s f_1(t,\tau)d\tau. \tag{25}$$

Функция $C_1(t)$, являющаяся результатом интегрирования, находится из условия (18)(b), т.е.

$$C_1(t) = w_1(t) \tag{26}$$

и функция $U_1(t,s)$ принимает вид

$$U_1(t,s) = \int\limits_0^\tau F_1(t,\tau)d\tau + w_1(t). \tag{27}$$

Далее будем называть функцию $U_1(t,s)$ вида (27) *главной частью управления первого шага*, а функцию $\widetilde{u_1(t,s)}$ вида (25) — *вариативной частью управления первого шага*. Построением пары функций $x_1(t,s)$ и $u_1(t,s)$ на базе выбранной определяющей функции первого шага $X_1(t,s)$ завершается реализация центрального этапа каскадной декомпозиции. Далее осуществляется переход к обратному ходу каскадной декомпозиции — восстановлению функции состояния, удовлетворяющей условиям (2), затем к построению функции управления системы (27).

4.3. О решении задачи управления в случае $\operatorname{Coker} D_1 = \{0\}$. Функция состояния восстанавливается по формуле (14) и, с учетом выражений (23)–(25), имеет вид

$$x(t,s) = X_1(t,s) + \widetilde{x_1(t)} + U_1(t,s) + \widetilde{u_1(t,s)}. \tag{28}$$

В случае $\operatorname{Ker} D_1 = \{0\}$ вариативная часть управления первого шага будет удовлетворять условию

$$\widetilde{u_1(t,s)} = 0, \tag{29}$$

т.е. в случае $n_0 > n_1 = 0$, $m_1 = 0$ выбор определяющей функции первого шага $X_1(t,s)$ однозначно определяет вид функции состояния

$$x(t,s) = X_1(t,s) + \widetilde{x_1(t)} + U_1(t,s), \tag{30}$$

удовлетворяющей условиям (2).

При наличии функции состояния $x(t,s)$ вида (30), с учетом выражения (9) для функции $F(t,s)$ и выражения (13) для функции $U(t,s)$, рассчитывается соответствующая функция управления $u(t,s)$ по общей формуле (12). Как отмечалось выше в п. 3.2, вариативную часть управления без ущерба для реализации динамического процесса можно выбрать из условия $\widetilde{u(t,s)} = 0$.

Таким образом, выбор определяющей функции первого шага $X_1(t,s)$ однозначно определяет и вид функции состояния, и вид функции управления

$$u(t,s) = U(t,s) = \int\limits_0^s F(t,\tau)d\tau = \int\limits_0^s D^- \left(\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} - B\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial s}\right) d\tau. \tag{31}$$

Определение 2. В случае $n_0 > n_1 = 0$, $m_1 = 0$ решением задачи управления (1)–(2) будем называть пару функций $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида (31) и (30) соответственно.

Теорема 2. *В случае $n_1 = 0$ система (1) является полностью управляемой. При выполнении условий (3) и условий $\alpha(s) \in C^1[0,S]$, $\beta(s) \in C^1[0,S]$ в случае $m_1 = 0$ каждой определяющей функции $X_1(t,s) \in \boldsymbol{X}_1$ соответствует единственное решение задачи управления $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида (31) и (30) соответственно.*

При выполнении условия $n > n_0 > n_1 > 0$ реализуется второй шаг декомпозиции исходной системы и т. д.

5. Переход к системе общего вида. Таким образом, в случае $n_0 > n_1 > \ldots n_{i-1} > n_i > 0$, в соответствии со свойствами матрицы $D_{i-1} : \operatorname{Coker} D_{i-2} \to \operatorname{Im} D_{i-2}$, функция псевдосостояния $(i-1)$-го шага расщепляется на компоненты из подпространств следующим образом:

$$x_{i-1}(t,s) = x_i(t,s) + u_i(t,s), \tag{32}$$

где

$$x_i(t,s) = Q_{i-1}x_{i-1}(t,s) \in \operatorname{Coker} D_{i-2}, \quad u_i(t,s) = (I - Q_{i-1})x_{i-1}(t,s) \in \operatorname{Im} D_{i-2}.$$

Функции $x_i(t,s)$ и $u_i(t,s)$ будем называть соответственно функциями псевдосостояния и псевдоуправления i-го шага расщепления. При выполнении условий $\alpha(s) \in C^i[0,S]$, $\beta(s) \in C^i[0,S]$ общий вид совокупности соотношений i-го шага имеет вид:

(a) уравнение для нахождения функции $u_{i-1}(t,s)$:

$$u_{i-1}(t,s) = U_{i-1}(t,s) + \widetilde{u_{i-1}(t,s)}; \tag{33}$$

(b) система i-го шага декомпозиции:

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} = B_i \frac{\partial x_i(t,s)}{\partial s} + D_i \frac{\partial u_i(t,s)}{\partial s}, \tag{34}$$

с условиями

$$\frac{\partial x_i^j(t,s)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \alpha_{ij}(s), \quad \frac{\partial^j x_i(t,s)}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \beta_{ij}(s), \quad j = 0,1,2,\ldots,i, \tag{35}$$

$$\text{(a) } x_i(t,0) = \gamma_i(s), \quad \text{(b) } u_i(t,0) = w_i(t). \tag{36}$$

Функции в уравнении (33) определяются следующим образом:

$$U_{i-1}(t,s) = \int\limits_0^s F_{i-1}(t,\tau)d\tau + C_{i-1}(t), \quad \widetilde{u_{i-1}(t,s)} = \int\limits_0^s f_{i-1}(t,\tau)d\tau. \tag{37}$$

Функция $C_{i-1}(t)$, являющаяся результатом интегрирования, находится из условия (36)(b), и функция $U_{i-1}(t,s)$ принимает вид

$$U_{i-1}(t,s) = \int\limits_0^\tau F_{i-1}(t,\tau)d\tau + w_{i-1}(t). \tag{38}$$

Итак, функция $u_{i-1}(t,s)$ находится как решение уравнения

$$\frac{\partial u_{i-1}(t,s)}{\partial s} = F_{i-1}(t,s) + f_{i-1}(t,s) \tag{39}$$

с неизвестной пока функцией $x_{i-1}(t,s)$, которая определяет вид функции

$$F_{i-1}(t,s) = D_{i-1}^{-}\left(\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial t} - B_{i-1}\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial s}\right), \tag{40}$$

и произвольной функцией $f_{i-1}(t,s) \in \operatorname{Ker} D_{i-1}$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
n_i = \dim \operatorname{Coker} D_{i-1}, \quad m_i = \dim \operatorname{Ker} D_{i-1},\\
B_i = Q_{i-1}B_{i-1}Q_{i-1}, \quad D_i = Q_{i-1}B_{i-1}(I - Q_{i-1}), \quad G_i = Q_{i-1}B_{i-1},\\
\alpha_{i0}(s) = Q_{i-1}\alpha_{i-10}(s) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1 Q\alpha(s),\\
\beta_{i0}(s) = Q_{i-1}\beta_{i-10}(s) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1 Q\beta(s),\\
\gamma_i(t) = Q_{i-1}\gamma_{i-1}(t) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1 Q\gamma(t),\\
w_i(t) = (I - Q_{i-1})\gamma_{i-1}(t) = (I - Q_{i-1})Q_{i-2}\dots Q_1 Q\gamma(t),\\
\alpha_{ij}(s) = G_i\frac{\partial^j \alpha_{i-1j}(s)}{\partial s^j} = G_i G_{i-1}\dots G_2 G_1\frac{\partial^j \alpha(s)}{\partial s^j}, \quad j = 1,2,\dots,i,\\
\beta_{ij}(s) = G_i\frac{\partial^j \beta_{i-1j}(s)}{\partial s^j} = G_i G_{i-1}\dots G_2 G_1\frac{\partial^j \beta(s)}{\partial s^j}, \quad j = 1,2,\dots,i,
\end{gathered} \tag{41}$$

В силу конечномерности исходного пространства $\mathbb{R}^n$ возможны лишь два случая: $n > n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} = n_p$ и $n > n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} > n_p = 0$.

При выполнении условий (3) и условий $\alpha(s) \in C^p[0,S]$, $\beta(s) \in C^p[0,S]$ прямой ход полностью реализуется за p шагов ($n \geqslant p \geqslant 0$) переходом к совокупности соотношений p-го шага, которая включает в себя уравнение для нахождения функции $u_{p-1}(t,s)$

$$\frac{\partial u_{p-1}(t,s)}{\partial s} = F_{p-1}(t,s) + f_{p-1}(t,s) \tag{42}$$

и систему p-го шага декомпозиции

$$\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} = B_p\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial s} + D_p\frac{\partial u_p(t,s)}{\partial s} \tag{43}$$

с условиями

$$\left.\frac{\partial x_p^j(t,s)}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \alpha_{pj}(s), \quad \left.\frac{\partial^j x_p(t,s)}{\partial t^j}\right|_{t=T} = \beta_{pj}(s), \quad j = 0,1,2,\dots,i, \tag{44}$$

$$x_p(t,0) = \gamma_i(t), \tag{45}$$

$$u_p(t,0) = w_p(t), \tag{46}$$

где коэффициенты и функции определяются по формулам (41), с заменой индекса i на p.

Функция $F_{p-1}(t,s)$ в уравнении (42) имеет вид

$$F_{p-1}(t,s) = D_{-1}^{-}\left(\frac{\partial x_{p-1}(t,s)}{\partial t} - B_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}(t,s)}{\partial s}\right), \tag{47}$$

с неизвестной пока функцией $x_{p-1}(t,s)$, а $f_{p-1}(t,s)$ — произвольная функция из подпространства $\operatorname{Ker} D_{p-2}$.

В случае $n_{p-1} = n_p$, т.е. $\dim \operatorname{Coker} D_{p-1} = \dim \operatorname{Coker} D_p$, что означает $D_p = (0)$, система (43) принимает вид

$$\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} = B_p\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial s} \tag{48}$$

и является неуправляемой, так как функция $x_p(t,s)$, найденная как решение дифференциального уравнения (48), в общем случае не будет удовлетворять всем условиям (44)–(45). Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *В случае $D_p = 0$ система (43) с условиями (44)–(45) не является управляемой.*

Неуправляемость системы (43) с условиями (44)–(45) влечет неуправляемость всех систем (34) с условиями (35)–(36) с $i = p-1, p-2, \dots, 2, 1$, что влечет и неуправляемость исходной системы (1).

Доказана следующая лемма.

Лемма 3. *В случае $D_p = (0)$ система* (1) *с условиями* (2) *не является управляемой.*

В случае $n_p = 0$ выполняется условие $\operatorname{Coker} D_p = 0$, т.е. матрица D_p является сюръективной.

При наличии функции $x_p(t,s)$, удовлетворяющей условиям (44)–(45), функция $u_p(t,s)$ находится как частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_p(t,s)}{\partial s} = F_p(t,s) + f_p(t,s) \tag{49}$$

с функцией

$$F_p(t,s) = Dp^{-}\left(\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} - B_p\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial s}\right) \tag{50}$$

и произвольной функцией $f_p(t,s) \in \operatorname{Ker} D_{p-1}$, удовлетворяющее условию (46).

Итак, в случае сюрьективной матрицы D_p осуществляется переход к центральному этапу каскадной декомпозиции, который предполагает выбор определяющей функции и построение функций $x_p(t,s)$ и $u_p(t,s)$.

6. Центральный этап декомпозиции. Строится удовлетворяющая всем $r = 2(p+1)$ условиям (44) функция $X_p(t,s)$, которая называется *определяющей.* Эта функция может быть построена в произвольной форме, например, в виде линейной комбинации линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$ с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$:

$$X_p(t,s) = \sum_{i=1}^{r}\varphi_{pi}(s)\cdot\psi_{pi}(t). \tag{51}$$

В [14] подробно описана схема построения определяющих функций в полиномиальной, экспоненциальной, дробно-рациональной формах. Минимальный набор линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$, выбранных для построения функции $X_p(t,s)$, вида (51), называем базисным набором

$$w(t) = \Big(\psi_{p1}(t),\ \psi_{p2}(t),\ \ldots,\ \psi_{pr}(t)\Big).$$

Сами функции $\psi_{pi}(t)$, $i = 1,\ldots,r$, называем базисными функциями. Число r, равное минимальному количеству базисных функций, определяется количеством условий (44) и называется размерностью базисного набора: $r = \dim w(t) = 2(p+1)$.

В зависимости от вида функций $\alpha_{pj}(s)$, $\beta_{pj}(s)$ в условиях (44), которые, в свою очередь, определяются видом функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ в условиях (2)(a), (2)(b), или от пожеланий исследователя, существует вариативность выбора формы базисных наборов, определяющих, в свою очередь, существование целого класса функций $X_p(t,s)$, удовлетворяющих всем условиям (44) и определяющих аналитический вид решения задачи управления системы (1) с условиями (2).

Определение 3. Совокупность функций $X_p(t,s)$, удовлетворяющих условиям (44), будем называть классом определяющих функций исходной системы и обозначать символом $\boldsymbol{X}_p$.

6.1. Схема построения функции $x_p(t,s)$. Строится определяющая функция $X_p(t,s) \in \boldsymbol{X}_p$. Построенной определяющей функции ставится в соответствие функция $\widetilde{x_p(t)}$ (невязка), определяемая формулой

$$\widetilde{x_p(t)} = \gamma_p(t) - X_p(t,0). \tag{52}$$

Функция $x_p(t,s)$, построенная в виде

$$x_p(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)}, \tag{53}$$

будет удовлетворять всем условиям (44)–(45). Построением функции $x_p(t,s)$ завершается центральный этап декомпозиции. Далее реализуется этап восстановления функции состояния $x(t,s)$.

7. Обратный ход декомпозиции. Подстановка функции $x_p(t,s)$ вида (53) в правую часть выражения (50) позволяет найти функцию $u_p(t,s)$ с построенной таким образом функцией $F_p(t,s)$ как решение дифференциального уравнения (49) в виде

$$u_p(t,s) = U_p(t,s) + \widetilde{u_p(t,s)}, \tag{54}$$

где

$$U_p(t,s) = \int_0^s F_p(t,\tau)d\tau + C_p(t), \quad \widetilde{u_p(t,s)} = \int_0^s f_p(t,\tau)d\tau. \tag{55}$$

Функция $C_p(t)$, являющаяся результатом интегрирования, находится из условия (46), т.е.

$$C_p(t) = w_p(t), \tag{56}$$

и функция $U_p(t,s)$ принимает вид

$$U_p(t,s) = \int_0^\tau F_p(t,\tau)d\tau + w_p(t). \tag{57}$$

Будем называть функцию $U_p(t,s)$ вида (57) *главной частью управления p-го шага*, а функцию $\widetilde{u_p(t,s)}$ вида (55) — *вариативной частью управления p-го шага.*

В соответствии с формулой (32) с заменой индекса i на p с учетом выражений (53) и (57), функция $p-1$-го шага $x_{p-1}(t,s)$ восстанавливается в виде

$$x_{p-1}(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)} + U_p(t,s) + \widetilde{u_p(t,s)}. \tag{58}$$

В случае $m_{p-1} = 0$ вариативная часть управления p-го шага будет удовлетворять условию

$$\widetilde{u_p(t,s)} = 0, \tag{59}$$

т.е. выбор определяющей функции $X_p(t,s)$ однозначно определяет вид функции

$$x_{p-1}(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)} + U_p(t,s). \tag{60}$$

Далее, с рассчитанной по формуле (33) функцией $x_{p-1}(t,s)$, с учетом выражений (40), (38), (37), с заменой индекса i на p, находится функция $u_{p-1}(t,s)$ в общем виде:

$$u_{p-1}(t,s) = U_{p-1}(t,s) + \widetilde{u_{p-1}(t,s)}. \tag{61}$$

Затем восстанавливается функция $p-2$-го шага и т. д.

Далее последовательно (с $i = p-2, p, \dots, 1$) используется цепочка формул

$$x_{i-1}(t,s) = x_i(t,s) + u_i(t,s), \quad F_{i-1}(t,s) = D_{i-1}^- \left(\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial t} - B_{i-1} \frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial s} \right),$$

$$U_{i-1}(t,s) = \int_0^\tau F_{i-1}(t,\tau)d\tau + w_{i-1}(t), \quad u_{i-1}(t,s) = U_{i-1}(t,s) + \widetilde{u_{i-1}(t,s)}.$$

Таким образом, за p шагов обратного хода восстанавливается функция состояния системы (1) в общем виде:

$$x(t,s) = x_p(t,s) + \sum_{i=1}^p u_i(t,s) = X_p(t,s) + \widetilde{x_p(t)} + \sum_{i=1}^p (U_i(t,s) + \widetilde{u_i(t,s)}). \tag{62}$$

Завершающим этапом является построение функции управления системы (1).

Подстановка функции $x(t,s)$ вида (62) в правую часть выражения (9) позволяет найти функцию $u(t,s)$ как решение дифференциального уравнения (7) в виде

$$u(t,s) = U(t,s) + \widetilde{u(t,s)},$$

с главной частью вида

$$U(t,s)=\int_0^s D^-\left(\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}-B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right)d\tau. \tag{63}$$

Теорема 3 (критерий полной управляемости 1)**.** *При выполнении условий $\alpha(s)$, $\beta(s)\in C^p_{[0,S]}$, и* (3) *система* (1) *с условиями* (2) *является полностью управляемой тогда и только тогда, когда существует такое p $(0\leqslant p\leqslant n)$, что D_p — сюръективная матрица.*

При выполнении условий $\operatorname{Ker} D_i=0$, $i=1,2,\ldots,p-1$, функция состояния будет иметь вид

$$x(t,s)=X_p(t,s)+\widetilde{x_p(t)}+\sum_{i=1}^{p}U_i(t,s), \tag{64}$$

так как вариативные части функций всех шагов декомпозиции будут удовлетворять условию $\widetilde{u_i(t,s)}=0$. В этом случае функция состояния будет однозначно определяться выбором определяющей функции $X_p(t,s)$. Соответственно, главная часть управления — функция $U(t,s)$ вида (63) — также будет однозначно соответствовать выбранной определяющей функции $X_p(t,s)$.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 3 *и условий $m_i=0$, $i=1,2,\ldots,p-1$, каждой определяющей функции $X_p(t,s)\in \boldsymbol{X}_p$ соответствует единственное решение задачи управления $U(t,s)$, $x(t,s)$ вида* (63) *и* (64) *соответственно.*

В [9] доказано, что условие $n_p=0$ эквивалентно условию

$$\operatorname{rank}(D\ BD\ \ldots\ B^{p-1}D)=n. \tag{65}$$

Теорема 5 (критерий полной управляемости 2)**.** *При выполнении условий теоремы* 3 *система* (1) *является полностью управляемой тогда и только тогда, когда выполняется условие* (65)*.*

8. Заключение. С применением метода каскадной декомпозиции решена задача программного управления для динамической системы (1) с условиями (2).

Выявлены свойств матричных коэффициентов B и D, влекущих полную управляемость системы (1).

Установлены свойства функций в условиях (2): условия p-кратной дифференцируемости функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, достаточные для реализации управляемого процесса.

Выделен класс определяющих функций из подпространства минимальной размерности, каждому элементу которого соответствует некоторое решение задачи управления. Установлены условия, при выполнении которых каждой определяющей функции соответствует единственная пара функций управления и состояния.

В аналитическом виде построено решение задачи программного управления:

(a) рассчитана функция состояния, удовлетворяющая заданным условиям (2);
(b) построена функция управления вида (62), под воздействием которой система (1) переводится из произвольного начального состояния (2)(a) в произвольное конечное состояние (2)(b) за время $[0,T]$ ($T>0$ произвольно), при этом выполняется условие (2)(c).

Для системы (1) выведены два критерия полной управляемости:

(a) критерий с условием нулевого подпространства $\operatorname{Coker} D_p$;
(b) ранговый критерий с условием Калмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
2. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
3. *Зубова С. П.* Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом// Докл. РАН. — 2012. — *447*, № 6. — С. 599–602.
4. *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Построение управления для получения заданного выхода в системе наблюдения// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2015. — *20*, № 5. — С. 1400–1408.

5. *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2010. — *25*, № 6. — С. 1678–1679.
   // Труды IFAC, Москва, 1960, С. 521- 546.
6. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.
9. *Раецкая Е. В.* Условная управляемость и наблюдамость линейных систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж: ВГУ, 2004.
10. *Раецкая Е. В.* Исследование сингулярно возмущенной системы управления// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2018. — *23*, № 122. — С. 303–307.
11. *Раецкая Е. В.* Алгоритм построения управления динамической системой в частных производных// Модел. сист. процессов. — 2022. — *15*, № 4. — С. 116–127.
12. *Раецкая Е. В.* Алгоритм построения полиномиального решения задачи программного управления для динамической системы в частных производных// Модел. сист. процессов. — 2023. — *16*, № 3. — С. 94–104.
13. *Раецкая Е. В.* Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных// Модел. сист. процессов. — 2023. — *16*, № 1. — С. 93–104.
14. *Раецкая Е. В.* Общая схема построения определяющей функции в задаче управления для динамической системы в частных производных разного порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — *232*. — С. 78–88.
15. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980.
16. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space// J. Math. Sci. — 2015. — *208*, № 1. — С. 119–124.
17. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations// J. Math. Sci. — 2013. — *188*, № 3. — С. 218–226.
18. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — С. 11998–12009.
19. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Control problem for dynamical systems with partial derivatives// J. Math. Sci. — 2021. — *249*, № 6. — С. 11998–12009.
20. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Construction of Control Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System// Automat. Remote Control. — 2018. — *79*, № 5. — С. 774–791.
21. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition// Automat. Remote Control. — 2017. — *78*, № 7. — С. 1189–1202.
22. *Zubova S. P., Trung L. H., Raetskaya E. V.* On polinomial solutions of the linear stationary control system// Automat. Remote Control. — 2008. — *69*, № 11. — С. 1852–1858.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20012).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Раецкая Елена Владимировна (Raetskaya Elena Vladimirovna)
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
(G. F. Morozov Voronezh State Forest Engineering University, Voronezh, Russia)
E-mail: `raetskaya@inbox.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 109–120
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-109-120

УДК 517.547.3, 517.574

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

© 2024 г. **Б. Н. ХАБИБУЛЛИН**

Аннотация. Установлены новые теоремы единственности для голоморфных функций в единичном круге с заданными субгармоническими мажорантами для логарифмов модулей этих голоморфных функций. Результаты сформулированы в терминах распределений корней этих голоморфных функций и распределений масс Рисса субгармонических мажорант. Они основаны на полученной в статье новой шкале неравенств для распределений масс Рисса субгармонических функций на единичном круге при заданных неравенствах между этими функциями.

Ключевые слова: голоморфная функция, распределение корней, субгармоническая функция, распределение масс Рисса, теорема единственности, единичный круг, выпуклые функции.

UNIQUENESS DISTRIBUTIONS FOR HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH GROWTH RESTRICTIONS IN THE UNIT DISC

© 2024 **B. N. KHABIBULLIN**

Abstract. We establish new uniqueness theorems for holomorphic functions in the unit disc with given subharmonic majorants for the logarithms of the modules of these holomorphic functions. The results are formulated in terms of distributions of zeros for these holomorphic functions and Riesz mass distributions for subharmonic majorants. They are based on the new scale of inequalities for Riesz mass distributions of subharmonic functions on the unit disc under given inequalities between these functions.

Keywords and phrases: holomorphic function, zero distribution, subharmonic function, Riesz mass distribution, uniqueness theorem, unit disc, convex functions.

AMS Subject Classification: 30C15, 30J99, 31A05, 26A51

1. Введение. Постановка основных задач. *Пустое множество* обозначаем через $\varnothing$, $\mathbb{N} := \{1,2,\dots\}$ — множество всех *натуральных чисел*, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ — *расширение* множества $\mathbb{N}_0$ со стандартным отношением порядка $\leqslant$ и точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$, для которой $n \leqslant +\infty$ при всех $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. *Множество всех действительных чисел* $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leqslant$ рассматриваем и как *вещественную ось* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ и с *положительной полуосью* $\mathbb{R}^+ := \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| x \geqslant 0\bigr\}$. Порядковое пополнение $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями, обозначаемыми

$$+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \varnothing \notin \mathbb{R}, \quad -\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \varnothing \notin \mathbb{R},$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002).

определяет *расширенную* вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где, наряду со стандартными допустимыми операциям, полагаем

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0, \quad \overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Величина $c \in \overline{\mathbb{R}}$ может рассматриваться и как *функция, тождественно равная* c. Символом 0, наряду с $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $0 \in \mathbb{C}$, могут обозначаться и нулевые функции, меры и т. п.

Будем говорить, что величина $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* при $x \in \overline{\mathbb{R}}^+$; *строго* положительна, когда $0 \neq x \in \overline{\mathbb{R}}^+$; *отрицательна* при $x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$; *строго* отрицательная при $0 \neq x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$. Введем также *положительную* $x^+ := \sup\{0, x\} \in \overline{\mathbb{R}}^+$ и *отрицательную* $x^- := (-x)^+ \in \overline{\mathbb{R}}^+$ части величины $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Будем говорить, что *расширенная числовая функция* $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* (соответственно *отрицательна*), если $f(X) \subset \mathbb{R}^+$ (соответственно $f(X) \subset -\mathbb{R}^+$). Если $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ и для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$), то функция f называется *возрастающей* (соответственно, *строго возрастающей*) на X; функцию f называем *убывающей* (соответственно, *строго убывающей*) на X, если противоположная функция $-f$ является возрастающей (соответственно, строго возрастающей) на X. *Последовательность* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ функций $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ назовем *возрастающая* (соответственно, *убывающая*) на X, если при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ (соответственно, $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$) при всех $x \in X$.

Интервалами с концами $a \leqslant b \in \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *отрезки* $[a, b] := \bigl\{x \in \overline{\mathbb{R}} \bigm| a \leqslant x \leqslant b\bigr\}$, множества $(a, b] := [a, b] \setminus a$, $[a, b) := [a, b] \setminus b$ и (открытые) *промежутки* $(a, b) := [a, b) \setminus a$ и $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$.

Через $\mathbb{D} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < 1\bigr\}$ и $\overline{\mathbb{D}} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| \leqslant 1\bigr\}$, а также $\partial\mathbb{D} := \partial\overline{\mathbb{D}} := \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$ обозначаем соответственно открытый и замкнутый *единичные круги*, а также *единичную окружность* с центром в нуле. При $r \in \mathbb{R}^+$, таким образом, $r\mathbb{D}$ и $r\overline{\mathbb{D}}$, а также $r\partial\mathbb{D} = r\partial\overline{\mathbb{D}} =: \partial(r\overline{\mathbb{D}}) =: \partial(r\mathbb{D})$ — соответственно открытый и замкнутый круги, а также окружность радиуса r с центром в нуле.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — *область*, т.е. открытое связное множество. Любую функцию $Z \colon D \to \overline{\mathbb{N}}_0$ называем *распределением точек* на D (см. [6, пп. 0.1.2–0.1.3]) с *кратностями* $Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ *точек* $z \in D$ *в* Z. Если f — голоморфная функция на области D, то распределение точек

$$\mathsf{Zero}_f \colon z \underset{z\in D}{\longmapsto} \sup\left\{p \in \mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{z\neq w\to z} \frac{|f(w)|}{|w-z|^p} < +\infty\right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0$$

называем *распределением корней* голоморфной функции f на D. По одной из теорем Вейерштрасса либо распределение корней Zero_f на D имеет конечную кратность в каждой точке $z \in D$ и $f \neq 0$, либо $\mathsf{Zero}_f = +\infty$ на D и $f = 0$. Функция f *обращается в нуль на* Z, *если* $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ *на* D.

Распределение точек Z на области D называем *распределением единственности по функции* $M \colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ на D, если любые две голоморфные на D функции f и g, разность $f - g$ которых обращается в нуль на Z, при ограничениях $\ln|f| \leqslant M$ и $\ln|g| \leqslant M$ на D совпадают на D, т.е. $f = g$ на D. В противном случае распределение точек Z называем *распределением неединственности по функции* M на D. Распределение Z — распределение неединственности по функции M, если и только если найдётся голоморфная на D функция $f \neq 0$, которая обращается в нуль на Z и удовлетворяет неравенству $\ln|f| \leqslant M$ на D.

По теории мер и интегрирования придерживаемся терминологии, но не всегда обозначений, из книг Н. С. Ландкофа [2, введение, § 1], Л. К. Эванса и К. Ф. Гариепи [3], Т. Рансфорда [12, дополнение A]. Так, расширенная числовая положительная функция μ на множестве подмножеств множества X называется (внешней) *мерой* на X, если она *счётно субаддитивна* и $\mu(\varnothing) = 0$. Понятие *борелевской меры* на подмножествах в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ общепринятые. *Радоновская мера* на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — это борелевская мера, конечная на компактах. Разности радоновских мер называем *зарядами* соответственно с *верхней, нижней* и *полной вариацией*

$$\nu^+ := \sup\{\nu, 0\}, \quad \nu^- := (-\nu)^+, \quad |\nu| := \nu^+ + \nu^-.$$

Как и в [3, предисловие], если интеграл от функции по мере μ существует и принимает значение из $\overline{\mathbb{R}}$, то эту функцию называем *μ-интегрируемой,* а если этот интеграл ещё и конечен, т.е. со значением в $\mathbb{R}$, то функция *μ-суммируемая.*

Субгармонической функции $u\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ при $u \neq -\infty$ ставится в соответствие радоновская *мера*, или *распределение масс Рисса* (см. [12, гл. 3, п. 3.7], [9, гл. 3, п. 3.5])

$$\varDelta_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u, \quad \text{где } \Delta — \textit{оператор Лапласа,}$$

действующий в смысле теории обобщённых функциях на области D. По определению распределение масс Рисса субгармонической функции $u = -\infty$ на D — это внешняя мера, равная $+\infty$ на любом непустом подмножестве из D. Если M — разность субгармонических и не равных $-\infty$ функций на D, то *распределение зарядов Рисса* функции M однозначно определяется как соответствующая разность распределений масс Рисса представляющей разности субгармонических функций. Для голоморфной на области $D \subset \mathbb{C}$ функции $f \neq 0$ распределение масс Рисса $\varDelta_{\ln|f|}$ субгармонической функции $\ln|f|$ действует на непрерывные положительные функции, а также финитные вещественные или комплексные функции v по правилу

$$\iint\limits_D v \,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|} = \sum_{z\in D} v(z)\,\mathsf{Zero}_f(z) \tag{1}$$

(см. [12, теорема 3.7.8])

Постановка задач. *Пусть M — разность не равных $-\infty$ субгармонических на $\mathbb{D}$ функций, а $u \neq -\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция, для которой имеет место поточечное неравенство $u \leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Каковы тогда соотношения между $\varDelta_u$ и $\varDelta_M$? Исходя из равенства* (1)*, каковы в случае $u = \ln|f| \leqslant M$ с голоморфной на $\mathbb{D}$ функцией $f \neq 0$, обращающейся в нуль на распределении точек Z, соотношения между Z и $\varDelta_M$? Наконец, рассматривается вывод из последних соотношений условий, при которых Z — распределение единственности по функции M на $\mathbb{D}$.*

Достаточно детальная библиография по основной задаче на период до 2018 г. приведена в наших совместных с Ф. Б. Хабибуллиным работах [10, 11]. Основные предшествующие результаты для случая единичного круга $\mathbb{D}$ содержатся в [10]. Приведём их ниже, предварив дополнительными понятиями, обозначениями и соглашениями. Часть результатов статьи была представлена на Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа» в 2024 г. (см. [7]).

2. Предшествующие результаты. Пусть $\varDelta$ — *борелевская мера* или *заряд* на $\mathbb{D}$. Через $\varDelta^{\mathfrak{r}}$ обозначаем *считающую радиальную функцию* для $\varDelta$, определяемую равенствами

$$\varDelta^{\mathfrak{r}}(t) \underset{t\in[0,1)}{:=} \varDelta\bigl(t\overline{\mathbb{D}}\bigr). \tag{2}$$

Для $z \in \mathbb{C}$ через $\arg z \subset \mathbb{R}$ обозначаем множество значений всех её *угловых аргументов*, $\arg 0 := \mathbb{R}$. Для *2π-периодической функции* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ однозначно определены значения $h(\arg z)$ при любых $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а при $z = 0$ полагаем $h(\arg 0) := \sup\bigl\{|h(\theta)| \bigm| \theta \in \mathbb{R}\bigr\}$.

Если $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ограниченная 2π-периодическая функция и *суперпозиция* $h\circ\arg$ является $|\varDelta|$-измеримой, то *считающей радиально-аргументной функцией для $\varDelta$ с весом h* будем называть функцию $\varDelta^{\mathfrak{ra}(h)}$ на интервале $[0,1)$, определяемую равенством

$$\varDelta^{\mathfrak{ra}(h)}(t) \underset{t\in[0,1)}{:=} \iint\limits_{t\overline{\mathbb{D}}} (h\circ\arg)\,\mathrm{d}\varDelta = \iint\limits_{|z|\leqslant t} h(\arg z)\,\mathrm{d}\varDelta(z) \tag{3}$$

(см. [5–10]). В частности, при $h = 1$ это считающая радиальная функция $\varDelta^{\mathfrak{r}}$ и (2).

Будем говорить, что функция $g\colon I \to \mathbb{R}$ *выпукла* на интервале $I \subset \mathbb{R}$, если для любых двух пар $a, b \in I$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из выполнения неравенств $g(x) \leqslant c_1x + c_2$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a,b]$. Будем называть функцию $g\colon I \to \mathbb{R}$ *строго* выпуклой на I, если в предыдущей импликации для внутренних точек $x \in (a,b)$ выполняется строгое неравенство $g(x) < c_1x + c_2$. Функцию назовем (строго) *вогнутой*, если противоположная ей функция (строго) выпуклая.

Будем говорить, что функция $g\colon I\to\mathbb{R}$ *выпукла относительно логарифма* $\ln$ на промежутке $I\subset\mathbb{R}^+$, если для любых двух пар $a,b\in I$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из неравенств $g(x)\leqslant c_1\ln x+c_2$ при $x:=a$ и $x:=b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x\in[a,b]$.

При $\rho\in\mathbb{R}^+$ функция $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *ρ-тригонометрически выпуклой* на $\mathbb{R}$ (см. [1, 4]), если для любых пар чисел $a\leqslant b<a+\pi/p$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из неравенств $h(x)\leqslant c_1\cos\rho x+c_2\sin\rho x$ при $x:=a$ и $x:=b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x\in[a,b]$. При этом часто 1-тригонометрически выпуклые функции называют просто тригонометрически выпуклыми. В дальнейшем потребуются лишь 2π*-периодические* p-тригонометрически выпуклые функции. Любая 0-тригонометрически выпуклая 2π-периодическая на $\mathbb{R}$ функция постоянна.

Теорема A (см. [10, основная теорема]). *Пусть M — разность пары субгармонических не равных $-\infty$ функций на $\mathbb{D}$ с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, $u\neq-\infty$ — субгармоническая функция на D с распределением масс Рисса $\varDelta_u$ и имеет место неравенство $u\leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Тогда для любого $\rho\in\mathbb{R}^+$ найдётся число $C\in\mathbb{R}$, с которым имеет место неравенство*

$$\int\limits_{1/2}^{1} g(1/t-1)\,\mathrm{d}\varDelta_u^{\mathfrak{ra}(h)}(t)\leqslant\int\limits_{1/2}^{1} g(1/t-1)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t)+C \tag{4}$$

для любой 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой функции $h\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ и любой выпуклой функции $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ со значениями $g(0)=0$ и $g(1)\leqslant1$.

Следствие A1 (см. [10, часть основной теоремы]). *Пусть M — разность пары субгармонических не равных $-\infty$ функций на $\mathbb{D}$ с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, Z — распределение неединственности по M на $\mathbb{D}$. Тогда для любого $\rho\in\mathbb{R}^+$ найдётся такое число $C\in\mathbb{R}$, что*

$$\sum_{1/2<|z|<1} g\bigl(1/|z|-1\bigr)h(\arg z)Z(z)\leqslant\int\limits_{1/2}^{1} g\bigl(1/t-1\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t)+C$$

для любой пары функций h, g, такой же, как и в теореме A.

Следствие A2 (см. [10, теорема единственности]). *Пусть $M\neq-\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция с распределением масс Рисса $\varDelta_M$, Z — распределение точек на $\mathbb{D}$, h — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция для некоторого $\rho\in\mathbb{R}^+$, а $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ — выпуклая функция со значением $g(0)=0$. Если голоморфная на $\mathbb{D}$ функция f обращается в нуль на Z, удовлетворяет неравенству $|f|\leqslant\exp M$ на $\mathbb{D}$ и одновременно выполнена пара соотношений*

$$\sum_{1/2<|z|<1} g\bigl(1-|z|\bigr)h(\arg z)Z(z)=+\infty,\quad\int\limits_{1/2}^{1} g\bigl(2(1-t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t)<+\infty,$$

то $f=0$ — нулевая функция на $\mathbb{D}$.

В основе доказательства теоремы A — общая теорема из [10], которая формулируется здесь лишь для ограниченных областей и с использованием обозначений и понятий настоящей статьи.

Теорема B (см. [10, теорема B]). *Пусть M — разность пары субгармонических не равных $-\infty$ функций на ограниченной области D с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, $S\subset D$ — компакт с непустой внутренностью, а субгармоническая на D функция $u\neq-\infty$ с распределением масс Рисса $\varDelta_u$ удовлетворяет неравенству $u\leqslant M$ на D. Тогда существует такое число $C\in\mathbb{R}$, что*

$$\iint\limits_{D\setminus S} v\,\mathrm{d}\varDelta_u\leqslant\iint\limits_{D\setminus S} v\,\mathrm{d}\varDelta_M+C \tag{5}$$

для всех субгармонических положительных функций $v\leqslant1$ на $D\setminus S$, для каждой из которых при любом выборе числа $\varepsilon>0$ найдётся такой свой компакт $K_\varepsilon(v)\subset D$, содержащий S, что

$$v\leqslant\varepsilon\qquad\text{на } D\setminus K_\varepsilon(v). \tag{6}$$

Замечание 1. Теорема B, очевидно, остаётся в силе и при замене в ограничении $v \leqslant 1$ на $D \setminus S$ единицы справа на фиксированное число $b > 0$, т.е. при ограничении $v \leqslant b$ на $D \setminus S$.

Замечание 2. В теореме B нет необходимости требовать субгармоничности функции v всюду на $D \setminus S$. Достаточно потребовать субгармоничности функции v на $D \setminus K$, где фиксированный компакт $K \subset D$ содержит компакт S, а на $K \setminus S$ ограничиться лишь измеримостью по распределениям масс $\varDelta_u$ и $|\varDelta_M|$. Действительно, при $v \leqslant b$ на $D \setminus S$ имеем

$$\iint\limits_{K\setminus S} v \,\mathrm{d}\varDelta_u + \iint\limits_{K\setminus S} v \,\mathrm{d}|\varDelta_M| \leqslant b\varDelta_u(K \setminus S) + b|\varDelta_M|(K \setminus S),$$

где конечная правая часть зависит только от b, u, M и выбора K и S в D. Таким образом, правую часть этого неравенства всегда можно добавить к постоянной C из (5), тем самым сохраняя (5) и для таких функций v после возможного увеличения числа C.

В настоящей статье теорема A со следствиями A1 и A2 развиваются прежде всего по содержанию и общности, но в некоторой мере и по форме. В их обобщениях и развитиях ниже при каждом $\rho \in \mathbb{R}^+$ допускается применение более широких и гибких классов функций, чем рассмотренное выше общее для всех $\rho \in \mathbb{R}^+$ преобразование $t \longmapsto g(1/t - 1)$ выпуклых на $\mathbb{R}^+$ функций g. Случай $\rho = 0$ и более деликатный случай $\rho > 0$ рассматриваем раздельно.

3. Основные результаты в случае $\rho = 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы* A *с* $\rho = 0$ *и* $0 < t_0 \leqslant r_0 < 1$. *Тогда найдётся число* $C \in \mathbb{R}$, *с которым для любой непрерывной функции* $g_0\colon [0, \ln(1/t_0)] \to [0, 1]$, *выпуклой на интервале* $\bigl[0, \ln(1/r_0)\bigr)$ *и со значением* $g_0(0) = 0$, *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_u^{\mathfrak{r}}(t) \leqslant \int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t) + C \tag{7}$$

Доказательство. Будем применять теорему B с замечанием 2 в области $D := \mathbb{D}$ при $S := t_0\overline{\mathbb{D}}$ и $K := t_0\overline{\mathbb{D}}$. По условиям теоремы 1 выполнены все условия теоремы B, касающиеся функций u и M. Рассмотрим определённую на замкнутом кольце $\overline{\mathbb{D}} \setminus r_0\mathbb{D}$ функцию

$$v(z) = g_0\Bigl(\ln\frac{1}{|z|}\Bigr) \quad \text{при } z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus t_0\overline{\mathbb{D}}. \tag{8}$$

Согласно свойствам функции g_0 функция $v \leqslant 1$ непрерывна, положительна и $v = 0$ на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$, т.е. выполняется (6). Выпуклая функция $g_0 \geqslant 0$ на интервале $\bigl[0, \ln(1/r_0)\bigr)$ со значением $g_0(0) = 0$ обязательно возрастает на этом интервале. Следовательно, функция v из (8) субгармонична на $\mathbb{D} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$ как суперпозиция возрастающей выпуклой функции с (суб)гармонической функцией $z \longmapsto \ln(1/|z|)$ вне нуля (см. [9, теорема 2.2], [12, теорема 2.6.3]). Таким образом, функция v удовлетворяет всем требованиям теоремы B. Заключение (5) теоремы B вместе с замечанием 2 даёт неравенство

$$\iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_u(z) \leqslant \iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M(z) + C,$$

которое по определению считающей радиальной функции (2) совпадает с (7). $\square$

Замечание 3. Положительная функция g_0 в силу выпуклости на интервале $\bigl[0, \ln(1/r_0)\bigr)$ и условия $g_0(0) = 0$ автоматически является непрерывной и возрастающей на этом интервале. Требование непрерывности функции g_0 на $\bigl[\ln(1/r_0), \ln(1/t_0)\bigr]$ обеспечивает существование интегралов Римана—Стилтьеса в (7) по считающим радиальным функциям $\varDelta_u^{\mathfrak{r}}$ и $\varDelta_M^{\mathfrak{r}}$. Если рассматривать их как интегралы Лебега—Стилтьеса, то требования к сужению ограниченной функции g_0 на $\bigl[\ln(1/r_0), \ln(1/t_0)\bigr]$ можно и ослабить до измеримости по мерам $\varDelta_u^{\mathfrak{r}}$ и $|\varDelta_M^{\mathfrak{r}}|$ на этом отрезке.

Замечание 4. Суперпозиция выпуклой функции g_0 с функцией $t \longmapsto \ln(1/t)$, использованная в (7), является функцией, выпуклой от логарифма ln.

Следствие 1. *Пусть M — разность пары субгармонических функций на $\mathbb{D}$, не равных $-\infty$, с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, Z — распределение неединственности по функции M на $\mathbb{D}$, а также $0<\rho\in\mathbb{R}^+$ и $0<t_0\leqslant r_0<1$. Тогда найдётся такое число $C\in\mathbb{R}$, что*

$$\sum_{t_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)Z(z)\leqslant\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t)+C \tag{9}$$

для любой функции g_0, такой же, как и в формулировке теоремы 1 *перед* (7).

Доказательство. Для распределения неединственности Z по M на D существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция $f\neq 0$ с распределением корней $\mathsf{Zero}_f\geqslant Z$ на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая неравенству $\ln|f|\leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Для субгармонической функции $u:=\ln|f|$ выполнены все условия теоремы 1. Следовательно, найдётся $C\in\mathbb{R}$, с которым для любой положительной непрерывной на $[0,\ln(1/t_0)]$ функции $g_0\leqslant 1$, выпуклой на интервале $\bigl[0,\ln(1/r_0)\bigr)$ с $g_0(0)=0$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}^{\mathfrak{r}}(t)\leqslant\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t)+C,$$

где левая часть согласно формуле (1) равна

$$\iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}(z)\overset{(1)}{=}\sum_{t_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)\,\mathsf{Zero}_f(z)\geqslant\sum_{t_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)Z(z),$$

а последнее неравенство основано на положительности функции g_0. Отсюда сразу следует (9). □

Следствие 2 (единственности)**.** *Пусть $M\neq-\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция с распределением масс Рисса $\varDelta_M$, Z — распределение точек на $\mathbb{D}$. Если для некоторой непрерывной функции $g_0\colon[0,\ln(1/t_0)]\to[0,1]$, выпуклой на интервале $\bigl[0,\ln(1/r_0)\bigr)$ и со значением $g_0(0)=0$, одновременно выполнена пара соотношений*

$$\sum_{r_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)Z(z)=+\infty,\quad\int\limits_{r_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t)<+\infty, \tag{10}$$

то Z — распределение единственности по функции M на $\mathbb{D}$.

Доказательство. Если бы распределение точек Z было распределением неединственности, то по предыдущему следствию 1 при $t_0=r_0$ конечность интеграла из второго соотношения в (10) по неравенству (7) влекло бы за собой конечность суммы из первого соотношения в (10). □

Следующее утверждение в своей первой части показывает, что теорема 1, а также следствия 1 и 2 при $p=0$ содержат в себе соответственно теорему A, а также и следствия A1 и A2. Вторая часть демонстрирует, что они при $p=0$ строго более общие, чем теорема A и следствия A1 и A2.

Предложение 1. *Пусть функция $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ выпукла со значениями $g(0)=0$ и $g(1)\leqslant 1$. Тогда однозначно определяемая эквивалентными равенствами функция*

$$g_0(x)\underset{x\in\mathbb{R}^+}{:=}g(e^x-1)\quad\Longleftrightarrow\quad g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\underset{t\in(0,1]}{=}g(1/t-1) \tag{11}$$

положительна, непрерывна и выпукла на $\mathbb{R}^+$ со значениями $g_0(0)=0$ и $g_0\leqslant 1$ на $[0,\ln 2]$.

Наоборот, для тождественной функции $g_0(x)\underset{x\in\mathbb{R}}{=}x$, очевидно, обладающей всеми перечисленными после (11) *свойствами, функция g, определяемая равенством*

$$g(e^x-1)\underset{x\in\mathbb{R}^+}{=}g_0(x)=x,\quad\text{т.е.}\quad g(x)\underset{x\in\mathbb{R}^+}{=}\ln(1+x), \tag{12}$$

строго вогнута на $\mathbb{R}^+$, а значит, не выпукла в каждом промежутке из $\mathbb{R}^+$.

Доказательство. Функция g_0, определяемая в (11), выпукла как суперпозиция $g_0 \overset{(11)}{=} g\circ(\exp -1)$ двух возрастающих выпуклых функций g и $\exp -1$. Строгая вогнутость логарифмической функции $g(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{=} \ln(1+x)$ на $\mathbb{R}^+$ очевидна. $\square$

4. Основные результаты в случае $\rho > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* A, *а также условия $\rho > 0$ и $0 < t_0 \leqslant r_0 < 1$. Тогда найдётся число $C \in \mathbb{R}$, с которым для любой 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой функции $h\colon \mathbb{R}\to[0,1]$ и любой непрерывной функции $g_\rho\colon \bigl[t_0^{2\rho},1\bigr]\to[0,1]$, выпуклой на интервале $\bigl(r_0^{2\rho},1\bigr]$ и со значением $g_\rho(1)=0$, имеет место неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{1}\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}\,\mathrm{d}\Delta_u^{\mathfrak{ra}(h)}(t)\leqslant \int\limits_{t_0}^{1}\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}\,\mathrm{d}\Delta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t)+C. \tag{13}$$

Доказательство. Будем применять теорему B с замечаниями 1 и 2 в области $D:=\mathbb{D}$ при $S:=t_0\overline{\mathbb{D}}$ и $K:=r_0\overline{\mathbb{D}}$. При этом выбор постоянной $b\geqslant v$ из замечания 1 указан ниже в (15). По условиям теоремы 1 выполнены все условия теоремы B на функции u и M. Для указанных перед (13) функций h и g_ρ рассмотрим определённую на замкнутом кольце $\overline{\mathbb{D}}\setminus t_0\mathbb{D}$ функцию-произведение

$$v(z):=h(\arg z)\frac{g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr)}{|z|^\rho}\quad \text{при } z\in\overline{\mathbb{D}}\setminus t_0\mathbb{D}. \tag{14}$$

По свойствам функций h и g эта функция, очевидно, непрерывная и положительная на замкнутом кольце $\overline{\mathbb{D}}\setminus t_0\mathbb{D}$, $v=0$ на единичной окружности $\partial\overline{\mathbb{D}}$, что обеспечивает свойство (6), а также

$$\sup v\leqslant \max h\cdot \sup_{t\in[t_0,1]}\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}\leqslant 1\cdot\frac{1}{t_0^\rho}=t_0^{-\rho}=:b. \tag{15}$$

Покажем, что функция v из (14) субгармоническая на открытом кольце $\mathbb{D}\setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$.

Сначала рассмотрим случай дважды дифференцируемых функций h на $\mathbb{R}$ и g_ρ на промежутке $(r_0^{2\rho},1)$ и проведём элементарные вычисления оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{16}$$

от функции v из (14), записанной в полярных координатах как

$$v(te^{i\theta}):=h(\theta)\frac{g_\rho\bigl(t^{2\rho}\bigr)}{t^\rho}\quad\text{при } \theta\in\mathbb{R} \text{ и } t\in(r_0^{2\rho},1). \tag{17}$$

Для первой производной по t имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t}(te^{i\theta})=\rho h(\theta)\bigl(2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-1}-g_\rho(t^{2\rho})t^{-\rho-1}\bigr),$$

откуда легко вычисляется вторая радиальная производная

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(te^{i\theta})=\rho h(\theta)\bigl(4\rho g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2}-2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-2}+g_\rho(t^{2\rho})(\rho+1)t^{-\rho-2}\bigr).$$

После этого вычисление оператора Лапласа в полярных координатах даёт

$$\begin{aligned}\bigl(\Delta v\bigr)(te^{i\theta})&=\rho h(\theta)\Bigl(4\rho g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2}-2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-2}+g_\rho(t^{2\rho})(\rho+1)t^{-\rho-2}\Bigr)+\\&\quad+\frac{1}{t}\rho h(\theta)\bigl(2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-1}-g_\rho(t^{2\rho})t^{-\rho-1}\bigr)+\frac{1}{t^2}h''(\theta)\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}=\\&=4\rho^2h(\theta)g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2}+\rho^2h(\theta)g_\rho(t^{2\rho})t^{-\rho-2}+\frac{1}{t^2}h''(\theta)\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}=\\&=4\rho^2h(\theta)g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2}+\bigl(h''(\theta)+\rho^2h(\theta)\bigr)\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^{\rho+2}}.\end{aligned} \tag{18}$$

Ввиду выпуклости функции g_ρ с $g''_\rho \geqslant 0$ и положительности h положительно первое слагаемое в правой части (18). Для дважды дифференцируемой ρ-тригонометрически выпуклой функции имеет место неравенство $h'' + \rho^2 h \geqslant 0$ (см. [4, гл. I, § 16ж], [1, теорема 26]) и ввиду положительности g_ρ положительно и второе слагаемое в правой части (18). Тем самым, при любом $\rho > 0$ положительность оператора Лапласа (16) от функции v установлена, и функция v — субгармоническая на открытом кольце $\mathbb{D} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$. Снимем условия дважды дифференцируемости h и g_ρ.

Для любой ρ-тригонометрически выпуклой 2π-периодической функции существует убывающая последовательность дважды непрерывно дифференцируемых ρ-тригонометрически выпуклых 2π-периодических функций, стремящаяся к ней (см. [5, предложение 1.7]). Для любой выпуклой на промежутке функции существует убывающая последовательность дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых функций, стремящаяся к ней (см. [8, предложение 1]). Предел убывающей последовательности субгармонических функций даёт субгармоническую функцию. Эти «убывающие» аппроксимации обеспечивают субгармоничность функции v на $\mathbb{D} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$.

Таким образом, функция v из (17) удовлетворяет всем требованиям теоремы B. Заключение (5) теоремы B вместе с замечаниями 1 и 2 даёт неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} h(\arg z)\frac{g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr)}{|z|^\rho}\,\mathrm{d}\varDelta_u(z) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} h(\arg z)\frac{g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr)}{|z|^\rho}\,\mathrm{d}\varDelta_M(z) + C. \tag{19}$$

Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 1 (см. [5], [6], [10, лемма 1]). *Пусть h — 2π-периодическая непрерывная функция на $\mathbb{R}$, функция G непрерывна и ограничена на $(t_0, 1) \subset (0, 1)$, μ — мера или заряд на $\mathbb{D}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} G(|z|)h(\arg z)\,\mathrm{d}\varDelta(z) = \int_{t_0}^{1} G(t)\,\mathrm{d}\varDelta^{\mathfrak{ra}(h)}(t), \tag{20}$$

где справа интегрирование ведётся по определённой в (3) *считающей радиально-аргументной функции $\varDelta^{\mathfrak{ra}(h)}$ меры или заряда $\varDelta$ с весом h.*

Дважды применяя лемму 1 к интегралам из левой и правой частей неравенства (19) при h и t_0 из условия следствия и с функцией $G(t) = g_\rho(t^{2\rho})/t^\rho$, получаем неравенство (13). □

Замечание 5. Положительная функция g_ρ в силу выпуклости на интервале $\bigl(r_0^{2\rho}, 1\bigr]$ и условия $g_\rho(1) = 0$ автоматически непрерывна и убывает на интервале $\bigl(r_0^{2\rho}, 1\bigr]$. Требование непрерывности функции g_ρ на $\bigl[t_0^{2\rho}, r_0^{2\rho}\bigr]$ обеспечивает существование интегралов Римана—Стилтьеса в (13) по возрастающей функции $\varDelta_u^{\mathfrak{ra}(h)}$ и по функции ограниченной вариации $\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}$. Если рассматривать их как интегралы Лебега—Стилтьеса, то требования к сужению ограниченной функции g_ρ на $\bigl[t_0^{2\rho}, r_0^{2\rho}\bigr]$ можно и ослабить до $\varDelta_u^{\mathfrak{ra}(h)}$-измеримости и $|\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}|$-измеримости на $\bigl[t_0^{2\rho}, r_0^{2\rho}\bigr]$.

Следствие 3. *Пусть M — разность пары субгармонических функций на $\mathbb{D}$, не равных $-\infty$, с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, Z — распределение неединственности по функции M на $\mathbb{D}$, а также $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$ и $0 < t_0 \leqslant r_0 < 1$. Тогда найдётся такое число $C \in \mathbb{R}$, что*

$$\sum_{t_0<|z|<1} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} h(\arg z) Z(z) \leqslant \int_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) + C \tag{21}$$

для любой пары функций h, g_ρ, такой же, как и в теореме 2 *перед неравенством* (13).

Доказательство. Для распределения неединственности Z по M на D существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция $f \neq 0$ с распределением корней $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая неравенству $\ln|f| \leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Для субгармонической функции $u := \ln|f|$ выполнены все условия теоремы 2.

Следовательно, найдётся $C \in \mathbb{R}$, с которым для любой положительной непрерывной на $[t_0^{2\rho}, 1]$ функции $g_\rho \leqslant 1$, выпуклой на интервале $\bigl(r_0^{2\rho}, 1\bigr]$ с $g_\rho(1) = 0$, имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho} \,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}^{\mathfrak{ra}(h)}(t) \leqslant \int_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho} \,\mathrm{d}\varDelta_{M}^{\mathfrak{ra}(h)}(t) + C,$$

где левая часть согласно формуле (20) леммы 1 равна

$$\int_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} \,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}^{\mathfrak{ra}(h)}(z) \overset{(20)}{=} \sum_{t_0<|z|<1} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} \,\mathsf{Zero}_f(z) \geqslant \sum_{t_0<|z|<1} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} Z(z),$$

а последнее неравенства следует из $g_\rho \geqslant 0$ и $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$. Отсюда сразу получаем (21). $\square$

Следствие 4 (единственности)**.** *Пусть $M \neq -\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция с распределением масс Рисса $\varDelta_M$, Z — распределение точек на $\mathbb{D}$, $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$. Если для некоторой 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой на $\mathbb{R}$ функции $h \geqslant 0$ и некоторой выпуклой на отрезке $[r_0^{2\rho}, 1] \subset (0, 1]$ функции $g_\rho \geqslant 0$ со значением $g(1) = 0$ выполнена пара соотношений*

$$\sum_{r_0<|z|<1} Z(z) g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr) h(\arg z) = +\infty, \qquad \int_{r_0}^{1} g_\rho(t^{2\rho}) \,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) < +\infty, \tag{22}$$

то Z — распределение единственности по функции M на $\mathbb{D}$.

Доказательство. Если бы распределение точек Z было распределением неединственности, то по предыдущему следствию 3 при $t_0 = r_0$ конечность интеграла из второго соотношения в (22) по неравенству (13) влекло бы за собой конечность суммы из первого соотношения в (22). $\square$

Следующее утверждение в своей первой части показывает, что теорема 2 со следствиями 3 и 4 при $\rho > 0$ содержат в себе соответственно теорему A со следствиями A1 и A2. Вторая часть демонстрирует, что они при $\rho > 0$ строго более общие, чем теорема A и следствия A1 и A2.

Предложение 2. *Пусть функция $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ выпукла со значениями $g(0) = 0$ и $g(1) \leqslant 1$, а также $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$. Тогда функция, однозначно определяемая эквивалентными равенствами*

$$g_\rho(x) \underset{x\in(0,1]}{:=} \sqrt{x}\, g\bigl(x^{-1/(2\rho)} - 1\bigr) \quad \iff g(1/t - 1) \underset{t\in(0,1]}{=} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}, \tag{23}$$

непрерывна на $(0, 1]$, принимает значение $g_\rho(1) = 0$ и выпукла на интервале $\bigl(r_\rho^{2\rho}, 1\bigr]$ при

$$r_\rho := \Bigl(1 - \frac{1}{\rho^2}\Bigr)^+ \in [0, 1). \tag{24}$$

Обратно, пусть $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$ и число $p \in \mathbb{R}^+$ выбрано так, что

$$(\rho - 1)^+ < p < \rho, \quad \text{например, } p := \frac{(\rho - 1)^+ + \rho}{2}. \tag{25}$$

Тогда функция

$$g_\rho(x) = 1 - x^{(\rho+p)/(2\rho)}, \quad g_\rho(1) = 0, \tag{26}$$

непрерывна, положительна, а также выпукла на отрезке $[0, 1]$, т.е. функция (26) обладает всеми перечисленными выше в (23)–(24) свойствами, в то время как функция g, связанная с функцией g_ρ из (26) соотношениями (23), т.е.

$$g(x) \underset{x\in\mathbb{R}^+}{=} (1 + x)^\rho g_\rho\Bigl(\frac{1}{(1 + x)^{2\rho}}\Bigr) \underset{x\in\mathbb{R}^+}{=} (1 + x)^\rho - (1 + x)^{-p} \tag{27}$$

строго вогнута в некоторой правой окрестности нуля, т.е. не выпукла в этой окрестности.

Доказательство. Непрерывность функции g_ρ, определённой первым равенством из (23) на интервале $(0,1]$, очевидна ввиду непрерывности выпуклой функции g на $\mathbb{R}^+$. Кроме того, из первого равенства в (23) следует равенство

$$g_\rho(1) \overset{(23)}{=} \sqrt{1}g\bigl(1^{-1/2\rho}-1\bigr) = g(0) = 0.$$

Замена $x := t^{2\rho}$ в (23) сразу даёт второе эквивалентное равенство-представление из (23). Для доказательства первой части предложения 2 осталось доказать выпуклость функции g_ρ на интервале $\bigl(r_\rho^{2\rho},1\bigr]$ с левым концом (24), которое проведём сначала в предположении дважды дифференцируемости функции g на $(0,+\infty)$. Элементарное вычисление производной

$$g_\rho'(x) = \frac12 x^{-1/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) - \frac{1}{2\rho}x^{-1/(2\rho)-1/2}g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) \quad \text{при } x\in(0,1)$$

для второй производной даёт равенство

$$g_\rho''(x) = -\frac14 x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) + \frac{1}{4\rho^2}x^{-1/(2\rho)-3/2}g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) + \\ + \frac{1}{4\rho^2}x^{-1/\rho-3/2}g''\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) \quad \text{при } x\in(0,1),$$

где последнее слагаемое заведомо положительно в силу выпуклости функции g, откуда

$$g_\rho''(x) \geqslant -\frac14 x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) + \frac{1}{4\rho^2}x^{-1/(2\rho)-3/2}g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) \quad \text{при всех } x\in(0,1). \tag{28}$$

Для выпуклой положительной дифференцируемой функции g на $\mathbb{R}^+$ со значением $g(0)=0$ из элементарных геометрических соображений по соотношениям между секущей и касательной

$$g'(t) \geqslant \frac{g(t)}{t} \quad \text{при всех } t\in(0,+\infty).$$

Применение этого неравенства при $t := x^{-1/(2\rho)}-1$ влечёт за собой неравенство

$$g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) \geqslant \frac{g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)}{x^{-1/(2\rho)}-1} \quad \text{при всех } x\in(0,1).$$

Применение этого неравенства к последнему слагаемому правой части (28) даёт

$$g_\rho''(x) \geqslant -\frac14 x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr) + \frac{1}{4\rho^2}x^{-1/(2\rho)-3/2}\frac{g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)}{x^{-1/(2\rho)}-1} = \\ = \frac14 x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)\left(\frac{1}{\rho^2\bigl(1-x^{1/(2\rho)}\bigr)}-1\right)$$

при всех $x\in(0,1)$. В правой части здесь все сомножители, кроме последнего в скобках, положительны, а последний положителен, если и только если $0<\rho^2\bigl(1-x^{1/(2\rho)}\bigr)\leqslant 1$. При значениях $x\in(0,1)$ это равносильно неравенствам

$$1 > x > \left(\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^+\right)^{2\rho} \overset{(24)}{=} r_\rho^{2\rho}.$$

Таким образом, вторая производная функции g_ρ положительна на промежутке $\bigl(r_\rho^{2\rho},1\bigr)$. Отсюда в силу непрерывности и положительности функции g_ρ на $(0,1]$ и значения $g_\rho(1)=0$ эта функция g_ρ выпукла и на интервале $\bigl(r_\rho^{2\rho},1\bigr]$. Теперь можем перейти к общему случаю.

Произвольная выпуклая на $\mathbb{R}^+$ функция $g\geqslant 0$ со значением $g(0)=0$ возрастает на $\mathbb{R}^+$ и может быть продолжена на $\mathbb{R}$ как чётная непрерывная равенством $g(x):=g(-x)$ при $x\leqslant 0$.

Пусть $k\geqslant 0$ — бесконечно дифференцируемая чётная функция на $\mathbb{R}$ с носителем

$$\operatorname{supp} k\subset(-1/2,1/2), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad k_n(t) \underset{t\in\mathbb{R}}{:=} k(nt)n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Для непрерывной функции g теперь уже на $\mathbb{R}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ свёртка

$$g * k_n \colon x \underset{x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)k_n(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1/2n} \frac{g(x-t)+g(x+t)}{2}k_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Из определения выпуклой функции для любого $x \in \mathbb{R}$ функция

$$t \longmapsto \frac{g(x+t)-g(x-t)}{2} \underset{0<t\to 0}{\longrightarrow} g(x)$$

определена и возрастающая по переменной $t \geqslant 0$. Отсюда свёртки $g * k_n$ образуют убывающую при росте n последовательность выпуклых бесконечно дифференцируемых положительных чётных функций на $\mathbb{R}$, возрастающих на $\mathbb{R}^+$, поточечно стремящуюся к выпуклой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции g. Из классической теоремы Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности непрерывных функций, сходящейся поточечно на компакте к непрерывной функции, следует, что последовательность $g * k_n$ сходится и равномерно к g на отрезках из $\mathbb{R}$. Поэтому последовательность выпуклых положительных бесконечно дифференцируемых функций $g * k_n - (g * k_n)(0)$ сходится равномерно на отрезках из $\mathbb{R}$, принимая значение 0 в нуле. Для таких функций предложение 2 уже доказано. При этом предельный переход кфункции g никак не нарушает конструкций (23)–(24). Тем самым, первая часть (23)–(24) предложения 2 доказана и для произвольных положительных выпуклых на $\mathbb{R}^+$ функций g со значением $g(0) = 0$.

Перейдём к конструкциям второй части предложения 2.

Свойства функции $g_\rho(x) = 1 - x^{(\rho+p)/(2\rho)}$ из (26) очевидны. Так, её выпуклость сразу следует из вогнутости степенной функции с показателем $(\rho+p)/(2\rho) < 1$ ввиду ограничения $p < \rho$ из (25). В то же время вычисление второй непрерывной производной явной функции g из (27) даёт

$$g''(x) \underset{x\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}}{\overset{(27)}{=}} \rho(\rho-1)(1+x)^{\rho-2} - p(p+1)(1+x)^{-p-2},$$

где предельное значение в нуле при $0 < x \to 0$ равно

$$\rho(\rho-1) - p(p+1) = (\rho+p)\big((\rho-1)-p\big) < 0$$

ввиду нижнего ограничения на $p > (\rho-1)^+$ в (25). Это показывает, что функция g из (27) действительно строго вогнута в некоторой правой окрестности нуля. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гришин А. Ф., Малютин К. Г.* Тригонометрически выпуклые функции. — Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2015.
2. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
3. *Эванс Л. К., Гариепи К. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функции. — Новосибирск: Научная книга, 2002.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функции. — М.: ГИТТЛ, 1956.
5. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка// Мат. сб. — 1991. — *182*, № 6. — С. 811–827.
6. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Т. 2. — Уфа: Башкир. гос. ун-т, 2012.
7. *Б. Н. Хабибуллин* Распределения единственности для голоморфных функций на круге// Мат. Междунар. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXV» (Воронеж, 26–30 апреля 2024 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2024. — С. 352–354.
8. *Хабибуллин Б. Н. , Кудашева Е. Г., Мурясов Р. Р.* Полнота экспоненциальных систем в пространствах функций в терминах периметра// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *227*. — С. 79–91.
9. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.

10. *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Zeros of holomorphic functions in the unit disk and ρ-trigonometrically convex functions// Anal. Math. Phys. — 2019. — *9*, № 3. — P. 1087–1098.
11. *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Zeros of holomorphic functions in the unit ball and subspherical functions// Lobachevskii J. Math. — 2019. — *40*, № 5. — P. 648–659.
12. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
13. *Roberts A. W., Varberg D. E.* Convex Functions. — New York–London: Academic Press, 1973.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич (Khabibullin Bulat Nurmievich)
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа
(Institute of Mathematics with Computing Center of the Ufa Federal Research Center
of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)
E-mail: `khabib-bulat@mail.ru`

CONTENTS

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.