

ISSN 2782-4438



# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ  
МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические  
обзоры

Том 209 (2022)



Москва 2022

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

## Современная математика и ее приложения

### Тематические обзоры

### Том 209 (2022)

Дата публикации 12 мая 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска

М. Ш. Бурлуцкая,

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

И. А. Жлябинкова

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

[http://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=9534](http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534)

DOI статей, опубликованных в выпуске

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-3-15>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-16-24>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-25-32>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-33-41>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-42-52>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-53-76>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-77-87>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-88-107>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-108-116>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-209-117-126>

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ  
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ  
(ВИНИТИ РАН)

**ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ**  
**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА**  
**И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**  
**ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ**

**Том 209**

**МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ  
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ  
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.  
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXII»**

**ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2021 г.**

**Часть 2**



**Москва 2022**

## СОДЕРЖАНИЕ

Гиперболичность ковариантных систем уравнений первого порядка для векторного и скалярных полей (Ю. П. Вирченко, А. Э. Новосельцева) . . . . .	3
О построении обобщенных степеней для уравнения Дирака квантовой электродинамики (Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева) . . . . .	16
Об устойчивости по Уламу—Хайерсу решений дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием (Э. З. Зайнуллина, В. С. Павленко, А. Н. Сесекин, Н. В. Гредасова) . . . . .	25
Новая бифуркационная диаграмма в одной модели вихревой динамики (Г. П. Пальшин) . . . . .	33
Задача нахождения начального состояния ресурсной сети (В. А. Скороходов, Я. М. Ерусалимский, С. Ч. Муртузалиева) . . . . .	42
Вольтерровы функциональные уравнения и оптимизация распределенных систем. Особые оптимальные управления (В. И. Сумин) . . . . .	53
Линейные и нелинейные нечеткие средние систем нечетких чисел (В. Л. Хацкевич) . . . . .	77
Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях (М. В. Шамолин) . . . . .	88
Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия (М. В. Шамолин) . . . . .	108
Обобщенная задача контроля в задачах диагностики (М. В. Шамолин) . . . . .	117



## ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ КОВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2022 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. Э. НОВОСЕЛЬЦЕВА

**Аннотация.** Рассмотрен класс систем  $\dot{\mathbf{u}} = L'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$ ,  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = L''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$  квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, описывающих изменение со временем пары  $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$ , состоящей из векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и набора  $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  скалярных полей. Класс состоит из систем, инвариантных относительно трансляций времени  $t \in \mathbb{R}$  и пространства  $\mathbb{R}^3$ , а также преобразующихся ковариантным образом при вращениях  $\mathbb{R}^3$ . Дается описание соответствующего класса нелинейных дифференциальных операторов  $L = \langle L'[\cdot], L''[\cdot] \rangle$  первого порядка, действующих в функциональном пространстве  $C_{1,loc}^{3+N}(\mathbb{R}^3)$ , которые являются генераторами эволюции. Найдены условия, при которых пара  $L$  операторов порождает гиперболическую систему.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор первого порядка, квазилинейная система уравнений, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, сферическая симметрия.

## HYPERBOLICITY OF COVARIANT SYSTEMS OF FIRST-ORDER EQUATIONS FOR VECTOR AND SCALAR FIELDS

© 2022 Yu. P. VIRCHENKO, A. E. NOVOSELTSEVA

**ABSTRACT.** We consider a class of first-order systems of quasilinear partial differential equations  $\dot{\mathbf{u}} = L'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$ ,  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = L''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$  that describe time evolution of the pair  $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$  consisting of a vector field  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and the set of scalar fields  $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . The class considered consists of systems that are invariant under time and space translations and covariant under space rotations. We describe the corresponding class of evolution generators, i.e., nonlinear first-order differential operators  $L = \langle L'[\cdot], L''[\cdot] \rangle$  acting in the functional space  $C_{1,loc}^{3+N}(\mathbb{R}^3)$ . Also, we find conditions under which a pair of operators  $L$  generates a hyperbolic system.

**Keywords and phrases:** first-order differential operator, quasilinear system, hyperbolicity, vector field, covariance, spherical symmetry.

**AMS Subject Classification:** 35F60

**1. Введение.** В этом сообщении мы приводим результаты исследования специальных бесконечномерных динамических систем, описывающих эволюцию полей на  $\mathbb{R}^3$ , начатого нами в предыдущих работах (см. [1–6, 11]). С точки зрения приложений эти динамические системы выделены тем, что они обладают фундаментальными физическими симметриями. В настоящей работе мы рассматриваем систему эволюционных уравнений дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = (L'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}])(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}, t) = (L''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}])(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

в функциональном пространстве  $C_{1,loc}^{3+N}(\mathbb{R}^3)$  наборов  $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$  локально непрерывно дифференцируемых полей на  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\boldsymbol{\rho}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , зависящих от параметра  $t \in \mathbb{R}$ . Они описывают изменение со временем  $t$  векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и набора  $N$  скалярных полей

$\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , оказывающих влияние друг на друга в процессе эволюции. Здесь и далее точка, поставленная над функцией, обозначает частную производную по  $t$ , а генератор эволюции  $\mathbf{L} \equiv \langle \mathbf{L}'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}], \mathbf{L}''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] \rangle$  в (1) представляет собой многокомпонентный квазилинейный дифференциальный оператор первого порядка, действующий в пространстве  $C_{1,\text{loc}}^{N+3}(\mathbb{R}^3)$ .

Мы полагаем, что значения векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \langle u_j(\mathbf{x}, t); j \in \{1, 2, 3\} \rangle$  представляют собой полярные векторы в  $\mathbb{R}^3$ . Оператор  $\mathbf{L}'[\cdot]$  осуществляет отображение

$$\mathbf{L}'[\cdot]: C_{1,\text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3) \rightarrow C_{1,\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3),$$

и поэтому он естественным образом разлагается на декартовы компоненты  $\mathbf{L}'[\cdot] = \langle \mathbf{L}_j[\cdot]; j \in \{1, 2, 3\} \rangle$  согласно декартовым компонентам  $u_j(\mathbf{x}, t)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , векторного поля в левой части (1). Каждая такая компонента осуществляет отображение

$$\mathbf{L}_j[\cdot]: C_{1,\text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3) \rightarrow C_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Общий вид действия каждой компоненты  $\mathbf{L}_j[\cdot]$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , дифференциального оператора  $\mathbf{L}'[\cdot]$  первого порядка в уравнении (1) дается формулой

$$\mathbf{L}_j[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k u_l + \sum_s b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k \rho^{(s)} + H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2)$$

где здесь и далее предполагается, что наличие в математических выражениях повторяющихся парным образом нижних индексов указывает на присутствие в этих формулах суммирования по всем возможным значениям 1, 2, 3 индекса, составляющего каждую из таких пар.

Коэффициенты  $a_{jk;l}$ ,  $b_{jk}^{(s)}$  и слагаемые  $H_j$  представляют собой значения в точке  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t)$  непрерывных на  $\mathbb{R}^3$  сложных функций  $a_{jk;l} \equiv a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_{jk} \equiv b_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $H_j \equiv H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ;  $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ .

Кроме того, в формуле (2) и далее в работе посредством  $\nabla_k$  обозначены дифференциальные операторы  $\partial/\partial x_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ ; таким образом,

$$\nabla_k u_l \equiv \frac{\partial u_l(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Так как  $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}; s = 1, \dots, N \rangle$ , то оператор  $\mathbf{L}''$  также разлагается на  $N$  компонент

$$\mathbf{L}'' = \langle \mathbf{L}^{(s)}[\cdot]; s = 1, \dots, N \rangle,$$

где каждая компонента, представляющая собой квазилинейный дифференциальный оператор первого порядка, осуществляет отображение

$$\mathbf{L}^{(s)}[\cdot]: C_{1,\text{loc}}^{3+N}(\mathbb{R}^3) \rightarrow C_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad s = 1, \dots, N.$$

Результат действия каждой из этих компонент в уравнении (1) дается формулой

$$\mathbf{L}^{(s)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k u_l + \sum_{s'} b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k \rho^{(s')} + H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad s = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где, как и в (2), коэффициенты  $a_{k;l}^{(s)}$ ,  $b_k^{(s,s')}$  и слагаемые  $H^{(s)}$  представляют собой значения в точке  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t)$  непрерывных на  $\mathbb{R}^3$  сложных функций  $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $H^{(s)} \equiv H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $k, l \in \{1, 2, 3\}$ ,  $s = 1, \dots, N$ .

Рассмотрим класс систем уравнений (1) с операторами вида (2), (3), которые подчинены дополнительным условиям. Эти условия формулируются в виде ограничений на коэффициенты  $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ;  $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ ,  $s, s' = 1, \dots, N$ . Целью исследования настоящей работы является нахождение условий гиперболичности систем (1) квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка из этого класса.

**2. Ковариантные системы уравнений.** Дополнительное ограничение, накладываемое на рассматриваемые в настоящей работе системы квазилинейных уравнений, состоит в использовании таких генераторов  $L[\cdot]$  в уравнении (1), которые обладают ковариантностью по отношению к преобразованиям группы  $\mathbb{O}_3$  на пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Уравнения (1) с генераторами  $L[\cdot] = \langle L_j[\cdot], L^{(s)}[\cdot] \rangle$ , определяемыми (2), (3), обладают свойствами однородности при трансляциях времени и пространства  $\mathbb{R}^3$ , так как коэффициенты  $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  и функции  $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  не зависят явно от времени  $t \in \mathbb{R}$  и радиус-вектора  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . В этом случае уравнение (1) инвариантно относительно трансляций времени  $t \Rightarrow t + s$ ,  $s \in \mathbb{R}$  и пространства  $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z} + \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ .

Группа  $\mathbb{O}_3$  состоит из ортогональных  $(3 \times 3)$ -матриц  $\mathcal{A}$ , т.е. матриц, обладающих свойством  $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathcal{I}$ . Обозначим посредством  $L^{(A)}[\cdot]$  дифференциальный оператор, который получается в результате преобразования оператора  $L[\cdot]$  матрицей  $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$ . Так как  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — векторное поле, то при каждом фиксированном  $t \in \mathbb{R}$  его значения в каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  преобразуются в  $(\mathcal{A}\mathbf{u})(\mathbf{x}, t)$ . Компоненты набора  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t)$  являются скалярными полями  $\rho^{(s)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $s = 1, \dots, N$ . Это означает, что при преобразовании  $\mathbb{R}^3$  матрицей  $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$ , каждая из этих компонент остается инвариантной. Тогда требование ковариантности уравнения (1) означает, что оператор  $L[\cdot]$  обладает свойством  $L^{(A)}[\mathcal{A}\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = \mathcal{A}L[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$ .

Так как первая система уравнений в (1) описывает изменение векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  со временем, а вторая система — изменение со временем набора скалярных полей, то свойство ковариантности системы (1) с генератором эволюции  $L[\cdot]$  означает, что ее коэффициенты  $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ , при преобразованиях  $\mathcal{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  в фиксированной точке  $\langle \mathbf{x}, t \rangle \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , изменяются «по нижним индексам» как тензоры, соответственно, 2-го и 3-го рангов в  $\mathbb{R}^3$ , а коэффициенты  $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  и функции  $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  — как векторы в  $\mathbb{R}^3$ . Функции же  $H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  остаются неизменными при этих преобразованиях аргумента.

Заметим, что для простоты изложения мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными векторами и тензорами.

Класс систем уравнений (1), обладающих свойством ковариантности, как и класс дифференциальных операторов  $L[\cdot]$ , определяющих такие системы будем далее обозначать посредством символа  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$ , где нижний индекс указывает на то, что система уравнений (1), описывающая эволюцию набора полей на  $\mathbb{R}^3$ , определяется дифференциальным оператором первого порядка. Сам же набор полей состоит из одного векторного поля и  $N$  скалярных полей. Частным случаем систем уравнений с операторами  $L_j[\cdot]$ ,  $L^{(s)}[\cdot]$  являются системы *дивергентного типа*. В первом случае оператор (2) имеет вид

$$L_j[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = \nabla_k S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) + H_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4)$$

где  $S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  — непрерывно дифференцируемая тензор-функция на  $\mathbb{R}^3$ . Во втором случае, если для какого-то фиксированного  $s$  эволюционное уравнение имеет дивергентный тип, то для этого значения  $s$  действие оператора (3) дается формулой

$$L^{(s)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = \nabla_k S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) + H^{(s)}, \quad (5)$$

где  $S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  — непрерывно дифференцируемая вектор-функция на  $\mathbb{R}^3$ .

Ввиду функциональной независимости тензор-функции  $\nabla_k u_l$  на  $\mathbb{R}^3$  от вектор-функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и каждой вектор-функции  $\nabla_k \rho^{(s)}$  на  $\mathbb{R}^3$  от функции  $\rho^{(s)}(\mathbf{x}, t)$  при  $s = 1, \dots, N$ , из равенств

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial u_l} \nabla_k u_l + \sum_s \frac{\partial S_{jk}}{\partial \rho^{(s)}} \nabla_k \rho^{(s)} = 0, \quad \frac{\partial S_k^{(s)}}{\partial u_l} \nabla_k u_l + \sum_{s'} \frac{\partial S_k^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} \nabla_k \rho^{(s')} = 0$$

следует, что  $\partial S_{jk} / \partial u_l = 0$ ,  $\partial S_{jk} / \partial \rho^{(s)} = 0$ ,  $s = 1, \dots, N$ , т.е. функция  $S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  определена однозначно с точностью до произвольной постоянной матрицы и, аналогично, с точностью до постоянного вектора определены функции  $S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $s = 1, \dots, N$ .

Связь между коэффициентами  $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  и функциями  $S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $S_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  дается следующими формулами:

$$\frac{\partial S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial u_l} = a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad \frac{\partial S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho^{(s)}} = b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial u_l} = a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad \frac{\partial S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho^{(s')}} = b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad s, s' = 1, \dots, N. \quad (7)$$

**3. Системы класса  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$ .** В связи со сформулированным свойством ковариантности уравнения (1), возникает важная, с точки зрения физических приложений, задача об описании класса систем дифференциальных уравнений, обладающих этим свойством. Так как каждая система уравнений полностью определяется наборами своих коэффициентов, то такое описание сводится к описанию всех возможных типов тензор-функций  $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  и вектор-функций  $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ .

Описание тензор-функций  $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $b_{k;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  дается в терминах разложений по наборам форм-инвариантных тензор-функций (см. [10]) или, в другой терминологии (см. [8]), комитантов:

$$a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_3} f_r F_{j,k,l}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} f_r^{(s)} F_{k,l}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad b_{kl}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} g_r^{(s)} F_{k,l}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad (8)$$

где наборы  $\{F_{k,l}^{(r)}(\mathbf{u}); r = 1, \dots, n_2\}$ ,  $\{F_{j,k,l}^{(r)}(\mathbf{u}); r = 1, \dots, n_3\}$  представляют собой базисы в пространствах форм-инвариантных тензор-функций со значениями в виде тензоров, соответственно, 2-го и 3-го ранга. Этим наборам базисных функций соответствуют наборы  $\{f_r; r = 1, \dots, n_3\}$ ,  $\{f_r^{(s)}; r = 1, \dots, n_2\}$ ,  $\{g_r^{(s)}; r = 1, \dots, n_2\}$ ,  $s = 1, \dots, N$  коэффициентных функций, состоящие из произвольных непрерывных функций, зависящих от набора алгебраически независимых инвариантов группы  $\mathbb{O}_3$  и компонент набора  $\boldsymbol{\rho}$ . Этот набор независимых инвариантов называется целым рациональным базисом.

Таким образом, решение указанной выше задачи состоит в построении целого рационального базиса и базисов форм-инвариантных тензор-функций 2-го и 3-го ранга вместе с определением соответствующих им размерностей  $n_2$  и  $n_3$ .

В настоящей публикации, как и в предыдущих работах [1–6, 11], мы указываем решение этой задачи в так называемом сферически симметричном случае, когда имеется единственный инвариант вектора  $\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{u}^2$ , а набор образующих тензорной алгебры, в рамках которой строятся базисы форм-инвариантных функций, состоит из универсального инвариантного тензора второго ранга  $\boldsymbol{\delta}$  — символа Кронекера с компонентами  $\delta_{jk} = \{1, j = k; 0, j \neq k\}$  и вектора  $\mathbf{u}$ . Заметим, что недопустимо использование в качестве образующей тензорной алгебры символа Леви-Чивиты  $\varepsilon_{jkl}$ , так как он является псевдотензором. В этом случае все допустимые вектор-функции  $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  даются формулой  $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = u_j H(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\rho})$ , где  $H(\eta, \boldsymbol{\rho})$  — произвольная непрерывная функция на  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  от инварианта  $\eta$  и набора  $\boldsymbol{\rho}$  скалярных переменных. Соответственно, все вектор-функции  $b_k^{(s,s')}$  имеют вид  $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = u_k g^{(s,s')}(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\rho})$ , где  $g^{(s,s')}(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\rho})$  — произвольные непрерывные функции от  $\mathbf{u}^2$  и компонент набора  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $s, s' = 1, \dots, N$ .

Описание систем дивергентного типа с генератором эволюции, определяемым (4), (5), дается в терминах разложений

$$S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} h_r F_{jk}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad S_k^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = u_k S^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \quad (9)$$

и функций  $S^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $s = 1, \dots, N$ , используя базис  $\{F_{jk}^{(r)}(\mathbf{u}); r = 1, \dots, n_2\}$  форм-инвариантных функций, представляющих тензоры второго ранга, и соответствующего набора  $\{h^{(r)}; r = 1, \dots, n_2\}$  непрерывных коэффициентных функций от того же самого, что и выше, набора переменных.



На основе указанных выше образующих элементов тензорной алгебры можно построить только лишь два линейно независимых тензора второго ранга, которые являются мономерами относительно операций тензорного умножения и свертки, а именно, их компоненты даются выражениями  $F_{jk}^{(1)} = \delta_{jk}$  и  $F_{jk}^{(2)} = u_j u_k$ ,  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ , которые представляют тензоры второго ранга и которые составляют базис для разложений тензор-функций 2-го ранга в (8), (9).

Аналогично убеждаемся, что имеется только лишь четыре линейно независимых монома, которые представляют тензоры третьего ранга:

$$F_{jkl}^{(1)} = \delta_{jk} u_l, \quad F_{jkl}^{(2)} = \delta_{kl} u_j, \quad F_{jkl}^{(3)} = \delta_{jl} u_k, \quad F_{jkl}^{(4)} = u_j u_k u_l, \quad j, k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Они составляют базис в первом разложении в (8) тензоров 3-го ранга.

Таким образом, получаем, что  $n_3 = 4$  и  $n_2 = 2$  и разложения (8) и (9), соответственно, принимают вид

$$a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = f_1 \delta_{jk} u_l + f_2 \delta_{kl} u_j + f_3 \delta_{jl} u_k + f_4 u_j u_k u_l, \quad (10)$$

$$b_{jk}^{(s)} = g_1^{(s)} \delta_{jk} + g_2^{(s)} u_j u_k, \quad a_{k;l}^{(s)} = \delta_{kl} f_1^{(s)} + u_k u_l f_2^{(s)} \quad (11)$$

с непрерывными функциями  $f_r \equiv f_r(\eta, \boldsymbol{\rho})$ ,  $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $f_r^{(s)} = f_r^{(s)}(\eta, \boldsymbol{\rho})$ ,  $g_r^{(s)} = g_r^{(s)}(\eta, \boldsymbol{\rho})$ ,  $r \in \{1, 2\}$ ,  $s = 1, \dots, N$ . Аналогичным образом разложение в (9) превращается в сумму

$$S_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = h_1 \delta_{jk} + h_2 u_j u_k \quad (12)$$

с непрерывными коэффициентными функциями  $h_r \equiv h_r(\eta, \boldsymbol{\rho})$ ,  $r \in \{1, 2\}$ .

Выпишем список линейно независимых дифференциальных операторов первого порядка  $F_{jkl}^{(r)}(\mathbf{u}) \nabla_k u_l$ ,  $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ , соответствующих элементам базиса тензоров 3-го ранга. Нумерация элементов из приводимого ниже списка соответствует указанному выше порядку в этом базисе:

$$(\mathbf{u}, \nabla_j \mathbf{u}), \quad u_j (\nabla, \mathbf{u}), \quad (\mathbf{u}, \nabla) u_j, \quad u_j (\mathbf{u}, (\nabla) \mathbf{u}),$$

где круглыми скобками обозначена операция скалярного умножения заключенных в них векторов. Соответственно, общий вид уравнения  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}'[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$  системы (1) из класса  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ , согласно (10), (11), дается формулой

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= f_1(\mathbf{u}, \nabla_j \mathbf{u}) + f_2 u_j (\nabla, \mathbf{u}) + f_3 (\mathbf{u}, \nabla) u_j + f_4 u_j (\mathbf{u}, (\nabla) \mathbf{u}) + \\ &+ \sum_s (g_1^{(s)} \nabla_j \rho^{(s)} + g_2^{(s)} u_j (\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s)}) + H_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогичным образом система уравнений  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{L}''[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$  из (1) с оператором (3), на основании (11), принимает вид

$$\dot{\rho}^{(s)} = f_1^{(s)} (\nabla, \mathbf{u}) + f_2^{(s)} (\mathbf{u}, (\nabla) \mathbf{u}) + \sum_{s'} g^{(s,s')} (\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s')} + H^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Сформулируем полученный результат в виде отдельного утверждения.

**Теорема 1.** *Для того чтобы система (1) квазилинейных уравнений первого порядка с дифференциальными операторами (2), (3) принадлежала классу  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$  ковариантных систем уравнений для векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и набора  $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$  скалярных полей, необходимо и достаточно, чтобы составляющие ее уравнения представлялись равенствами (13) и (14) с непрерывными коэффициентными функциями от  $\eta \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  и  $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}; s = 1, \dots, N \rangle \in \mathbb{R}^N$ .*

**4. Системы дивергентных уравнений класса  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$ .** Рассмотрим системы (1) квазилинейных уравнений первого порядка с операторами (4), (5), которые имеют дивергентный тип и которые принадлежат классу  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$  систем ковариантных уравнений для векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  на  $\mathbb{R}^3$  и набора  $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$  скалярных полей. На основании (9) и (12), каждая такая система должна иметь следующий вид

$$\dot{u}_j = \nabla_j h_1 + \nabla_k (h_2 u_j u_k) + u_j H, \quad j \in \{1, 2, 3\}; \quad \dot{\rho}^{(s)} = \nabla_k (u_k S^{(s)}) + H^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N, \quad (15)$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями  $h_m$ ,  $m \in \{1, 2\}$ ,  $S^{(s)}$ ,  $H$ ,  $H^{(s)}$ , которые зависят от  $\eta \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  и  $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}; s = 1, \dots, N \rangle \in \mathbb{R}^N$ .

На основе формул (6), для коэффициентов  $a_{jk;l}$ ,  $b_{jk}^{(s)}$  в случае, если система уравнений (1) имеет дивергентный тип, находим

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{jk} = & 2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta}(\mathbf{u}, \nabla_j \mathbf{u}) + 2u_j \frac{\partial h_2}{\partial \eta}(\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}) + h_2[(\mathbf{u}, \nabla)u_j + u_j(\nabla, \mathbf{u})] + \\ & + \sum_s \left( \frac{\partial h_1}{\partial \rho^{(s)}} \nabla_j \rho^{(s)} + u_j \frac{\partial h_2}{\partial \rho^{(s)}}(\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s)} \right). \end{aligned}$$

Сравнение этого разложения с (13) дает следующие связи между коэффициентами

$$2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} = f_1, \quad 2 \frac{\partial h_2}{\partial \eta} = f_4, \quad h_2 = f_2 = f_3, \quad \frac{\partial h_1}{\partial \rho^{(s)}} = g_1^{(s)}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial \rho^{(s)}} = g_2^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Аналогично, исходя из формул (7), в случае дивергентности системы (1), находим

$$\nabla_k S_k^{(s)} = 2 \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \eta}(\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}) + S^{(s)}(\nabla, \mathbf{u}) + \sum_{s'} \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}}(\mathbf{u}, \nabla) \rho^{(s')}, \quad s = 1, \dots, N.$$

Сравнение с (14) дает связи между коэффициентами

$$2 \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \eta} = f_2^{(s)}, \quad S^{(s)} = f_1^{(s)}, \quad \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} = g^{(s,s')}, \quad s, s' = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Совместность выражений для  $f_m$ ,  $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $f_n^{(s)}$ ,  $g_n^{(s)}$   $n \in \{1, 2\}$  и  $g^{(s,s')}$ ,  $s, s' = 1, \dots, N$ , получающихся из формул (16), (17), является критерием того, что система уравнений (1) с операторами (2), (3) является системой дивергентного типа.

**5. Гиперболические системы квазилинейных уравнений.** Обратимся к понятию гиперболической системы квазилинейных уравнений (см. [7, 9]). Сопоставим системе (1) с операторами (2), (3) систему линеаризованных уравнений, которым подчиняется пара  $\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ , состоящая из векторного поля  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \langle v_j(\mathbf{x}, t); j = 1, 2, 3 \rangle$  и набора  $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_s(\mathbf{x}, t); s = 1, \dots, N \rangle$  при фиксации пары  $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$ :

$$\dot{v}_j = a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k v_l + \sum_s b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k \sigma_s + \frac{\partial H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial u_l} v_l + \sum_s \frac{\partial H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho^{(s)}} \sigma_s, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (18)$$

$$\dot{\sigma}_s = a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k v_l + \sum_{s'} b_k^{(s,s')} \nabla_k \sigma_{s'} + \frac{\partial H^{(s)}}{\partial u_l} v_l + \sum_{s'} \frac{\partial H^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} \sigma_{s'}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (19)$$

**Определение 1.** Система уравнений (1) с операторами (2), (3) называется гиперболической в области  $\{ \langle \mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle \in \Omega : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \}$ , где  $\mathbf{q} = \langle q_j; j \in \{1, 2, 3\} \rangle \in \mathbb{R}^3$ , если в соответствующей ей линеаризованной системе уравнений (18), (19)  $((N+3) \times (N+3))$ -матрица  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ , которая определяется следующей блочной структурой

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \begin{pmatrix} T_{jl} & A_j^{(s')} \\ B_l^{(s)} & T^{(s,s')} \end{pmatrix}, \quad j, l \in \{1, 2, 3\}; \quad s, s' \in \{1, \dots, N\} \quad (20)$$

с блоками в виде  $(3 \times 3)$ -матрицы  $T_{jl} = q_k a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $(N \times N)$ -матрицы  $T^{(s,s')} = q_k b_k^{(s,s')}$  и прямоугольными блоками:  $(3 \times N)$ -матрицей  $A_j^{(s')} = q_k b_{jk}^{(s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  и  $(N \times 3)$ -матрицей  $B_l^{(s)} = q_k a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  является диагонализуемой и все ее собственные числа  $\omega^{(m)} \equiv \omega^{(m)}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $m = 1, \dots, N+3$ , вещественны. Система уравнений (1) называется гиперболической, если  $\Omega = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N$ .

Таким образом, условие гиперболичности уравнения (1) состоит в вещественности корней  $\omega^{(m)}$ ,  $m = 1, \dots, N+3$ , уравнения

$$\det(\omega \mathcal{I} - \mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})) = 0 \quad (21)$$

относительно  $\omega$ .

Так как все матричные элементы матрицы  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  линейны по  $\mathbf{q}$ , то при любом вещественном  $\mu \neq 0$  и  $\langle \mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle \in \Omega$ , для решений  $\omega$  уравнения (21) имеет место

$$\det(\omega\mu\mathcal{I} - \mathcal{T}(\mu\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})) = \mu^{N+3} \det(\omega\mathcal{I} - \mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})) = 0,$$

т.е.  $\omega\mu$  является вещественным собственным числом для матрицы  $\mathcal{T}(\mu\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ .

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Область гиперболичности системы уравнений (13), (14) инвариантна относительно умножения вектора  $\mathbf{q}$  на любое число  $\mu \in \mathbb{R}$ . В частности, эта область является центрально-симметричной в пространстве  $\mathbb{R}^3$  векторов  $\mathbf{q}$ .*

**Следствие 1.** *Для того чтобы система (13), (14) была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная, открытая, сколь угодно малая, центрально-симметричная область в пространстве векторов  $\mathbf{q}$ , в которой матрица  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  диагонализуема и все ее собственные числа вещественны.*

**6. Гиперболичность систем класса  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ .** Для определения условий гиперболичности системы уравнений (13), (14) определим соответствующую этой системе матрицу  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  (20) в терминах коэффициентных функций.

Используя (10), находим матричные элементы  $T_{jl}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = q_k a_{jk;l}(\mathbf{u})$ :

$$T_{jl}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = f_1 q_j u_l + f_2 u_j q_l + f_3 \delta_{jl} \xi + f_4 \xi u_j u_l, \quad (22)$$

где введено обозначение  $\xi = \langle \mathbf{q}, \mathbf{u} \rangle$ . Так как  $b_k = u_k g^{(s,s')}$ , то  $T^{(s,s')} = \xi g^{(s,s')}$  и, исходя из (11), остальные матричные блоки определяются формулами

$$A_j^{(s')} = g_1^{(s')} q_j + g_2^{(s')} \xi u_j, \quad B_l^{(s)} = q_l f_1^{(s)} + \xi u_l f_2^{(s)} \quad (23)$$

На основе формул (22), (23) вычислим собственные числа матрицы. Собственные векторы будем разбивать на пары  $\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ , согласно разбиению матрицы  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  на блоки.

Существует исключительный собственный вектор  $\langle [\mathbf{q}, \mathbf{u}], 0 \rangle$  с собственным числом нуль, так как  $(\mathbf{q}, [\mathbf{q}, \mathbf{u}]) = (\mathbf{u}, [\mathbf{q}, \mathbf{u}]) = 0$ , и поэтому  $B_l^{(s)}[\mathbf{q}, \mathbf{u}]_l = 0$ ,  $s = 1, \dots, N$ ;  $T_{jl}[\mathbf{q}, \mathbf{u}]_l = 0$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

Покажем, что пространство, ортогональное этому собственному вектору, инвариантно относительно действия матрицы  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ . Для того чтобы вектор был ортогонален  $\langle [\mathbf{q}, \mathbf{u}], 0 \rangle$  необходимо и достаточно, чтобы его первая компонента  $\mathbf{v}$  была ортогональна  $[\mathbf{q}, \mathbf{u}]$ . Векторы  $\mathbf{v}$ , ортогональные  $[\mathbf{q}, \mathbf{u}]$ , представимы в виде  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{u}$  с некоторыми коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда, действуя матрицей  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  на пары из  $\mathbb{R}^{N+3}$  с первой компонентой в виде  $v_j = \alpha q_j + \beta u_j$ , находим, на основании (22),

$$\begin{aligned} T_{jl} \cdot (\alpha q_l + \beta u_l) &= \left( f_1 q_j u_l + f_2 u_j q_l + f_3 \delta_{jl} \xi + f_4 \xi u_j u_l \right) (\alpha q_l + \beta u_l) = \\ &= q_j \left[ f_1 u_l (\alpha q_l + \beta u_l) + \xi f_3 \alpha \right] + u_j \left[ (f_2 q_l + \xi f_4 u_l) (\alpha q_l + \beta u_l) + \xi f_3 \beta \right] \equiv T^{(1)} q_j + T^{(2)} u_j, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$T^{(1)} = \alpha \xi (f_1 + f_3) + \beta f_1 u^2, \quad T^{(2)} = \alpha (f_2 q^2 + f_4 \xi^2) + \beta \xi (f_2 + f_3 + f_4 u^2). \quad (25)$$

Кроме того, так как, согласно (23),

$$\sum_{s'} A_j^{(s')} \sigma_{s'} = q_j \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'} + u_j \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'},$$

то отсюда следует, что подпространство в  $\mathbb{R}^{N+3}$ , состоящее из пар  $\langle \mathbf{v} = \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ , инвариантно относительно действия матрицы  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ . В связи с этим, все собственные векторы матрицы  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  достаточно находить в подпространстве пар  $\langle \mathbf{v} = \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$  размерности  $N + 2$ . Сформулируем задачу соответствующую задаче определения собственных векторов и собственных чисел в этом подпространстве. Так как

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{jl} & A_j^{(s')} \\ B_l^{(s)} & T^{(s,s')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_l \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{jl} & A_j^{(s')} \\ B_l^{(s)} & T^{(s,s')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha q_l + \beta u_l \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \alpha q_j + \beta u_j \\ \sigma_s \end{pmatrix},$$

то, на основании (24),

$$\omega\alpha q_j + \omega\beta u_j = \left( T^{(1)} + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'} \right) q_j + \left( T^{(2)} + \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'} \right) u_j.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при  $q_j$  и  $u_j$  в обеих частях первого равенства и используя (25), находим

$$\begin{aligned} \omega\alpha &= T^{(1)} + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'} = \xi(f_1 + f_3)\alpha + f_1 u^2 \beta + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'}, \\ \omega\beta &= T^{(2)} + \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'} = (f_2 q^2 + f_4 \xi^2)\alpha + \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2)\beta + \xi \sum_{s'} g_2^{(s')} \sigma_{s'}. \end{aligned}$$

Добавим к этим уравнениям, уравнение для компонент  $\sigma_s$ ,  $s = 1, \dots, N$ ,

$$\omega\sigma_s = B_l^{(s)}(\alpha q_l + \beta u_l) + \xi \sum_{s'} g^{(s,s')} \sigma_{s'} = (q^2 f_1^{(s)} + \xi^2 f_2^{(s)})\alpha + \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)})\beta + \xi \sum_{s'} g^{(s,s')} \sigma_{s'}.$$

Из этих трех равенств получается уравнение, определяющее компоненты собственных векторов  $\langle \alpha, \beta, \sigma \rangle$ ,

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} \equiv \left( \begin{array}{cc|c} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & g_1^{(s')} \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(s')} \\ \hline q^2 f_1^{(s)} + \xi^2 f_2^{(s)} & \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)}) & \xi g^{(s,s')} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma_{s'} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma_s \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где произведено разбиение матрицы  $\mathcal{R}$  на блоки, согласно разбиению собственных векторов на компоненты.

Рассмотрим сначала случай  $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0$ , т.е. случай, когда векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{q}$  перпендикулярны. Тогда матрица  $\mathcal{R}$  в (26) принимает вид

$$\mathcal{R}_0 = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & f_1 u^2 & g_1^{(s')} \\ f_2 q^2 & 0 & 0 \\ \hline q^2 f_1^{(s)} & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (27)$$

Очевидным образом, для диагонализруемости матрицы (27) должны выполняться неравенства

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0, \quad f_1^2 + \sum_s (g_1^{(s)})^2 \neq 0,$$

так как в противном случае матрица  $\mathcal{R}_0$  нильпотентна. Предполагая эти условия выполненными, составим систему уравнений для собственных векторов  $\langle \alpha, \beta, \sigma_s \rangle$ :

$$f_1 u^2 \beta + \sum_{s'} g_1^{(s')} \sigma_{s'} = \omega\alpha, \quad f_2 q^2 \alpha = \omega\beta, \quad f_1^{(s)} q^2 \alpha = \omega\sigma_s.$$

Рассмотрим случай  $\omega = 0$ . Тогда при

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0$$

обязательно либо  $f_2 \neq 0$ , либо  $f_1^{(s)} \neq 0$  при каком-нибудь  $s = 1, \dots, N$  и поэтому из 2-го и 3-го уравнений следует, что  $\alpha = 0$ . Кроме того, в этом случае из первого уравнения следует при

$$f_1^2 + \sum_{s'} (g_1^{(s')})^2 \neq 0,$$

что имеется подпространство векторов  $\langle 0, \beta, \sigma_s \rangle$  размерности  $N$ , которые являются собственными с нулевым собственным значением. Таким образом, может иметься не более двух собственных векторов с ненулевыми собственными числами.

Для  $\omega \neq 0$  из 2-го и 3-го уравнений и условия

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0$$

следует, что  $\alpha \neq 0$ . Умножая первое уравнение на  $\omega$  и подставляя выражения для  $\omega\beta$  и  $\omega\sigma_s$  из 2-го и 3-го уравнений, находим при  $\alpha \neq 0$

$$f_1 f_2 u^2 q^2 + \sum_s g_1^{(s)} f_1^{(s)} q^2 = \omega^2.$$

Тогда необходимым и достаточным условием гиперболичности является неравенство

$$f_1 f_2 u^2 + \sum_s g_1^{(s)} f_1^{(s)} > 0. \quad (28)$$

Его достаточность следует из того, что  $\text{Sp } \mathcal{R}_0 = 0$ , а так как след равен сумме собственных чисел, то должно быть два ненулевых собственных числа  $\omega$  и  $-\omega$ . Сформулируем полученный результат.

**Теорема 3.** *Если  $(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = 0$ , то для гиперболичности системы квазилинейных уравнений (13) и (14) с дифференциальными операторами первого порядка из класса  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$  необходимо и достаточно, чтобы для коэффициентов этой системы выполнялись условия*

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0, \quad f_1^2 + \sum_s (g_1^{(s)})^2 \neq 0$$

и неравенство (28).

**Замечание 1.** Так как гиперболичность системы уравнений (13), (14), согласно определению 1, подразумевает диагонализруемость матрицы  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  и вещественность ее собственных чисел при любых значениях вектора  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , то условия теоремы 3 являются необходимыми для ее гиперболичности в общем случае при отказе от условия  $(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = 0$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  — малые положительные числа. Зафиксируем угол  $(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}})$ , близкий к  $\pi/2$  так, чтобы  $\cos(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}}) = \varepsilon$ . Рассмотрим конечную, открытую, центрально-симметричную область  $\Omega(\varepsilon, \delta)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  векторов  $\mathbf{q}$ , для которой  $|\mathbf{q}| \leq \delta$  и  $\cos(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}}) \geq \varepsilon$ .

**Лемма 1.** *Необходимым и достаточным условием гиперболичности системы (13), (14) в области  $\Omega(\varepsilon, \delta)$  при достаточно малом  $\delta$  является диагонализруемость  $((N+1) \times (N+1))$ -матрицы*

$$\mathcal{R}_g \equiv \left( \begin{array}{cc|c} f_2 + f_3 + f_4 u^2 & & g_2^{(s')} \\ \hline f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)} & & g^{(s,s')} \end{array} \right) \quad (29)$$

и вещественность всех ее собственных чисел.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно пренебречь в матричных элементах матрицы  $\mathcal{R}$  слагаемыми, пропорциональными  $q^2$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}' + O(q^2)$ , учитывая при этом, что  $\xi = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{q}| \cos(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{u}})$ . В результате получаем матрицу  $\mathcal{R}'$  в виде

$$\mathcal{R}' = \left( \begin{array}{cc|c} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & g_1^{(s')} \\ \hline 0 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(s')} \\ \hline 0 & \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)}) & \xi g^{(s,s')} \end{array} \right).$$

Тогда уравнение, определяющее собственные числа  $\omega = \xi\lambda$  этой матрицы, принимает вид

$$\det(\mathcal{R}' - \omega\mathcal{I}) = \det \left( \begin{array}{c|ccc} \xi[(f_1 + f_3) - \lambda] & f_1 u^2 g_1^{(1)} & \dots & g_1^{(N)} \\ \hline 0 & \xi(\mathcal{R}_g - \lambda\mathcal{I}) & & \end{array} \right) = \xi^{N+1} [(f_1 + f_3) - \lambda] \det(\mathcal{R}_g - \lambda\mathcal{I}) = 0,$$

где произведено раскрытие определителя матрицы  $\mathcal{R}' - \omega\mathcal{I}$  по первому столбцу. Собственные векторы матрицы  $\mathcal{R}'$ , соответствующие собственным числам — решениям строятся в виде  $\langle v, \mathbf{0} \rangle$  и  $\langle 0, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ .  $\square$

Теперь мы в состоянии доказать утверждение, которое является основным результатом настоящей работы.

**Теорема 4.** *Для того чтобы система квазилинейных уравнений (13), (14) с дифференциальными операторами первого порядка из класса  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$  была гиперболической, необходимо и достаточно выполнение для коэффициентов этой системы следующей совокупности условий:*

$$f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0; \quad (30)$$

$$f_1^2 + \sum_s (g_1^{(s)})^2 \neq 0; \quad (31)$$

$$f_1 f_2 u^2 + \sum_s g_1^{(s)} f_1^{(s)} > 0; \quad (32)$$

а также диагонализруемость  $((N+1) \times (N+1))$ -матрицы  $\mathcal{R}_g$  (29) и вещественность всех ее собственных чисел.

*Доказательство.* Необходимость выполнения условий теоремы следует из теоремы 3 и леммы 1. Достаточность устанавливаем следующим образом.

Для каждого фиксированного  $\varepsilon > 0$ , согласно лемме 1, найдется такая область  $\Omega(\varepsilon, \delta)$ , для векторов  $\mathbf{q}$  которой система (13), (14) гиперболична. Тогда для любого  $\mu > 0$  в области  $\mu\Omega(\varepsilon, \delta)$  также имеет место гиперболичность этой системы и, следовательно, система (13), (14) гиперболическая в любой области

$$\bigcup_{\mu>0} \mu\Omega(\varepsilon, \delta),$$

которая уже не зависит от  $\delta$ . Следовательно, она является гиперболической в области

$$\bigcup_{\varepsilon>0} \bigcup_{\mu>0} \mu\Omega(\varepsilon, \delta) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{q} : (\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0\}.$$

Наконец, на основании условий теоремы, применяя теорему 3, добавим в эту область гиперплоскость  $\{\mathbf{q} : (\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0\}$ .  $\square$

**Замечание 2.** Смысл утверждения теоремы состоит в том, что она сводит задачу о диагонализруемости матрицы  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  и вещественности ее собственных чисел к аналогичной задаче для матрицы  $\mathcal{R}_g$ , которая не зависит от векторов  $\mathbf{q}$  и ее свойства есть отражение свойств только коэффициентов системы уравнений (13), (14).

**Следствие 2.** *Система квазилинейных дифференциальных уравнений (13), (14) при  $N = 1$  является гиперболической в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

- (i)  $f_2^2 + (f_1^{(1)})^2 \neq 0$ ;
- (ii)  $f_1^2 + (g_1^{(1)})^2 \neq 0$ ;
- (iii)  $f_1 f_2 u^2 + g_1^{(1)} f_1^{(1)} > 0$  и либо
- (iv)  $(f_2 + f_3 + u^2 f_4 - g)^2 + 4g_1^{(1)} (f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)}) > 0$ , либо
- (v)  $g_2^{(1)} = f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)} = 0$ ,  $g = f_2 + f_3 + u^2 f_4$ .

*Доказательство.*  $(3 \times 3)$ -Матрица  $\mathcal{R}$  при  $N = 1$  принимает вид

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & g_1^{(1)} \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(1)} \\ q^2 f_1^{(1)} + \xi^2 f_2^{(1)} & \xi(f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)}) & \xi g \end{pmatrix}, \quad g^{(1,1)} \equiv g.$$

Условия (i)–(iii) приводят к неравенствам, приведенным в формулировке следствия. Соответствующая  $(2 \times 2)$ -матрица

$$\mathcal{R}_g = \begin{pmatrix} \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & \xi g_2^{(1)} \\ \xi(f_1^{(1)} + u^2 f_2^{(1)}) & \xi g \end{pmatrix}$$

диагонализуема в том случае, если ее дискриминант  $D_g = (\text{Sp } \mathcal{R}_g)^2 - 4 \det \mathcal{R}_g \neq 0$ . При этом собственные числа вещественны, если  $D_g > 0$ . Откуда следует при  $\xi \neq 0$  условие (iv). Наконец, если  $D_g = 0$ , то диагонализуемость  $(2 \times 2)$ -матрицы имеет место только в случае кратности ее единичной матрице, что дает при  $\xi \neq 0$  условие (v).  $\square$

**Следствие 3.** *Если совокупность коэффициентов  $g_1^{(s)}, g_2^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, N$ , либо совокупность коэффициентов  $f_1^{(s)}, f_2^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, N$ , равны нулю, то система (13), (14) гиперболическая в том и только в том случае, если  $f_1 f_2 > 0$ , а матрица  $g^{(s,s')}$  диагонализуема и все ее собственные числа вещественны.*

*Доказательство.* При  $g_1^{(s)} = 0, g_2^{(s)} = 0, s = 1, \dots, N$ , матрица  $\mathcal{R}$  принимает вид

$$\mathcal{R} = \left( \begin{array}{cc|c} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 & 0 \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) & 0 \\ \hline q^2 f_1^{(s)} + \xi^2 f_2^{(s)} & \xi(f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)}) & \xi g^{(s,s')} \end{array} \right).$$

Ее собственные числа  $\omega$  определяются уравнением

$$\det(\mathcal{R} - \omega \mathcal{I}) = \det(g^{(s,s')} - \omega \mathcal{I}) \cdot \det(\bar{\mathcal{R}} - \omega \mathcal{I}),$$

где

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \xi(f_1 + f_3) & f_1 u^2 \\ f_2 q^2 + f_4 \xi^2 & \xi(f_2 + f_3 + f_4 u^2) \end{pmatrix}.$$

Аналогичная ситуация имеет место в случае  $f_1^{(s)} = f_2^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, N$ . Для того, чтобы все решения уравнения соответствовали вещественным собственным числам, необходимо и достаточно, чтобы таким свойством обладали решения уравнений

$$\det(g^{(s,s')} - \omega \mathcal{I}) = 0, \quad \det(\bar{\mathcal{R}} - \omega \mathcal{I}) = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно  $\omega$ . Вещественность его решений имеет место тогда и только тогда, когда его дискриминант  $\bar{D} = (\text{Sp } \bar{\mathcal{R}})^2 - 4 \det \bar{\mathcal{R}}$  неотрицателен. Вычисление дискриминанта дает неравенство

$$\bar{D} = \xi^2 (f_2 + f_1 + u^2 f_4)^2 + 4[\mathbf{u}, \mathbf{q}]^2 f_1 f_2 \geq 0,$$

где квадратная скобка означает векторное произведение заключенных в нее векторов. Для того чтобы оно выполнялось для любых векторов  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f_1 f_2 \geq 0$ .

Наконец, допустим что  $f_1 = 0$ . Тогда матрица  $\bar{\mathcal{R}}$  идемпотентна при  $\xi = 0$ . Аналогичная ситуация имеет место при  $f_2 = 0$ . Таким образом, в рассматриваемом случае необходимым и достаточным условием гиперболичности является неравенство  $f_1 f_2 > 0$ .  $\square$

**7. Гиперболичность систем дивергентного типа из класса  $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ .** Опишем класс систем (15) гиперболических ковариантных уравнений дивергентного типа. Это описание получается как следствие из теоремы 4 при учете формул (16), (17) и представляет собой список ограничений на функции  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $S^{(s)}$ , которые следуют из списка условий в формулировке теоремы 4. Из (30) следует, что

$$h_2^2 + \sum_s (S^{(s)})^2 \neq 0,$$

Ограничение (31) означает, что функция  $h_1$  не должна быть постоянной. Из (32) следует неравенство

$$2u^2 h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \sum_s S^{(s)} \frac{\partial h_1}{\partial \rho^{(s)}} > 0.$$

Согласно (16), (17)  $((N + 1) \times (N + 1))$ -матрица  $\mathcal{R}_g$  (29) для системы уравнений дивергентного типа принимает вид

$$\mathcal{R}_g \equiv \left( \begin{array}{c|c} 2h_2 + 2u^2 \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \rho^{(s')}} \\ \hline S^{(s)} + 2u^2 \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \eta} & \frac{\partial S^{(s)}}{\partial \rho^{(s')}} \end{array} \right),$$

которая, согласно последнему условию теоремы, должна быть диагонализированной и все ее собственные числа должны быть вещественными.

**8. Заключение.** Задача, решению которой посвящена работа, является частным случаем общей проблемы, связанной с разработкой физически обоснованных математических методов конструирования адекватных эволюционных уравнений для описания эволюции макроскопических состояний конденсированных сред. Такие уравнения должны удовлетворять фундаментальным, с физической точки зрения, принципам симметрии относительно пространственных и временных трансляций и относительно вращений пространства погружения среды.

В настоящей работе дан ответ на вопрос, как должна выглядеть система эволюционных уравнений в том случае, когда полное описание макроскопического состояния среды осуществляется посредством полярного векторного поля и некоторого набора скалярных (термодинамических) параметров, но при этом не учитывается влияние на эволюцию физических диссипативных процессов в среде. Именно на этом пути эволюция каждой среды описывается квазилинейными системами гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка, которые являются трансляционно инвариантными и ковариантными относительно вращений пространства.

С целью развития этого направления в теории систем дифференциальных уравнений в частных производных необходимо решить задачи, аналогичные той, которая рассмотрена в настоящей работе для произвольного набора векторных и скалярных полей. В частности, важно описать класс возможных гиперболических ковариантных систем уравнений с аксиальным векторным полем вместе с набором скалярных полей. При этом, по-видимому, необходимые и достаточные условия гиперболичности ковариантных систем должны формулироваться таким же образом, как это сделано в настоящей работе. Как легко заметить, смысл теоремы 4 состоит в том, что условиях гиперболичности, даваемых ее формулировкой, не содержится произвольного вектора («волнового»)  $\mathbf{q}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 170. — С. 15–30.
2. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред // Мат. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 25–29 июня 2018 г.). — Уфа, 2018. — С. 262–264.



3. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения// Мат. V Междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. — С. 59.
4. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Мат. IV Всеросс. науч.-практ. конф. «Современные проблемы физико-математических наук» (Орёл, 22–25 ноября 2018 г.). — Орёл, 2018. — С. 83–86.
5. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Ковариантные дифференциальные операторы первого порядка// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 187. — С. 19–30.
6. *Вирченко Ю. П., Новосельцева А. Э.* Гиперболические уравнения первого порядка в  $\mathbb{R}^3$ // Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.). — Воронеж, 2021. — С. 81.
7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
8. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
9. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
10. *Spencer A. G. M.* Theory of invariants// in: Continuum Physics, I. Part III (*Eringen A. C.*, ed.). — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.
11. *Virchenko Yu. P., Subbotin A. V.* The class of evolutionary ferrodynamic equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — 44. — P. 11913–11922.

Вирченко Юрий Петрович  
Белгородский государственный университет  
E-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)

Новосельцева Алина Эдуардовна  
Белгородский государственный технологический университет  
E-mail: [novoseltseva@gmail.com](mailto:novoseltseva@gmail.com)



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 16–24  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-16-24

УДК 517.958

## О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2022 г. Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, Е. А. ЛОШКАРЕВА

**Аннотация.** В работе показано применение метода обобщенных степеней для построения класса решений уравнения Дирака в случае свободной частицы. Указаны возможные обобщения метода, приведены примеры.

**Ключевые слова:** обобщенная степень, уравнение Дирака, оператор, квантовая электродинамика.

## ON THE CONSTRUCTION OF GENERALIZED POWERS FOR THE DIRAC EQUATION OF QUANTUM ELECTRODYNAMICS

© 2022 Yu. A. GLADYSHEV, E. A. LOSHKAREVA

**ABSTRACT.** The paper is devoted to applications of the method of generalized powers for constructing a class of solutions of the Dirac equation in the case of a free particle. Possible generalizations of the method are indicated and examples are given.

**Keywords and phrases:** generalized power, Dirac equation, operator, quantum electrodynamics.

**AMS Subject Classification:** 46S05, 47S05

**1. Введение.** Понятие обобщенных степеней было введено Л. Берсом [6] с целью дальнейшего обобщения методов ТФКП на системы с переменными коэффициентами. Было дано приложение этого понятия для решения задач газодинамики. Этот способ построения последовательности линейно независимых решений далее развивался в работах ряда авторов [1, 2, 4].

Эти вопросы для одного переменного были представлены в [5]. Были введены новые конструкции типа обобщенных степеней с особыми свойствами. Указаны интегральные свойства обобщенных степеней. Было дано приложение метода в теории интерполяции (метод МНК, сплановый метод и т. п.).

Рассмотрение метода обобщенных степеней для большого числа переменных можно найти в монографии [5]. Там же приведено развитие метода для систем уравнений различных типов и порядка производных.

В данном сообщении показано, что метод обобщенных степеней может быть с успехом применен к нахождению большого класса решений системы Максвелла [5, 7] и системы Дирака [4].

После определенной модификации записи системы Дирака выделено два коммутирующих оператора  $D_1$ ,  $D_2$ , что дает возможность построить обобщенные степени. Они удовлетворяют всем требованиям, необходимым для этого, а именно существование особых решений одновременно принадлежащих ядрам операторов  $D_1$ ,  $D_2$ . Выполнено и требование наличия правых обратных для  $D_1$ ,  $D_2$  операторов  $I_1$ ,  $I_2$ :

$$D_1 I_1 = 1, \quad D_2 I_2 = 1.$$

Отметим, что привлекательной чертой метода обобщенных степеней является то, что все результаты даны в явном аналитическом виде и могут быть численно найдены несложными методами.

**2. О форме записи системы Дирака, необходимой для применения обобщенных степеней.** Возьмем системе Дирака квантовой электродинамики, например, согласно [3]. После сокращения на  $\hbar/i$  и замене знака  $\psi_4$  придем в координатах  $t, x_1, x_1, x_3$  к системе

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + ik\right)\psi_1 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} - 2\frac{\partial}{\partial z}\psi_4 = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + ik\right)\psi_2 + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\psi_3 + \frac{\partial\psi_4}{\partial x_3} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - ik\right)\psi_3 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} + 2\frac{\partial}{\partial z}\psi_2 = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - ik\right)\psi_4 - 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\psi_1 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где принято  $k = mc/\hbar$ , скорость света включена в  $t$  и введены операторы

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (2)$$

Эти операторы соответствуют комплексным переменным

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2. \quad (3)$$

Определим также операторы

$$d_{22} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + ik\right)E(2), \quad d_{11} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - ik\right)E(2), \quad (4)$$

где  $E(2)$  — единичная матрица размерности 2. На основе (2) определим пространственные операторы

$$2D_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2\frac{\partial}{\partial z} \\ -2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad 2\bar{D}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & -2\frac{\partial}{\partial z} \\ 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

По (1)–(5) запишем систему

$$\begin{cases} d_{22}v_1 + 2\bar{D}_3v_2 = 0, \\ d_{11}v_2 + 2D_3v_1 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $v_1, v_2$  — вектор-столбцы

$$v_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Решение системы (6), так же как и системы (1), определено в четырехмерном комплексном пространстве (обозначим его  $L_c(4)$ ), ибо  $v_1, v_2$  — двумерные вектор-столбцы с комплексными компонентами. В квантовой электродинамике, имея в виду закон их преобразования при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, их называют спинорами. Если считать, что все компоненты спинора  $\psi$  дважды непрерывно дифференцируемы, то из (6) найдем

$$d_{22}d_{11}v_i - 4\bar{D}_3D_3v_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

т.е. удовлетворяют уравнению Клейна, ибо

$$d_{22}d_{11}v_i - 4D_3\bar{D}_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta(3) + k^2. \quad (9)$$

Здесь в скобках после оператора  $\Delta$  указано число независимых переменных.

Введем так называемую присоединенную систему, переставив операторы  $d_{11}$ ,  $d_{22}$ :

$$\begin{cases} d_{11}\tilde{v}_1 + 2\bar{D}_3\tilde{v}_2 = 0, \\ d_{22}\tilde{v}_2 + 2D_3\tilde{v}_1 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\tilde{v}_1$ ,  $\tilde{v}_2$  — ее решение. Очевидно,

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_3 \\ \tilde{\psi}_4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Пространство решений  $\tilde{v}_1$ ,  $\tilde{v}_2$  присоединенной системы — также комплексное и четырехмерное — следует рассматривать как особое присоединенное пространство. Обозначим его  $\tilde{L}_c(4)$ .

**3. Общие принципы построения обобщенных степеней для системы Дирака.** В п. 2 система была записана в форме, когда выделены два оператора  $D_1$ ,  $D_2$ . Для возможности построения обобщенных степеней необходимо свойство перестановочности этих операторов. Но эти операторы не коммутируют, в чем можно убедиться непосредственно. Однако они имеют вид, который допускает, как это показано в [5], построение на их основе коммутирующих операторов. Приведем эти соображения, следуя монографии [5].

Пусть заданы два матричных дифференциальных оператора вида

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} \\ d_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

причем любой оператор из набора  $D_1$  коммутирует с любыми операторами, входящими в матрицу во втором операторе  $D_2$ . Легко установить, что они не коммутируют даже при этом условии. Как показано в [5], операторы

$$D_{1C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{22} \\ d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{2C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{12} \\ 0 & 0 & d_{21} & 0 \\ 0 & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

коммутируют. Операторы  $D_{1C}$ ,  $D_{2C}$  действуют в 8-мерном комплексном пространстве. Векторы этого пространства обозначим заглавной большой буквой  $V$ , а двумерные компоненты —  $v_i$ .

Далее примем, что  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  определены в (4). Введем операторы  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  соотношениями

$$d_{12} = 2\bar{D}_3, \quad d_{21} = 2D_3,$$

где  $D_3$ ,  $\bar{D}_3$  были определены в (5). В этом случае легко убедиться, что система

$$(D_{1C} + D_{2C})V = 0 \quad (14)$$

включает как основную систему (6), так и присоединенную (10). Система (14) содержит 8 уравнений для восьми комплексных функций  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_4$ ,  $\tilde{\psi}_1$ ,  $\tilde{\psi}_2$ ,  $\tilde{\psi}_3$ ,  $\tilde{\psi}_4$ . Это следует из соотношений

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix},$$

и соответственно

$$v_3 = \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} v_{41} \\ v_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_3 \\ \tilde{\psi}_4 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что это увеличение (удвоение размерности) носит принципиальный характер и связано с тем, что построение бинарных обобщенных степеней требует выполнения условий коммутативности основных операторов  $D_{1c}$ ,  $D_{2c}$ .

Отметим, что из (14) следует возможность введения «потенциалов»  $W$  для уравнения Дирака, определив их следующим образом:

$$V = (D_{1c} - D_{2c})W.$$

Вследствие коммутативности  $D_{1c}$ ,  $D_{2c}$  имеем

$$(D_{1c}^2 - D_{2c}^2)W = 0.$$

Используя (13), получаем уравнение для каждой компоненты спинора  $W$ .

Для возможности построения обобщенных степеней важно существование правых обратных операторов. Можно убедиться, что если операторы  $d_{ik}$ ,  $i, k = \overline{1, 2}$ , имеют соответствующие правые обратные  $I_{ik}$ :

$$d_{ik}I_{ik} = 1;$$

для  $I_{1C}$ ,  $I_{2C}$  имеем

$$I_{1C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{11} \\ I_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{2C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}I_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\bar{I}_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{I}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_{1c}I_{1c} = D_{2c}I_{2c} = 1. \quad (15)$$

Более подробно вопрос о конкретном виде и особенностях операторов обсуждается ниже.

Последнее основное требование состоит в существовании обобщенной константы. Это вектор  $C$  с компонентами  $c_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , удовлетворяющий системе

$$d_{22}c_1 = d_{11}c_2 = d_{11}c_3 = d_{22}c_4 = d_{21}c_1 = d_{12}c_2 = d_{21}c_3 = d_{12}c_4 = 0. \quad (16)$$

Напомним, что  $c_i$  — двумерные комплексные векторы. Более подробно этот вопрос будет изучен в п. 4, 5.

Для построения бинарных обобщенных степеней требуется надо найти произведение типа  $I_{1C}^p$ ,  $I_{2C}^q$  и подействовать на обобщенную константу

$$X_1^{(p)}X_2^{(q)}C = p!q!I_{1C}^pI_{2C}^qC. \quad (17)$$

Из свойств операторов  $I_{1C}$ ,  $I_{2C}$  вытекают очевидные соотношения

$$D_{1C}X_1^{(p)}X_2^{(q)}C = pX_1^{(p-1)}X_2^{(q)}C, \quad D_{2C}X_1^{(p)}X_2^{(q)}C = qX_1^{(p)}X_2^{(q-1)}C. \quad (18)$$

Запишем их в развернутой форме:

$$\begin{aligned} X_1^{(p)}X_2^{(q)}C &= p!q! \begin{pmatrix} (I_{22}I_{11})^i(I_{21}I_{12})^j c_1 \\ (I_{11}I_{22})^i(I_{12}I_{21})^j c_2 \\ (I_{11}I_{22})^i(I_{21}I_{12})^j c_3 \\ (I_{22}I_{11})^i(I_{12}I_{21})^j c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(p)}X_2^{(q)}c_1 \\ \tilde{X}_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_2 \\ \tilde{X}_1^{(p)}X_2^{(q)}c_3 \\ X_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_4 \end{pmatrix}, & p = 2i, \quad q = 2j, \\ X_1^{(p)}X_2^{(q)}C &= p!q! \begin{pmatrix} (I_{22}I_{11})^i I_{21}(I_{12}I_{21})^j c_4 \\ (I_{11}I_{22})^i I_{12}(I_{21}I_{12})^j c_3 \\ (I_{11}I_{22})^i I_{21}(I_{12}I_{21})^j c_2 \\ (I_{22}I_{11})^i I_{12}(I_{21}I_{12})^j c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(p)}X_2^{(q)}c_4 \\ \tilde{X}_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_3 \\ \tilde{X}_1^{(p)}X_2^{(q)}c_2 \\ X_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_1 \end{pmatrix}, & p = 2i, \quad q = 2j + 1, \\ X_1^{(p)}X_2^{(q)}C &= p!q! \begin{pmatrix} I_{22}(I_{11}I_{22})^i(I_{21}I_{12})^j c_3 \\ I_{11}(I_{22}I_{11})^i(I_{12}I_{21})^j c_4 \\ I_{11}(I_{22}I_{11})^i(I_{21}I_{12})^j c_1 \\ I_{22}(I_{11}I_{22})^i(I_{12}I_{21})^j c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(p)}X_2^{(q)}c_3 \\ \tilde{X}_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_4 \\ \tilde{X}_1^{(p)}X_2^{(q)}c_1 \\ X_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_2 \end{pmatrix}, & p = 2i + 1, \quad q = 2j, \\ X_1^{(p)}X_2^{(q)}C &= p!q! \begin{pmatrix} I_{22}(I_{11}I_{22})^i I_{21}(I_{12}I_{21})^j c_2 \\ I_{11}(I_{22}I_{11})^i I_{12}(I_{21}I_{12})^j c_1 \\ I_{11}(I_{22}I_{11})^i I_{21}(I_{12}I_{21})^j c_4 \\ I_{22}(I_{11}I_{22})^i I_{12}(I_{21}I_{12})^j c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(p)}X_2^{(q)}c_2 \\ \tilde{X}_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_1 \\ \tilde{X}_1^{(p)}X_2^{(q)}c_4 \\ X_1^{(p)}\tilde{X}_2^{(q)}c_3 \end{pmatrix}, & p = 2i + 1, \quad q = 2j + 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Ниже будет приведено подробное рассмотрение специфики построения обобщенных степеней для уравнения (14) и указан вид обобщенной константы.

В формулы (19) входят обобщенные константы, обозначенные  $c_i$ . Решения  $C$  должны удовлетворять соотношениям

$$D_{1c}C = D_{2c}C = 0, \quad (20)$$

т.е. они принадлежат ядрам указанных операторов. Установим структуру этих функций, учитывая условие (20). Будем искать их методом разделения переменных, ибо это самый простой способ удовлетворить (20). Для обобщенных констант имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{10}e^{-ikt}c_1(\bar{z}_3), & c_2 &= c_{20}e^{ikt}c_2(z_3), \\ c_3 &= c_{30}e^{ikt}c_3(\bar{z}_3), & c_4 &= c_{40}e^{-ikt}c_4(z_3). \end{aligned} \quad (21)$$

Вид первого сомножителя очевиден из вида операторов  $d_{11}$ ,  $d_{22}$ . Второй сомножитель является двухкомпонентным спинором. Конкретные выражения для функций  $c_1(\bar{z}_3)$ ,  $c_2(z_3)$ ,  $c_3(\bar{z}_3)$ ,  $c_4(z_3)$  обсуждаются в п. 4, 5.

**Теорема 1.** *Линейная комбинация  $V_n$  вида*

$$V_n = \sum_{i=0}^n (-1)^n C_n^i X_1^{(n-1)} X_2^{(i)} C$$

*является элементом ядра оператора*

$$\bar{D}_z = \frac{1}{2}(D_{1c} + D_{2c}),$$

где  $D_{1c}$ ,  $D_{2c}$  определены в (13), а бинарные степени – в (19).

Доказательство основано на использовании свойства (17) бинарных степеней.

Полезно ввести для  $V_n$  символическое выражение

$$V_n = (X_1 + X_2)^n C. \quad (22)$$

Тогда результат теоремы 1 примет вид

$$\bar{D}_z(4)Z^n C = 0. \quad (23)$$

**Теорема 2.** *Имеет место формула дифференцирования  $\bar{D}_z(4)Z^n C = nZ^{n-1}C$ .*

Доказательство основано на использовании формулы  $D_z(4) = \frac{1}{2}(D_{1c} - D_{2c})$ .

**Теорема 3.** *При условии покомпонентной сходимости к функциям класса  $C^{(i)}$  решение уравнения (14) задается рядом*

$$f(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} Z^{(i)} C.$$

**4. Построение обобщенных степеней метагармонического семейства.** Поскольку операторы  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  можно представить в виде

$$d_{11} = e^{ikt} \frac{d}{dt} (e^{-ikt} \dots), \quad d_{22} = e^{-ikt} \frac{d}{dt} (e^{ikt} \dots),$$

правые обратные имеют вид

$$I_1 = e^{-ikt} \int_{t_0}^t d\xi e^{ik\xi} \dots, \quad I_2 = e^{ikt} \int_{t_0}^t d\xi e^{-ik\xi} \dots$$

Перейдем к непосредственному вычислению обобщенных степеней. Путем прямого интегрирования на основе (3) найдем несколько степеней. Легко видеть, что для их нахождения надо найти выражения

$$X^{(2i)} = (2i)!(I_{22}I_{11})^i e^{-ikt} c_1, \quad \tilde{X}^{(2i+1)} = (2i+1)!I_{11}(I_{22}I_{11})^i e^{-ikt} c_2, \quad (24)$$

введенные Берсом (см. [6]). Прямое интегрирование приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(0)} e^{-at} c &= c e^{-at}, \\ X^{(1)} e^{-at} c &= \frac{1}{2a} (e^{at} - e^{-at}) c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{(2)} e^{-at} c &= \frac{2}{(2a)^2} [e^{at} + (-1 + 2at)e^{-at}] c, \\ X^{(3)} e^{-at} c &= \frac{3!}{(2a)^3} [(-2 + 2at)e^{at} + (2 + 2at)e^{-at}] c, \\ \tilde{X}^{(4)} e^{-at} c &= \frac{4!}{(2a)^4} [(-3 + 2at)e^{at} + (3 + 4at + 2a^2 t^2)e^{-at}] c, \\ X^{(5)} e^{-at} c &= \frac{5!}{(2a)^5} [(6 - 6at + 2a^2 t^2)e^{at} + (-6 - 6at - 2a^2 t^2)e^{-at}] c, \\ \tilde{X}^{(6)} e^{-at} c &= \frac{6!}{(2a)^6} \left[ (10 - 8at + 4a^2 t^2)e^{at} + \left( -10 - 12at - 6a^2 t^2 - \frac{4}{3} a^3 t^3 \right) e^{-at} \right] c,\end{aligned}$$

где  $a = ik$ . На основе этих соотношений можно прийти к определенному выводу о структуре этих выражений. Прежде всего имеем

$$X^{(n)}(t, 0) = m_1 e^{at} + m_2 e^{-at}. \quad (25)$$

Здесь  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$  — некоторые многочлены от  $t$ , причем имеем в явной форме

$$\tilde{X}^{(2i)} = \left( \sum_{k=0}^{i-1} a_k^{(2i)} t^k \right) e^{at} + \left( \sum_{k=0}^i b_k^{(2i)} t^k \right) e^{-at}, \quad (26)$$

$$X^{(2i+1)} = \left( \sum_{k=0}^i a_k^{(2i+1)} t^k \right) e^{at} + \left( \sum_{k=0}^i b_k^{(2i+1)} t^k \right) e^{-at}. \quad (27)$$

Для нахождения коэффициентов основных многочленов  $m_1$ ,  $m_2$  воспользуемся основным свойством  $\tilde{X}^{(2i)}$  и  $X^{(2i+1)}$ :

$$d_{11} X^{(2i+1)} = (2i+1) \tilde{X}^{(2i)}. \quad (28)$$

Применим оператор  $d/dx - a$  к  $X^{(2i+1)}$ :

$$\left( \frac{d}{dx} - a \right) \left( \sum_{k=0}^i a_k^{(2i+1)} t^k \right) e^{at}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^i a_k^{(2i+1)} k t^k = \sum_{k=0}^{i-1} a_k^{(2i)} t^k = \sum_{k=0}^{i-1} a_{k+1}^{(2i+1)} (k+1) t^k. \quad (29)$$

Поскольку это соотношение справедливо при любом  $t$ , имеем

$$a_{k+1}^{(2i+1)} (k+1) = a_k^{(2i)}. \quad (30)$$

Предполагая, что  $a_k^{(2i)}$  известно, найдем  $a_{k+1}^{(2i+1)}$  через  $a_k^{(2i)}$ . Однако  $a_0^{(2i+1)}$  не определяется из этих соотношений; оно будет определено далее из условий обращения обобщенных степеней при  $t = 0$  в нуль.

Для примера рассмотрим переход от  $\tilde{X}^{(2)}$  к  $\tilde{X}^{(3)}$  согласно (24):

$$a_D^{(2)} = \frac{1}{(2a)^2} = a_1^{(3)} = \frac{2a}{(2a)^3},$$

откуда  $a_1^{(3)} = 2a$ , что совпадает с (24). Для перехода от  $\tilde{X}^{(4)}$  к  $\tilde{X}^{(5)}$  находим

$$a_1^{(5)} = \frac{1}{1} a_0^{(4)} = -3 = -\frac{6a}{(2a)^3}, \quad a_2^{(5)} = \frac{1}{2} \frac{2a}{(2a)^4} = \frac{2a^2}{(2a)^5},$$

что также совпадает с (24).

Перейдем к нахождению коэффициентов  $b_k^{(2i+1)}$  многочлена  $m_2$ . Часть при  $e^{-at}$  имеет вид

$$\sum_{k=0}^i b_k^{(2i+1)} t^k e^{-at}. \quad (31)$$

Применяя  $d_{11}$  к равенству

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right) \left(\sum_{k=0}^i b_k^{(2i+1)} t^k e^{at}\right) = \sum_{k=0}^i b_k^{(2i+1)} k t^{k-1} - 2a \sum_{k=0}^i b_k^{(2i+1)} t^k = \sum_{k=0}^i b_k^{(2i)} t^k$$

или

$$\sum_{k=0}^{i-1} b_{k+1}^{(2i+1)} (k+1) t^k - 2a \sum_{k=0}^i b_k^{(2i+1)} t^k = \sum_{k=0}^i b_k^{(2i)} t^k, \quad (32)$$

приходим к соотношению

$$b_{k+1}^{(2i+1)} - 2ab_k^{(2i+1)} = b_k^{(2i)}.$$

Особенность таких рекуррентных соотношений состоит в том, что их надо использовать начиная с  $k = i$ , что дает

$$-2ab_i^{(2i+1)} = b_i^{(2i)},$$

и так далее до  $k = 0$ . Например, согласно (24) найдем

$$b_2^{(4)} = -\frac{2a}{(2a)^4}, \quad b_2^{(5)} = \frac{2a^3}{(2a)^5}.$$

Формула для перехода от  $X^{(2i+1)}$  к  $\tilde{X}^{(2i+2)}$  находится аналогично.

Следует обратить внимание на то, что нечетные степени антисимметричны относительно обращения времени, а четные полностью несимметричны. Общая для всех степеней структура (25) должна влиять на решение системы Дирака. В данном случае обобщенные степени суть комплексные функции действительного переменного. Для изучения их поведения необходимо отделить действительную  $X_1^{(n)}$  и мнимую  $X^{(n)}$  части. Многочлены, входящие в выражение степени, обозначим  $m_1$  и  $m_2$ :

$$X^{(n)} e^{ikt} c = m_1 e^{ikt} + m_2 e^{-ikt}, \quad (33)$$

а их действительные и мнимые части —  $m_{11}$ ,  $m_{12}$  и  $m_{21}$ ,  $m_{22}$ :

$$m_1 = m_{11} + im_{12}, \quad m_2 = m_{21} + im_{22}.$$

Учитывая формулу Эйлера, запишем

$$X^{(n)} e^{-ikt} c_1 = (m_{11} + m_{21}) \cos kt + (-m_{12} + m_{11}) \sin kt + i((m_{12} + m_{22}) \cos kt + (m_{11} - m_{21}) \sin kt). \quad (34)$$

Достаточно проанализировать действительную часть. Прежде всего отметим наличие основной (несущей) частоты  $k$ , определенной параметром  $m$  ( $m$  — масса частицы).

Для исследования поведения обобщенных степеней следует вернуться к формуле (25). Подставив (33) в выражение (17) и используя формулу Эйлера, найдем

$$X^{(n)} e^{-at} c = (m_{11} + m_{21}) \cos kt + (-m_{12} + m_{11}) \sin kt + i((m_{12} + m_{22}) \cos kt + (m_{11} - m_{21}) \sin kt). \quad (35)$$

Для первой степени непосредственно найдем

$$X^{(1)} e^{-at} c = \frac{1}{2ik} (e^{ikt} - e^{-ikt}) = \frac{1}{2k} \sin kt.$$

Эта степень ограничена, в отличие от обычного монотонного выражения  $X^{(1)}$  при действительных  $a_1$ ,  $a_2$ . Она имеет колебательный характер, определенный массой частицы. Но уже функция  $X^{(2)} e^{-ikt} c$ , сохраняя колебательный характер, демонстрирует возрастание амплитуды колебаний по закону  $t \sin kt$ .

При более высоких порядках обобщенных степеней степень возрастания увеличивается. Однако возникает вопрос о характере возрастания многочленов  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$ . Вопрос о монотонности или немонотонности поведения этих определяющих амплитуду колебаний многочленов пока остается открытым.



**5. Построение обобщенных степеней для случая трех пространственных переменных.** Часть обобщенных степеней, выраженная как функция времени (метагармонические степени), очевидно определяет энергетическую сторону физического процесса. Это подтверждается тем, что в оператор  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  входит масса частицы. Часть, зависящая от пространственных координат, а именно  $X_2^{(i)}$  выражает свойство момента импульса частицы, в том числе и спин. Она тесно связана с уравнением Лапласа.

Поиски простого алгебраического метода построения трехмерного уравнения Лапласа и соответствующих систем первого порядка проводились многими исследователями (см. [1]). Большие надежды возлагались на кватернионы, как дальнейшее расширение аппарата комплексных функций. Однако алгебраическая структура тела кватернионов не находилась в соответствии с дифференциальным уравнением Лапласа и не приводит к методу построения его решений. Метод обобщенных степеней в известном виде — это попытка продвинуться в том же направлении.

Будем использовать введенные ранее операторы (5). Разделим их на два оператора, которые коммутируют между собой:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{\partial}{\partial z} \\ -2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Они имеют правые обратные вида

$$I_1 = \begin{pmatrix} \int_{x_0} dz \dots & 0 \\ 0 & \int_{x_0} dz \dots \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \int_{x_0} dz \dots \\ \frac{1}{2} \int_{x_0} dz \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Решение задается как вектор вида

$$C = \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_1(\bar{z}) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Бинарные обобщенные степени найдем по формулам

$$X_1^{(\rho)} X_2^{(q)} C = \frac{(-1)^j q! l!}{2^q} \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{x_3^\rho z_2^{(j+l)} \bar{z}_2^j c_{10}}{(j+l)! j!} \\ -\frac{x_3^\rho z_2^j \bar{z}_2^{(j+l)} c_{20}}{j!(j+l)!} \end{pmatrix}, & q = 2j \\ \begin{pmatrix} -\frac{x_3^\rho z_2^j \bar{z}_2^{(j+l+1)} c_{20}}{j!(j+l+1)!} \\ \frac{x_3^\rho z_2^{(j+l+1)} \bar{z}_2^j c_{10}}{(j+l+1)! j!} \end{pmatrix}, & q = 2j+1, \end{cases} \quad (39)$$

где  $c_1(z) = c_{10} z^l$ ,  $c_2(z) = c_{20} \bar{z}^l$ . Если  $l$  целое и положительное, то результат достаточно прост. Если  $l$  дробное или отрицательное, то результат более сложен и для его записи следует использовать специальные функции.

Последним этапом в построении симметризованных обобщенных степеней будет рассмотрение определенной линейной комбинации обобщенных степеней вида

$$V_{m,n} = \sum_{i=0}^{m,n} X_1^{(m+n-i)} X_2^{(i)} a_i^{(m,n)} C, \quad (40)$$

обладающей свойством

$$DV_{m,n} = nV_{m,n-1}, \quad \bar{D}V_{m,n} = mV_{m-1,n}. \quad (41)$$

Они получены на основе принципа соответствия и в символической форме могут быть представлены в виде

$$V_{m,n} = \bar{Z}^m Z^n C.$$

Как было указано выше, для построения обобщенных степеней необходимо иметь правый обратный к  $D_3(\bar{D}_3)$  оператор  $I_3(\bar{I}_3)$ . Используем для этого симметризованные трехмерные степени  $\bar{Z}^m$ ,  $Z^n$ ,  $C$ . Поэтому оператор интегрирования  $I_3$  можно определить в полном формальном соответствии с комплексными степенными функциями от  $z_2$ ,  $\bar{z}_2$  следующим образом:

$$I_3 \bar{z}^m z^n c = \frac{1}{n} \bar{z}^m z^{n+1} c, \quad \bar{I}_3 \bar{z}^m z^n c = \frac{1}{m} \bar{z}^{m+1} z^{n+1} c.$$

**6. Заключение.** В работе показано, каким образом метод обобщенных степеней может быть использован для построения решений уравнения Дирака, которое дает описание движения частицы с полуцелым спином. Обратим внимание, что метод использован трижды. Первоначально на самом простом и известном уровне сопряженных комплексных переменных  $z_2 = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z}_2 = x_1 - ix_2$ . Далее для построения решения трехмерного уравнения Лапласа в матричной форме. На последнем этапе этот метод включает временную часть, при этом размерность искомой функции возрастает до 8.

Специфика временной обобщенной степени будет сказываться непосредственно на решении, ибо обобщенные степени входят во все слагаемые. В этом случае имеются решения, которые полностью удовлетворяют условию обратимости, но есть и решения, которые этому условию не удовлетворяют.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике. — Калуга: Изд-во КГУ, 2011.
2. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса// Вестн. Калуж. ун-та. — 2020. — № 2 (47). — С. 77–80.
3. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами–Берса и его приложения в математической физике. — Калуга: Изд-во КГУ, 1997.
4. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О приложении метода обобщенных степеней Берса для решения уравнения Дирака// в кн.: Тр. Междунар. конф. «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания». — Калуга, 2021. — С. 300–301.
5. *Соколов А. А., Иваненко Д. Д.* Квантовая теория поля. — М., 1952.
6. *Bers L., Gelbart A.* On a class of differential equation in mechanics of continua// Q. Appl. Math. — 1943. — 1, № 2. — P. 168–189.
7. *Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A.* On one physical interpretation of generalized Cauchy–Riemann conditions J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1902. — 012037.

Гладышев Юрий Александрович  
Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского  
E-mail: losh-elena@yandex.ru

Лошкарева Елена Анатольевна  
Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского  
E-mail: losh-elena@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 25–32  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-25-32

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО УЛАМУ—ХАЙЕРСУ  
РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© 2022 г. Э. З. ЗАЙНУЛЛИНА, В. С. ПАВЛЕНКО, А. Н. СЕСЕКИН,  
Н. В. ГРЕДАСОВА

**Аннотация.** Статья посвящена достаточным условиям устойчивости по Уламу—Хайерсу решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием в правой части. Формализовано понятие устойчивости по Уламу—Хайерсу для уравнений с неограниченной правой частью, когда решения являются функциями ограниченной вариации, и получены достаточные условия, обеспечивающие такую устойчивость.

**Ключевые слова:** устойчивость по Уламу—Хайерсу, дифференциальное уравнение, разрывное решение.

ON ULAM–HYERS STABILITY OF SOLUTIONS  
TO FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH GENERALIZED ACTION

© 2022 E. Z. ZAINULLINA, V. S. PAVLENKO, A. N. SESEKIN, N. V. GREDASOVA

**ABSTRACT.** This paper is devoted to sufficient conditions for the Ulam–Hyers stability of solutions of first-order linear differential equations. We introduce the concept of the Ulam–Hyers stability for equations with unbounded right-hand sides whose solutions are functions of bounded variation and obtain sufficient conditions that guarantee this stability.

**Keywords and phrases:** Ulam–Hyers stability, differential equation, discontinuous solution.

**AMS Subject Classification:** 34A37

**1. Введение.** В работе рассматриваются достаточные условия устойчивости по Уламу—Хайерсу обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием в правой части. В классе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с абсолютно непрерывными траекториями эти вопросы рассматривались в [2–4]. В настоящей работе в правой части уравнения содержатся обобщенные воздействия — обобщенные производные функций ограниченной вариации, под решениями понимаются поточечные пределы последовательностей абсолютно непрерывных решений, получающиеся в результате аппроксимаций обобщенных воздействий в правой части уравнения суммируемыми функциями [7]. В работах [5, 6] используется формализация решений, предложенная в [1], а в данной работе — формализация, описанная в [7].

Устойчивость по Уламу рассматривалась для различных классов функциональных уравнений. Для дифференциальных уравнений устойчивость по Уламу—Хайерсу определяется следующим образом (см., например, [2]).

**Определение 1.** Уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (1)$$

называется устойчивым по Уламу—Хайерсу, если существует такое число  $c_f > 0$ , что для всех  $\varepsilon > 0$  и каждого решения неравенства

$$|y' - f(t, y)| \leq \varepsilon, \quad t \in [a, b]$$

существует решение  $x(t)$  уравнения (1), удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \varepsilon, \quad t \in [a, b].$$

**2. Устойчивость по Уламу—Хайерсу решений дифференциальных уравнений с разрывными траекториями.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) + p(t)y = \dot{v}(t), \quad (2)$$

где  $p(t)$  — непрерывная функция,  $v(t)$  — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая неравенству

$$\text{var}_{[t_0, \vartheta]} v(\cdot) \leq M. \quad (3)$$

Множество функций ограниченной вариации, определенных на отрезке  $[t_0, \vartheta]$ , будем обозначать  $BV[t_0, \vartheta]$ . Решение уравнения (2) — это функция  $y(t) \in BV[t_0, \vartheta]$ . Все функции заданы на промежутке  $[t_0, \vartheta]$ . Производные в (2) понимаются в смысле теории обобщенных функций. Заметим, что в этом случае уравнение (2) можно записать в интегральной форме

$$y(t) = y(t_0) - \int_{t_0}^t p(s)y(s)ds + v(t) \quad (4)$$

(для определенности полагаем  $v(t_0)$  равным нулю). Под решением уравнения (2) будем понимать решение уравнения (4). Заметим, что решение уравнения (4) можно записать в следующем виде (формула Коши; см. citeZav):

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s)ds\right) y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t p(\xi)d\xi\right) dv(s); \quad (5)$$

второй интеграл в этой формуле понимается в смысле Стильтьеса.

**Определение 2.** Будем говорить, что решение дифференциального уравнения (2) устойчиво по Уламу—Хайерсу на  $[t_0, \vartheta]$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$ , для любой функции  $y \in BV[t_0, \vartheta]$ , удовлетворяющей неравенству

$$\left| y(t) - y_0 + \int_{t_0}^t p(s)y(s)ds - v(t) \right| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

найдется такое положительное вещественное число  $K$ , что существует решение уравнения (2)  $\varphi(t)$ , удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon K \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

**Теорема 1.** При сделанных предположениях всякое решение уравнения (2) устойчиво по Уламу—Хайерсу.

*Доказательство.* Для разности  $|y(t) - \varphi(t)|$ , где  $y(t)$  — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая (6), справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
 |y(t) - \varphi(t)| &= \left| y(t) - y_0 + \int_{t_0}^t (p(s)\varphi(s)ds - v(t)) \right| = \\
 &= \left| y(t) - y_0 + \int_{t_0}^t p(s)y(s)ds - v(t) + y_0 - \int_{t_0}^t p(s)y(s)ds + v(t) - y_0 + \int_{t_0}^t p(s)\varphi(s)ds - v(t) \right| \leq \\
 &\leq \varepsilon + \int_{t_0}^t |p(s)||y(s) - \varphi(s)|ds.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла, получим следующую оценку, из которой вытекает справедливость теоремы:

$$|y(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \exp \left( \int_{t_0}^t |p(s)|ds \right). \quad \square$$

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) + \dot{v}(t)y = f(t), \quad (7)$$

где  $v(t) \in BV[t_0, \vartheta]$ ,  $f(t)$  — интегрируемая функция. Производные в (7) понимаются в смысле теории обобщенных функций. Особенностью этого уравнения является то, что в слагаемом  $\dot{v}(t)y(t)$  содержится некорректная операция умножения разрывной функции  $y(t)$  на обобщенную функцию  $\dot{v}(t)$ , что требует формализации понятия решения в этом случае. Эта проблема, как и в [7], решается с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Под решением здесь, как и в [7], будем понимать поточечный предел последовательности абсолютно непрерывных решений  $y_k(t)$  уравнения (7), порожденных последовательностью абсолютно непрерывных функций  $v_k(t)$ , поточечно сходящихся к функции ограниченной вариации  $v(t)$ , если предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности  $v_k(t) \rightarrow v(t)$ .

Определенное таким образом решение уравнения (7) согласно [7] удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned}
 y(t) = y(t_0) - \int_{t_0}^t y(s)dv^c(s) + \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1)y(t_i - 0) + \\
 + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1)y(t_i) + \int_{t_0}^t f(s)ds, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где  $v^c(s)$  — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации  $v(t)$ ,  $\Delta v(t_i - 0)$  и  $\Delta v(t_i + 0)$  — соответственно величины левого и правого скачков функции ограниченной вариации  $v(t)$  в точке  $t_i$ ,  $\Omega_-$  — множество точек левого разрыва функции  $v(t)$  и  $\Omega_+$  — множество точек правого разрыва функции  $v(t)$ . Согласно [7] решение уравнения (8) существует на промежутке  $[t_0, \vartheta]$ .

Пусть теперь  $\psi(t)$  — решение уравнения (7) (или, с учетом введенного определения, решение уравнения (8)). Пусть  $y(t)$  — некоторая функция ограниченной вариации, удовлетворяющая неравенству

$$\begin{aligned}
 \left| y(t) - y_0 + \int_{t_0}^t y(s)dv^c(s) - \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1)y(t_i - 0) - \right. \\
 \left. - \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1)y(t_i) - \int_{t_0}^t f(s)ds \right| \leq \varepsilon. \quad (9)
 \end{aligned}$$

**Теорема 2.** *Решение уравнения (7) устойчиво по Уламу–Хайерсу, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $K > 0$ , что для любого решения неравенства (9) выполняется неравенство*

$$|y(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon K, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где  $\psi(t)$  – решение уравнения (8)

*Доказательство.* Согласно (8)

$$|y(t) - \psi(t)| = \left| y(t) - y_0 + \int_{t_0}^t \psi(s) dv^c(s) - \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1) \psi(t_i - 0) - \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1) \psi(t_i) - \int_{t_0}^t f(s) ds \right|.$$

Добавляя и вычитая из правой часть последнего равенства выражение

$$y(t_0) - \int_{t_0}^t y(s) dv^c(s) + \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1) y(t_i - 0) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1) y(t_i) + \int_{t_0}^t f(s) ds,$$

после группировки получим

$$|y(t) - \psi(t)| = \left| y(t) - y_0 + \int_{t_0}^t y(s) dv^c(s) - \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1) y(t_i - 0) - \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1) y(t_i) - \int_{t_0}^t f(s) ds - \int_{t_0}^t (y(s) - \psi(s)) dv^c(s) + \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1) (y(t_i - 0) - \psi(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1) (y(t_i) - \psi(t_i)) \right|.$$

Оценивая правую часть этого выражения с учетом (9), находим

$$|y(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon + \int_{t_0}^t |y(s) - \psi(s)| d \operatorname{var}_{[t_0, s]} v^c(\cdot) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_-} (e^{|\Delta v(t_i-0)|} - 1) |y(t_i - 0) - \psi(t_i - 0)| + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{|\Delta v(t_i+0)|} - 1) |y(t_i) - \psi(t_i)|.$$

Применяя оценку решения для этого неравенства из [7, Lemma 5.4.3], получим

$$|y(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon \exp \left( \operatorname{var}_{[t_0, t]} v^c(\cdot) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_-} |\Delta v(t_i - 0)| + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} |\Delta v(t_i + 0)| \right).$$

Учитывая (3), из последнего неравенства имеем

$$|y(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon \exp \operatorname{var}_{[t_0, t]} v(\cdot) \leq \varepsilon \exp M,$$

что и завершает доказательство.  $\square$

Далее будем рассматривать уравнение

$$\dot{y}(t) + \dot{v}_1(t)y = \dot{v}_2(t), \quad (10)$$

где  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  – функции ограниченной вариации, а производные понимаются в обобщенном смысле. Согласно [7], если функции  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  аппроксимировать последовательностями абсолютно непрерывных функций  $v_{1k}(t)$  и  $v_{2k}(t)$ , то порожденная такими аппроксимациями последовательность решений  $y_k(t)$ , вообще говоря, сходиться не будет. В [7] для такого случая вводится понятие  $V$ -решения.

Будем говорить, что последовательность  $(v_{1k}(\cdot), v_{2k}(\cdot))$   $V$ -сходится к вектор-функции  $(v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_{1k}(t) = v_1(t), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_{2k}(t) = v_2(t), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{var}_{[t_0, t]} v_{1k}(\cdot) + \text{var}_{[t_0, t]} v_{2k}(\cdot)) = V(t).$$

Очевидно, для любых  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих неравенству  $t_0 \leq a \leq b \leq \vartheta$  имеем

$$\text{var}_{[t_0, t]} v_1(\cdot) + \text{var}_{[t_0, t]} v_2(\cdot) \leq V(b) - V(a)$$

(здесь для определенности положили  $v_1(t_0) = v_2(t_0) = 0$ ). Далее будем пользоваться обозначением  $v(t) = (v_1(t), v_2(t))^T$ .

**Определение 3** (см. [7]). Назовем  $V$ -решением уравнения (10) всякий частичный поточечный предел последовательности  $y_k(t)$ , которая порождается произвольной последовательностью абсолютно непрерывных функций  $v_k(t) = (v_{1k}(\cdot), v_{2k}(\cdot))^T$ ,  $V$ -сходящейся к  $v(t)$ .

Согласно [7], всякий частичный поточечный предел последовательности  $y_k(t)$  является решением интегрального включения

$$y(t) \in y_0 - \int_{t_0}^t y(s) dv_1^c(s) + v_2^c(t) + \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} S(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i + 0), \Delta V(t_i + 0)). \quad (11)$$

Входящие в правую часть (11) множества

$$S(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)), \quad S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i + 0), \Delta V(t_i + 0)) \quad (12)$$

определяются следующим образом. Пусть

$$z(t_i - 0) = y(t_i - 0), \quad z(t_i) = y(t_i), \quad \mu(t_i - 0) = v(t_i - 0), \quad \mu(t_i) = v(t_i)$$

— начальные условия для системы

$$\dot{z}(\xi) = -z(\xi)\eta_1(\xi) + \eta_2(\xi), \quad \dot{\mu}(\xi) = \eta(\xi), \quad (13)$$

где

$$\mu(\xi) = (\mu_1(\xi), \mu_2(\xi))^T, \quad \eta(\xi) = (\eta_1(\xi), \eta_2(\xi))^T.$$

Система (13) рассматривается на отрезках  $[t_i, t_i + \Delta V(t_i - 0)]$  и  $[t_i, t_i + \Delta V(t_i + 0)]$  в зависимости от того, левый или правый скачок траектории  $y(t)$  имеет место в точке  $t_i$ . Заметим, что у координат  $\mu_1(\xi)$ ,  $\mu_2(\xi)$  заданы начальное и конечное значения. С помощью (13) строятся множества (12), которые получаются как значения  $z(t_i + \Delta V(t_i - 0))$  или  $z(t_i + \Delta V(t_i + 0))$ . Эти значения будем обозначать

$$s(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) \quad \text{или} \quad s(t_i, y(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i+0}(\cdot)).$$

При этом

$$s(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) \in S(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)), \\ s(t_i, y(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i+0}(\cdot)) \in S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i + 0), \Delta V(t_i + 0)).$$

Заметим, что в нашем случае эти множества являются отрезками. Их можно также трактовать как сечения множеств достижимости системы (13) в момент  $t_i + \Delta V(t_i - 0)$  (соответственно,  $t_i + \Delta V(t_i + 0)$ ) при  $\mu(t_i + \Delta V(t_i - 0)) = v(t_i)$  (соответственно,  $\mu(t_i + \Delta V(t_i + 0)) = v(t_i + 0)$ ).

Таким образом, интегральное включение (11) порождает интегральную воронку разрывных решений (многозначное отображение), которую мы будем обозначать  $Y(t, t_0, v_1, v_2, V)$ . Пусть  $\bar{y}(t)$  есть некоторая функция ограниченной вариации, точки разрыва которой совпадают с точками разрыва функций из  $V(t)$ , разрывы функции  $\bar{y}(t)$  являются допустимыми для интегрального включения (11). Под этим понимается, что для каждой точки разрыва или существует допустимое решение системы (13), описывающее скачки функции  $\bar{y}(t)$ , т.е. существуют соответствующие

допустимые управления  $\eta_{1t_i-0}(\cdot)$ ,  $\eta_{2t_i-0}(\cdot)$ ,  $\eta_{1t_i+0}(\cdot)$ ,  $\eta_{2t_i+0}(\cdot)$ . Пусть  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет неравенству

$$\left| \bar{y}(t) - y_0 + \int_{t_0}^t \bar{y}(s) dv_1^c(s) - v_2^c(t) - \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, \bar{y}(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) - \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, \bar{y}(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i+0}(\cdot)) \right| \leq \varepsilon. \quad (14)$$

**Определение 4.** Будем говорить, что интегральная воронка решений интегрального включения (11) устойчива по Уламу—Хайерсу, если для любого  $\varepsilon > 0$  и любой функции, удовлетворяющей неравенству (14), найдется такое положительное число  $K$ , что выполняется неравенство

$$\rho(\bar{y}(t), Y(t, t_0, y_0, v, V)) \leq \varepsilon K, \quad (15)$$

где  $\rho(a, A)$  — расстояние от точки  $a$  до множества  $A$ .

**Теорема 3.** Пусть функция  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет неравенству (14). Тогда найдется такое  $K > 0$ , что выполняется неравенство

$$|\bar{y}(t) - y(t)| \leq \varepsilon K, \quad (16)$$

где  $y(t)$  — решение интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 - \int_{t_0}^t y(s) dv_1^c(s) + v_2^c(t) + \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, y(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i+0}(\cdot)). \quad (17)$$

*Доказательство.* Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) - y(t) &= \bar{y}(t) - y_0 + \int_{t_0}^t \bar{y}(s) dv_1^c(s) + v_2^c(t) - \\ &- \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) - \\ &- \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, y(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i+0}(\cdot)). \end{aligned} \quad (18)$$

Добавим и вычтем в (18) выражение

$$\begin{aligned} y_0 - \int_{t_0}^t \bar{y}(s) dv_1^c(s) + v_2^c(t) + \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, \bar{y}(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) + \\ + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, \bar{y}(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i+0}(\cdot)). \end{aligned}$$

Вычислим модуль получившегося выражения и оценим его сверху, учитывая (14) и (17). В результате получим:



$$\begin{aligned}
 |\bar{y}(t) - y(t)| &\leq \varepsilon + \int_{t_0}^t |\bar{y}(s) - y(s)| d \operatorname{var}_{[t_0, s]} v_1^c(\cdot) + \\
 &+ \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega_-} \left| s(t_i, \bar{y}(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i - 0}(\cdot)) - \right. \\
 &\quad \left. - s(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i - 0}(\cdot)) \right| + \\
 &+ \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} B \left| s(t_i, \bar{y}(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i + 0}(\cdot)) - \right. \\
 &\quad \left. - s(t_i, y(t_i + 0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i + 0}(\cdot)) \right|. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Далее получим оценку слагаемых в (17). Величины скачков вычисляются с помощью решений дифференциальных уравнений (15). Поэтому

$$\bar{z}(t_i + \Delta V(t_i)) - \bar{y}(t_i) - z(t_i + \Delta V(t_i)) + y(t_i) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta V(t_i)} (-\bar{z}(\xi) + z(\xi)) \eta_1(\xi) d\xi.$$

Добавим и вычтем под интегралом выражение  $\bar{y}(t_i) - y(t_i)$ . Вычисляя модуль левой и правой частей (19), получим неравенство

$$\begin{aligned}
 &\left| \bar{z}(t_i + \Delta V(t_i)) - \bar{y}(t_i) - z(t_i + \Delta V(t_i)) + y(t_i) \right| \leq \\
 &\leq |\bar{y}(t_i) - y(t_i)| \int_{t_i}^{t_i + \Delta V(t_i)} |\eta_1(\xi)| d\xi + \int_{t_i}^{t_i + \Delta V(t_i)} |\bar{z}(\xi) - \bar{y}(t_i) - z(\xi) + y(t_i)| |\eta_1(\xi)| d\xi. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Справедливость неравенства

$$\int_{t_i}^{t_i + \Delta V(t_i)} |\eta_1(\xi)| d\xi \leq \Delta V(t_i)$$

следует из условия  $|\eta_1(\xi)| \leq 1$ . Учитывая последнее неравенство (20) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 &\left| \bar{z}(t_i + \Delta V(t_i)) - \bar{y}(t_i) - z(t_i + \Delta V(t_i)) + y(t_i) \right| \leq \\
 &\leq |\bar{y}(t_i) - y(t_i)| V(t_i) + \int_{t_i}^{t_i + \Delta V(t_i)} |\bar{z}(\xi) - \bar{y}(t_i) - z(\xi) + y(t_i)| |\eta_1(\xi)| d\xi.
 \end{aligned}$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла, находим

$$\left| \bar{z}(t_i + \Delta V(t_i)) - \bar{y}(t_i) - z(t_i + \Delta V(t_i)) + y(t_i) \right| \leq |\bar{y}(t_i) - y(t_i)| V(t_i) \cdot e^{\Delta V(t_i)}.$$

Используя очевидную оценку  $aE^a \leq e^{\beta a} - 1$ , где  $a \geq 0$ ,  $\beta \geq e$ , получим из последнего неравенства оценку

$$\left| \bar{z}(t_i + \Delta V(t_i)) - \bar{y}(t_i) - z(t_i + \Delta V(t_i)) + y(t_i) \right| \leq |\bar{y}(t_i) - y(t_i)| (e^{\Delta V(t_i)} - 1). \quad (21)$$

В результате с помощью (21) из (19) имеем

$$|\bar{y}(t) - y(t)| \leq \varepsilon + \int_{t_0}^t |\bar{y}(s) - y(s)| d \operatorname{var}_{[t_0, s]} v_1^c(\cdot) + \\ + \sum_{t_i \leq t, t_i \in \Omega^-} |\bar{y}(t_i - 0) - y(t_i - 0)| (e^{\Delta V(t_i - 0)} - 1) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega^+} |\bar{y}(t_i) - y(t_i)| (e^{\Delta V(t_i + 0)} - 1).$$

Применяя к последнему неравенству лемму 5.4.3 из [7], получаем оценку

$$|\bar{y}(t) - y(t)| \leq \varepsilon e^{V(t)}.$$

Следовательно, в (16) в качестве  $K$  можно взять  $e^{V(\vartheta)}$ .  $\square$

**Следствие.** При сделанных предположениях интегральная воронка разрывных решений интегрального включения (11) устойчива по Уламу–Хайерсу.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987.
2. Jung S.-M. Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, II// Appl. Math. Lett. — 2006. — 19, № 9. — P. 854–858.
3. Jung S.-M. Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, III// J. Math. Anal. Appl. — 2005. — 311, № 1. — P. 139–146.
4. Wang G. M., Zhou M., Sun L. Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order// Appl. Math. Lett. — 2008. — 21, № 10. — P. 1024–1028.
5. Wang J. R., Feéckan M., Zhou Y. Ulam’s type stability of impulsive ordinary differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — 395, № 1. — P. 258–264.
6. Zada A., Riaz U., Khan F. U. Hyers–Ulam stability of impulsive integral equations// Boll. Unione Mat. Ital. — 2019. — 12. — P. 453–467.
7. Zavalishchine S. T., Sesekin A. N. Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. — Kluwer Academic, 1997.

Зайнуллина Эльвира Зуфаровна  
Уральский федеральный университет  
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург  
E-mail: zainu@mail.ru

Павленко Вера Сергеевна  
Уральский федеральный университет  
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург  
E-mail: vera.pavlenko.99@mail.ru

Сесекин Александр Николаевич  
Уральский федеральный университет  
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург;  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург  
E-mail: sesekin@list.ru

Гредасова Надежда Викторовна  
Уральский федеральный университет  
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург  
E-mail: gredasovan@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 33–41  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-33-41

УДК 517.938.5, 512.7

## НОВАЯ БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ

© 2022 г. Г. П. ПАЛЬШИН

**Аннотация.** Рассматривается вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система с двумя степенями свободы, включающая в себя два предельных случая. Первая система описывает динамику двух вихревых нитей в конденсате Бозе–Эйнштейна, заключённом в гармоническую ловушку, вторая — динамику точечных вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью. Для случая вихрей с произвольными интенсивностями приведена явная редукция к системе с одной степенью свободы. Для интенсивностей разных знаков найдена новая бифуркационная диаграмма, которая не встречалась ранее в работах по указанной тематике. Также в явном виде получена разделяющая кривая, которая отвечает за изменение проекции торов Лиувилля без изменения их количества.

**Ключевые слова:** вихревая динамика, вполне интегрируемая гамильтонова система, бифуркационная диаграмма, интегральное отображение, бифуркации торов Лиувилля, конденсат Бозе–Эйнштейна.

## NEW BIFURCATION DIAGRAM IN ONE MODEL OF VORTEX DYNAMICS

© 2022 G. P. PALSHIN

**ABSTRACT.** We consider a completely Liouville-integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom, which includes two limit cases. The first system describes the dynamics of two vortex filaments in a Bose–Einstein condensate enclosed in a harmonic trap. The second system governs the dynamics of point vortices in an ideal fluid in a circular domain. For the case of vortices with arbitrary intensities, we explicitly reduce the problem to a system with one degree of freedom. For intensities of different signs, we detect a new bifurcation diagram, which has not been previously encountered in works on this topic. Also, we obtain a separating curve, which is related to the change of the projections of Liouville tori without changing their number.

**Keywords and phrases:** vortex dynamics, completely integrable Hamiltonian system, bifurcation diagram, integral mapping, bifurcations of Liouville tori, Bose–Einstein condensate.

**AMS Subject Classification:** 76M23, 37J35, 37J06, 34A05

**1. Введение.** Первые интегрируемые случаи в динамике вихрей были обнаружены сразу после открытия теории вихрей Г. Гельмгольцем [10]. Классическая задача трёх вихрей была исследована Г. Кирхгофом [11] и В. Грёбли [9], а чуть позже А. Гринхилл указал на интегрируемость задачи двух вихрей вблизи цилиндра (см. [8]). Некоторые интегрируемые случаи были описаны Д. Н. Горячевым [2]. Обзор результатов проблемы трёх вихрей можно найти, например, в [5]. Стоит упомянуть и современные исследования трёх вихрей на сфере: А. В. Борисова и В. Г. Лебедева [6], А. В. Борисова и А. Е. Павлова [7], П. Ньютона и Р. Кидамби [13]. В данной работе

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00399).

рассматривается общий случай построения бифуркационной диаграммы двухпараметрического семейства интегрируемых систем, охватывающий как классическую идеальную жидкость, так и случай конденсата Бозе—Эйнштейна. Ранее были получены результаты для случаев, когда интенсивности вихрей положительны (см. [3]) или одного знака (см. [4]). В [14] показано наличие бифуркации четырёх торov в один.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность профессору П. Е. Рябову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

**2. Описание модели.** Рассматривается интегрируемая модель вихревой динамики, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}(z_1, z_2), \quad \Gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}(z_1, z_2), \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_1^2 \ln(1 - |z_1|^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - |z_2|^2) + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left( \frac{[|z_1 - z_2|^2 + (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)]^\varepsilon}{|z_1 - z_2|^{2(c+\varepsilon)}} \right) \right], \quad (2)$$

где  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 1, 2$  — координаты  $k$ -го вихря в плоской прямоугольной декартовой системе координат, а  $\Gamma_k$  — его интенсивность. Здесь параметр  $\varepsilon$  является параметром возмущения, а физический параметр  $c$  отвечает за взаимодействие между вихрями. Значение параметра  $\varepsilon = 0$  приводит систему к первому предельному случаю — к модели двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармоническую ловушку (см. [12, 18]). Второй предельный случай — модель пары точечных вихрей в идеальной жидкости, которая ограничена круговой областью, — возникает при значениях параметров  $c = 0$  и  $\varepsilon = 1$  (см. [1]).

Система (1) допускает дополнительный первый интеграл  $F$ , связанный с инвариантностью гамильтониана относительно вращений системы координат:

$$F = \Gamma_1 |z_1|^2 + \Gamma_2 |z_2|^2, \quad (3)$$

а значит, является вполне интегрируемой системой с двумя степенями свободы, согласно теореме Лиувилля. Скобка Ли—Пуассона для фазового пространства  $\mathcal{P}$  задаётся следующим образом:

$$\{z_k, z_j\} = -\frac{2i}{\Gamma_k} \delta_{kj}, \quad (4)$$

где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера (индикатор равенства элементов). Основную роль при исследовании подобных систем играет бифуркационное множество  $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ , представляющее собой образ критического множества  $\mathcal{C}$  интегрального отображения  $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (множества точек, в которых  $\text{rank } d\mathcal{F}(\mathbf{z}) < 2$ ), где  $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = (F(\mathbf{z}), H(\mathbf{z}))$ , а

$$\mathcal{P} = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1, z_1 \neq z_2\}$$

— фазовое пространство.

**3. Построение бифуркационной диаграммы.** Введём обозначения  $F_1$  и  $F_2$  для следующих полиномиальных выражений:

$$F_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

$$\begin{aligned} F_2 = & c x_2 (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2) (x_2^2 + y_2^2 - 1) [x_2 (x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] [(x_1^2 - 1) x_2^2 + x_1^2 y_2^2] + \\ & + \Gamma_2 [(x_1^2 - 1) x_2^2 + x_1^2 y_2^2] \left\{ \varepsilon x_2^3 (x_2^2 + y_2^2 - 1)^2 + x_1 (x_1 - x_2) (x_2^2 + y_2^2) [x_2 (x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] \right\} + \\ & + \Gamma_1 x_1 (x_2^2 + y_2^2 - 1) \left\{ x_2^2 (x_2 - x_1) (x_2^2 + y_2^2) [x_2 (x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] + \varepsilon [(x_1^2 - 1) x_2^2 + x_1^2 y_2^2]^2 \right\}, \end{aligned}$$

а замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \quad (5)$$

обозначим через  $\mathcal{N}$ . В таком случае выполняется следующая теорема.

**Теорема 1** (см. [15]). *Множество критических точек  $\mathcal{C}$  интегрального отображения  $\mathcal{F}$  совпадает с множеством решений системы (5). Множество  $\mathcal{N}$  является двумерным инвариантным подмногообразием системы (1) с гамильтонианом (2).*

Для определения бифуркационной диаграммы  $\Sigma$  как образа множества критических точек  $\mathcal{C}$  интегрального отображения  $\mathcal{F}$  удобно перейти к полярным координатам:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1, \quad x_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2. \quad (6)$$

Подстановка (6) в первое выражение системы (5) приводит к уравнению  $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$ , т.е.  $\theta_1 - \theta_2 = 0$  или  $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ .

В случае  $\theta_1 = \theta_2 + \pi$  второе уравнение системы (5) сводится к

$$W_1(r_1, r_2) = 0, \quad (7)$$

где

$$W_1(r_1, r_2) = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2) \left\{ [c(1 + r_1 r_2) + \varepsilon] (\Gamma_1 r_1 - \Gamma_2 r_2) - \varepsilon (\Gamma_1 r_1^3 - \Gamma_2 r_2^3) \right\} - r_1 r_2 (r_1 + r_2) (1 + r_1 r_2) [\Gamma_1 (1 - r_2^2) - \Gamma_2 (1 - r_1^2)].$$

В случае  $\theta_1 = \theta_2$  второе уравнение системы (5) сводится к

$$W_2(r_1, r_2) = 0, \quad (8)$$

где

$$W_2(r_1, r_2) = W_1(r_1, -r_2).$$

Подстановка (6) в гамильтониан (2) и момент завихренности (3) в случае  $\theta_1 = \theta_2 + \pi$  приводит к следующим значениям первых интегралов:

$$\gamma_1 : \begin{cases} h_1(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_1^2 \ln(1 - r_1^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - r_2^2) + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left[ \frac{(1 + r_1 r_2)^{2\varepsilon}}{(r_1 + r_2)^{2(c+\varepsilon)}} \right] \right\}, \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \quad (9)$$

В случае  $\theta_1 = \theta_2$

$$\gamma_2 : \begin{cases} h_2(r_1, r_2) = h_1(r_1, -r_2), \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \quad (10)$$

Системы (9) и (10) вместе с уравнениями (7), (8) неявным образом определяют бифуркационную диаграмму на плоскости  $\mathbb{R}^2(f, h)$ . На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма системы двух вихрей с противоположными по знаку интенсивностями для параметров  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = -0,45$ ,  $c = 1,5$ ,  $\varepsilon = 3$ . Здесь приведены следующие значения первых интегралов:

$$h_m = -1,75, \quad h_q = -1,3, \quad m_1 = 0,05, \quad m_2 = 0,0847786118, \quad m_3 = 0,09, \quad m_4 = 0,198, \\ d_1 = (0,1537691986, -1,9791878639), \quad q_1 = -0,15, \quad q_2 = -0,07707, \quad q_3 = -0,075$$

(отметим, что  $m_2 \in \gamma_2$  и  $d_1 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ ). Данная диаграмма схожа с результатами, полученными в [16].

В нашем случае бифуркационное множество определяется как двухпараметрическое семейство. На рис. 2 показан новый тип бифуркационной диаграммы из этого семейства, который не наблюдался ни в одной из работ [15–17]. Такая диаграмма содержит две «петли» с точками возврата, причём одна из петель имеет только одну вертикальную асимптоту. На рисунке также изображена разделяющая кривая  $\gamma_3$ , отвечающая за изменение проекции торов в прообразе интегрального отображения без изменения их количества. Уравнение для  $\gamma_3$  можно представить в явном виде:

$$\gamma_3 : h = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_1^2 \ln \left( 1 - \frac{f}{|\Gamma_1|} \right) - \Gamma_1 \Gamma_2 (c + \varepsilon) \ln \left( \frac{f}{|\Gamma_1|} \right) \right\}, \quad 0 < f < |\Gamma_1|.$$

Значения второго интеграла  $f = p_k$ ,  $k = 1, \dots, 15$  вдоль линии  $h = h_p = -5.7$  представлены в таблице 1, где точки  $p_2, p_5, p_7, p_{14}$  лежат на  $\gamma_2$ , точка  $d_2 = (0.6260532, -2.4840538628)$  — на  $\gamma_2 \cap \gamma_3$ , точка  $p_{11}$  — на  $(h = h_p) \cap \gamma_3$ .

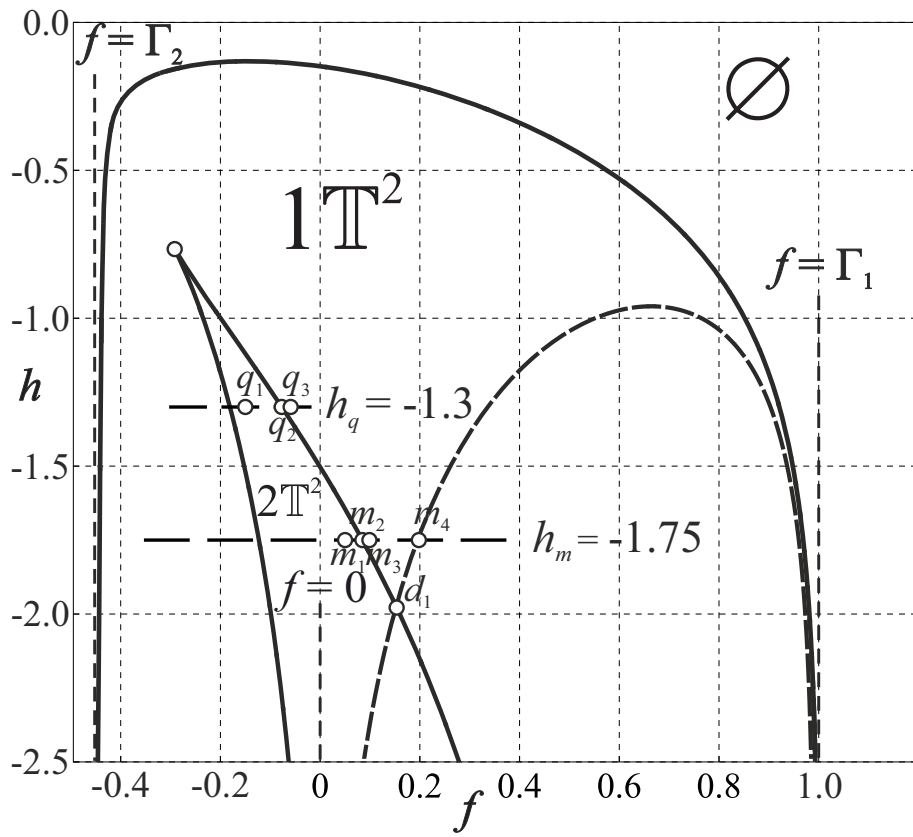


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для параметров  $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = -0,45, c = 1,5, \varepsilon = 3$ .

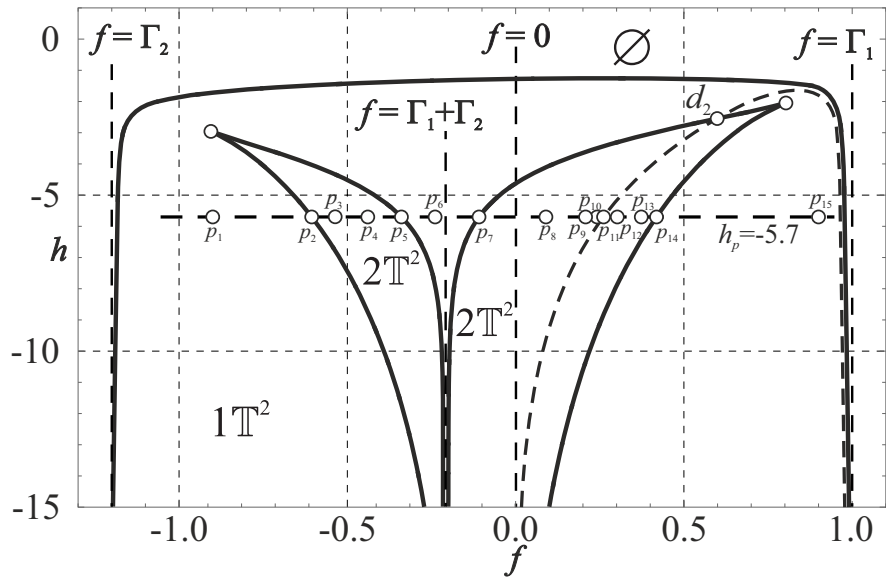


Рис. 2. Новая бифуркационная диаграмма для параметров  $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = -1,2, c = 0,09, \varepsilon = 7$ .

Таблица 1. Значения второго интеграла  $f = p_k$ .

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$
-0,9	-0,591655	-0,59	-0,425	-0,324902
$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$
-0,225	-0,108766	0,09	0,2685	0,25
$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$
0,271816	0,35	0,415	0,418417	0,9

**4. Редукция к системе с одной степенью свободы.** Для случая двух одинаковых вихрей и двух вихрей с интенсивностями одного знака понижение числа степеней свободы уже было предъявлено в [16] и [15] соответственно. Далее будет рассмотрено явное сведение системы (1) с гамильтонианом (2) к гамильтоновой системе с одной степенью свободы для вихрей с произвольными интенсивностями.

Для понижения числа степеней свободы перейдём от фазовых переменных  $(x_k, y_k)$  к новым переменным  $(u, v, \alpha)$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}} [u \cos(\alpha) - v \sin(\alpha)], & x_2 &= \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)}, \\ y_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}} [u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha)], & y_2 &= \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)}. \end{aligned}$$

Выбор такой замены продиктован наличием интеграла углового момента завихренности (3), инвариантного относительно группы вращений  $SO(2)$ . В результате замены переменные  $(u, v)$  приобретают значение координат одного из вихрей в координатной системе, которая связана со вторым вихрем, вращающимся вокруг центра завихренности. Обратная подстановка

$$U = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|} (x_1 x_2 + y_1 y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \quad V = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|} (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

приводит к каноническим переменным относительно скобки Ли—Пуассона (4):

$$\{U, V\} = -\{V, U\} = \operatorname{sgn} \Gamma_1, \quad \{U, U\} = \{V, V\} = 0.$$

Как было сказано ранее, система остаётся гамильтоновой относительно переменных  $(u, v)$ :

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v} \operatorname{sgn} \Gamma_1, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u} \operatorname{sgn} \Gamma_1 \quad (11)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_1^2 \ln \left( 1 - \frac{u^2 + v^2}{|\Gamma_1|} \right) + \Gamma_2^2 \ln \left( 1 - \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}{|\Gamma_2|} \right) - \right. \\ &\quad - \Gamma_1 \Gamma_2 (c + \varepsilon) \ln \left[ \left( \frac{\operatorname{sgn} \Gamma_1 u}{\sqrt{|\Gamma_1|}} - \frac{\operatorname{sgn} \Gamma_2 \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \right)^2 + \frac{v^2}{|\Gamma_1|} \right] + \\ &\quad + \varepsilon \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left[ \left( 1 - \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) u \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}}{\sqrt{|\Gamma_1| |\Gamma_2|}} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) v^2 [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}{|\Gamma_1| |\Gamma_2|} \right] \left. \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

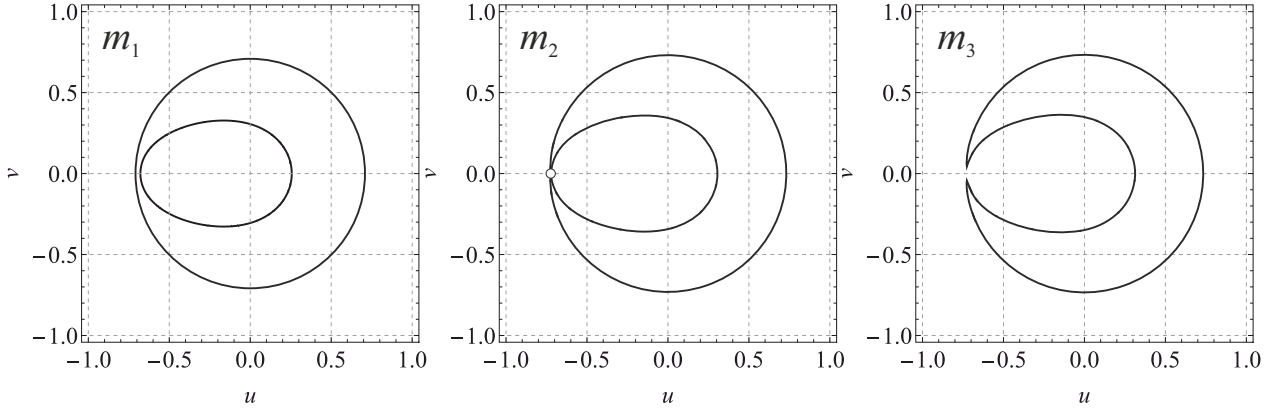


Рис. 3. Линии уровня редуцированного гамильтониана  $H$  для параметров  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = -0,45$ ,  $c = 1,5$ ,  $\varepsilon = 3$ , соответствующих точкам  $m_1 = 0,05$ ,  $m_2 = 0,0847786118$  (точка  $m_2 \in \gamma_2$ ),  $m_3 = 0,09$  и значению  $h_m = -1,75$ .

Угол поворота вращающейся системы координат  $\alpha(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\alpha} = \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_2 - f + \operatorname{sgn} \Gamma_1 (u^2 + v^2)} + c \frac{\Gamma_1 |\Gamma_2| \sqrt{|\Gamma_1|} R_1(u, v)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) Q_1(u, v)} + \varepsilon \Gamma_1 |\Gamma_2| \sqrt{|\Gamma_2|} \frac{|\Gamma_1| - u^2 - v^2}{\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}} \frac{R_2(u, v)}{Q_2(u, v)},$$

где

$$R_1(u, v) = \Gamma_1 (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) - \Gamma_2 u^2,$$

$$Q_1(u, v) = \sqrt{|\Gamma_2|} u \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} \left[ \Gamma_2 (u^2 + v^2) - \Gamma_1 (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \right] + \sqrt{|\Gamma_1|} (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \left[ \Gamma_1 (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) - \Gamma_2 (u^2 - v^2) \right],$$

$$R_2(u, v) = \sqrt{|\Gamma_2|} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} (|\Gamma_1| + u^2 + v^2) - \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{|\Gamma_1|} u \left[ |\Gamma_2| + \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \right],$$

$$Q_2(u, v) = \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) |\Gamma_2| \left[ |\Gamma_1| (|\Gamma_1| + 4u^2) + (u^2 + v^2)^2 \right] (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) + |\Gamma_1| (u^2 + v^2) \left[ \Gamma_2^2 + (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)^2 \right] - 2u \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{|\Gamma_1| |\Gamma_2|} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} \times (|\Gamma_1| + u^2 + v^2) \left[ |\Gamma_2| + \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \right].$$

Критические точки редуцированного гамильтониана (12) определяют стационарные точки системы (11), соответствующие относительным положениям вихрей. При фиксированном значении момента завихренности  $f$ , регулярные уровни редуцированного гамильтониана компактны, а движения происходят по замкнутым кривым. Критические значения приведённого гамильтониана определяют бифуркационное множество (7)–(10).

На рис. 3 представлены линии уровня редуцированного гамильтониана  $H$  (12) для значений параметра второго интеграла  $f = m_1, m_2, m_3$ , соответствующих движению вдоль линии  $h =$



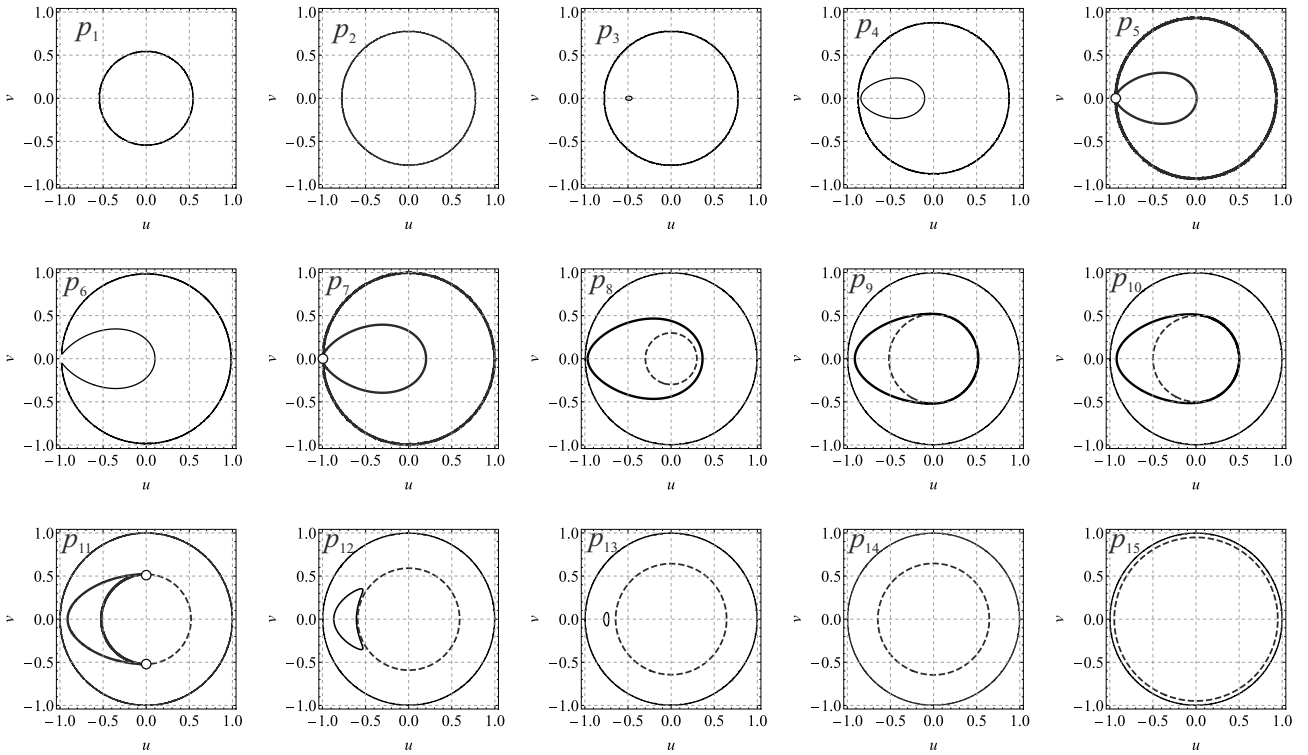


Рис. 4. Линии уровня редуцированного гамильтониана для параметров  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = -1,2$ ,  $c = 0,09$ ,  $\varepsilon = 7$ , соответствующие точкам  $(h_p, f_k)$  на рис. 2, где  $h_p = -5,7$ ,  $f_k = p_k$ ,  $k = 1, \dots, 15$  (см. таблицу 1).

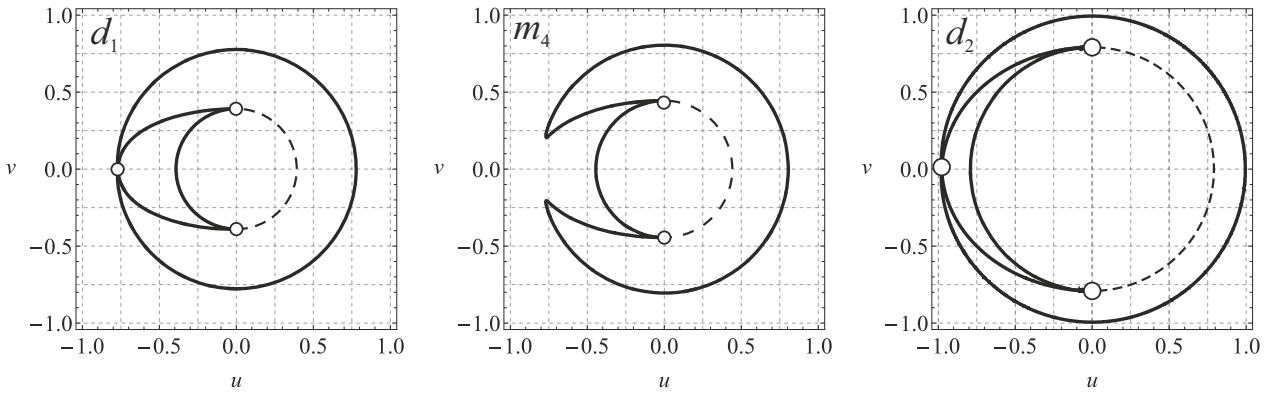


Рис. 5. Линии уровня редуцированного гамильтониана  $H$ , соответствующие точкам  $d_1 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ ,  $m_4 \in (h = h_m) \cap \gamma_3$  и  $d_2 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$  на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

$h_m = -1,75$  бифуркационной диаграммы на рис. 1. Рисунок 4 соответствует бифуркационной диаграмме на рис. 2 и фиксированному значению  $h = h_p = -5,7$ .

На рис. 5 изображены типичные линии уровня гамильтониана  $H$  (12) для случая пересечения одной из ветвей бифуркационной кривой  $\gamma_2$  и разделяющей кривой  $\gamma_3$ . Здесь точка  $d_1 = (0,1537691986, -1,9791878639) \in \gamma_2 \cap \gamma_3$  соответствует бифуркационной диаграмме на рис. 1, а  $d_2 = (0,626053, -2,4840538628) \in \gamma_2 \cap \gamma_3$  — диаграмме на рис. 2 с соответствующими параметрами.

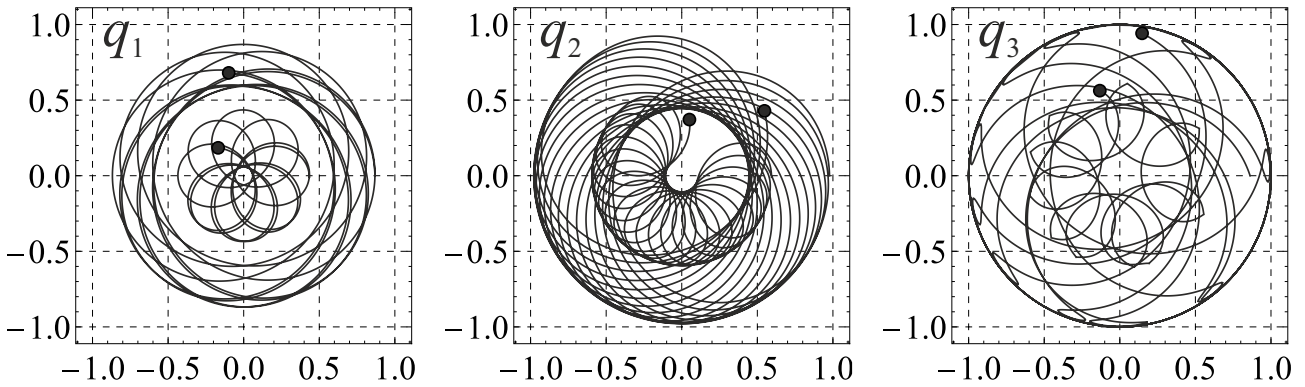


Рис. 6. Траектории вихрей для параметров  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = -0,45$ ,  $c = 1,5$ ,  $\varepsilon = 3$ , соответствующие точкам  $q_1 = (-0,15, -1,3)$ ,  $q_2 = (-0,07707, -1,3)$  и  $q_3 = (-0,075, -1,3)$  бифуркационной диаграммы рис. 1.

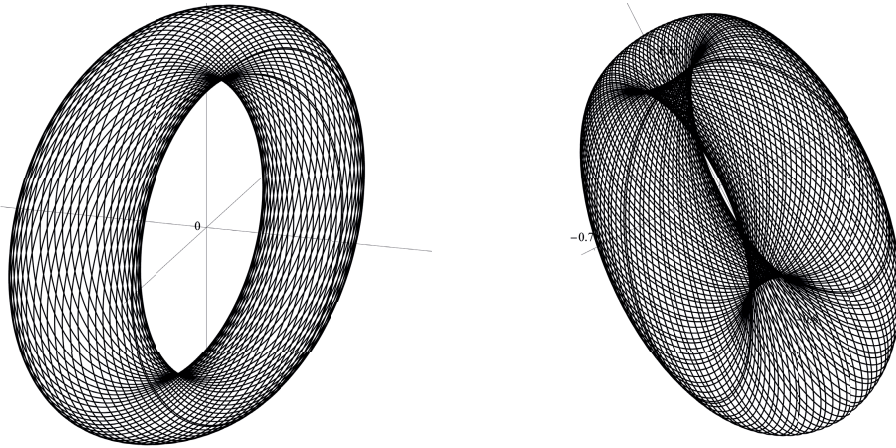


Рис. 7. Абсолютные движения вихрей в виде обмотки тора.

На рис. 6 показано несколько типов вихревых траекторий на плоскости  $(x, y)$ , меняющихся при движении вдоль линии  $h = h_q = -1,3$  на бифуркационной диаграмме рис. 1 ( $q_1 = -0,15$ ,  $q_2 = -0,07707$ ,  $q_3 = -0,075$ ).

Примеры абсолютного движения вихрей в виде однокомпонентной торической обмотки для значений констант первых интегралов  $h_q = -1,3$ ,  $f = q_1 = -0,15$  и  $h_p = -5,7$ ,  $f = 0,283$  представлены на рис. 7.

**5. Заключение.** В работе найдена бифуркационная диаграмма отображения импульса для обобщённой системы, которая описывает как динамику двух вихрей в идеальной жидкости, помещённой внутри кругового цилиндра, так и в конденсате Бозе—Эйнштейна, заключённом в гармоническую ловушку. Стоит напомнить, что в случае двух вихрей одного знака, рассмотренном в [15], бифуркационная диаграмма вихрей в конденсате Бозе—Эйнштейна существенно отличается от диаграммы вихрей в идеальной жидкости. Обнаружено, что, с одной стороны, имеются диаграммы, подобные построенным в [15–17], а с другой стороны, — диаграммы, которые существенно отличаются от тех, что встречались ранее. Также найдено аналитическое выражение для разделяющей кривой  $\gamma_3$ , не являющейся бифуркационной, но влияющей на проекцию торов в прообразе интегрального отображения. Последний раздел посвящён редукции к гамильтоновой системе с одной степенью свободы для произвольных интенсивностей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Математические методы динамики вихревых структур. — М.-Ижевск, 2005.
2. *Горячев Д. Н.* О некоторых случаях движения прямолинейных вихрей// Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ.-мат. — 1899. — № 16. — С. 1–106.
3. *Рябов П. Е.* Бифуркации торов Лиувилля в системе двух вихрей в Бозе—Эйнштейновском конденсате, имеющих положительные интенсивности// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 6. — С. 670–675.
4. *Соколов С. В., Рябов П. Е.* Бифуркационная диаграмма системы двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, имеющих интенсивности одинаковых знаков// Докл. РАН. — 2018. — 480, № 6. — С. 652–656.
5. *Aref H.* Gröbli's solution of the three-vortex problem// Ann. Rev. Fluid Mech. — 1992. — 24. — P. 1–20.
6. *Borisov A. V., Lebedev V. G.* Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. II. General compact case// Regul. Chaot. Dynam. — 1998. — 3, № 2. — P. 99–114.
7. *Borisov A. V., Pavlov A. E.* Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere. I// Regul. Chaot. Dynam. — 1998. — 3, № 1. — P. 28–38.
8. *Greenhill A. G.* Plane vortex motion// Quart. J. Pure Appl. Math. — 1877/78. — 15, № 58. — P. 10–27.
9. *Gröbli W.* Speziale Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden// Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Gesellsch. — 1877. — 22. — P. 37–81.
10. *Helmholtz H.* Über Integrale hydrodinamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen// J. Reine Angew. Math. — 1858. — 55. — P. 25–55.
11. *Kirchhoff G. R.* Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1. Mechanik. — Leipzig: Teubner, 1874.
12. *Koukouloyannis V., Voyatzis G., Kevrekidis P. G.* Dynamics of three nonrotating vortices in Bose–Einstein condensates// Phys. Rev. E. — 2014. — 89, № 4. — 042905.
13. *Newton P. K., Kidambi R.* Motion of three point vortices on a sphere// Phys. D. — 1998. — 116, № 1–2. — P. 143–175.
14. *Ryabov P. E.* Bifurcation of four Liouville tori in one generalized integrable model of vortex dynamics// Dokl. Phys. — 2019. — 64, № 8. — P. 325–329.
15. *Ryabov P. E., Shadrin A. A.* Bifurcation diagram of one generalized integrable model of vortex dynamics// Regul. Chaot. Dynam. — 2019. — 24, № 4. — P. 418–431.
16. *Ryabov P. E., Sokolov S. V.* Phase topology of two vortices of identical intensities in a Bose–Einstein condensate// Rus. J. Nonlin. Dynam. — 2019. — 15, № 1. — P. 59–66.
17. *Sokolov S. V., Ryabov P. E.* Bifurcation analysis of the dynamics of two vortices in a Bose–Einstein condensate. The case of intensities of opposite signs// Regul. Chaot. Dynam. — 2017. — 22, № 8. — P. 979–998.
18. *Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-Gonzalez R., Schmelcher P., Hall D. S.* Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates// Phys. Lett. A. — 2011. — 375. — P. 3044–3050.

Пальшин Глеб Павлович

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: gleb.palshin@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 42–52  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-42-52

УДК 519.1

## ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ РЕСУРСНОЙ СЕТИ

© 2022 г. В. А. СКОРОХОДОВ, Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, С. Ч. МУРТУЗАЛИЕВА

**Аннотация.** В работе изучается модель распределения ресурсного потока в ресурсной сети. Основной задачей является разработка методов нахождения начального состояния (распределения) ресурса в ресурсной сети, если известно состояние в некоторый момент дискретного времени. Существенной особенностью является существенная нелинейность процесса перераспределения ресурса в таких сетях. Показано, что задача нахождения начального состояния разрешима, предложены подходы к уточнению решения и нахождения начального состояния ресурсной сети в случаях больших и малых ресурсов.

**Ключевые слова:** динамическая сеть, эргодическая ресурсная сеть, ресурсный поток, распределение потока, пороговое значение, начальное состояние ресурсной сети.

## THE PROBLEM OF FINDING THE INITIAL STATE OF A RESOURCE NETWORK

© 2022 V. A. SKOROKHODOV, Ya. M. ERUSALIMSKY, S. Ch. MURTUZALIEVA

**ABSTRACT.** In this paper, we study distributions of resource flows in resource networks. The main problem is to develop methods for finding the initial state (distribution) of resources in a resource network if the state is known at some moment of discrete time. An essential feature is the significant nonlinearity of the resource redistribution process in such networks. We prove that the problem of finding the initial state is solvable and propose approaches for refining the solution and finding the initial state of the resource network in the cases of large and small resources.

**Keywords and phrases:** dynamic network, ergodic resource network, resource flow, flow distribution, threshold value, initial state of the resource network.

**AMS Subject Classification:** 05C21, 05C50, 90B10

**1. Введение.** Ресурсные сети являются потоковой моделью, предложенной в работах О. П. Кузнецова и Л. Ю. Жилияковой (см., например, [3–6, 11]). Ресурсная сеть — это связный ориентированный граф, для каждой дуги которого указана пропускная способность, а для каждой вершины — количество ресурса в этой вершине. В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по некоторым правилам с учётом пропорциональности пропускным способностям дуг, выходящих из соответствующей вершины. При этом, правила функционирования сети удовлетворяют двум условиям. Первое условие (условие замкнутости сети): ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает. Второе условие (условие неразрывности): ресурс, выходящий из вершины, вычитается, а входящий в вершину, прибавляется к ресурсу данной вершины. Таким образом, между каждыми последовательными моментами времени по дугам сети проходит поток.

Поскольку ресурс перераспределяется между вершинами сети в некоторой пропорции, то задача нахождения предельного распределения ресурса в сети схожа как с задачей поиска сбалансированного потока, рассмотренной в статье [13], так и с задачами о распределении потока, рассмотренными в статье [18].

В [7, 8, 10, 12, 14–16] исследованы динамические периодические сети. В [10] показано, что такие сети схожи с графами с нестандартной достижимостью (см. [2, 17]) и предложен подход для решения задач о потоках в таких сетях.

Для ресурсных сетей хорошо изучен вопрос нахождения следующих по времени состояний, а также и предельного состояния, если оно существует для заданного начального распределения ресурса. Настоящая работа посвящена разработке методов восстановления «истории» перераспределения ресурса в сети, до начального состояния включительно. Для произвольной ресурсной сети мы считаем известным её состояние (распределение ресурса между вершинами) в некоторый момент времени  $t_0 > 0$ . Поскольку все пропускные способности сети известны, то, применяя классические методы теории ресурсных сетей, можно находить все последующие состояния, однако нахождение предшествующих состояний оказалось достаточно трудной задачей из-за в общем случае существенной нелинейности процесса перераспределения ресурса в сети.

В зависимости от количества общего ресурса в сети, рассмотрены два различных способа восстановления начального состояния. В первую очередь, исследован случай распределения сверхмалого ресурса в ресурсной сети. Сверхмалым называется ресурс, суммарная величина которого не превышает суммы пропускных способностей дуг для каждой вершины ресурсной сети. В этом случае распределение ресурса полностью определяется стохастической матрицей, а распределение ресурса является линейным. Показано, что для сверхмалого ресурса поиск исходного состояния сети можно представить как матричное уравнение. В зависимости от ранга исходной стохастической матрицы, были предложены различные способы решения.

В случае, когда ресурс не является сверхмалым, показано, что необходима дополнительная информация для однозначного определения начального состояния. Предложен подход нахождения точного начального состояния сети, основанный на установке «датчиков» в вершинах ресурсной сети, которые дают дополнительную информацию о ресурсных потоках. Доказаны теоремы о минимальном количестве таких датчиков и вершинах, а также предложен метод нахождения вершин, в которых их нужно установить для однозначного определения начального состояния сети.

**2. Основные понятия.** Приведем основные понятия, определения и утверждения, необходимые для дальнейшего изложения (см. [2–9, 11]).

**Определение 1.** Ресурсной сетью называется связный ориентированный граф  $G(X, U, f)$  такой, что с каждой дугой  $u$  такой сети связана величина её пропускной способности  $r_u$ , а с каждой вершиной  $x_i$  — величина  $q_i(t)$ , которая называется количеством ресурса в вершине  $x_i$  в момент времени  $t \in \mathbb{Z}_+$ . Вектор  $\mathbf{Q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  называется состоянием сети  $G$  в момент  $t$ .

Правила функционирования ресурсной сети определяются следующим образом: для каждого  $i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{u \in [x_i]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x_i]^-} F(u, t), \quad (1)$$

где  $F(u, t)$  — величина ресурсного потока, выходящего по дуге  $u = (x_i, y_j)$  в момент времени  $t$ , определяется следующим образом:

$$F(u, t) = \begin{cases} r_u, & q_i > \sum_{v \in [x_i]^+} r_v, \\ \frac{r_u}{\sum_{v \in [x_i]^+} r_v} \cdot q_i(t), & q_i \leq \sum_{v \in [x_i]^+} r_v; \end{cases} \quad (2)$$

при этом, здесь и далее  $[x]^+$  — множество всех дуг, входящих в вершину  $x$ , а  $[x]^-$  — множество всех дуг, выходящих из вершины  $x$ .

Правила функционирования сети (1) и (2) можно записать в сокращенной форме:

$$Q(t+1) = \mathcal{A}(Q(t)). \quad (3)$$

Здесь следует отметить, что оператор  $\mathcal{A}$ , вообще говоря, не является линейным. Оператор  $\mathcal{A}$  является линейным только в том случае, если для каждого момента времени величина потока по каждой дуге определяется только нижней строчкой в (2).

Обозначим через  $R$  матрицу пропускных способностей дуг сети  $G$ ; при этом считаем, что

$$r_{ij} = \begin{cases} r_u, & \text{если } u \text{ — дуга из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j; \\ 0, & \text{если из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j \text{ не ведёт ни одной дуги,} \end{cases}$$

а через  $P$  — такую стохастическую матрицу сети  $G$ , что

$$p_{ij} = r_{ij} / \sum_{k=1}^n r_{ik}.$$

Также обозначим через  $W$  величину суммарного ресурса сети, т.е.

$$W = \sum_{i=1}^n q_i(0).$$

**Определение 2.** Состояние  $Q(t)$  называется устойчивым, если  $Q(t) = Q(t+1)$ .

Согласно правилам перераспределения ресурса, если  $Q(t)$  устойчиво, то для всех натуральных  $i$  имеет место равенство  $Q(t) = Q(t+i)$ .

**Определение 3.** Состояние  $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$  называется асимптотически достижимым из состояния  $Q(0)$ , если для каждого  $i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$  и всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $t_\varepsilon$ , что для всех  $t > t_\varepsilon$  имеет место неравенство  $|q^* - q_i(t)| < \varepsilon$ .

**Определение 4.** Состояние  $Q^*$  называется предельным, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени  $t$ , что  $Q^* = Q(t)$ , либо оно асимптотически достижимо из состояния  $Q(0)$ .

Таким образом, зная начальное состояние  $Q(0)$  сети  $G$ , можно находить любое из состояний  $Q(t)$ , а также предельное состояние и предельный поток в сети  $G$  (см. [4]).

**3. Начальное состояние ресурсной сети.** Пусть  $G$  — ресурсная сеть, для которой известно её состояние в некоторый момент времени  $t_0$ . В этом случае для любого  $k \in \mathbb{N}$  всегда можно найти вектор состояния  $Q(t_0+k)$ , а также предельное состояние, если оно существует. Рассмотрим задачу нахождения неизвестного начального состояния в этой сети.

Ясно, что рассматриваемая задача сводится к нахождению решения уравнения

$$\mathcal{A}(Q(t_0-1)) = Q(t_0) \quad (4)$$

с неизвестными элементами состояния  $Q(t_0-1)$ . Так как известное состояние  $Q(t_0)$  получено из состояния  $Q(t_0-1)$  по правилу (3), значит, решение уравнения (4) существует, однако, ввиду нелинейности оператора  $\mathcal{A}$ , может не быть единственным. Таким образом, необходимо дополнительно рассмотреть вопрос об уточнении решения  $Q(t_0-1)$ .

Далее рассмотрим отдельно два случая нахождения решения уравнения (4) для процесса распределения ресурса относительно величины суммарного ресурса в сети  $W$ : для сверхмалого ресурса  $W \leq W_0$  и для  $W > W_0$ , где

$$W_0 = \min_{i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}} \left\{ \sum_{k=1}^n r_{ik} \right\}.$$

**4. Начальное состояние в сети со сверхмалым ресурсом.** Рассмотрим ресурсную сеть  $G$ , между вершинами которой перераспределяется сверхмалый ресурс. Условие

$$W \leq \min_{i \in [1;n]_{\mathbb{Z}}} \left\{ \sum_{k=1}^n r_{ik} \right\}$$

означает, что величина ресурсного потока по каждой дуге в каждый момент времени определяется по нижней строке в (2). Следовательно, оператор  $\mathcal{A}$  является линейным и уравнение (4) может быть записано следующим образом:

$$Q(t+1) = Q(t) \cdot P. \tag{5}$$

Таким образом, задача нахождения начального состояния в сети со сверхмалым ресурсом сводится к решению матричного уравнения (5) при  $t = t_0 - 1$ . Решение данного уравнения всегда существует, поскольку известное состояние  $Q(t_0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  было получено из некоторого неизвестного состояния  $Q(t_0 - 1) = ((q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)))$ . Перепишем уравнение (5) в виде

$$(q_1(t_0), q_2(t_0), \dots, q_n(t_0)) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \tag{6}$$

В данном случае возможны две ситуации:

1. Матрица  $P$  обратима. Тогда существует единственное решение этой системы, которое и является состоянием  $Q(t_0)$ . В случае обратимости матрицы  $P$  состояние  $Q(0)$  можно находить не решая последовательно уравнение (5) для всех  $t \in [0, t_0 - 1]_{\mathbb{Z}}$ , а возведя матрицу  $P^{-1}$  в необходимую степень:  $Q(0) = Q(t_0) \cdot (P^{-1})^{t_0}$ .
2. Матрица  $P$  необратима. В данном случае, поскольку решение (6) существует, получаем совместную, но неопределённую систему линейных алгебраических уравнений (7)

$$\begin{cases} p_{11} \cdot q_1(t_0) + p_{21} \cdot q_2(t_0) + \dots + p_{n1} \cdot q_n(t_0) = \xi_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{1n} \cdot q_1(t_0) + p_{2n} \cdot q_2(t_0) + \dots + p_{nn} \cdot q_n(t_0) = \xi_n. \end{cases} \tag{7}$$

В силу совместности (7) и необратимости матрицы  $p$  существует бесконечно много решений системы. Таким образом, для отыскания однозначного решения данного матричного уравнения потребуется дополнительная информация о состояниях некоторых вершин сети.

**Определение 5.** Будем говорить, что в вершине  $x_i$  установлен датчик вида  $\mathcal{N}$ , если известна информация о количестве ресурса в каждый момент времени: набор значений  $(q_i(0), q_i(1), \dots, q_i(t_0 - 1), q_i(t_0), \dots)$ .

Рассмотрим задачу нахождения минимального количества таких датчиков, а также вершины их расположения, чтобы единственным решением системы (7) с учётом дополнительной информации было именно искомое состояние  $Q(t_0 - 1)$ .

**Теорема 1.** Минимальное количество датчиков вида  $\mathcal{N}$  для однозначного определения начального состояния ресурсной сети в случае распределения в сети  $G$  сверхмалого ресурса равно величине  $n - \text{rang}(\mathbf{P})$ .

*Доказательство.* Пусть для определенности  $\text{rang}(\mathbf{P}) = k$ . Расширенная матрица системы (7) имеет вид:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{n1} & \xi_1 \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{n2} & \xi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} & \xi_n \end{array} \right). \tag{8}$$

Приведем матрицу (8) к верхнетреугольному виду. Заметим, что в некоторых случаях при приведении к верхнетреугольному виду происходит перестановка столбцов, что приводит к перенумерации неизвестных, а соответственно и к перенумерации вершин исходной сети  $G$ . Введем перестановку  $\varphi$ , определяющую перенумерацию неизвестных при приведении матрицы к верхнетреугольному виду.

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} & a_{(k+1)1} & \dots & a_{n1} & \mu_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{k2} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{n2} & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{(k+1)k} & \dots & a_{nk} & \mu_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{array} \right).$$

Поскольку система (7) совместна, все элементы  $\mu_{k+1}, \dots, \mu_n$  равны нулю.

Для того чтобы однозначно определить состояние в качестве единственного решения системы (7), необходимо знать величины  $q_{k+1}(t_0), \dots, q_n(t_0)$ , а значит, в вершинах  $x_{\varphi^{-1}(k+1)}, \dots, x_{\varphi^{-1}(n)}$  нужно установить датчики вида  $\mathcal{N}$ . После установки датчиков, состояние  $Q(t_0 - 1)$  будет определено однозначно, а повторяя этот процесс  $t_0$  раз, можно найти состояние  $Q(0)$  для произвольной ресурсной сети с распределением сверхмалого ресурса.

Таким образом, показано, что для однозначного нахождения начального состояния в ресурсной сети в случае распределения сверхмалого ресурса, минимальное количество датчиков вида  $\mathcal{N}$  равно  $n - k = n - \text{rang}(\mathbf{P})$ .  $\square$

**Замечание.** Так как матрица  $P$  необратима, найти сразу вектор  $Q(0)$ , как это было описано для предыдущего случая, нельзя. Необходимо последовательно найти все состояния:  $Q(t_0 - 1)$ , затем  $Q(t_0 - 2)$  и так далее до  $Q(0)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим ресурсную сеть  $G$  на рис. 1 с ресурсом  $W = 1$ . Все пропускные способности дуг сети равны единице.

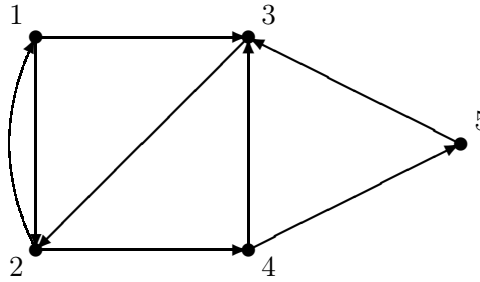


Рис. 1. Ресурсная сеть  $G$  со сверхмалым ресурсом

Матрицы  $R$  и  $P$  ресурсной сети  $G$  соответственно имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Вначале выберем некоторое состояние ресурсной сети  $Q(t_0 - 1) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,2)$  и найдём для него следующее состояние сети:  $Q(t_0) = (0,1; 0,35; 0,25; 0,1; 0,1)$ .



Теперь, считая состояние  $Q(t_0 - 1)$  неизвестным, найдём его как решение системы вида (5). Положим  $Q(t_0 - 1) = (y_1; y_2; y_3; y_4; y_5)$ . Рассмотрим расширенную матрицу для уравнения вида (6), приведём её к верхнетреугольному виду:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,35 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0,7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Заметим, что  $\text{rang}(\mathbf{P}) = 4$ , следовательно, достаточно установить один датчик вида  $\mathcal{N}$  в вершину  $x_5$ . Выразив переменные  $y_1, y_2, y_3$  и  $y_4$  через независимую переменную  $y_5$ , запишем общее решение:

$$\begin{cases} y_1 = 0,7 - 2 \cdot (0,1 + 0,5 \cdot (0,4 - y_5)); \\ y_2 = 0,2; \\ y_3 = 0,1 + 0,5 \cdot (0,4 - y_5) + 0,5 \cdot y_5; \\ y_4 = 0,4 - y_5. \end{cases}$$

Установив в вершину  $x_5$  датчик вида  $\mathcal{N}$ , получим значение  $y_5 = q_5(t_0 - 1) = 0,2$ . Подставляя это значение в общее решение, получим вектор  $Q(t_0 - 1) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,2)$ , который совпадает с выбранным в начале исходным состоянием сети.  $\square$

Следует отметить, что в некоторых случаях количество датчиков вида  $\mathcal{N}$  может быть слишком большим и доходить до  $n - 1$ . Таковую ситуацию можно показать следующим примером.

**Пример 2.** Рассмотрим полную ресурсную сеть  $G$  с петлёй в каждой вершине. Положим пропускные способности всех дуг, включая петли, равными единице. Матрицы  $R$  и  $P$  ресурсной сети  $G$  соответственно имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы  $P$  равен единице. Таким образом, в данном случае для однозначного определения начального состояния ресурсной сети необходимо установить датчики вида  $\mathcal{N}$  в четыре из пяти вершин.  $\square$

**5. Начальное состояние в сети с произвольным ресурсом.** Рассмотрим ресурсную сеть  $G$ , между вершинами которой перераспределяется суммарной величины  $W$ . В данном разделе мы будем рассматривать случай

$$W > \min_{i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}} \left\{ \sum_{k=1}^n r_{ik} \right\},$$

который означает, что найдутся такие начальные состояния, что оператор  $\mathcal{A}$  не является линейным. В силу нелинейности оператора  $\mathcal{A}$  для поиска начального состояния  $Q(0)$  нужно последовательно найти все состояния ресурсной сети:  $Q(t_0 - 1), Q(t_0 - 2), \dots, Q(1)$ .

Рассмотрим более подробно соотношение (1) для момента времени  $t_0 - 1$ :  $\forall i \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$

$$q_i(t_0) = q_i(t_0 - 1) - \sum_{u \in [x_i]^+} F(u, t_0 - 1) + \sum_{u \in [x_i]^+} F(u, t_0 - 1).$$

Отметим, что если найти все величины  $F(u, t_0 - 1)$  потоков по дугам ресурсной сети в момент времени  $t_0 - 1$ , то можно однозначно восстановить и вектор  $Q(t_0 - 1)$ .

**Определение 6.** Будем говорить, что в вершине  $x_i$  установлен датчик вида  $\mathcal{U}$ , если нам известна полная информация о количествах ресурса в вершине  $x_i$  в каждый момент времени:

1. набор значений  $(q_i(0), q_i(1), \dots, q_i(t_0), q_i(t_0 + 1), \dots)$ ;
2. для каждой дуги  $u \in [x_i]^-$  набор значений  $(F(u, 0), F(u, 1), \dots, F(u, t_0), \dots)$ .

Другими словами, если установить датчик вида  $\mathcal{U}$  в некоторую вершину  $x_i$ , то будет известна информация не только о количестве ресурса вершины  $x_i$  в каждый момент времени, но и количества ресурса, приходящие по каждой входящей в  $x_i$  дуге в каждый момент времени.

Рассмотрим задачу поиска минимального количества датчиков вида  $\mathcal{U}$  и вершин, в которые их надо установить.

Рассмотрим схематично два соседних слоя временной развертки (см. [2]) сети на рис. 2. Здесь наклонные дуги соответствуют дугам исходной сети, а вертикальные — возможным переносам остатка ресурса между моментами времени. Таким образом, условие пропорциональности задано только для наклонных дуг.

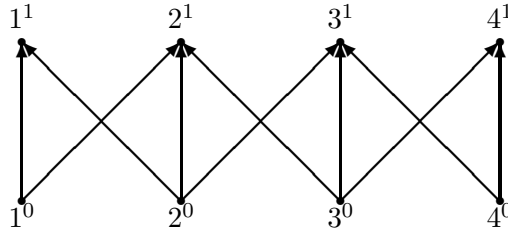


Рис. 2. Два слоя временной развёртки ресурсной сети (схема).

Поскольку перераспределение ресурса в соответствии с правилом (2) происходит пропорционально пропускным способностям выходящих из вершины дуг, следовательно, если известна информация о величине потока хотя бы для одной выходящей из вершины  $x$  дуге, то можно однозначно определить величины потоков по остальным дугам, выходящим из вершины  $x$ .

Рассмотрим алгоритм поиска множества вершин сети, в котором будут установлены датчики вида  $\mathcal{U}$ .

#### Алгоритм 1.

1. Построим матрицу смежности  $A$  графа  $G$ . Полагаем  $S := \emptyset$ .
2. Транспонируем матрицу  $A := A^T$  и каждому диагональному элементу присвоим значение 1.
3. Если найдётся столбец ровно с одной единицей, то выбираем строку  $A_i$ , в которой находится данная единица. Вершину  $x_i$  добавляем к множеству  $S := S \cup \{x_i\}$ , и для всех значений  $j \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$ , если  $a_{ij} = 1$ , то обнуляем все элементы столбца  $A^j$ .
4. Если найдутся две ненулевых строки  $A_l$  и  $A_p$ , такие, что  $a_{lk} \leq a_{pk} \forall k \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$ , то обнуляем все элементы строки  $A_l$ .
5. Повторяем шаги 3 и 4 до тех пор, пока они производят изменения в матрице  $A$ .
6. Выбираем произвольную ненулевую строку  $A_q$ . Вершину  $x_q$  добавляем к множеству  $S := S \cup \{x_i\}$ , и для всех значений  $j \in [1; n]_{\mathbb{Z}}$ , если  $a_{qj} = 1$ , то обнуляем все элементы столбца  $A^j$ .
7. Повторяем шаги 3, 4, 5 и 6 до тех пор, пока не обнулятся все элементы матрицы.

Итоговое множество  $S$  будет множеством вершин, в который нужно установить датчики вида  $\mathcal{U}_k$ , чтобы восстановить полностью матрицу потоков  $F(t_0 - 1)$  в момент времени  $t_0 - 1$ .

**Пример 3.** Рассмотрим ресурсную сеть  $G$  на рис. 3. Матрица пропускных способностей  $R$  ресурсной сети  $G$  имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

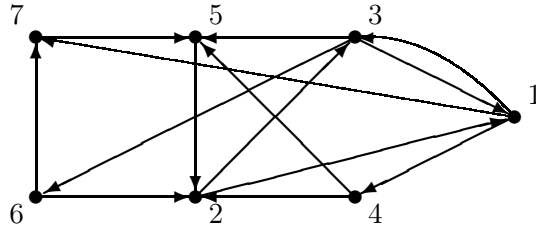


Рис. 3. Ресурсная сеть  $G$ .

Выберем некоторое состояние ресурсной сети  $Q(t_0 - 1) = (3; 5; 5; 2; 2; 2; 1)$  и найдём для него следующее состояние сети  $Q(t_0) = (4; 4; 3,5; 0,5; 4,5; 1; 2,5)$ . Отметим, что поток в рассматриваемой сети не является сверхмалым.

Кроме этого, запишем матрицу потоков по дугам рассматриваемой ресурсной сети  $G$  в момент времени  $t_0 - 1$ :

$$F(t_0 - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, считая состояние  $Q(t_0 - 1)$  неизвестным и применяя алгоритм 1, найдём матрицу потоков, а затем из соотношения вида (1) и само состояние  $Q(t_0 - 1)$ .

Применим алгоритм 1 для нахождения множества вершин под установку датчиков вида  $\mathcal{U}$ . Положим  $S = \emptyset$ . Построим матрицу смежности рассматриваемой сети. Затем транспонируем ее, и каждому диагональному элементу присвоим единицу (матрица  $A_1^T$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице  $A_1^T$  нет столбцов с ровно одной единицей, тогда на шаге 4 обнулим элементы третьей строки, поскольку все элементы первой строки не меньше соответствующих элементов третьей строки. Результат приведен ниже (матрица  $B_1$ ).

Далее, согласно шагу 6, добавим вершину 2 к множеству  $S$ , и обнулим все элементы столбцов с номерами 2, 4, 5 и 6. Результат приведен ниже (матрица  $B_2$ ).

Следующим этапом, на шаге 6, добавим вершину 1 к множеству  $S$ , и обнулим все элементы столбцов с номерами 1 и 3. Результат приведен ниже (матрица  $B_3$ ).

После этого, на шаге 4, обнулим строку с номером 5, а затем, на шаге 3, добавим вершину 7 к множеству  $S$  и, обнуляя оставшиеся элементы, получим нулевую матрицу.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате мы получили множество  $S = \{1, 2, 7\}$ .

Установим датчики вида  $\mathcal{U}$  в найденных вершинах 1, 2 и 7. Так как нам известны количества ресурса в вершинах множества  $S$ , следовательно, из соотношения (2) получим величины потоков на дугах, выходящих из указанных вершин:  $F(1, 3) = 0,5$ ,  $F(1, 4) = 0,5$ ,  $F(1, 7) = 2$ ,  $F(2, 1) = 2$ ,  $F(2, 3) = 2$  и  $F(7, 5) = 1$ . Кроме этого, нам известны величины потоков на дугах, входящих в вершины множества  $S$ :  $F(3, 1) = 2$ ,  $F(4, 2) = 0,5$ ,  $F(5, 2) = 1$ ,  $F(6, 2) = 1,5$  и  $F(6, 7) = 0,5$ . Последнее означает, что по свойству пропорциональности распределения потока в соотношении (2) можно получить величины потока по всем дугам, выходящим из вершин 3, 4, 5 и 6:  $F(3, 5) = 1$ ,  $F(3, 6) = 1$  и  $F(4, 5) = 1,5$ . Следовательно, нам известны величины потока по всем дугам сети  $G$ , тогда решая уравнения вида (1) получим вектор  $Q(t_0) = (3; 5; 5; ; 2; 2; 1)$ .

**Теорема 2.** *Минимальное количество датчиков вида  $\mathcal{U}$  для однозначного определения начального состояния ресурсной сети не превышает величины  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .*

*Доказательство.* Установка датчика вида  $\mathcal{U}$  в вершину ресурсной сети, в силу сильной связности сети дает нам полную информацию о всех исходящих потоках дуг как минимум еще одной вершины. Следовательно, последовательная установка каждого датчика (за исключением, быть может, последнего), приводит к тому, что нам становятся известны исходящие потоки как минимум двух вершин.

Таким образом, минимальное количество датчиков вида  $\mathcal{U}$  не превышает величины  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .  $\square$

Рассмотрим полную неоднородную ресурсную сеть  $G$  из примера 2. Показано, что такая сеть требует установки  $n - 1$  датчика вида  $\mathcal{N}$ , однако установка единственного датчика вида  $\mathcal{U}$  в произвольную вершину позволяет полностью восстановить матрицу потоков  $F(t_0 - 1)$ . Действительно, если установить датчик в произвольную вершину  $x_k$ , нам будут известны  $F(x_1, x_k), \dots, F(n, k)$ , причем, если  $F(l, k) = 0$ , то это означает, что в момент времени  $t_0 - 1$  в вершине  $x_l$  находится нулевой ресурс, соответственно, все элементы  $F(l, 1), \dots, F(l, n)$  также будут равны нулю. Таким образом, известны величины потоков для каждой дуги сети  $G$ . Подставив найденные значения в соотношение (1), можно найти состояние  $Q(t_0 - 1)$ .

**Определение 7** (см. [1]). Пусть  $G = (X, U, f)$  — ресурсная сеть. Множество  $S \subseteq X$  называется внешне устойчивым, если для любой вершины  $x \notin S$  имеет место  $\Gamma(x) \cap S \neq \emptyset$ .

**Теорема 3.** *Минимальное количество датчиков вида  $\mathcal{U}$  для однозначного определения начального состояния ресурсной сети  $G$  равно  $\min_{S \in \mathcal{S}} \{|S|\}$ , где  $\mathcal{S}$  — множество всех внешнеустойчивых подмножеств множества вершин ресурсной сети  $G$ .*

*Доказательство.* Пусть  $G(X, U, f)$  — ресурсная сеть и пусть  $V$  — внешне устойчивое множество минимальной мощности для сети  $G$ , т.е.

$$|V| = \min_{S \in \mathcal{S}} \{|S|\}.$$

Поскольку по определению 7 для каждой вершины  $x \notin V$  имеет место  $\Gamma(x) \cap V \neq \emptyset$ , значит, в сети  $G$  существует дуга, ведущая из вершины  $x$  в одну из вершин  $y$  множества  $V$ . Последнее означает, что если в вершине  $y$  будет установлен датчик вида  $\mathcal{U}$ , то можно восстановить все величины потоков, исходящие из вершины  $x$ . Таким образом, установив датчики вида  $\mathcal{U}$  в вершины множества  $V$ , для известного состояния  $Q(t)$  можно однозначно найти предыдущее состояние  $Q(t - 1)$  для любого  $t \in \mathbb{N}$ .

Покажем теперь, что меньшего количества датчиков вида  $\mathcal{U}$  в общем случае недостаточно. Предположим, что существует подмножество вершин  $M \subset X$  такое, что установка датчиков вида  $\mathcal{U}$  в вершинах множества  $M$  позволяет полностью восстановить матрицу потоков  $F$ , при этом

$$|M| < \min_{T \in \mathcal{T}} \{|T|\}.$$

Последнее неравенство также означает, что множество  $M$  не является внешне устойчивым. Следовательно, существует хотя бы одна вершина  $x \in X \setminus M$  такая, что  $\Gamma(x) \cap V = \emptyset$ . Однако в таком

случае восстановить все величины исходящих из вершины  $x$  потоков, вообще говоря, не представляется возможным. Рассмотрим такую ситуацию для части временной развёртки ресурсной сети на рис. 4. Здесь на нижнем слое показаны копии двух вершин  $x, y \notin M$ , на верхнем слое показаны вершины, в которые ведут дуги из вершины  $x$ . Отметим, что все такие вершины не принадлежат множеству  $M$ . Кроме этого, наклонные дуги на рис. 4 соответствуют дугам исходной ресурсной сети, а вертикальные — соответствуют возможным переносам остатка ресурса в вершине между соседними моментами времени. Дуги, для которых известны величины потоков, на рис. 4 не показаны.

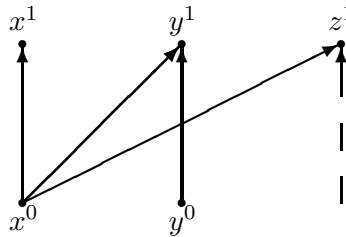


Рис. 4. Два слоя временной развёртки ресурсной сети (схема).

Если величины ресурса в вершинах  $y^1$  и  $z^1$  больше нуля, то однозначно восстановить потоки невозможно, поскольку для этих вершин нельзя однозначно сказать, какая часть пришедшего ресурса является переносом по вертикальной, а какая поступила из вершины  $x^0$ . Последнее означает, что в этом случае необходима установка как минимум одного дополнительного датчика вида  $\mathcal{U}$ .

Следовательно, в общем случае однозначное восстановление матрицы потока  $F$  по подмножеству  $M$  означает, что каждая вершина множества  $X \setminus M$  должна иметь хотя бы одну исходящую дугу в вершину множества  $M$ . Значит, согласно определению 7 множество  $M$  — внешне устойчивое подмножество для ресурсной сети  $G$ . Получили противоречие.

Таким образом, показали, что для однозначного определения начального состояния ресурсной сети требуется  $\min_{S \in \mathcal{S}} \{|S|\}$  датчиков, расставленных в вершинах внешне устойчивого подмножества минимальной мощности.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берг К. Теория графов и её применения. — М.: ИЛ, 1962.
2. Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьмина М. В., Петросян А. Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный ун-т, 2009.
3. Жильякова Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах// Автомат. телемех. — 2011. — № 4. — С. 133–143.
4. Жильякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах// Управл. большими сист. — 2013. — № 43. — С. 34–54.
5. Жильякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы// Управл. большими сист. — 2013. — № 45. — С. 6–29.
6. Кузнецов О. П., Жильякова Л. Ю. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель// Докл. РАН. — 2010. — 433, № 5. — С. 609–612.
7. Кузьмина М. В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2008. — № 5. — С. 16–20.
8. Скороходов В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2011. — № 1. — С. 21–26.
9. Скороходов В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети// Управл. большими сист. — 2016. — № 63. — С. 6–23.
10. Скороходов В. А., Абдулрахман Х. Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса// Вестн. Воронеж. ун-та. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 186–194.

11. *Kuznetsov O. P.* Nonsymmetric resource networks. The study of limit states// *Manag. Product. Eng. Rev.* — 2011. — 2, № 3. — P. 33–39.
12. *Aronson J. E.* A survey of dynamic network flows// *Ann. Oper. Res.* — 1989. — № 20. — P. 1–66.
13. *Erzin A. I., Takhonov I. I.* The problem of finding balanced flow *J. Appl. Industr. Math.* — 2005. — 8, № 3 (23). — P. 58–68.
14. *Fonoberova M., Lozovanu D.* The maximum flow in dynamic networks// *Comp. Sci. J. Moldova.* — 2004. — 12, № 3 (36). — P. 387–396.
15. *Fonoberova M., Lozovanu D.* The minimum cost multicommodity flow problem in dynamic networks and an algorithm for its solving// *Comp. Sci. J. Moldova.* — 2005. — 13 \*, № 1 (37). — P. 29–36.
16. *Ford L. R., Fulkerson D. R.* Constructing maximal dynamic flows from static flows// *Oper. Res.* — 1958. — 6. — P. 419–433.
17. *Skorokhodov V. A.* Generalization of the reachability problem on directed graphs// 2020. — 8, № 6. — P. 699–704.
18. *Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S.* The maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution// *J. Appl. Industr. Math.* — 2015. — 9, № 435–446.

Скоруходов Владимир Александрович

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: [vaskorohodov@sfedu.ru](mailto:vaskorohodov@sfedu.ru)

Ерусалимский Яков Михайлович

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: [umerusalimskiy@sfedu.ru](mailto:umerusalimskiy@sfedu.ru)

Муртузалиева Софья Чамсыевна

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: [murtuzalieva@sfedu.ru](mailto:murtuzalieva@sfedu.ru)



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 53–76  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-53-76

УДК 517.95

## ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ. ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

© 2022 г. В. И. СУМИН

Аннотация. Работа представляет собой краткий обзор некоторых результатов теории оптимизации, полученных с использованием вольтерровых функциональных уравнений (ВФУ). Изложена общая схема предложенного автором способа использования ВФУ-описания управляемых начально-краевых задач для изучения особых управлений, на которых вырождаются необходимые условия оптимальности. Приведены конкретные иллюстративные примеры.

**Ключевые слова:** функциональное уравнение Вольтерры, распределенная управляемая система, задача оптимального управления, необходимые условия оптимальности, принцип максимума, особое управление.

## VOLTERRA FUNCTIONAL EQUATIONS AND OPTIMIZATION OF DISTRIBUTED SYSTEMS. SPECIAL OPTIMAL CONTROLS

© 2022 V. I. SUMIN

ABSTRACT. The work is a brief review of some results of optimization theory obtained by using Volterra functional equations (VFE). We present the method proposed by the author for using the VFE-description of controlled initial-boundary-value problems for studying special controls on which necessary optimality conditions degenerate. Illustrative examples are given.

**Keywords and phrases:** Volterra functional equation, distributed control system, optimal control problem, necessary optimality conditions, maximum principle, special control.

**AMS Subject Classification:** 93C20, 93C23, 35B30, 47B38

**1. Введение.** Переход к описанию управляемых систем на языке функциональных (иначе, функционально-операторных) уравнений применялся в теории оптимального управления разными авторами. Например, в [7] описание управляемых систем с помощью функциональных уравнений в пространствах типа  $C$  и  $L_p$  использовалось для изучения вопросов существования решений оптимизационных задач и расширения этих задач, при построении теории обобщенных управлений и выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО) для таких задач и др. В [2, гл. 6] на широкий класс управляемых функциональных уравнений в пространствах типа  $C$  распространена схема Дубовицкого—Милотина получения принципа максимума. К формам функциональных уравнений [7] и [2] приводят, в частности, различные управляемые системы с отклоняющимся

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00199\_a).

аргументом и некоторые *управляемые начально-краевые задачи* (УНКЗ) для гиперболических (см. [7, с. 169–170]) и параболических (см. [2, с. 265–266]) уравнений с частными производными.

В [41, 42] была предложена достаточно общая форма описания УНКЗ с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \equiv \{t^1, t^2, \dots, t^n\} \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m, \quad (1)$$

где  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  и  $f(\cdot, \cdot, \cdot): \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$  заданы;  $v(\cdot) \in \mathbf{D} \subset L_k^s$  — управление;  $A: L_p^m \rightarrow L_q^l$  — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе  $\mathbf{T}$  подмножеств  $\Pi$  в том смысле, что для любого  $H \in \mathbf{T}$  сужение  $A[z]|_H$  не зависит от значений  $z|_{\Pi \setminus H}$  (это прямое многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра [69]; множества системы  $\mathbf{T}$  естественно назвать вольтерровыми множествами оператора  $A$  и ВФУ (1));  $p, q, k \in [1, +\infty]$ . Заметим, что начиная с работ Л. Тонелли [81] и А. Н. Тихонова [69] название «вольтерровы операторы» (операторы типа Вольтерра) присваивалось разными авторами различным семействам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы (см., например, [7, с. 233]) и др.). Подобные семейства выделялись как в классах интегральных (см., например, [21, 22, 77]) и функциональных (см., например, [19, 42–44, 75]) операторов, так и в классах разного рода абстрактных операторов (см., например, [6, 15, 16, 20, 31, 66, 67, 72, 78, 79, 82]); некоторую библиографию можно найти в [31]; краткий обзор некоторых определений вольтерровости, предложенных до 1992 г., см. в [43, Дополнение. Различные определения вольтерровых операторов].

К ВФУ (1) обращением главной части приводятся самые разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др.), в том числе при понимании решения УНКЗ в обобщенном смысле; многочисленные самые разные примеры такого приведения см., например, в [28, 39, 43, 46, 51–58]; достаточно подробные схематические описания способа обращения главной части УНКЗ приведены в [49, 73]. Обычно управление  $v(\cdot)$  в (1) так или иначе соответствует распределенному или начальному управлению эквивалентной УНКЗ; если же, к примеру, управляемы старшие коэффициенты основного уравнения УНКЗ или в этом уравнении имеются управляемые запаздывания, то в эквивалентном ВФУ (1) будет управляем оператор  $A$  (см., например, [58], [43, гл. 2, § 2 и § 7]). Подчеркнем, что мы рассматриваем уравнение (1) прежде всего как удобную для теории оптимального управления эквивалентную форму записи УНКЗ.

Переход в описании управляемой системы от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1) адекватен многим проблемам теории оптимизации распределенных систем; он, возможно, позволяет достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности теоретических построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием получить результаты в удобной для приложений форме — с другой. Краткий обзор некоторых результатов теории оптимизации, полученных автором (лично и в соавторстве) с использованием ВФУ вида (1), представлен в разделе 2.

Для более детальной иллюстрации метода ВФУ выбрана тема так называемых особых управлений. Особыми управлениями для тех или иных НУО принято называть те управления, на которых эти НУО (например, принцип максимума) вырождаются (см., например, [13]). Разделы 3 и 4 статьи посвящены предложенному автором способу изучения особых управлений с помощью ВФУ-описания управляемых систем. В разделе 3 подробно излагается общая схема этого способа, а в разделе 4 приводятся иллюстрирующие способ конкретные примеры.

Заметим, что иногда в теории оптимизации бывает удобно в качестве эквивалента УНКЗ вместо (1) или наряду с (1) использовать ВФУ и другого вида (см., например, [45]). Так, ряд интересных результатов (свойства множеств глобальной разрешимости, обоснование численных методов распределенной оптимизации, функционально-операторные игры и др.) получил А. В. Чернов (см., в частности, [72, 73, 76]), обзоры [68, 80]).



Примем следующие соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами;  $\mathbb{R}^n$  — пространство  $n$ -векторов  $a \equiv \{a^1, \dots, a^n\}$ ;

$$\langle a, b \rangle_n \equiv \sum_{i=1}^n a^i b^i$$

— скалярное произведение векторов  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ; если  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ , то  $\{a_1, \dots, a_k\} \equiv \{a_i\}_{i=1}^k \equiv \{a_1^1, \dots, a_1^n, \dots, a_k^1, \dots, a_k^n\} \in \mathbb{R}^{kn}$ ; модуль вектора равен сумме модулей его компонент;  $\mathbb{R}_+$  — множество положительных чисел; если  $X, Y$  — нормированные пространства, то  $\mathfrak{L}(X, Y)$  — класс линейных ограниченных операторов из  $X$  в  $Y$ , а норма в прямом произведении  $X \times Y$  определяется формулой  $\|\{x, y\}\|_{X \times Y} \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$ ; если  $X$  — функциональное пространство, то  $X^l$  — пространство  $l$ -вектор-функций, а  $X^{l \times m}$  —  $(l \times m)$ -матриц-функций, составленных из функций пространства  $X$ ; производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка; знаком  $*$  обозначаются операции перехода к сопряженному пространству и сопряженному оператору, операция транспонирования;  $\otimes$  — знак тензорного произведения;  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый компакт с непустой внутренностью, основное множество изменения независимых переменных  $t \equiv \{t^1, t^2, \dots, t^n\}$ ; в обозначениях пространств значок  $\Pi$ , как правило, опускаем, в скалярном случае опускаем значок, обозначающий размерность (например, вместо  $L_p^m(\Pi)$ ,  $L_p^1(\Pi)$  пишем соответственно  $L_p^m, L_p$ );  $\chi_Q$  — характеристическая функция множества  $Q$ , равная единице на множестве  $Q$  и равная нулю на дополнении  $Q$  до некоторого содержащего  $Q$  множества, вид которого понятен из контекста;  $P_H$  — оператор умножения на характеристическую функцию  $\chi_H$  множества  $H \subset \Pi$ ; систему  $\mathcal{T} \equiv \{H_0, H_1, \dots, H_k\}$  вольтерровых множеств оператора  $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$  такую, что  $\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k = \Pi$ , называем вольтерровой цепочкой оператора  $\mathcal{F}$ , а если для некоторого  $\delta > 0$  выполняются неравенства  $\|P_{H_i \setminus H_{i-1}} \mathcal{F} P_{H_i \setminus H_{i-1}}\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq \delta$  при  $i = 1, \dots, k$ , то — вольтерровой  $\delta$ -цепочкой этого оператора [43, с.24].

**2. Вольтерровы функциональные уравнения в теории оптимального управления распределенными системами.** При выводе НУО в задачах оптимального управления, при обосновании численных методов решения таких задач и во многих других случаях возникает следующая ситуация. Некоторая УНКЗ рассматривается на фиксированном множестве  $\Pi$  изменения независимых переменных, а соответствующая оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные, т.е. определенные на всем  $\Pi$ , решения УНКЗ из выбранного класса  $W$  функций на  $\Pi$ . Пусть  $\Omega$  — множество тех управлений из класса допустимых, каждому из которых отвечает единственное в  $W$  решение рассматриваемой УНКЗ; назовем  $\Omega$  множеством глобальной разрешимости этой УНКЗ. Важным является вопрос о достаточных условиях, при которых те или иные возмущения (вариации) не выводят допустимые управления из  $\Omega$ , т.е. вопрос о достаточных условиях *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) данной УНКЗ. Так, при выводе НУО недостаток информации об УСГР рассматриваемой УНКЗ по возмущению управления часто вынуждает считать УНКЗ сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [27] и переходить от классического случая «состояние определяется управлением» к рассмотрению оптимизационных задач в классе пар «управление, состояние», когда «управление» и «состояние» равноправны; при этом построения в сингулярном случае часто оказываются намного более сложными, чем аналогичные построения в случае несингулярном (см., например, вывод НУО типа принципа максимума в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в [27, главы 1, 2]).

Для сосредоточенных управляемых систем теоремы о достаточных условиях УСГР хорошо известны: простейшие варианты дают теоремы о непрерывной зависимости от числового параметра решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, более общие случаи параметра из метрического и топологического пространств детально рассмотрены, например, в [1, 70], в [70] можно найти и подробную библиографию по этому вопросу, имеющему богатую историю. Гораздо меньше внимания уделялось вопросам УСГР распределенных управляемых систем: условия УСГР УНКЗ изучались, как правило, лишь при специальных возмущениях

(вариациях) управлений, требующихся, например, для получения тех или иных НУО; история вопроса кратко описана в [46].

В [47–50] представлена общая схема получения достаточных условий УСГР для распределенных управляемых систем, основанная на приведении УНКЗ к эквивалентному ВФУ вида (1) (первоначальный вариант схемы был описан для случая  $p = q = k = \infty$  в [41], а затем в модернизированном виде — в [42, 43, 51–53]). На многочисленных примерах показано, что в терминах эквивалентных ВФУ (1) условия УСГР УНКЗ формулируются достаточно естественно и в то же время удобно для приложений; эти условия сопровождаются некоторыми утверждениями о непрерывной зависимости решений от управлений и оценками приращений решений. Схема позволяет получать конструктивные условия УСГР самых разнообразных УНКЗ для различных нелинейных уравнений с частными производными при возмущении распределенных, граничных, начальных управлений и управлений, входящих в старшие коэффициенты уравнений и в запаздывания (см., например, [28, 41, 43, 46, 48, 51–58], обзоры [46, 59, 60, 68, 80]). При этом используется продолжение локальных решений (управляемой УНКЗ или эквивалентного ВФУ) вдоль цепочки вольтерровых множеств, которое в общем виде можно описать следующим образом: если фиксировано некоторое допустимое управление  $u_0$  из множества глобальной разрешимости  $\Omega$ , то всякому допустимому управлению  $u$ , для которого величина  $r(u, u_0)$  отклонения  $u$  от  $u_0$  в некоторой полуметрике  $r$ , определяемой правой частью эквивалентного ВФУ, достаточно мала, можно сопоставить конечную упорядоченную по вложению последовательность  $H_1, H_2, \dots, H_k$ ,  $H_k = \Pi$ , вольтерровых множеств ВФУ так, что на  $H_1$  управлению  $u$  отвечает локальное решение (УНКЗ и эквивалентного ВФУ) и это решение последовательными продолжениями с  $H_1$  на  $H_2, \dots$ , с  $H_{k-1}$  на  $H_k$  допускает продолжение до глобального решения, причем отклонение этого глобального решения от глобального решения, отвечающего управлению  $u_0$ , оценивается через  $r(u, u_0)$ .

Простая конструкция «цепочки вольтерровых множеств» оказалась весьма полезной в различных вопросах не только теории ВФУ, но и теории вольтерровых операторов, а также собственно теории оптимального управления распределенными системами и теории «функционально-операторных игр» [76] (см. обзоры [68, 80]). Так, распространение теории УСГР УНКЗ, использующей вольтеррову функционально-операторную переформулировку УНКЗ в виде ВФУ (1), с первоначально рассматривавшегося случая  $p = q = k = \infty$  на общий случай  $1 \leq p, q, k \leq \infty$  (что существенно расширило семейство охватываемых этой теорией УНКЗ) [47, 48, 50] потребовало введения [47] и подробного изучения [47–49, 60] понятия «равностепенная квазинильпотентность семейства операторов». При этом получила развитие идея работы [61], посвященной признаку квазинильпотентности вольтерровых функциональных операторов, опирающемуся на понятие вольтерровой  $\delta$ -цепочки оператора.

В [43, 44] доказательства упомянутых теорем УСГР ВФУ (1),  $p = q = k = \infty$ , были распространены на нелинейные ВФУ второго рода общего вида над  $L_\infty^m$  с варьируемой правой частью. В [66, 67, 72] схема [47, 48] вывода условий УСГР ВФУ (1) в лебеговых пространствах была распространена на случай рассматриваемых над банаховым пространством вольтерровых операторных уравнений второго рода общего вида с варьируемой правой частью; при этом понятие «вольтерровость функционального оператора на системе множеств» в смысле [41, 42] заменяется более общим понятием «вольтерровость оператора на системе проекторов».

Теоремы УСГР нашли применение прежде всего при изучении вопросов дифференцирования и варьирования функционалов и операторов распределенных оптимизационных задач. Так, в [51] с помощью теорем УСГР [42] для широкого класса оптимизационных задач с ограниченным множеством допустимых значений управления, связанных с УНКЗ, допускающими описание ВФУ (1) при  $p = q = k = \infty$ , было дано обоснование применению градиентных методов при произвольных порядках роста каратеодориевских «правых частей» УНКЗ по «фазовым» и управляющим переменным. Заметим, что часто применяемое в градиентных процедурах решения задач оптимального управления дифференцирование функционалов по управлению в пространствах типа  $L_2$  требует, вообще говоря, линейных порядков роста правых частей УНКЗ (см., например, [12, гл. 8]).

В [39, 48] для управляемых систем (1),  $p = q = k = \infty$ , было дано обоснование предложенного В. И. Плотниковым в [38] общего подхода к вычислению вариаций функционалов и операторов оптимизационной задачи, использующего линеаризацию задачи и соответствующие линейные интегральные представления приращений функционалов и операторов. Это позволило в [48] доказать, следуя общей схеме [38] вывода НУО в задачах с ограничениями, принцип максимума для связанной с управляемым ВФУ (1) оптимизационной задачи достаточно общего вида со смешанными функциональными ограничениями и операторным ограничением типа включения (в качестве конкретного примера в [48] был получен принцип максимума для оптимизационной задачи с функциональными и фазовыми ограничениями, связанной с УНКЗ для нелинейного параболического уравнения, при понимании решения УНКЗ в обобщенном смысле).

Заметим, что переход от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1), как правило, удобен при выводе НУО (например, принципа максимума) уже потому, что при этом дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы УНКЗ, действующие в пространствах  $C_k$  гладких функций или в соболевских пространствах  $W_p^l$ , заменяются на операторы (как правило, интегральные), действующие в более удобных для построения «сопряженной задачи» данного НУО лебеговых пространствах. При этом сопряженная задача также имеет вид ВФУ и не обязательно переписывается в дифференциальной (интегро-дифференциальной) форме, подобной форме первоначальной УНКЗ (см. примеры в [29, 30, 39]).

Теоремы УСГР [47, 48] позволили решить в [48, 55–57] некоторые вопросы, связанные с проблемой сингулярности УНКЗ в смысле Ж.-Л. Лионса [27]. В [27] предложено УНКЗ называть сингулярной, в частности, тогда, когда некоторым требуемым для получения НУО вариациям управления либо не отвечает, либо неизвестно, отвечает ли, единственное глобальное решение данной УНКЗ. В этом случае для вывода НУО в [27] было предложено переходить к рассмотрению эквивалентной оптимизационной задачи на классе пар «управление, состояние» и ограничение в виде управляемого уравнения «снимать» методом адаптированного штрафа. Как отмечено выше, вывод НУО при этом может быть существенно более сложным, чем аналогичный вывод по классической схеме варьирования управлений (одна из существенных трудностей, возникающих при использовании метода адаптированного штрафа, предложенного в [27] для вывода НУО в сингулярной ситуации, — это, как отмечено самим автором [27], получение априорных оценок так называемого приближенного сопряженного состояния (см. [27, с. 66])). В [48, 55–57] показано, что ряд конкретных УНКЗ, рассматриваемых в [27] как сингулярные, можно к таковым не относить и при выводе соответствующих НУО, считая, что «состояние определяется управлением», придерживаться классической схемы варьирования управлений. Как оказалось, бывает удобно «преодолевать сингулярность», переходя в описании управляемой системы от УНКЗ к эквивалентному ВФУ и используя соответствующие теоремы УСГР или теоремы о неявных функциях. Так в [48, 55–57, 72] (см. также [62]) удалось решить ряд поставленных в [27] «представляющих интерес» задач получения «сингулярных НУО» («сингулярных систем оптимальности» по терминологии [27]).

В [63, 64] был предложен аксиоматический подход в теории вариаций функционалов задач оптимизации, использующий представление управляемых систем (1),  $p = q = k = \infty$ , и аксиоматическое описание способов варьирования управлений; описание охватывает большинство традиционных для теории НУО способов варьирования (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, пакетами, сдвигом и др.). Это позволило единообразно рассмотреть широкий класс НУО первого и более высоких порядков (в случае управлений, на которых НУО первого порядка вырождаются, т.е. особых управлений для этих НУО).

Заметим, что *особые управления* (ОУ) ППМ, на которых ППМ вырождается, играют важную роль в теории оптимизации и ее приложениях (см., например, [10, 13], [37, § 21], [23]). Однако до сих пор для распределенных управляемых систем ОУ ППМ изучены относительно слабо: начиная с первых работ [8, 9] на эту тему, в основном рассматривались управляемые системы Гурса—Дарбу, являющиеся своего рода «пробным камнем» теории оптимизации распределенных систем, и близкие им (см., например, [3–5, 10, 32, 35, 40], [11, с. 5], [34], обзоры [14, 33]). При изучении ОУ

ППМ главные усилия были направлены на конструирование с учетом специфики таких управляемых систем формул приращения, удобных для вычисления старших вариаций функционалов.

В [63, 64] получил развитие предложенный в [41] способ изучения ОУ ППМ для управляемых систем (1), использующий при вычислении старших вариаций функционалов тензорные произведения лебеговых пространств. В [48, 63, 64] представлена обобщающая этот способ схема изучения особых управлений, использующая упомянутый аксиоматический подход в теории вариаций функционалов. В [48, 63, 64] показано, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно «сильное вырождение особых управлений», когда вместе с НУО первого порядка (например, ППМ, который можно считать НУО первого порядка при игольчатом варьировании управлений) вырождаются и НУО второго порядка. Описан способ компактной унификации построения НУО сильно вырожденных ОУ, позволивший с единых позиций взглянуть на известные НУО ОУ сосредоточенных и распределенных систем и получить ряд новых НУО ОУ для распределенных задач оптимизации (в частности, для задач, не рассматривавшихся в этом плане ранее). Подробное изложение схемы [48, 63, 64] применительно к ОУ ППМ для достаточно общей задачи оптимизации ВФУ (1) дано в [65]. В [29, 30] возможности варианта [65] схемы [48, 63, 64] демонстрируются на примере управляемой системы Гурса—Дарбу общего вида в случае, когда решения системы необходимо искать в классе функций с суммируемой в некоторой конечной степени смешанной производной.

В разделе 3 данной статьи представлен модернизированный вариант схемы [48, 63, 64] изучения особых управлений. Проводимые общие построения иллюстрируются на примере особых управлений поточечного принципа максимума. В разделе 4 рассматриваются соответствующие конкретные примеры, связанные с задачами оптимизации для гиперболических уравнений.

### 3. Особые оптимальные управления.

*3.1. Оптимизационная задача.* Рассмотрим управляемое функциональное уравнение (1), считая, что:  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый компакт с непустой внутренностью;  $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$  — функция, дважды дифференцируемая по  $\mathbf{p}$  для всех  $\mathbf{v}$  при почти всех  $t$  и вместе с производными  $f'_{\mathbf{p}}, f''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}$  измеримая по  $t$  для всех  $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$  и непрерывная по  $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$  для почти всех  $t$ ;  $A \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^l)$ ;  $v(\cdot) \in \mathcal{D} \subset L_\infty^s$  — управление,  $\mathcal{D}$  — ограниченное в  $L_\infty^s$  множество. Будем предполагать выполненными сформулированные ниже условия (N), (a)—(c).

(N) Функции  $f, f'_{\mathbf{p}}, f''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}$  ограничены на любом ограниченном множестве. Это означает, что существует функция  $\mathcal{N}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что при любом  $v \in \mathcal{D}$

$$|f(t, \mathbf{p}, v(t))| \leq \mathcal{N}(M), \quad |f'_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, v(t))| \leq \mathcal{N}(M), \quad |f''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, v(t))| \leq \mathcal{N}(M),$$

если  $t \in \Pi, |\mathbf{p}| \leq M$ .

(a) Оператор  $A$  имеет квазинильпотентную положительную мажоранту  $B \in \mathfrak{L}(L_1, L_1)$ .

(b)  $B[L_\infty] \subset L_\infty$ .

Из условия (b) следует (см. [26, с. 30]), что формула  $B_\infty[z] \equiv B[z], z \in L_\infty$ , определяет оператор  $B_\infty \in \mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$ .

(c) Для любого  $\delta > 0$  у оператора  $B_\infty$  существует вольтеррова  $\delta$ -цепочка.

Для действующих в банаховом идеальном пространстве измеримых на  $\Pi$  функций (см., например, [25, с. 139]) линейных ограниченных операторов справедливо следующее достаточное условие квазинильпотентности [61, Теорема 2]: если для любого  $\delta > 0$  у оператора существует вольтеррова  $\delta$ -цепочка, то оператор квазинильпотентен. Поэтому из условия (c) следует квазинильпотентность оператора  $B_\infty$ .

Условия (N), (a), (b) позволяют говорить о решениях уравнения (1) класса  $L_\infty^m$ . При условиях (N), (a), (b), (c) управлению  $v \in \mathcal{D}$  может отвечать не более одного в классе  $L_\infty^m$  решения уравнения (1) [43, с. 37]. Будем считать, что класс  $\Omega$  тех управлений  $v \in \mathcal{D}$ , каждому из которых отвечает единственное в  $L_\infty^m$  решение  $z_v$  уравнения (1), непуст. Пусть  $v_0$  — фиксированный элемент  $\Omega$  и  $z_0 \equiv z_{v_0}$  — соответствующее решение (1). Положим

$$\rho(v) \equiv \|B[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)]\|_{L_\infty}, \quad v \in \mathcal{D},$$

используя обозначение  $\Delta_{\mathbf{w}}f(t) \equiv f(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f(t, A[z_0](t), v_0(t))$ ,  $t \in \Pi$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^s$ . При сформулированных условиях для уравнения (1) справедлива следующая теорема УСГР (см., например, [43, гл. 1, § 2, п. 4], [47, § 3, теорема 4]).

**Теорема 1** (Достаточное условие устойчивости существования глобальных решений). *Для всякого управления  $v_0 \in \Omega$  существуют числа  $\varkappa > 0$ ,  $C > 0$  такие, что любое управление  $v \in \mathcal{D}$ , удовлетворяющее неравенству  $\rho(v) < \varkappa$ , принадлежит  $\Omega$  и при этом*

$$\|z_v - z_0\|_{L_\infty^m} \leq C \|\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\|_{L_\infty^m}, \quad \|A[z_v - z_0]\|_{L_\infty^l} \leq C\rho(v). \quad (2)$$

Пусть  $F: L_1^m \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторый функционал, дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше. Рассмотрим задачу оптимизации

$$J[v] \equiv F[z_v] \rightarrow \max, \quad v \in \Omega, \quad (3)$$

для определенности понимая ее как задачу нахождения  $L_1^s$ -локального максимума. Везде ниже:  $v_0$  — фиксированное решение задачи (3),  $z_0 \equiv z_{v_0}$ .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{w}}f_{\mathbf{p}}'(t) &\equiv f_{\mathbf{p}}'(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f_{\mathbf{p}}'(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^s; \\ f_{\mathbf{p}}'(t) &\equiv f_{\mathbf{p}}'(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad f_{\mathbf{p}\mathbf{p}}''(t) \equiv f_{\mathbf{p}\mathbf{p}}''(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi; \\ \Delta_v J &\equiv J[v] - J[v_0], \quad \Delta z \equiv z_v - z_0, \quad v \in \Omega; \\ r(v) &\equiv \|\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\|_{L_1^m}, \quad r_1(v) \equiv \|\Delta_{v(\cdot)}f_{\mathbf{p}}'(\cdot)\|_{L_1^{m \times l}}, \quad v \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

**3.2. Аксиоматическое описание способов варьирования. Необходимые условия оптимальности первого порядка.** Варьирование оптимального управления  $v_0(\cdot)$ , используемое при выводе тех или иных НУО  $L_1^s$ -локального минимума в задаче (3), можно в достаточно общем виде описать, например, следующим образом. Пусть  $\Sigma$  — некоторое множество, элементы которого будем обозначать  $\sigma$ . Каждой паре  $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , поставим в соответствие некоторую функцию  $v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}}(t)$ ,  $t \in \Pi$ , со значениями из  $\mathbb{R}^s$ , предполагая, что выполняются следующие условия.

- (0) Для каждого  $\sigma \in \Sigma$  при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  управление  $v_h(\cdot)$  принадлежит множеству  $\mathcal{D}$ .
- (1)  $\rho(v_h) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для каждого  $\sigma \in \Sigma$ .
- (2) Для каждого  $\sigma \in \Sigma$  множество  $\{\gamma > 0 : \|v_h - v_0\|_{L_1^s} = O(\varepsilon^\gamma), \varepsilon \rightarrow 0\}$  не пусто и имеет максимальный элемент  $\gamma_0$ , не зависящий от  $\sigma \in \Sigma$ .
- (3)  $r(v_h) = O(\varepsilon^{\gamma_0})$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  для каждого  $\sigma \in \Sigma$ .
- (4)  $r_1(v_h) = O(\varepsilon^{\gamma_0})$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  для каждого  $\sigma \in \Sigma$ .
- (4) Для каждого  $\sigma \in \Sigma$  существует предел

$$\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{\gamma_0}} \Delta_{v_h} J.$$

Традиционные способы варьирования (классического, игольчатого, импульсного на полосах (см., например, [4]), пакетами, сдвигом и др.) обычно удовлетворяют условиям (0)–(4). Ввиду теоремы 1 условия (0), (1) обеспечивают корректность варьирования: для любого  $\sigma \in \Sigma$  существует  $\varepsilon_\sigma > 0$  такое, что  $v_{\{\varepsilon, \sigma\}} \in \Omega$  при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma$ . Таким образом, каждому элементу  $\sigma \in \Sigma$  отвечает лежащее в  $\Omega$  однопараметрическое семейство функций  $\{v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}}(t), t \in \Pi\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma}$ , которое назовем вариантом управления  $v_0(\cdot)$ , соответствующей параметру варьирования  $\sigma$ .

Величину  $\delta^{\gamma_0} J(\sigma)$  естественно назвать первой вариацией функционала  $J$  на варианте  $\{v_h \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}}\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma}$ , а содержащееся в следующей теореме очевидное необходимое условие  $L_1^s$ -локальной оптимальности управления  $v_0$  в задаче (3) — НУО первого порядка для способа варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}} : \varepsilon > 0, \sigma \in \Sigma\}$ .

**Теорема 2** (Необходимое условие оптимальности первого порядка). *Для  $L_1^s$ -локального решения  $v_0$  задачи (3) при всяком способе варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$ , удовлетворяющем условиям (0)–(4), выполняются неравенства*

$$\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \leq 0, \quad \sigma \in \Sigma. \quad (4)$$

Выбор (возможность, допустимость) того или иного способа варьирования определяется, кроме всего прочего, свойствами множества допустимых управлений  $\mathcal{D}$ . Далее для определенности будем считать, что  $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U, t \in \Pi\}$ , где  $U \subset \mathbb{R}^s$  — заданное ограниченное множество. В этом случае всегда допустимы игольчатое и импульсное на полосе варьирования управления  $v_0$ , а при условии, например, выпуклости  $U$  допустимо и классическое варьирование.

Рассмотрим, например, простейшее одноточечное игольчатое варьирование, которым позже воспользуемся для вывода в задаче (3) НУО в виде ППМ. Ввиду условий (N), (b) функция  $f'_p(\cdot)$  принадлежит классу  $L_\infty^{m \times l}$ , а формула

$$S[z](t) \equiv z(t) - f'_p(t)A[z](t), \quad z \in L_1^m, \quad t \in \Pi,$$

определяет оператор  $S \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$ . Из условия (a) следует, что оператор  $S$  имеет ограниченный обратный  $S^{-1} \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$ , а потому существует оператор

$$(S^*)^{-1} \in \mathfrak{L}(L_\infty^m, L_\infty^m),$$

совпадающий с оператором  $(S^{-1})^*$  (см. [17, с. 516], [71, с. 61]). Пусть  $a_0 \equiv F'(z_0)$  — производная Фреше функционала  $F: L_1^m \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $z_0$ ,  $\omega \in L_\infty^m$  — функция Рисса функционала  $a_0$  как элемента сопряженного пространства  $(L_1^m)^*$ ,  $\psi(\cdot)$  — единственное в  $L_\infty^m$  решение уравнения

$$S^*[\psi](t) = \omega(t), \quad \psi \in L_\infty^m, \quad t \in \Pi. \quad (5)$$

Положим

$$\pi(t, \mathbf{w}) \equiv \langle \psi(t), \Delta_{\mathbf{w}} f(t) \rangle_m, \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U,$$

и пусть  $\Pi_{\mathbf{w}}$  — множество правильных точек Лебега функции  $\pi(\cdot, \mathbf{w}): \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  при  $\mathbf{w} \in U$ . Возьмем

$$\Sigma \equiv \{\{\tau, \mathbf{w}\} : \tau \in \Pi_{\mathbf{w}}, \mathbf{w} \in U\}$$

и для каждой пары  $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$ , в которой  $\varepsilon > 0$ ,  $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$ , определим функцию  $v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}}(t)$ ,  $t \in \Pi$ , формулой

$$v_h(t) \equiv \{\mathbf{w}, t \in \Pi \cap \Pi_\varepsilon(\tau); v_0(t), t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \sigma = \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma, \quad (6)$$

где  $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0, 1]^n$ . Для построенного семейства функций (6) выполняются сформулированные выше условия (0)–(4), причем величина  $\gamma_0$  равна размерности  $n$  пространства независимых переменных. Выполнение условий (0)–(4) очевидно. Выполнение условия (4) следует непосредственно из приведенной ниже, в теореме 3, асимптотической формулы (7) для приращения функционала и теоремы Лебега о правильных точках. Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующее утверждение, частный случай теоремы 1.9.3 из [18].

**Лемма 1** (обобщенная лемма Гронуолла). Пусть банахово пространство  $\mathbf{B}$  полуупорядочено по конусу  $K \subset \mathbf{B}$ , а  $G \in \mathfrak{L}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$  — квазинильпотентный оператор, для которого  $K$  инвариантен. Если для некоторых  $x, y \in \mathbf{B}$  выполняется неравенство  $x \leq G[x] + y$ , то  $x \leq R(G)[y]$ , где

$$R(G) = \sum_{i=0}^{\infty} G^i.$$

При этом  $K$  считаем конусом в  $\mathbf{B}$ , если  $K$  выпукло, замкнуто и для любого отличного от нуля элемента  $x \in K$  весь луч  $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$  принадлежит  $K$ , но  $(-x) \notin K$ .

**Теорема 3** (первая асимптотическая формула для приращения функционала). Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\Delta_v J = \int_{\Pi} \pi(t, v(t)) dt + o(r(v) + r_1(v)), \quad r(v) \rightarrow 0, \quad r_1(v) \rightarrow 0, \quad \rho(v) \rightarrow 0 \quad (v \in \Omega). \quad (7)$$

*Доказательство.* При любом  $v \in \Omega$  по теореме о конечных приращениях в интегральной форме

$$\Delta z = \left\{ \int_0^1 f'_p(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v(t)) d\xi \right\} A[\Delta z] + \Delta_v f(t), \quad (8)$$

$$\Delta_v J = a_0[\Delta z] + \theta_0, \quad (9)$$

где

$$\theta_0 \equiv \int_0^1 \{F'(z_0 + \xi \Delta z) - F'(z_0)\} d\xi [\Delta z].$$

С помощью (5), (8) формула (9) переписывается в виде

$$\Delta_v J = \int_{\Pi} \langle \psi, \Delta_{v(t)} f(t) \rangle_m dt + \theta_0 + \theta_1, \quad (10)$$

$$\theta_1 \equiv \int_{\Pi} \left\langle \psi(t), \int_0^1 \{f'_p(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v) - f'_p(t)\} d\xi \cdot A[\Delta z](t) \right\rangle_m dt.$$

Из (8), леммы 1 и второго неравенства (2) следует существование такой постоянной  $C_1$ , что

$$\|\Delta z\|_{L_1^m} \leq C_1 \cdot r(v), \quad \text{если } \rho(v) < \varkappa, \quad (11)$$

что дает  $|\theta_0| = o(r(v))$ ,  $r(v) \rightarrow 0$  ( $v \in \Omega$ ). Из (11) и второго неравенства (2) получаем

$$|\theta_1| = o(r(v) + r_1(v)), \quad r(v) + r_1(v) \rightarrow 0, \quad \rho(v) \rightarrow 0 \quad (v \in \Omega).$$

Это завершает доказательство формулы (7).  $\square$

Из асимптотической формулы (7) и аксиом варьирования получаем следующую более конкретную формулу.

**Следствие 1.** *Для любого способа варьирования*

$$\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}} : \varepsilon > 0, \sigma \in \Sigma\},$$

удовлетворяющего условиям (0)–(4), справедлива асимптотическая формула

$$\Delta_{v_h} J = \int_{\Pi} \pi(t, v_h(t)) dt + o(\varepsilon^{\gamma_0}), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma), \quad \sigma \in \Sigma. \quad (12)$$

Из формулы (12) и теоремы Лебега о правильных точках находим, что в случае простейшего одноточечного игольчатого варьирования первая вариация функционала имеет вид

$$\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv \delta^n J(\tau, \mathbf{w}) = \pi(\tau, \mathbf{w}), \quad \tau \in \Pi_{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Таким образом, из теоремы 2 получаем следующее НУО в виде ППМ.

**Следствие 2** (поточечный принцип максимума). *Для  $L_1^s$ -локального решения  $v_0$  задачи (3)*

$$\pi(\tau, \mathbf{w}) \leq 0 \quad \text{при почти всех } \tau \in \Pi \text{ для каждого } \mathbf{w} \in U. \quad (13)$$

Из асимптотической формулы (12) и неравенств ППМ (13) вытекает, что ППМ — самое сильное из всех НУО (4) в следующем смысле. Обозначим через  $\mathcal{P}$  семейство всех способов варьирования

$$\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}} : \varepsilon > 0, \sigma \in \Sigma\}$$

со свойствами (0)–(4).

**Теорема 4.** *Если управление  $v_0$  удовлетворяет неравенствам ППМ (13), то при каждом способе варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \in \mathcal{P}$  для  $v_0$  выполняются неравенства (4).*

3.3. *Особые управления.* Рассмотрим ситуацию, когда НУО первого порядка (4) для управления  $v_0$  вырождается, а именно для некоторого способа варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$  выполняется тождество  $\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \in \Sigma$ . В этом случае управление  $v_0$  назовем *особым управлением* (ОУ) для этого способа варьирования и для соответствующего НУО (4). Так, например, управление  $v_0$  будет ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования тогда и только тогда, когда  $\pi(\tau, \mathbf{w}) = 0$  для всех  $\mathbf{w} \in U$  при почти всех  $\tau \in \Pi$ . Будем называть ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования *полностью вырожденным* ОУ поточечного принципа максимума и говорить, что на таком ОУ *поточечный принцип максимума полностью вырождается*. Из асимптотической формулы (12) получаем следующее утверждение, дополняющее теорему 4.

**Теорема 5.** *Если  $v_0$  — ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования, т.е. полностью вырожденное ОУ для ППМ (13), то  $v_0$  — ОУ для каждого способа варьирования семейства  $\mathcal{P}$ , т.е. для каждого НУО первого порядка (4).*

3.4. *Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем.* Пусть  $v_0$  — ОУ для способа варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$  и  $\gamma > \gamma_0$  — некоторое число. Предел

$$\delta^\gamma J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \Delta_{v_h} J,$$

если он существует, назовем вариацией  $J$  порядка  $\gamma - \gamma_0 + 1$  на варианте  $\{v_h \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}}\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma}$ , а НУО вида

$$\delta^\gamma J(\sigma) \leq 0, \quad \sigma \in \Sigma$$

назовем НУО порядка  $\gamma - \gamma_0 + 1$  управления  $v_0$ . В традиционных способах варьирования параметр  $\varepsilon$  обычно вводится так, что для ОУ  $v_0$  вместе с  $\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , имеем  $\delta^\gamma J(\sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\gamma_0 < \gamma < \gamma_0 + 1$ , и содержательны, вообще говоря, лишь НУО, начиная с порядка 2. Будем считать, что у нас имеет место именно такой случай. Поэтому назовем ОУ  $v_0$  *сильно вырожденным* для способа варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$ , если тождественно зануляется вариация 2-го порядка, т.е.  $\delta^{\gamma_0+1} J(\sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \in \Sigma$ .

Сформулируем условия (это условия (P) ниже), обеспечивающие при  $\gamma_0 > 1$  сильное вырождение ОУ и позволяющие с помощью теории тензорных произведений лебеговых пространств построить удобную для изучения ОУ асимптотическую формулу приращения  $\Delta_v J$  (это формула (17)). Введем специальные обозначения:

$$f''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(\cdot)[x, y] \equiv \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l f''_{\mathbf{p}^i \mathbf{p}^j}(\cdot) x^i y^j, \quad x, y \in \mathbb{R}^l,$$

$$\Gamma \equiv \{\{i, j\} : i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, l}; \Delta_{\mathbf{v}} f^{i'}_{\mathbf{p}^j}(t) = 0 \text{ для любого } \mathbf{v} \in U \text{ при почти всех } t \in \Pi\};$$

если  $X = (X_{ij})$  —  $(m \times l)$ -матрица, то  $\overline{X} = (\overline{X}_{ij})$  —  $(m \times l)$ -матрица, в которой

$$\overline{X}_{ij} = \{0, \{i, j\} \in \Gamma; X_{ij}, \{i, j\} \notin \Gamma\},$$

$X^0$  —  $ml$ -вектор-столбец, полученный развертыванием  $X$  по правилу

$$X^0 = \{X_{11}, X_{21}, \dots, X_{m1}, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{ml}\},$$

а  $M[\cdot]$  — обратный оператор свертывания  $ml$ -вектора-столбца в  $(m \times l)$ -матрицу.

**Условия (P).**

(P<sub>1</sub>) Для любых  $\xi \in L^\infty$ ,  $v \in \Omega$  формула

$$b_1(\xi, v)[x, y] \equiv \frac{1}{2} \int_{\Pi} \langle \psi(t), f''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(t, \xi(t), v(t))[A[x](t), A[y](t)] \rangle_m dt, \quad x, y \in L_1^m,$$

определяет на  $L_1^m \times L_1^m$  ограниченный билинейный функционал  $b_1(\xi, v)[\cdot, \cdot]$ , непрерывно в норме  $L^\infty \times L_1^s$  зависящий от  $\{\xi, v\}$ .



(P<sub>2</sub>) Формула

$$b_2[x, y] \equiv \int_{\Pi} \langle \psi(t), \overline{M[y(t)]} A[x](t) \rangle_m dt, \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^{ml},$$

определяет на  $L_1^m \times L_1^{ml}$  ограниченный билинейный функционал  $b_2[., .]$ .

Укажем некоторые, простые для проверки, но важные для приложений случаи, когда условия (P) заведомо выполняются.

**Теорема 6.** *Условия (P) выполняются в каждом из следующих случаев:*

- (i)  $\psi(t) \equiv 0, t \in \Pi$ ;
- (ii)  $A \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_\infty^l)$ ;
- (iii)  $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) = f_1(t, \mathbf{p}_1)\mathbf{p}_2 + f_2(t, \mathbf{p}_1, \mathbf{v}), \mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^{l_i} (i = 1, 2), l_1 + l_2 = l, f_1 - (m \times l_2)$ -матрица,  $A[.] = \{A_{(1)}[.], A_{(2)}[.]\}, A_{(i)}[.]: L_1^m \rightarrow L_1^{l_i} (i = 1, 2),$  причем  $A_{(1)} \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_\infty^{l_1})$ .

Любой ограниченный билинейный над  $L_1^m \times L_1^k$  функционал  $b[., .]$  единственным образом представим в виде

$$b[x, y] = \int_{\Pi} dt \int_{\Pi} x^*(t) \Theta(t, s) y(s) ds, \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^k, \quad (14)$$

где  $\Theta \in L_{\infty, m \times k}(\Pi \times \Pi)$  (см., например, [74, гл. 3, пп. 6.2, 6.4, 6.5]). Пусть

$$b_0[x, y] \equiv \frac{1}{2} \cdot F''(z_0)[x, y], \quad x, y \in L_1^m,$$

где  $F''(z_0)[., .]$  — билинейный функционал второй производной Фреше  $F''(z_0)$ ;  $\Theta_0(t, s), \Theta_1(t, s)$  —  $(m \times m)$ -матрицы, отвечающие по формуле (14) функционалам  $b_0$ ,

$$b_{10} \equiv b_1(A[z_0], v_0);$$

$\Theta_2(t, s)$  —  $(m \times ml)$ -матрица, отвечающая функционалу  $b_2$ ;  $I_k$  — тождественный оператор в  $L_1^k$ ;  $L_1^m \otimes L_1^k$  — проективное тензорное произведение  $L_1^m$  и  $L_1^k$ , натянутое на элементы  $x(t) \otimes y(s) \equiv x(t)y^*(s)$  ( $x \in L_1^m, y \in L_1^k$ ) и совпадающее с  $L_1^{m \times k}(\Pi \times \Pi)$ .

Рассматриваемое над  $L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$  уравнение

$$(S \otimes S)^*[\eta(t, s)] = \Theta_i(t, s) \quad (15)$$

имеет единственное решение  $\eta_i(t, s)$  ( $i = 0, 1$ ). Уравнение

$$(S \otimes I_{ml})^*[\eta(t, s)] = \Theta_2(t, s) \quad (16)$$

имеет единственное в  $L_\infty^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$  решение  $\eta_2(t, s)$  (по поводу уравнений (15) и (16) см. ниже п. 3.6). В теории принципа максимума уравнение (5) обычно называют сопряженным уравнением. По аналогии с этим уравнения (15) и (16) можно назвать *бисопряженными уравнениями*. Положим

$$E(t, s; \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \langle \Delta_{\mathbf{v}} f(t), \{\eta_0(t, s) + \eta_1(t, s)\} \Delta_{\mathbf{w}} f(s) + \eta_2(t, s) \{\Delta_{\mathbf{w}} f'_p(s)\}^0 \rangle_m, \quad t, s \in \Pi, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U.$$

**Теорема 7** (вторая асимптотическая формула для приращения функционала). *При условиях (P) справедлива асимптотическая формула*

$$\Delta_v J = \int_{\Pi} \pi(t, v(t)) dt + \int_{\Pi} dt \int_{\Pi} E(t, s; v(t), v(s)) ds + o(\{r(v) + r_1(v)\}^2), \quad (17)$$

$$r(v) \rightarrow 0, \quad r_1(v) \rightarrow 0, \quad \rho(v) \rightarrow 0, \quad \|v - v_0\|_{L_1^s} \rightarrow 0, \quad v \in \Omega.$$

*Доказательство.* В силу условия (a) существует оператор  $S^{-1} \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$  и, как мы уже отметили,  $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$ . С помощью формулы Тейлора находим

$$S[\Delta z](t) = Q(t), \quad t \in \Pi, \quad (18)$$

$$Q(t) \equiv \Delta_{v(t)} f(t) + Q_0(t), \quad Q_0(t) \equiv \sum_{i=1}^3 Q_i(t),$$

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &\equiv \{\Delta_{v(t)} f'_p(t)\} \cdot A[\Delta z](t), \quad Q_2(t) \equiv \frac{1}{2} f''_{pp}(t) [A[\Delta z](t), A[\Delta z](t)], \\
Q_3(t) &\equiv \int_0^1 (1-\xi) \cdot \{f''_{pp}(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v(t)) - f''_{pp}(t)\} [A[\Delta z](t), A[\Delta z](t)] d\xi, \\
\Delta_v J &= a_0[\Delta z] + b_0[\Delta z, \Delta z] + \theta_2, \\
\theta_2 &\equiv \left\{ \int_0^1 (1-\xi) \cdot \{F''(z_0 + \xi \Delta z) - F''(z_0)\} d\xi \right\} [\Delta z, \Delta z].
\end{aligned}$$

Из (7) и (18) получаем

$$\begin{aligned}
a_0[\Delta z] &= \int_{\Pi} \pi(t, v(t)) dt + b_{10}[\Delta z, \Delta z] + b_2[\Delta z(\cdot), \{\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\}^0] + \theta_3, \\
\theta_3 &= a_0[Q_3(\cdot)].
\end{aligned}$$

Каждый билинейный функционал (14) однозначно отождествляется с некоторым линейным функционалом  $c[\cdot]$  над проективным тензорным произведением  $L_1^m \otimes L_1^k \equiv L_1^{m \times k}(\Pi \times \Pi)$  равенством

$$c[x(t) \cdot y^*(s)] = b[x, y], \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^k. \quad (19)$$

Пусть:  $c_0, c_1, c_2$  — функционалы, отождествляемые по (19) соответственно с  $b_0, b_{10}, b_2$ ; функционалы  $l_0, l_1 \in (L_1^m \otimes L_1^m)^*$ ,  $l_2 \in (L_1^m \otimes L_1^{ml})^*$  определяются формулами

$$l_i = (S^{-1} \otimes S^{-1})^* [c_i] \quad (i = 0, 1); \quad l_2 = (S^{-1} \otimes I_{ml})^* [c_2], \quad (20)$$

а  $\eta_i(t, s) \in L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$  ( $i = 0, 1$ ),  $\eta_2(t, s) \in L_1^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$  — функции Рисса для  $l_i$  ( $i = 0, 1$ ),  $l_2$  соответственно. Учитывая, что

$$(S^{-1} \otimes S^{-1})^* = ((S \otimes S)^*)^{-1}, \quad (S^{-1} \otimes I_{ml})^* = ((S \otimes I_{ml})^*)^{-1},$$

равенства (20) можно переписать в виде

$$(S \otimes S)^* [l_i] = c_i, \quad i = 0, 1, \quad (S \otimes I_{ml})^* [l_2] = c_2$$

или, переходя от функционалов к соответствующим функциям Рисса, в виде

$$(S \otimes S)^* [\eta_i] = \Theta_i \quad (i = 0, 1), \quad (S \otimes I_{ml})^* [\eta_2] = \Theta_2,$$

что означает:  $\eta_i(t, s)$  — единственное в  $L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$  решение  $i$ -го уравнения (15) ( $i = 0, 1$ ),  $\eta_2(t, s)$  — единственное в  $L_\infty^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$  решение уравнения (16). Соотношения (18), (20) дают

$$b_0[\Delta z, \Delta z] = l_0[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + \theta_4^{(0)}, \quad (21)$$

$$b_{10}[\Delta z, \Delta z] = l_1[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + \theta_4^{(1)}, \quad (22)$$

$$b_2[\Delta z, \{\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\}^c] = l_2[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \{\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\}^0] + \theta_5, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_4^{(i)} &\equiv l_i[Q_0(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + l_i[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes Q_0(\cdot)] + l_i[Q_0(\cdot) \otimes Q_0(\cdot)] \quad (i = 0, 1), \\
\theta_5 &\equiv l_2[Q_0(\cdot) \otimes \{\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\}^0].
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства (17) достаточно показать (см. (17), (9), (10), (21), (22), (23)), что каждая из величин  $\theta_2, \theta_3, \theta_4^{(0)}, \theta_4^{(1)}, \theta_5$  подчиняется условию

$$|\theta| = o(\{r(v) + r_1(v)\}^2), \quad r(v) \rightarrow 0, \quad r_1(v) \rightarrow 0, \quad \rho(v) \rightarrow 0 \quad (v \in \Omega).$$

Для  $\theta_2$  это следует из (11) и непрерывности второй производной Фреше  $F''$ , для  $\theta_3$  — из (11) и условия  $(P_1)$ , для  $\theta_4^{(i)}$  ( $i = 1, 0$ ) — из (2), (11), для  $\theta_5$  — из (2), (11) и условия  $(P_2)$ . Теорема 7 доказана.  $\square$

Непосредственно из формулы (17) и аксиом варьирования получаем следующую более конкретную асимптотическую формулу.

**Следствие 3.** Для любого способа варьирования

$$\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}} : \varepsilon > 0, \sigma \in \Sigma\},$$

удовлетворяющего условиям (0)–(4), справедлива асимптотическая формула

$$\Delta_{v_h} J = \int_{\Pi} \pi(t, v_h(t)) dt + \int_{\Pi} dt \int_{\Pi} E(t, s; v_h(t), v_h(s)) ds + o(\varepsilon^{2\gamma_0}), \quad (24)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Из формулы (24), с учетом вида функции  $E$ , получаем следующее утверждение о достаточных условиях сильного вырождения ОУ для способа варьирования семейства  $\mathcal{P}$ .

**Теорема 8** (общие достаточные условия сильного вырождения особых управлений). Пусть  $v_0$  есть ОУ для принадлежащего  $\mathcal{P}$  способа варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$ . Если выполняются условия (P) и

$$\int_{\Pi} \pi(t, v_h(t)) dt = 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\sigma (\sigma \in \Sigma),$$

то

$$\Delta_{v_h} J = O(\varepsilon^{2\gamma_0}), \quad \varepsilon \rightarrow 0 (\sigma \in \Sigma),$$

и при  $\gamma_0 > 1$  управление  $v_0$  является сильно вырожденным ОУ для данного способа варьирования.

**Теорема 9** (достаточные условия сильного вырождения особых управлений ППМ). Если  $v_0$  есть полностью вырожденное ОУ для ППМ и выполняются условия (P), то из полученных для  $v_0$  простейшим одноточечным игольчатым варьированием НУО вырождаются все НУО до порядка  $n$  включительно, и содержательными могут быть лишь НУО порядка, большего  $n$ . Таким образом, в случае  $n > 1$  всякое ОУ ППМ является сильно вырожденным ОУ.

*Доказательство.* При простейшем одноточечном игольчатом варьировании, ввиду полного вырождения ППМ, имеем  $\pi(t, v_h(t)) = 0$ ,  $t \in \Pi$ , для любого  $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma$ . Так как в данном случае  $\gamma_0 = n$ , то выводы теоремы 9 следуют напрямую из теоремы 8. Теорема 9 доказана.  $\square$

**3.5. Необходимые условия оптимальности сильно вырожденных особых управлений поточечного принципа максимума.** В условиях теоремы 8 асимптотическая формула (24) позволяет, если для способа варьирования  $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$  существует вариация  $\delta^{2\gamma_0} J(\sigma)$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , порядка  $\gamma_0 + 1$ , получить НУО порядка  $\gamma_0 + 1$ :

$$\delta^{2\gamma_0} J(\sigma) \leq 0, \quad \sigma \in \Sigma.$$

Рассмотрим в качестве примера способ простейшего одноточечного игольчатого варьирования. Очевидно, что в этом случае для существования вариации  $\delta^{2\gamma_0} J(\sigma) \equiv \delta^{2n} J(\tau, \mathbf{w})$  порядка  $n + 1$  достаточно, например, выполнения следующих условий.

**Условия (G).**

(G<sub>i</sub>) Для функции  $\eta_i(t, s)$  правильные относительно  $2n$ -мерной меры Лебега на  $\Pi \times \Pi$  точки Лебега образуют на «диагонали»  $\{\{t, s\} \in \Pi \times \Pi : t = s\}$  множество полной меры относительно  $n$ -мерной «диагональной» меры Лебега ( $i = 0, 1, 2$ ).

На первый взгляд условия (G) могут показаться неконструктивными. Однако на самом деле эти условия часто выполняются и сравнительно легко проверяются. О возможностях проверки условий (G) в конкретных задачах см. п. 3.6. Конкретные примеры проверки этих условий см. в разделе 4.

Из сказанного выше получаем, что справедливы следующие НУО особых управлений ППМ в случае полного (и сильного) вырождения ППМ.

**Теорема 10.** Пусть  $v_0$  —  $L_1^s$ -локальное решение задачи (3) и полностью вырожденное ОУ для ППМ. Если выполняются условия (P) и (G), то

$$\text{для каждого } \mathbf{w} \in U \text{ при почти всех } \tau \in \Pi: \quad \delta^{2n} J(\tau, \mathbf{w}) = E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq 0.$$

Полное вырождению ППМ для ОУ  $v_0$  означает, что сечения  $\mathcal{M}(t) \equiv \{\mathbf{v} \in U : \{t, \mathbf{v}\} \in \mathcal{M}\}$  множества  $\mathcal{M} \equiv \{\{t, \mathbf{v}\} \in \Pi \times U : \pi(t, \mathbf{v}) = 0\}$  совпадают с множеством  $U$  при почти всех  $t \in \Pi$ .

В общем случае мы говорим, что ППМ вырождается на решении  $v_0$  задачи (3) и это решение  $v_0$  есть ОУ для ППМ, если

$$\text{mes}\{t \in \Pi : \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\} > 0. \quad (25)$$

Покажем, что в этом случае  $v_0$  — ОУ для более общего способа одноточечного игольчатого варьирования, чем простейшее одноточечное игольчатое варьирование. Действительно, функция  $\pi(t, \mathbf{v}) : \Pi \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция Каратеодори, отображение  $\overline{\mathcal{M}(\cdot)} : \Pi \rightarrow 2^{\bar{U}}$  измеримо и имеет счетное аппроксимирующее его семейство измеримых сечений (см. [24, п. 8.1.5])  $\mathcal{K} \equiv \{v_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ , т.е. у множества  $\Pi$  существует подмножество  $\Pi_0$  полной меры такое, что

$$\overline{\mathcal{M}(t)} = \overline{\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} \{v_k(t)\} \right\}}, \quad t \in \Pi_0.$$

Обозначим через  $\Pi_l$  ту часть множества  $\Pi_0$ , каждая точка которой есть точка Лебега суперпозиции  $\pi(\cdot, v_k(\cdot))$  для любой функции  $v_k(\cdot)$  семейства  $\mathcal{K}$ . Очевидно, что  $\text{mes } \Pi_l = \text{mes } \Pi$ . Пусть  $\Sigma$  — совокупность всех наборов  $\sigma \equiv \{\tau, v_k\}$ , в каждом из которых  $v_k$  — какой-то элемент  $\mathcal{K}$ , а  $\tau$  — некоторая точка множества  $\Pi_l$ . Каждой паре  $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$ , в которой  $\varepsilon > 0$ ,  $\sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$ , отвечает допустимое управление  $v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon, \sigma\}}(t)$ ,  $t \in \Pi$ , определяемое формулой

$$v_h(t) \equiv \{v_k(t), t \in \Pi \cap \Pi_{\varepsilon}(\tau); v_0(t), t \in \Pi \setminus \Pi_{\varepsilon}(\tau)\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \sigma = \{\tau, v_k\} \in \Sigma,$$

а каждому набору параметров (варьирования)  $\sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$  — семейство функций  $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\varepsilon, \sigma\} \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma}$ , одноточечная игольчатая варианта управления  $v_0$ . Легко проверяется, что этот способ варьирования принадлежит семейству  $\mathcal{P}$  и для него  $\gamma_0 = n$ . Для такого способа варьирования первая вариация

$$\delta J(\sigma) \equiv \delta J(\tau, v_k) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon^n} \Delta_{v_h} J \right)$$

при любом  $\sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$  существует и равна  $\pi(\tau, v_k(\tau))$ . Так как  $\mathcal{K}$  аппроксимирует отображение  $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$ , то для  $v_0$  имеем  $\delta J(\sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , т.е.  $v_0$  — ОУ для указанного способа одноточечного игольчатого варьирования, назовем его *общим способом одноточечного игольчатого варьирования*.

При условиях (P) для общего способа одноточечного игольчатого варьирования из теоремы 8 получаем:  $\Delta_{v_h} J = O(\varepsilon^{2n})$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\sigma \in \Sigma$ ). Значит, если  $n > 1$ , то  $v_0$  — сильно вырожденное особое управление для этого способа варьирования. Если выполняются условия (P) и (G), то для общего способа одноточечного игольчатого варьирования получаем из (24) при любом  $n \geq 1$ :

$$\delta^{2n} J(\sigma) = E(\tau, \tau; v_k(\tau), v_k(\tau)) \text{ для всех } \sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma.$$

Таким образом, справедливы следующие НУО порядка  $n + 1$ , обобщающие условия теоремы 10.

**Теорема 11.** Пусть  $v_0$  —  $L_1^s$ -локальное решение задачи (3) и имеет место (25). Если выполняются условия (P) и (G), то

$$E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq 0 \text{ для каждого } \mathbf{w} \in \mathcal{M}(\tau) \text{ при почти всех } \tau \in \Pi.$$

3.6. *Бисопряженные уравнения.* В более подробной записи уравнения (15) ( $i = 0, 1$ ) и (16) имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \eta(t, s) - (I_m^* \otimes A^*) \left[ \eta(t, s) \cdot \{f_{\mathbf{p}}'(s)\}^* \right] - (A^* \otimes I_m^*) \left[ \{f_{\mathbf{p}}'(t)\}^* \cdot \eta(t, s) \right] + \\ + (A^* \otimes A^*) \left[ \{f_{\mathbf{p}}'(t)\}^* \cdot \eta(t, s) \cdot \{f_{\mathbf{p}}'(s)\}^* \right] = \Theta_i(t, s)(t, s \in \Pi), \quad i = 0, 1, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\eta(t, s) - (A^* \otimes I_{ml}^*) \left[ \{f_{\mathbf{p}}'(t)\}^* \cdot \eta(t, s) \right] = \Theta_0(t, s), \quad t, s \in \Pi. \quad (27)$$

Здесь каждый первый сомножитель в тензорном произведении операторов «действует по переменной  $t$ », а каждый второй сомножитель — «по переменной  $s$ »,  $I_m^*$  есть тождественный оператор в  $L_\infty^m$ .

В конкретных задачах условия **(G)** часто сравнительно легко проверяются. При этом удобно бывает воспользоваться тем, что уравнения (5), (26), (27) имеют вид

$$Z(\theta) - L[Z(\cdot)](\theta) = \Theta(\theta), \quad \theta \in Q, \quad (28)$$

где оператор  $L \in \mathfrak{L}(L_\infty^r(Q), L_\infty^r(Q))$  квазинильпотентен. Поэтому, если некоторое замкнутое в  $L_\infty^r(Q)$ , инвариантное относительно  $L$  множество  $M$  содержит функцию  $\Theta(\cdot)$ , то и  $L_\infty^r(Q)$ -решение уравнения (28) принадлежит множеству  $M$ . Так, например, в задачах оптимизации гиперболических и сосредоточенных систем с терминальными и интегральными функционалами функции  $\Theta_i(\cdot)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) обычно непрерывны везде на  $\Pi \times \Pi$  за исключением, быть может, конечного числа фиксированных гиперповерхностей разрыва типа конечного скачка. Уравнения (26), (27) позволяют доказать, что таковы же и функции  $\eta_i(\cdot)$  ( $i = 0, 1, 2$ ), а это означает выполнение условий **(G)** (см. примеры ниже).

**4. Примеры.** Применение полученных выше результатов к конкретной задаче оптимизации начинается с того, что рассматриваемая УНКЗ, решение которой ищется в заданном функциональном классе  $W(\Pi)$ , некоторой заменой  $(\star)$ , связанной, как правило, с обращением главной части УНКЗ, сводится к эквивалентному уравнению (1); наличие эквивалентного ВФУ вида (1) гарантирует справедливость для УНКЗ теоремы единственности решения: никакому управлению из класса допустимых не может отвечать более одного решения УНКЗ класса  $W(\Pi)$ . Той же заменой  $(\star)$  к виду (3) преобразуется функционал качества. При этом класс  $\Omega$  совпадает с множеством тех управлений  $v$  из класса допустимых  $\mathcal{D}$ , каждому из которых отвечает единственное в  $W(\Pi)$  решение  $x_v$  УНКЗ. Обратная замена позволяет переписать результаты в терминах исходной оптимизационной задачи.

Проиллюстрируем сказанное конкретными примерами, приняв следующие соглашения: функции  $g(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}): \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ , задающие правые части рассматриваемых ниже дифференциальных уравнений, дважды дифференцируемы по  $\mathbf{p}$  для всех  $\mathbf{v}$  при почти всех  $t$  и вместе с производными  $g'_{\mathbf{p}}, g''_{\mathbf{pp}}$  измеримы по  $t$  для всех  $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$  и непрерывны по  $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$  для почти всех  $t$ , а также удовлетворяют условиям типа **(N)**, что гарантирует выполнение указанных выше условий **(N)** для соответствующих (т.е. эквивалентных рассматриваемым УНКЗ) уравнений (1);  $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U, t \in \Pi\}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^s$  — ограниченное множество;  $x_v(\cdot)$  — отвечающее управлению  $v(\cdot) \in \Omega$  глобальное решение УНКЗ;  $v_0(\cdot)$  —  $L_1^s$ -локальное решение рассматриваемой оптимизационной задачи;  $x_0(\cdot) \equiv x_{v_0}(\cdot)$ ;  $z_0(\cdot)$  — решение эквивалентного рассматриваемой УНКЗ уравнения (1), отвечающее управлению  $v_0$ ;  $G(\cdot) \in C_2(\mathbb{R}^m)$  — заданная функция;  $W_p^1(\Pi)$  — соболевское пространство, состоящее из всех элементов  $L_p(\Pi)$ , имеющих обобщенные производные первого порядка по всем независимым переменным, принадлежащие  $L_p(\Pi)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ; используется тот же «принцип сокращений в обозначениях», что и выше:  $g(t)$  — правая часть уравнения, в которой  $x(t)$  заменено на  $x_0(t)$ , а  $v(t)$  — на  $v_0(t)$  (аналогичный смысл имеют  $g'_{\mathbf{p}}(t)$  и  $g''_{\mathbf{pp}}(t)$ ),  $\Delta_{\mathbf{w}}g(t)$  — разность, где уменьшаемое равно правой части уравнения, в которой  $x(t)$  заменено на  $x_0(t)$ ,  $v(t)$  — на некоторый элемент  $\mathbf{w}$  множества  $U$ , а вычитаемое — это  $g(t)$  (аналогичный смысл имеют  $\Delta_{\mathbf{w}}g'_{\mathbf{p}}(t)$  и  $\Delta_{\mathbf{w}}g''_{\mathbf{pp}}(t)$ ).

*4.1. Оптимизационная задача для полулинейного волнового уравнения.* Пусть  $n = 2$ ,  $\Pi = [0, 1]^2$ ,  $l = m = 1$ ,  $s = 1$  и управляемая система описывается смешанной задачей для полулинейного волнового уравнения

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv x''_{t^1 t^1} - x''_{t^2 t^2} = g(t, x(t), u(t)), \quad t \in \Pi, \quad (29)$$

$$x(0, t^2) = w_1(t^2), \quad x'_{t^1}(0, t^2) = w_2(t^2), \quad t^2 \in [0, 1], \quad (30)$$

$$x'_{t^2}(t^1, 0) = 0, \quad x'_{t^2}(t^1, 1) = 0, \quad t^1 \in [0, 1]. \quad (31)$$

Здесь  $w_1$  и  $w_2$  — заданные функции, соответственно из класса  $AC_\infty([0, 1])$  абсолютно непрерывных на  $[0, 1]$  функций с ограниченной производной и класса  $L_\infty([0, 1])$ . Будем рассматривать обобщенные из  $W_\infty^1(\Pi)$  решения задачи (29)—(31). Перед тем как дать определение решения УНКЗ (29)—(31), рассмотрим волновое уравнение

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t), \quad t \in \Pi, \quad (32)$$

где  $z(\cdot) \in L_\infty$ , и смешанную задачу (30)—(32). Положим для любых  $x, \eta \in W_2^1(\Pi)$ ,  $z \in L_\infty(\Pi)$ :

$$\mathcal{J}[x, \eta, z] \equiv \int_{\Pi} (-x'_{t^1} \eta'_{t^1} + x'_{t^2} \eta'_{t^2} - z\eta) dt - \int_0^1 \eta(0, \xi) w_2(\xi) d\xi.$$

Функцию  $x(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$  назовем обобщенным решением задачи (30)—(32), если для нее  $x(0, t^2) = w_1(t^2)$ ,  $t^2 \in [0, 1]$  и для любой функции  $\eta \in W_2^1(\Pi)$ , удовлетворяющей условию

$$\eta(1, t^2) = 0, \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \quad (33)$$

выполняется равенство  $\mathcal{J}[x, \eta, z] = 0$ . Из результатов [36, гл. 5, § 2] следует, что задача (30)—(32) для любого  $z \in L_\infty$  имеет единственное решение в  $W_2^1(\Pi)$ . Непосредственным вычислением проверяется, что это решение, как и в классическом случае, задается формулой Даламбера (см. (34)—(36)). Для удобства ее записи обозначим через  $e_\zeta[y]$  четное и с периодом 2 по переменной  $\zeta$  продолжение на всю действительную ось  $\zeta$  функции  $y$ , заданной первоначально (как функция переменной  $\zeta$ ) на отрезке  $0 \leq \zeta \leq 1$ ; если величина  $y$  не зависит ни от каких других переменных кроме  $\zeta$ , то вместо  $e_\zeta[y]$  пишем  $e[y]$ . Например: в приведенной ниже формуле (35)  $e[w_1](\cdot)$  — четное и с периодом 2 продолжение на всю действительную ось определенной на отрезке  $[0, 1]$  функции  $w_1(\cdot)$ ; в формуле (36)  $e_{\xi^2}[z](\xi)$  — четное и с периодом 2 по переменной  $\xi^2$  продолжение на всю полосу  $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi^1 \leq 1\}$  функции  $z(\xi)$ , заданной на квадрате  $\Pi \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi^1 \leq 1, 0 \leq \xi^2 \leq 1\}$ . Решение задачи (30)—(32) записывается в виде

$$x(t) = \Theta(t) + A[z](t), \quad t \in \Pi, \quad (34)$$

где

$$\Theta(t) \equiv \frac{1}{2} \{e[w_1](t^2 + t^1) + e[w_1](t^2 - t^1)\} + \frac{1}{2} \int_{t^2 - t^1}^{t^2 + t^1} e[w_2](\zeta) d\zeta, \quad (35)$$

$$A[z](t) \equiv \frac{1}{2} \iint_{\Delta(t)} e_{\xi^2}[z](\xi) d\xi^1 d\xi^2, \quad t \in \Pi, \quad (36)$$

$$\Delta(t) \equiv \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi^1 \leq t^1, t^2 - (t^1 - \xi^1) \leq \xi^2 \leq t^2 + (t^1 - \xi^1) \right\}; \quad (37)$$

$\Delta(t)$  — часть характеристического конуса уравнения (32) с вершиной  $t = \{t^1, t^2\}$ , лежащая в полосе  $[0 \leq \xi^1 \leq t^1] \times (-\infty < \xi^2 < +\infty)$ . Из (34)—(36) следует, что решение (30)—(32) принадлежит классу  $W_\infty^1(\Pi)$ . Пусть  $W(\Pi)$  — класс функций  $x(\cdot) \in W_\infty^1(\Pi)$ , каждая из которых при некотором  $z \in L_\infty(\Pi)$  является решением (30)—(32), т.е. представима в виде (34).

Приведем УНКЗ (29)—(31) к эквивалентному ВФУ вида (1), пользуясь тем, что формула (34) (играющая в данном случае роль формулы замены  $(\star)$ ) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом  $L_\infty$  функций  $z(\cdot)$  и классом  $W(\Pi)$  функций  $x(\cdot)$  из пространства  $W_\infty^1$ , удовлетворяющих условиям (30)—(31).

Обобщенным решением задачи (29)—(31), отвечающим данному  $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ , назовем такую функцию  $x(\cdot)$  из  $W_\infty^1(\Pi)$ , для которой при любой функции  $\eta \in W_2^1(\Pi)$ , удовлетворяющей условию (33), имеем  $\mathcal{J}[x(\cdot), \eta(\cdot), g(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))] = 0$ . Если функция  $x(\cdot)$  является решением (29)—(31), отвечающим управлению  $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ , то она удовлетворяет задаче (30)—(32) при  $z(t) = g(t, x(t), u(t))$ ,  $t \in \Pi$ , и, следовательно, принадлежит классу  $W(\Pi)$ . Так как при этом  $x(\cdot)$  и  $z(\cdot)$  связаны формулой (34), то  $z(\cdot)$  удовлетворяет на  $\Pi$  интегральному уравнению

$$z(t) = g(t, \Theta(t) + A[z](t), u(t)), \quad t \in \Pi. \quad (38)$$

Пусть, наоборот, некоторая функция  $\tilde{z}(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$  удовлетворяет на  $\Pi$  уравнению (38) при данном  $u(\cdot)$ . Тогда связанная с ней формулой (34) функция  $\tilde{x}(\cdot)$  принадлежит классу  $W(\Pi)$ , являясь при  $z \equiv \tilde{z}$  решением задачи (30)–(32). Но так как  $\tilde{z}(t) = g(t, \tilde{x}(t), u(t))$ ,  $t \in \Pi$ , то функция  $\tilde{x}(\cdot)$  является решением (29)–(31), отвечающим управлению  $u(\cdot)$ . Таким образом, для каждого фиксированного  $u(\cdot) \in \mathcal{D}$  задача (29)–(31) эквивалентна рассматриваемому над  $L_\infty(\Pi)$  интегральному уравнению (38), а связь между их решениями задается формулой (34). Уравнение (38) это уравнение вида (1), в котором

$$f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv g(t, \Theta(t) + \mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}.$$

Легко проверяются условия (а), (б), (с), в качестве мажоранты  $B$  подходит сам оператор  $A$ ; для соответствующего оператора  $B_\infty$  при любом  $\delta > 0$  вольтерровой  $\delta$ -цепочкой является, например, дополненная пустым множеством система прямоугольников

$$\left\{ \{t \in \mathbb{R}^2 : [0 \leq t^1 \leq i/(K+1)] \times [0 \leq t^2 \leq 1]\}, \quad i = 1, 2, \dots, K+1 \right\},$$

где  $K$  — целая часть числа  $3/\delta$ .

Рассмотрим для УНКЗ (29)–(31) оптимизационную задачу

$$J[v] \equiv \int_0^1 G(x_v(1, t^2)) dt^2 \rightarrow \max, \quad v \in \Omega.$$

Эта задача заменой (34) приводится к эквивалентной оптимизационной задаче вида (3) для уравнения (38), в которой

$$F[z] \equiv \int_0^1 G(\Theta(1, t^2) + A[z](1, t^2)) dt^2, \quad z \in L_1.$$

Здесь выполняется условие (ii) теоремы 6. Положив

$$\nabla(t) \equiv \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : t^1 \leq \xi^1 \leq 1, \quad t^2 + t^1 - \xi^1 \leq \xi^2 \leq t^2 - t^1 + \xi^1 \right\}, \quad t \in \Pi,$$

имеем

$$A^*[z](t) \equiv \frac{1}{2} \iint_{\nabla(t)} e_{\xi^2}[z](\xi) d\xi^1 d\xi^2, \quad t \in \Pi, \quad z \in L_\infty,$$

$$\omega(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{t^2+t^1-1}^{t^2-t^1+1} G'(e_\zeta[x_0(1, \zeta)](\zeta)) d\zeta, \quad t \in \Pi.$$

Из (5) следует, что  $\psi$  непрерывна и является слабым  $W_2^1(\Pi)$ -решением задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\psi](t) &= g'_p(t)\psi(t), \quad t \in \Pi; \\ \psi'_{t^2}(t^1, 0) &= \psi'_{t^2}(t^1, 1) = 0, \quad 0 \leq t^1 \leq 1; \\ \psi(1, t^2) &= 0, \quad \psi'_{t^1}(1, t^2) = -G'(x_0(1, t^2)), \quad 0 \leq t^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Находим:

$$\Theta_0(t, s) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} G''(e_\zeta[x_0(1, \zeta)](\zeta)) \cdot \chi_{\nabla(t)}(1, \zeta) \cdot \sum_{i=0}^1 \{ \chi_{\nabla(s)}(1, \zeta - 2i) + \chi_{\nabla(s)}(1, -\zeta + 2i) \} d\zeta,$$

$$\Theta_2(t, s) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \{ \chi_{\nabla(s)}(t^1, t^2 + 2i) + \chi_{\nabla(s)}(t^1, 2i - t^2) \},$$

$$\Theta_1(t, s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^1 \{ \sigma(t^1, t^2 + 2i; s^1, s^2 + 2j) + \sigma(t^1, 2i - t^2; s^1, s^2 + 2j) + \\ + \sigma(t^1, t^2 + 2i; s^1, 2j - s^2) + \sigma(t^1, 2i - t^2; s^1, 2j - s^2) \}, \quad t, s \in \Pi,$$

где

$$\sigma(t, s) \equiv \int_{\Pi} \psi(\xi) \cdot g''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(\xi) \cdot \chi_{\nabla(t)}(\xi) \cdot \chi_{\nabla(s)}(\xi) d\xi \quad (t, s \in \Pi).$$

Функции  $\Theta_0, \Theta_1$  непрерывны на  $\Pi \times \Pi$ . Функция  $\Theta_2$  непрерывна везде на  $\Pi \times \Pi$  за исключением границ тел

$$I_1 \equiv \{ \{t, s\} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : t \in \Delta(s) \}, \\ I_2 \equiv \{ \{t, s\} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \{t^1, -t^2\} \in \Delta(s) \}, \\ I_3 \equiv \{ \{t, s\} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \{t^1, 2 - t^2\} \in \Delta(s) \},$$

где она терпит разрывы типа конечного скачка (говорим, что функция  $\Theta$  имеет в точке границы некоторого тела  $\Delta \subset \Pi \times \Pi$  конечный скачок, если в этой точке существуют различные конечные пределы  $\Theta$  по внутренности  $\overset{\circ}{\Delta}$  множества  $\Delta$  и по множеству  $(\Pi \times \Pi) \setminus \Delta$ ), причем  $\Theta_2(t, s) = 0$ ,  $t \notin \Delta(s)$ . Пользуясь сказанным в п. 3.6, получаем, что уравнения (26), которые в данном случае записываются в виде

$$\eta(t, s) - \frac{1}{2} \int_{\nabla(t)} e_{\xi^2}[\eta(\xi, s)] d\xi - \frac{1}{2} \int_{\nabla(s)} e_{\xi^2}[\eta(t, \xi)] d\xi + \\ + \frac{1}{4} \int_{\nabla(t)} d\xi \int_{\nabla(s)} e_{\xi^2}[e_{\tau^2}[\eta(\xi, \tau)]] d\tau = \Theta_i(t, s), \quad t, s \in \Pi, \quad i = 1, 2,$$

имеют непрерывные на  $\Pi \times \Pi$  решения  $\eta_i$  ( $i = 0, 1$ ), а решение  $\eta_2(t, s)$  уравнения (27), имеющего вид

$$\eta(t, s) - \frac{1}{2} \int_{\nabla(t)} e_{\xi^2}[\eta(\xi, s)] d\xi = \Theta_2(t, s), \quad t, s \in \Pi,$$

непрерывно везде на  $\Pi \times \Pi$  вне границ  $\partial I_1, \partial I_2, \partial I_3$ , на которых оно может иметь лишь разрывы типа конечного скачка, причем  $\eta_2(t, s) = 0$ , если  $t \notin \Delta(s)$ . Это означает, что выполняются условия **(Г)**. При этом условие **(Г<sub>2</sub>)** удовлетворяет та функция из соответствующего класса эквивалентности, для которой

$$\eta_2(\tau, \tau) = \lim_{t \rightarrow \tau, s \rightarrow \tau, t \in \Delta(s)} \left\{ \frac{1}{4} \eta_2(t, s) \right\}$$

при почти всех  $\tau \in \Pi$ . По теореме 9, если  $v_0$  — ОУ для ППМ, то в рассматриваемой задаче из получаемых игольчатым варьированием НУО вырождаются все НУО до порядка 2 включительно и содержательны, вообще говоря, лишь НУО теорем 10 и 11, имеющие третий порядок.

*4.2. Оптимизационная задача для системы Гурса—Дарбу.* Пусть  $n = 2$ ,  $\Pi = [0, 1]^2$ ,  $l = 3m$  и управляемая система описывается краевой задачей Гурса—Дарбу

$$x''_{i^1 i^2} = g(t, x, x'_{i^1}, x'_{i^2}, v(t)), \quad t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi, \quad (39)$$

$$x(t^1, 0) = w_1(t^1), \quad 0 \leq t^1 \leq 1; \quad x(0, t^2) = w_2(t^2), \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \quad (40)$$

где  $w_1, w_2$  — такие фиксированные функции из класса  $AC_{\infty}^m([0, 1])$ , что  $w_1(0) = w_2(0)$ ;  $g(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv g(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^m$  ( $i = 0, 1, 2$ ),  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$ . Решение задачи (39), (40) понимаем в смысле почти



всюду и ищем в классе  $W(\Pi)$  всех удовлетворяющих условиям (40) абсолютно непрерывных на  $\Pi$   $m$ -вектор-функций с ограниченными первыми и смешанной производными. Формула

$$x(t) = w_1(t^1) + w_2(t^2) - w_1(0) + \int_0^{t^1} \int_0^{t^2} z(\xi) d\xi^1 d\xi^2 \quad (41)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями  $z(\cdot)$  из пространства  $L_\infty^m$  и функциями  $x(\cdot)$  из класса  $W(\Pi)$ . Используя (41) как формулу замены (\*), приводим УНКЗ (39), (40) к эквивалентному уравнению вида (1) над пространством  $L_\infty^m$ , при этом

$$f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv f(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{v}) = g(t, w_1(t^1) + w_2(t^2) - w_1(0) + \mathbf{p}_0, w_1'(t^1) + \mathbf{p}_1, w_2'(t^2) + \mathbf{p}_2, \mathbf{v}),$$

$$A[z](t) \equiv \{A_{(0)}[z](t), A_{(1)}[z](t), A_{(2)}[z](t)\} \equiv \left\{ \int_0^{t^1} \int_0^{t^2} z(\xi) d\xi^1 d\xi^2, \int_0^{t^2} z(t^1, \xi) d\xi, \int_0^{t^1} z(\xi, t^2) d\xi \right\}.$$

Проверяем условия (а), (б), (с): в качестве мажоранты  $B$  подходит оператор, задаваемый формулой

$$B[z](t) \equiv \int_0^{t^1} \int_0^{t^2} z(\xi) d\xi^1 d\xi^2 + \int_0^{t^2} z(t^1, \xi) d\xi + \int_0^{t^1} z(\xi, t^2) d\xi, \quad t \in \Pi, \quad z \in L_1;$$

как для этого оператора  $B$ , так и для соответствующего оператора  $B_\infty$  вольтеррова  $\delta$ -цепочка при любом  $\delta > 0$  легко набирается, например, из множеств  $H_\alpha \equiv \{t \in \Pi : 0 \leq t^1 + t^2 \leq \alpha\}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2$ ; из упомянутого выше признака квазинильпотентности [61, Теорема 2] следует квазинильпотентность операторов  $B$  и  $B_\infty$ .

Для управляемой системы Гурса—Дарбу (39), (40) рассмотрим терминальную задачу оптимизации

$$J[v] \equiv G(x_v(1, 1)) \rightarrow \max, \quad v \in \Omega. \quad (42)$$

Эта задача заменой (41) приводится к эквивалентной оптимизационной задаче вида (3), в которой

$$F[z] \equiv G \left( w_1(1) + w_2(1) - w_1(0) + \int_0^1 \int_0^1 z(\xi) d\xi^1 d\xi^2 \right), \quad z \in L_1^m.$$

Сопряженное уравнение (5) имеет вид

$$\psi(t) - A^*[\{g_{\mathbf{p}}'(\cdot)\}^* \psi(\cdot)](t) = (G'(x_0(1, 1)))^*, \quad t \in \Pi, \quad (43)$$

где  $g_{\mathbf{p}}'(t) \equiv g_{\mathbf{p}}'(t, x_0(t), x'_{0t^1}(t), x'_{0t^2}(t), v_0(t))$ ,  $t \in \Pi$ ,  $A^*$  — сопряженный к оператору  $A$  как элементу класса  $\mathfrak{L}(L_1^m, L_1^l)$ ,

$$A^*[z](t) \equiv A_{(0)}^*[z^{(0)}](t) + A_{(1)}^*[z^{(1)}](t) + A_{(2)}^*[z^{(2)}](t), \quad t \in \Pi,$$

$$A_{(0)}^*[z^{(0)}](t) \equiv \int_{t^1}^1 \int_{t^2}^1 z^{(0)}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad A_{(1)}^*[z^{(1)}](t) \equiv \int_{t^2}^1 z^{(1)}(t^1, \xi) d\xi,$$

$$A_{(2)}^*[z^{(2)}](t) \equiv \int_{t^1}^1 z^{(2)}(\xi, t^2) d\xi, \quad z = \{z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}\} \in L_\infty^m \times L_\infty^m \times L_\infty^m.$$

Для задачи (3), эквивалентной задаче (42), условие (ii) теоремы 6, которое выполнялось в предыдущем примере раздела 4, может и не выполняться. Оно, очевидно, выполняется лишь в том случае, когда правая часть уравнения (39) не зависит от производных. Однако непосредственно из теорем 6 и 9 получаем, например, следующий результат: если  $L_1^s$ -локальное решение задачи (42)  $v_0$  является полностью вырожденным ОУ для ППМ, то при условии, что правая часть

уравнения (39) зависит от производных аффинно и они в ней аддитивно отделены от управления, т.е.

$$g(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv g_1(t, \mathbf{p}_0)\mathbf{p}_1 + g_2(t, \mathbf{p}_0)\mathbf{p}_2 + g_0(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{v}) \quad (g_i - (m \times m)\text{-матрицы-функции}), \quad (44)$$

из НУО, полученных простейшим игольчатым варьированием управления  $v_0$ , вырождаются все условия до порядка 2 включительно и содержательными могут быть лишь НУО порядка, большего 2 (т.е. в этом случае  $v_0$  есть сильно вырожденное ОУ для ППМ).

Чтобы для задачи (42) в случае (44) рассмотреть вопрос о НУО сильно вырожденных ОУ ППМ, предположим дополнительно, что выполняются следующие условия

**Условия (j).** Функция  $g_1(t, \mathbf{p}_0)$  (соотв.  $g_2(t, \mathbf{p}_0)$ ) непрерывна по  $t^1$  (соотв. по  $t^2$ ) для каждого  $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^m$  при почти всех  $t^2$  (соотв.  $t^1$ ).

Покажем, что при этом условии для задачи (3), эквивалентной задаче (42), выполняются условия (G), а следовательно, к ней применимы теоремы 10 и 11, дающие в данном случае НУО порядка 3. Непосредственно по определению матриц  $\Theta_i$  находим:  $\Theta_0(t, s) \equiv 2^{-1}G''(x_0(1, 1))$ ;

$$\Theta_1(t, s) \equiv 2^{-1} \left\{ \int_{\max\{t^1, s^1\}}^1 \int_{\max\{t^2, s^2\}}^1 \Xi_{00}(\xi) d\xi + \mathfrak{K}(s^1 - t^1) \int_{\max\{t^2, s^2\}}^1 \Xi_{01}(s^1, \xi^2) d\xi^2 + \right. \\ \left. + \mathfrak{K}(s^2 - t^2) \int_{\max\{t^1, s^1\}}^1 \Xi_{02}(\xi^1, s^2) d\xi^1 + \mathfrak{K}(t^1 - s^1) \int_{\max\{t^2, s^2\}}^1 \Xi_{10}(t^1, \xi^2) d\xi^2 + \right. \\ \left. + \mathfrak{K}(t^2 - s^2) \int_{\max\{t^1, s^1\}}^1 \Xi_{20}(\xi^1, t^2) d\xi^1 \right\} \quad (t, s \in \Pi),$$

где  $\mathfrak{K}(\cdot)$  — функция Хевисайда,

$$\Xi_{ij}(t) \equiv \left\{ \langle \psi(t), g(t, \mathbf{p}, u_0(t)) \rangle_m \right\}_{\mathbf{p}^i \mathbf{p}^j}'' \Big|_{\mathbf{p} = \{x_0(t), x_{0'1}(t), x_{0'2}(t)\}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad t \in \Pi;$$

$$\Theta_2(t, s) \equiv \left( \Theta_2^{ij}(t, s) \right), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq 3m^2 (t, s \in \Pi),$$

где

$$\Theta_2^{ij}(t, s) = \begin{cases} \psi^{j-(i-1)m}(s) \mathfrak{K}(s^1 - t^1) \mathfrak{K}(s^2 - t^2), & \text{если } (i-1)m + 1 \leq j \leq im \\ 0, & \text{если } j \leq (i-1)m \text{ или } j > im \end{cases}$$

Воспользуемся соображениями п. 3.6. Формулы  $K[z](t) \equiv g'_p(t)A[z](t)$ ,  $S[z](t) \equiv z(t) - K[z](t)$ ,  $z \in L_1^m$ ,  $t \in \Pi$ , задают операторы  $K, S \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$ . Левая часть (43) равна  $S^*[\psi](t) \equiv \psi(t) - K^*[\psi](t)$ ,  $t \in \Pi$ , причем оператор  $K^* \in \mathfrak{L}(L_\infty^m, L_\infty^m)$  квазинильпотентен. Так как замкнутое в  $L_\infty^m$ , инвариантное (в силу условия (j)) относительно  $K^*$  подпространство  $C^m(\Pi)$  содержит функцию-постоянную, стоящую в правой части (43), то и  $L_\infty^m$ -решение  $\psi$  уравнения (5) принадлежит  $C^m(\Pi)$ . Из приведенных выше формул следует, что  $\Theta_1(t, s)$  непрерывна на  $\Pi \times \Pi$ , а  $\Theta_2(t, s)$  непрерывна везде на  $\Pi \times \Pi$  за исключением, может быть, точек границы тела  $\Delta \equiv \{t, s\} \in \Pi \times \Pi : s^1 \geq t^1, s^2 \geq t^2\}$ , в которых возможен ее конечный скачок. Таким образом,  $\Theta_0, \Theta_1 \in L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ ,  $\Theta_2 \in L_\infty^{m \times 3m^2}(\Pi \times \Pi)$ .

Вид уравнений (26), (27) позволяет утверждать, что функции  $\eta_0(t, s)$  и  $\eta_1(t, s)$  непрерывны на  $\Pi \times \Pi$ , а функция  $\eta_2(t, s)$  кусочно непрерывна на  $\Pi \times \Pi$ , причем она может иметь лишь разрывы типа конечного скачка в точках границы тела  $\Delta$ , вне которого она равна нулю. Действительно, уравнение (26) представимо в виде

$$\eta(t, s) - \mathcal{A}^*[\eta](t, s) = \Theta_i(t, s), \quad t \in \Pi, \quad s \in \Pi,$$

где оператор

$$\mathcal{A}^* \equiv (K \otimes I_m + I_m \otimes K - K \otimes K)^* \in \mathfrak{L}(L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi), L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi))$$

(здесь  $I_k$  — тождественный оператор в  $L_1^k$ ) квазинильпотентен. Замкнутое подпространство  $C^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$  пространства  $L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}^*$  (в силу условия (j)) и содержит функции  $\Theta_i$  ( $i = 0, 1$ ), поэтому  $L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ -решение уравнения (26) и при  $i = 0$  и при  $i = 1$  принадлежит  $C^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ . Уравнение (27) представимо в виде

$$\eta(t, s) - \mathcal{B}^*[\eta](t, s) = \Theta_2(t, s), \quad t \in \Pi, \quad s \in \Pi,$$

где оператор

$$\mathcal{B}^* \equiv (K \otimes I_{3m^2})^* \in \mathfrak{L}(L_\infty^{m \times 3m^2}(\Pi \times \Pi), L_\infty^{m \times 3m^2}(\Pi \times \Pi))$$

квазинильпотентен. Множество  $\mathcal{G}$  функций, кусочно непрерывных на  $\Pi \times \Pi$  с единственно возможными разрывами типа конечного скачка в точках границы тела  $\Delta$  и равных нулю вне этого тела, замкнуто в  $L_\infty^{m \times 3m^2}(\Pi \times \Pi)$ , инвариантно относительно  $\mathcal{B}^*$  (в силу условия (j)) и содержит функцию  $\Theta_2(t, s)$ . Поэтому  $L_\infty^{m \times 3m^2}(\Pi \times \Pi)$ -решение  $\eta_2(t, s)$  уравнения (27) также принадлежит  $\mathcal{G}$ . Далее будем считать, что  $\eta_2$  — тот представитель соответствующего класса эквивалентности, для которого

$$\eta_2(\tau, \tau) = \lim_{\substack{\{t,s\} \rightarrow \{\tau,\tau\}, \\ \{t,s\} \in \overset{\circ}{\Delta}}} \frac{1}{4} \eta_2(t, s)$$

при почти всех  $\tau \in \Pi$ . Переходя к пределу в уравнении (27), находим, что для почти каждого  $\tau \in \Pi$

$$\eta_2^{ij}(\tau, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{4} \psi^{j-(i-1)m}(\tau), & \text{если } (i-1)m + 1 \leq j \leq im, \\ 0, & \text{если } j \leq (i-1)m \text{ или } j > im, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq 3m^2.$$

Сказанное означает, что при выполнении условия (j) выполняются и условия (G). При этом условию  $G_2$  удовлетворяет указанный выше представитель класса эквивалентности  $\eta_2$ . Таким образом, при выполнении условия (j), в случае полного вырождения ППМ применима теорема 10, а в общем случае вырождения ППМ — теорема 11. При этом

$$E(\tau, \tau, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \langle \Delta_{\mathbf{w}} g(\tau), \Psi_1(\tau) \cdot \Delta_{\mathbf{w}} g(\tau) + \Psi_2(\tau) \cdot \{\Delta_{\mathbf{w}} g_{\mathbf{p}_0}'(\tau)\}^0 \rangle_m, \quad \tau \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U,$$

где  $\Psi_1(\tau) \equiv \eta_0(\tau, \tau) + \eta_1(\tau, \tau)$ ,  $\Psi_2(\tau) — ( $m \times m^2$ )-матрица, полученная отбрасыванием  $2m^2$  последних столбцов ( $m \times 3m^2$ )-матрицы  $\eta_2(\tau, \tau)$ ,  $\tau \in \Pi$ ;  $\{\dots\}^0 — m^2$ -столбец, полученный разворачиванием ( $m \times m$ )-матрицы  $X \equiv \{\dots\}$  по правилу  $X^0 = \{X_{11}, X_{21}, \dots, X_{mm}\}$  («столбец за столбцом»).$

В заключение заметим, что изучению ОУ ППМ для терминальной задачи оптимизации системы Гурса—Дарбу с правой частью уравнения вида (44) посвящено немало работ (см., например, [8, 10], [11, гл. 1, § 2], [34, гл. 1, § 5], библиографию в [11, 34], обзоры [14, 33]). Однако известные автору данной статьи НУО ОУ для задачи (42), сходные с теоремами 10, 11 и полученные ранее другими авторами, касались случая определенной гладкости правой части уравнения (как правило, предполагалась непрерывность по совокупности переменных правой части и ее первых и вторых производных по «фазовым» переменным, см. [8, 10], [11, гл. 1, § 2], [34, гл. 1, § 5], обзоры [14, 33] и др.). Понятно, что НУО ОУ, полученные при одинаковых условиях разными методами, использующими один и тот же способ варьирования, эквивалентны и могут отличаться лишь формой записи. Поэтому, если вывод для задачи (42) некоторых НУО ОУ, получаемых простейшим одноточечным игольчатым варьированием (соотв. общим способом одноточечного игольчатого варьирования), требует большей предполагаемой нами степени гладкости правой части, то в случае, когда правая часть обладает этой большей степенью гладкости, НУО ОУ, полученные для задачи (42) из теоремы 10 (соотв. теоремы 11), могут быть переписаны в форме указанных НУО ОУ. В этом смысле НУО ОУ теорем 10, 11 применительно к задаче (42) обобщают известные сходные условия, относящиеся к случаю более гладких правых частей уравнений Гурса—Дарбу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А. Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990.
3. Ащепков Л. Т., Васильев О. В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса—Дарбу// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1975. — 15, № 5. — С. 1157–1167.
4. Ащепков Л. Т., Васильев О. В., Коваленок И. Л. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса—Дарбу// Диффер. уравн. — 1980. — 16, № 6. — С. 1054–1059.
5. Бурдуковский А. Н. Условия оптимальности особых управлений в задаче Гурса—Дарбу// Управл. сист. (Новосибирск). — 1986. — № 26. — С. 16–24.
6. Бухгейм А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. — Новосибирск: Наука, 1983.
7. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
8. Васильев О. В. Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами// Управл. сист. (Новосибирск). — 1972. — № 10. — С. 27–34.
9. Васильев О. В. Об оптимальности особого управления в системах с распределенными параметрами// Тез. докл. II Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики. — Новосибирск, 1971. — С. 26–27.
10. Васильев О. В. Качественные и конструктивные методы оптимизации управляемых процессов с распределенными параметрами/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Л.: ЛГУ, 1984.
11. Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990.
12. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Ч. II. — М.: Изд-во МЦНМО, 2011.
13. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
14. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами. — Минск: Ин-т мат. АН БССР, 1982.
15. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967.
16. Гусаренко С. А. Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора// Докл. АН СССР. — 1987. — 295, № 5. — С. 1046–1049.
17. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
18. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
19. Жукковский Е. С. К теории уравнений Вольтерра// Диффер. уравн. — 1989. — 25, № 9. — С. 1599–1605.
20. Жукковский Е. С., Алвеш М. Ж. Абстрактные вольтерровы операторы// Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 3. — С. 3–17.
21. Забрейко П. П. Об интегральных операторах Вольтерра// Усп. мат. наук. — 1967. — 22, № 1. — С. 167–168.
22. Забрейко П. П. О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра Лит. мат. сб. — 1967. — 7, № 2. — С. 281–287.
23. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики// Совр. мат. прилож. — 2003. — 11. — С. 3–161.
24. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
25. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
26. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльников Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
27. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987.
28. Лисаченко И. В., Сумин В. И. Нелинейная управляемая задача Гурса—Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости// Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 6. — С. 858–870.
29. Лисаченко И. В., Сумин В. И. Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса—Дарбу// Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Мат. Мех. Комп. науку — 2015 25. — № 4. — С. 483–491.
30. Лисаченко И. В., Сумин В. И. Об особых управлениях принципа максимума в терминальной задаче оптимизации системы Гурса—Дарбу// Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки. — 2015. — 20, № 5. — С. 1264–1274.

31. *Лицына Е.* Линейные операторы Вольтерра в некоторых метрических пространствах// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2007. — 26, № 3. — С. 223–240.
32. *Мансимов К. Б.* К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления системами с распределенными параметрами// Докл. АН СССР. — 1988. — 301, № 3. — С. 546–550.
33. *Мансимов К. Б.* Особые управления в задачах управления системами с распределенными параметрами// Совр. мат. прилож. — 2006. — 42. — С. 39–83.
34. *Мансимов К. Б., Марданов М. Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. — Баку: Элм, 2010.
35. *Меликов Т. К.* Исследование особых процессов в некоторых оптимальных системах/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Баку, 1976.
36. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
37. *Мордохович Б. Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
38. *Плотников В. И.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида// Докл. АН СССР. — 1971. — 199, № 2. — С. 275–278.
39. *Плотников В. И., Сумин В. И.* Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве// Сиб. мат. ж. — 1981. — 22, № 6. — С. 142–161.
40. *Срочко В. А.* Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами// Сиб. мат. ж. — 1976. — 17, № 5. — С. 1108–1115.
41. *Сумин В. И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Горький, 1975.
42. *Сумин В. И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами// Докл. АН СССР. — 1989. — 305, № 5. — С. 1056–1059.
43. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. 1. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
44. *Сумин В. И.* О функциональных вольтерровых уравнениях// Изв. вузов. Мат. — 1995. — № 9. — С. 67–77.
45. *Сумин В. И.* О расширении оптимизационных задач, связанных с функциональными уравнениями в пространствах существенно ограниченных функций// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. Оптим. управл. — 1998. — № 1 (18). — С. 126–133.
46. *Сумин В. И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. — 2003. — № 1. — С. 91–107.
47. *Сумин В. И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 1998. — № 2 (19). — С. 138–151.
48. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Н. Новгород: Нижегород. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 1998.
49. *Сумин В. И.* Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения// Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки. — 2010. — 15, № 1. — С. 453–466.
50. *Сумин В. И.* Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем// Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2020. — 25, № 132. — С. 422–440.
51. *Сумин В. И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1990. — 30, № 1. — С. 3–21.
52. *Сумин В. И.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач// Диффер. уравн. — 1990. — 26, № 12. — С. 2097–2109.
53. *Сумин В. И.* Функционально-операторные уравнения Вольтерра и устойчивость существования глобальных решений краевых задач// Укр. мат. ж. — 1991. — 43, № 4. — С. 555–561.
54. *Сумин В. И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения// Диффер. уравн. — 1986. — 22, № 9. — С. 1587–1595.
55. *Сумин В. И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем, I// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 1999. — № 2 (21). — С. 145–155.
56. *Сумин В. И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем, II// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 2001. — № 1 (23). — С. 198–204.
57. *Сумин В. И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем, III// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 2002. — № 1 (25). — С. 164–174.

58. *Сумин В. И.* Вольтерровы функциональные уравнения и оптимизация распределенных систем// *Мат. Международю конф. «Современные методы теории краевых задач. Воронеж. весенняя мат. школа Понтиягинские чтения—XXXII»* (Воронеж, 3–9 мая 2021 г.). — Воронеж, 2021. — С. 239–242.
59. *Сумин В. И.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения и распределенные задачи оптимизации// *Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки.* — 2018. — 23, № 124. — С. 745–756.
60. *Сумин В. И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений// *Тр. ИММ УрО РАН.* — 2019. — 25, № 1. — С. 262–278.
61. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность// *Диффер. уравн.* — 1998. — 34, № 10. — С. 1402–1411.
62. *Сумин В. И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений// *Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки.* — 2000. — 5, № 4. — С. 493–495.
63. *Сумин В. И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации// *Докл. АН СССР.* — 1991. — 320, № 2. — С. 295–299.
64. *Сумин В. И.* Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем// *Оптимизация. Сб. научн. тр.* — 1993. — № 52 (69). — С. 74–94.
65. *Сумин В. И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации// *Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Мат. Мех. Комп. науки.* — 2010. — № 3. — С. 70–80.
66. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений. — Деп. в ВИНТИ 25.04.2000. № 1198-В00.
67. *Сумин В. И., Чернов А. В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений// *Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл.* — 2003. — № 1 (26). — С. 39–49.
68. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем// *Тр. Междунар. конф. «Динамика систем и процессы управления», посв. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского* (Екатеринбург, 2014 г.). — Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2015. — С. 293–300.
69. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики// *Бюлл. МГУ. Секц. А.* — 1938. — 1, № 8. — С. 1–25.
70. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
71. *Крейн С. Г. (ред.).* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972.
72. *Чернов А. В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем/ *Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук* — Нижний Новгород, 2000.
73. *Чернов А. В.* О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи// *Ж. вычисл. мат. мат. физ.* — 2018. — 58, № 12. — С. 2095–2111.
74. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.
75. *Шрагин И. В.* Абстрактные операторы Немыцкого — локально определенные операторы// *Докл. АН СССР.* — 1976. — 227, № 1. — С. 47–49.
76. *Chernov A. V.* On Volterra functional operator games on a given set *Automat. Remote Control.* — 2014. — 75, № 4. — P. 787–803.
77. *Corduneanu C.* Integral Equations and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
78. *Drakhlin M. E., Ponosov A., Stepanov E.* On some classes of operators determined by the structure of their memory// *Proc. Edinburgh Math. Soc.* — 2002. — 45, № 2. — P. 467–490.
79. *Drakhlin M. E., Litsyn E.* Volterra operator: Back to the future// *J. Nonlin. Conv. Anal.* — 2005. — 6, № 3. — P. 375–391.
80. *Sumin V.* Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems *IFAC-PapersOnLine.* — 2018. — 51, № 32. — P. 759–764.
81. *Tonelli L.* Sulle equazioni funzionali di Volterra// *Bull. Calcutta Math. Soc.* — 1929. — 20. — P. 31–48.
82. *Väth M.* Abstract Volterra equations of the second kind// *J. Equat. Appl.* — 1998. — 10, № 9. — P. 125–144.

Сумин Владимир Иосифович

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,

Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина

E-mail: v\_sumin@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 77–87  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-77-87

УДК 519.24

## ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕЧЕТКИЕ СРЕДНИЕ СИСТЕМ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

© 2022 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

**Аннотация.** В настоящей работе изучены линейные средние систем нечетких чисел. Введен и изучен класс нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел. Установлены нечеткие аналоги известных числовых неравенств для средних.

**Ключевые слова:** нечеткие средние систем нечетких чисел, нечеткие операторы осреднения, неравенства между нечеткими средними.

## LINEAR AND NONLINEAR FUZZY AVERAGES OF SYSTEMS OF FUZZY NUMBERS

© 2022 V. L. KHATSKEVICH

**ABSTRACT.** Linear averages of systems of fuzzy numbers are examined. A class of nonlinear fuzzy average systems of fuzzy numbers is introduced and studied. Fuzzy analogs of numerical inequalities for means are established.

**Keywords and phrases:** fuzzy means of systems of fuzzy numbers, fuzzy averaging operators, inequalities between fuzzy means.

**AMS Subject Classification:** 60K10

**1. Введение.** Теория нечетких множеств представляет собой современный аппарат формализации различных видов неопределенностей, возникающих при моделировании реальных систем любой природы (см., например, [1, 3, 4]).

Известно, какую важную роль играют различные средние, отражая существенные свойства заданной совокупности чисел.

В настоящей работе изучены взвешенные линейные нечеткие средние систем нечетких чисел. Выделен класс нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел, являющийся модификацией на нечеткие числа общего класса диссипативных числовых средних. Установлены экстремальные свойства нечетких средних и систем нечетких чисел. Рассмотрены операторы осреднения, соответствующие введенным средним и исследованы их свойства. Кроме того, установлены неравенства между различными нечеткими средними, аналогичные известным числовым неравенствам.

Ниже  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел. Под нечетким числом  $\tilde{z}$ , заданным на универсальном пространстве  $\mathbb{R}$ , будем понимать совокупность упорядоченных пар  $(\mu_{\tilde{z}}(x), x)$ , где функция принадлежности  $\mu_{\tilde{z}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , определяет степень принадлежности  $\forall x \in \mathbb{R}$  множеству  $\tilde{z}$ .

При этом дополнительно будем предполагать выполнение следующих условий (ср. [4, гл. 2-4], [3, гл. 1]):

- (i) носитель нечеткого числа — замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел:  $\text{Supp}(\tilde{z}) \subset \mathbb{R}$ ;

- (ii) функция принадлежности нечеткого числа  $\mu_{\tilde{z}}(x)$  выпукла;
- (iii) функция принадлежности нечеткого числа  $\mu_{\tilde{z}}(x)$  нормальна, т.е.

$$\sup_x \mu_{\tilde{z}}(x) = 1;$$

- (iv) функция принадлежности нечеткого числа  $\mu_{\tilde{z}}(x)$  полунепрерывна сверху.

Совокупность таких нечетких чисел будем обозначать  $J$ .

Будем использовать интервальное представление нечетких чисел. Как известно, интервал  $\alpha$ -уровня нечеткого числа  $\tilde{z}$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{z}}(x)$  определяется соотношением

$$Z_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1], \quad Z_0 = \text{Supp}(\tilde{z}).$$

Согласно предположениям (i)–(iv) на нечеткие числа все  $\alpha$ -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую (нижнюю) границу интервала через  $z^-(\alpha)$ , а правую (верхнюю) —  $z^+(\alpha)$ , т. о.  $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ . Иногда  $z^-(\alpha)$  и  $z^+(\alpha)$  называют соответственно левым и правым индексами нечеткого числа.

Подчеркнем, что предположения (i)–(iv) обеспечивают следующие свойства: функция  $z^-(\alpha)$  ограничена, не убывает, непрерывна слева на  $(0, 1]$  и непрерывна справа в точке 0; функция  $z^+(\alpha)$  ограничена, не возрастает, непрерывна слева на  $(0, 1]$  и непрерывна справа в точке 0.

Суммой нечетких чисел  $\tilde{z}$  и  $\tilde{u}$  с  $\alpha$ -интервалами  $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$  и  $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$  называют нечеткое число с  $\alpha$ -интервалами  $[z^-(\alpha) + u^-(\alpha), z^+(\alpha) + u^+(\alpha)]$ . Умножение на положительное число означает умножение индексов на это число; а умножение на отрицательное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами.

Два нечетких числа равны, если совпадают все их соответствующие  $\alpha$ -интервалы.

**Пример 1.** Трапецидальное нечеткое число  $\tilde{z} = (a, b, c, d)$  при  $a \leq b \leq c \leq d$  характеризуется функцией принадлежности

$$\mu_{abcd}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{если } x \in [b, c]; \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{если } x \in (c, d]; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По определению, левый и соответственно правый индексы трапецидального числа имеют вид

$$z_{abcd}^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z_{abcd}^+(\alpha) = -(d-c)\alpha + c.$$

## 2. Линейные нечеткие средние систем нечетких чисел, операторы осреднения.

Пусть заданы такие вещественные числа  $\beta_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), что

$$\beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

Рассмотрим взвешенное нечеткое среднее нечетких чисел  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$

$$\tilde{z}_{\text{cp}} = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{z}_i. \quad (1)$$

Такого рода средние играют важную роль в статистике нечетких чисел (см., например, [16]).

Обозначим через  $z_i^-(\alpha)$  и  $z_i^+(\alpha)$  левые и правые индексы нечетких чисел  $\tilde{z}_i$ , фигурирующих в формуле (1). Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Левый и правый индексы нечеткого среднего  $\tilde{z}_{\text{cp}}$ , определяемого формулой (1), равны соответственно*

$$z_{\text{cp}}^-(\alpha) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^-(\alpha), \quad z_{\text{cp}}^+(\alpha) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^+(\alpha).$$



Лемма 1 вытекает из определения интервального сложения нечетких чисел и умножения на положительное число.

**Пример 2.** Пусть в формуле (1) все нечеткие числа  $\tilde{z}_i$  — трапецеидальные  $\tilde{z}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда нечеткое среднее таких чисел имеет вид

$$\tilde{z}_{\text{cp}} = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i a_i, \sum_{i=1}^n \beta_i b_i, \sum_{i=1}^n \beta_i c_i, \sum_{i=1}^n \beta_i d_i \right).$$

Рассмотрим совокупность  $J^n$  векторов с нечеткими компонентами (нечетких векторов) вида  $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ , где нечеткие числа  $\tilde{z}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) удовлетворяют условиям (i)–(iv) введения. Для двух нечетких векторов  $\tilde{Z}$  и  $\tilde{W}$  их сумму и умножение на числа будем понимать покомпонентно.

Рассмотрим оператор осреднения  $A_\beta : J^n \rightarrow J$ , определяемый для заданного  $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$   $\tilde{Z} \in J^n$  взвешенной суммой (1)

$$A_\beta(\tilde{Z}) = \tilde{z}_{\text{cp}} = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{z}_i. \quad (2)$$

**Теорема 1.** Оператор осреднения  $A_\beta : J^n \rightarrow J$ , определяемый формулой (2), является линейным.

*Доказательство.* Покажем аддитивность  $A_\beta$ . Пусть заданы нечеткие векторы  $\tilde{Z}, \tilde{W} \in J^n$ . В соответствии с леммой 1 левый и правый индексы  $A_\beta(\tilde{Z})$  совпадают с соответственно

$$\sum_{i=1}^n \beta_i z_i^-(\alpha), \quad \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^+(\alpha).$$

Аналогично для  $A_\beta(\tilde{W})$ , левый и правый индексы имеют вид

$$\sum_{i=1}^n \beta_i w_i^-(\alpha), \quad \sum_{i=1}^n \beta_i w_i^+(\alpha).$$

Тогда левый и правый индексы суммы  $A_\beta(\tilde{Z}) + A_\beta(\tilde{W})$  имеют вид

$$\sum_{i=1}^n \beta_i (\tilde{z}_i^-(\alpha) + w_i^-(\alpha)), \quad \sum_{i=1}^n \beta_i (\tilde{z}_i^+(\alpha) + w_i^+(\alpha)),$$

т.е. совпадают соответственно с левым и правым индексом нечеткого числа  $A_\beta(\tilde{Z} + \tilde{W})$ ; это и означает аддитивность.

Однородность есть следствие формулы (2) и определения интервального умножения нечетких чисел на положительное (и отрицательное) число.  $\square$

**Утверждение 1.** Пусть  $\tilde{Z}$  — заданный нечеткий вектор с компонентами  $\tilde{z}_i$ , а  $\tilde{v}$  — фиксированное нечеткое число. Пусть  $\tilde{W}$  — нечеткий вектор с компонентами  $\tilde{w}_i = \tilde{z}_i + \tilde{v}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда справедлива формула

$$A_\beta(\tilde{W}) = A_\beta(\tilde{Z}) + \tilde{v}.$$

Утверждение 1 следует из определения (2) с учетом леммы 1 и правила арифметических действий с интервальными нечеткими числами; оно является «нечетким» аналогом известного свойства «переносимости» числового среднего арифметического.

Нечеткое среднее (1) обладает определенным экстремальным свойством. Чтобы это показать, рассмотрим на множестве  $J$  нечетких чисел метрику, определяемую для  $\tilde{z}, \tilde{w} \in J$  формулой

$$d(\tilde{z}, \tilde{w}) = \left( \int_0^1 ((z^-(\alpha) - u^-(\alpha))^2 + (z^+(\alpha) - u^+(\alpha))^2) d\alpha \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где  $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$  и  $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$  — интервалы  $\alpha$ -уровней чисел  $\tilde{z}$  и  $\tilde{u}$  соответственно. Метрика (3) ранее введена и исследована в [9].

Пусть задан нечеткий вектор  $\tilde{Z} \in J^n$  с компонентами  $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ . Фиксируем набор  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , причем  $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ . Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^n \beta_i d^2(\tilde{z}_i, \tilde{w}) \rightarrow \min \quad \forall \tilde{w} \in J;$$

более подробно,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 \left( (z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 + (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2 \right) d\alpha \rightarrow \min \quad \forall \tilde{w} \in J. \quad (4)$$

**Теорема 2.** *Решением задачи (4), причем единственным, является нечеткое число  $\tilde{z}_{cp}$ .*

*Доказательство.* Фиксируем  $\alpha \in (0, 1]$  и рассмотрим совокупность чисел  $z_1^-(\alpha), \dots, z_n^-(\alpha)$ . Согласно лемме 1 левый индекс нечеткого числа  $\tilde{z}_{cp}$ , а именно  $z_{cp}^-(\alpha)$  является взвешенным средним этой совокупности. Тогда по экстремальному свойству для числовых средних (см., например, [2, гл. 1])  $z_{cp}^-$  удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^n \beta_i (z_i^-(\alpha) - z_{cp}^-(\alpha))^2 \leq \sum_{i=1}^n \beta_i (z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 \quad \forall w \in J.$$

Аналогично,  $z_{cp}^+(\alpha)$  является взвешенным средним совокупности чисел  $z_1^+(\alpha), \dots, z_n^+(\alpha)$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n \beta_i (z_i^+(\alpha) - z_{cp}^+(\alpha))^2 \leq \sum_{i=1}^n \beta_i (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2 \quad \forall w \in J.$$

Складывая левые и правые части этих неравенств и интегрируя полученное соотношение по  $\alpha$  от 0 до 1, получим требуемое утверждение.  $\square$

**Следствие 1.** *Нечеткое среднее*

$$\hat{z}_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{z}_i$$

*является единственным решением экстремальной задачи*

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left( (z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 + (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2 \right) d\alpha \rightarrow \min \quad \forall \tilde{w} \in J.$$

Этот результат является обобщением классического характеристического экстремального свойства среднего арифметического (см., например, [2, гл. I, § 5]).

Посмотрим на результат теоремы 2 с другой стороны. Рассмотрим дискретную нечетко-случайную величину  $Z$ , принимающую значения  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  с вероятностями  $\beta_1, \dots, \beta_n$  соответственно. Математическое (нечеткое) ожидание  $\tilde{m}$  этой случайной величины естественно определить формулой (2), т.е.

$$\tilde{m} = M(Z) = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{z}_i.$$

Взвешенное отклонение данного нечеткого элемента  $\tilde{w}$  от заданной системы нечетких чисел  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  определим формулой (4).

Теорема 2 утверждает, что взвешенное отклонение достигает своего минимального значения при  $\tilde{w} = M(Z)$ . Оно равно дисперсии нечеткой случайной величины  $Z$ , определенной в соответствии с работой [11] и равной

$$\text{var}(Z) = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 \left( (z_i^-(\alpha) - m^-(\alpha))^2 + (z_i^+(\alpha) - m^+(\alpha))^2 \right) d\alpha.$$

Определим метрику на множестве  $J^n$  формулой

$$d_n^2(\tilde{Z}, \tilde{W}) = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{z}_i, \tilde{w}_i),$$

где  $\tilde{z}_i$  и  $\tilde{w}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — компоненты векторов  $\tilde{Z}$  и  $\tilde{W}$ , а  $d$  — метрика на  $J$ , определенная формулой (3).

**Утверждение 2.** *Оператор осреднения  $A_\beta : J^n \rightarrow J$ , определенный формулой (2), обладает свойством непрерывности.*

Это утверждение вытекает из соотношения

$$d^2(A_\beta(\tilde{Z}), A_\beta(\tilde{W})) \leq n d_n^2(\tilde{Z}, \tilde{W}),$$

полученного с использованием леммы 1 и элементарных неравенств.

**3. Нечеткие медианы систем нечетких чисел.** Коснемся вопроса об усреднении системы нечетких чисел посредством медиан. В отличие от средних арифметических они нивелируют наблюдения, отклоняющиеся от общей картины (выбросы). В этом смысле они являются робастными оценками эмпирических данных.

Как известно (см., например, [17]), нечеткой медианой системы нечетких чисел  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  называется нечеткое число  $\tilde{z}_{\text{Me}} = \text{Me}(\tilde{Z})$  с левым индексом  $z_{\text{Me}}^-(\alpha) = \text{Me}\{z_1^-(\alpha), \dots, z_n^-(\alpha)\}$  и правым индексом  $z_{\text{Me}}^+(\alpha) = \text{Me}\{z_1^+(\alpha), \dots, z_n^+(\alpha)\}$ . Как обычно, в случае неоднозначности под числовой медианой понимаем полусумму центральных членов. Другое определение нечеткой медианы используется, например, в [16, гл. 7].

Для нечеткого вектора  $\tilde{Z}$  рассмотрим оператор осреднения  $A_{\text{Me}} : J^n \rightarrow J$ , задаваемый равенством

$$A_{\text{Me}}(\tilde{Z}) = \tilde{\text{Me}}(\tilde{Z}). \quad (5)$$

**Утверждение 3.** *Оператор осреднения (5) является линейным.*

*Доказательство.* Покажем аддитивность. Пусть  $\tilde{Z}, \tilde{W} \in J^n$  с компонентами  $\tilde{z}_i, \tilde{w}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Фиксируем  $\alpha \in (0, 1]$ . Не ограничивая общности, можно считать, что имеет место, например, следующая упорядоченность для левых индексов:

$$z_1^-(\alpha) \leq z_2^-(\alpha) \leq \dots \leq z_n^-(\alpha), \quad w_1^-(\alpha) \leq w_2^-(\alpha) \leq \dots \leq w_n^-(\alpha).$$

Пусть  $z_{\text{Me}}^-(\alpha)$  и  $w_{\text{Me}}^-(\alpha)$  — левые индексы соответствующих медиан. Согласно предположению, нечеткое число  $\tilde{v} = \tilde{z} + \tilde{w}$  имеет левые индексы

$$v_i^-(\alpha) = z_i^-(\alpha) + w_i^-(\alpha).$$

Поэтому сохраняется порядок  $v_1^-(\alpha) \leq v_2^-(\alpha) \leq \dots \leq v_n^-(\alpha)$ . Следовательно, для медианы  $\tilde{v}_{\text{Me}}$  суммы нечетких чисел  $\tilde{z} + \tilde{w}$  справедливо равенство

$$v_{\text{Me}}^- = z_{\text{Me}}^-(\alpha) + w_{\text{Me}}^-(\alpha).$$

Аналогично для правых индексов; аддитивность доказана.

Однородность при умножении на положительное число  $k$  обеспечивается неравенством

$$kz_1^-(\alpha) \leq kz_2^-(\alpha) \leq \dots \leq kz_n^-(\alpha).$$

В случае умножения на отрицательное число  $-k$  ( $k > 0$ ) левые индексы чисел  $-k(\tilde{z}_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образуют последовательность

$$-kz_1^+(\alpha) \geq -kz_2^+(\alpha) \geq \dots \geq -kz_n^+(\alpha),$$

а правые индексы — последовательность

$$-kz_1^-(\alpha) \geq -kz_2^-(\alpha) \geq \dots \geq -kz_n^-(\alpha),$$

так что медиана  $\tilde{\text{Me}}(-k\tilde{Z})$  семейства нечетких чисел  $\{-k\tilde{z}_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) имеет левый индекс  $-k\text{Me}\{z_1^+(\alpha), \dots, z_n^+(\alpha)\}$  и правый индекс  $-k\text{Me}\{z_1^-(\alpha), \dots, z_n^-(\alpha)\}$ , что совпадает с левым и правым индексами нечеткого числа  $-k\tilde{\text{Me}}(\tilde{Z})$ .  $\square$

Рассмотрим на множестве нечетких чисел метрику

$$r(\tilde{z}, \tilde{w}) = \int_0^1 (|z^-(\alpha) - w^-(\alpha)| + |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)|) d\alpha,$$

где  $z^\pm(\alpha)$  и  $w^\pm(\alpha)$  — левые и правые индексы нечетких чисел  $\tilde{z}$  и  $\tilde{w}$  соответственно.

Имеет место следующее экстремальное свойство нечеткой медианы.

**Утверждение 4.** Пусть  $\tilde{z}_{\text{Me}}$  — нечеткая медиана системы нечетких чисел  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n r(\tilde{z}_i, \tilde{z}_{\text{Me}}) \leq \sum_{i=1}^n r(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j) \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

*Доказательство.* Фиксируем  $\alpha \in (0, 1)$  и рассмотрим числовую последовательность левых индексов  $z_1^-(\alpha), \dots, z_n^-(\alpha)$ . По определению числа  $z_{\text{Me}}^-(\alpha)$  и свойству числовых медиан имеем

$$\sum_{i=1}^n |z_i^-(\alpha) - z_{\text{Me}}^-(\alpha)| \leq \sum_{i=1}^n |z_i^-(\alpha) - z_j^-(\alpha)| \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Аналогично, для правых индексов

$$\sum_{i=1}^n |z_i^+(\alpha) - z_{\text{Me}}^+(\alpha)| \leq \sum_{i=1}^n |z_i^+(\alpha) - z_j^+(\alpha)| \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Суммируя левые и правые части указанных неравенств, а затем интегрируя полученный результат по  $\alpha$  от 0 до 1, получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Замечание 1.** Вместо метрики  $r$  можно рассмотреть метрику

$$r' = r'(\tilde{z}, \tilde{w}) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left\{ |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)| + |z^-(\alpha) - w^-(\alpha)| \right\}.$$

Ясно, что оператор осреднения (5) непрерывен по метрике  $r'$ .

Отметим, что в [17] рассматриваются вопросы аппроксимации медианы нечетко-случайной величины медианами нечетких выборок. Представленные в настоящей статье результаты не обсуждаются.

**4. Нелинейные нечеткие средние систем нечетких чисел и нелинейные операторы осреднения.** Перейдем к рассмотрению нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел. Определим понятие функции от нечеткого числа, используя интервальный подход. Заметим, что определение функции от нечеткого числа связано с принципом нечеткого обобщения Л. Заде (см., например, [18–20]).

В работе С. Намиаса [14] ему придан следующий вид. Пусть  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, обладающая обратной  $g^{-1}$ . Тогда для нечеткого числа  $\tilde{z}$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{z}}(x)$  функция принадлежности нечеткого числа  $g(\tilde{z})$  определяется формулой

$$\mu_{g(\tilde{z})}(x) = \sup_{u: g(u)=x} \mu_{\tilde{z}}(u) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Лемма 2.** Пусть  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная монотонно возрастающая вещественная функция. Если  $\tilde{z}$  — нечеткое число с левым и правым индексами  $z^-(\alpha)$  и  $z^+(\alpha)$ , то  $\phi(z^-(\alpha))$  и  $\phi(z^+(\alpha))$  — соответственно левый и правый индексы нечеткого числа  $\phi(\tilde{z})$ . Если  $\phi(x)$  — непрерывная монотонно убывающая функция, то  $\phi(z^+(\alpha))$  и  $\phi(z^-(\alpha))$  — левый и правый индексы  $\phi(\tilde{z})$  соответственно.

*Доказательство.* В [15] показано, что при выполнении условий (i), (iv) введения на нечеткое число  $\tilde{z}$  и для непрерывной функции  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  справедливо утверждение, что  $\alpha$ -интервал  $[\phi(\tilde{z})]_\alpha$  нечеткого числа  $\tilde{z}$  при любом  $\alpha \in (0, 1]$  совпадает с интервалом  $\phi(Z_\alpha)$ , где  $Z_\alpha$  —  $\alpha$ -интервал нечеткого числа  $\tilde{z}$ . Тогда в силу предположения о монотонном возрастании (либо убывании) функции  $\phi$  получим требуемый результат.  $\square$

**Замечание 2.** В условиях леммы 2 левый индекс интервала  $\alpha$ -уровня нечеткого числа  $\phi(\tilde{z})$  возрастает по  $\alpha$ , а правый — убывает по  $\alpha$ . Этот факт — с учетом монотонного возрастания  $z^-(\alpha)$  и монотонного убывания  $z^+(\alpha)$  — следует из того, что суперпозиция монотонно возрастающих функций (либо монотонно убывающих) есть монотонно возрастающая функция, а суперпозиция монотонно убывающей и монотонно возрастающей (либо монотонно возрастающей и монотонно убывающей) есть монотонно убывающая функция.

Пусть заданы нечеткие числа  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ , и действительные числа  $\beta_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), причем  $\beta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ . Рассмотрим нелинейные средние общего вида для заданной строго монотонно возрастающей (убывающей) функции  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\tilde{z}_\phi = \phi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi(\tilde{z}_i) \right). \quad (7)$$

Функцию  $\phi$  в этом случае называют определяющей.

Для системы вещественных чисел  $z_1, \dots, z_n$  определение (7) есть классическое определение нелинейного ассоциативного среднего общего вида (см., например, [2, гл. I], [7, гл. III]).

В случае определяющей функции  $\phi_p(x) = x^p$  ( $p > 1$ ) (или  $0 < p < 1$ ) в (7) получаем аналог взвешенной средней степенной, при  $\phi_G(x) = \log_a x$  ( $a > 1$ ) — аналог взвешенной средней геометрической, при  $\phi_H(x) = 1/x$  — аналог взвешенной средней гармонической. Эти средние могут быть полезны в статистике нечетких данных, так же как соответствующие им числовые нелинейные средние в классической статистике.

Отметим, что в случае определяющих функций  $\phi_p$  и  $\phi_G$ , учитывая их области определения, следует рассматривать совокупности положительных нечетких чисел  $\tilde{z}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в том смысле, что  $z_i^-(\alpha) > 0$  для всех  $\alpha \in [0, 1]$ . В случае определяющей функции  $\phi_H$  можно рассматривать как положительные, так и отрицательные (т.е.  $z_i^+(\alpha) < 0$ ) нечеткие числа.

**Лемма 3.** Левый и правый индексы нечеткого числа, определяемого формулой (7), равны соответственно

$$\phi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^-(\alpha)) \right), \quad \phi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^+(\alpha)) \right),$$

где  $z_i^-(\alpha)$  и  $z_i^+(\alpha)$  — левый и правый индексы нечеткого числа  $\tilde{z}_i$ .

*Доказательство.* Проведем рассуждения для левых индексов в предположении, что функция  $\phi$  монотонно возрастает. Заметим, что нечеткое число

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(\tilde{z}_i)$$

в силу монотонного возрастания функции  $\phi$  на основании леммы 2 и по правилу интервального сложения нечетких чисел и умножения их на положительные числа имеет левый индекс

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^-(\alpha)).$$

Так как  $\phi^{-1}$  — также монотонно возрастающая функция (вместе с  $\phi$ ), то нечеткое число

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(\tilde{z}_i)\right) = \bar{z}_\phi$$

имеет левый индекс

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^-(\alpha))\right).$$

Аналогично для правых индексов. Случай монотонного убывания функции  $\phi$  в силу леммы 2 приводит к такому же результату.  $\square$

В силу леммы 2 согласно определению (7) из теоремы 2 получаем следующий факт.

**Теорема 3.** *Нечеткое число  $\phi(\tilde{z}_\phi)$  является решением экстремальной задачи*

$$\sum_{i=1}^n \beta_i d^2(\phi(\tilde{z}_i), \tilde{w}) \rightarrow \min \quad \forall \tilde{w} \in J,$$

где  $d$  — расстояние между нечеткими числами, определяемое формулой (3).

Определим теперь для фиксированного набора чисел  $\beta_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), удовлетворяющих условию  $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ , и заданной непрерывной строго монотонной функции  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  нечеткий нелинейный оператор осреднения  $F_{\beta, \phi} : J^n \rightarrow J$  равенством

$$F_{\beta, \phi}(\tilde{Z}) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(\tilde{z}_i)\right). \quad (8)$$

Ниже индекс  $\beta$  будем опускать и обозначать оператор, задаваемый формулой (6), символом  $F_\phi$ .

Отметим, что важные частные случаи нелинейного оператора осреднения (8) обладают свойством положительной однородности. Рассмотрим, например, случай определяющей функции  $\phi_p(x) = x^p$ .

**Утверждение 5.** *Для заданной системы положительных нечетких чисел  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  нелинейный оператор осреднения (8) с определяющей функцией  $\phi_p(x) = x^p$  при  $p > 0$  положительно однороден.*

*Доказательство.* Рассмотрим для определенности случай  $p > 1$ , когда функция  $x^p$  монотонно возрастает при  $x > 0$ . Фиксируем число  $k > 0$ . Рассмотрим нечеткое число

$$F_\phi(k\tilde{Z}) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(k\tilde{z}_i)\right).$$

По лемме 3 его левый индекс равен

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(kz_i^-(\alpha))\right);$$

в случае  $\phi_p(x) = x^p$  имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n \beta_i (kz_i^-(\alpha))^p\right)^{1/p} = k \left(\sum_{i=1}^n \beta_i (z_i^-(\alpha))^p\right)^{1/p},$$

что совпадает с левым индексом нечеткого числа

$$\left(\sum_{i=1}^n \beta_i (\tilde{z}_i)^p\right)^{1/p},$$

умноженным на число  $k$ . Аналогично для правых индексов. Таким образом оператор  $F_{\phi_p}$  положительно однороден. Аналогично (с учетом леммы 3) рассматривается случай  $0 < p < 1$ , когда  $x^p$  монотонно убывает.  $\square$

**Замечание 3.** Утверждение 5 верно и в случае  $p = -1$  для средних гармонических, когда  $\phi_H(x) = x^{-1}$  ( $x > 0$ ).

**Замечание 4.** Утверждение 5 верно также для средних геометрических в случае  $\phi_G(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ). Оно получается с помощью предельного перехода в левых и правых индексах  $F_{\phi_p}(k\tilde{Z})$  при  $p \rightarrow 0+$  (см., например, [2, гл. I, § 2]).

Рассмотрим совокупность нечетких чисел  $J_0$ , индексы которых непрерывны и ограничены при  $\alpha \in (0, 1]$ . Для элементов  $\tilde{z}, \tilde{w} \in J_0$  зададим метрику по формуле

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{w}) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} \max \{ |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)|, |z^-(\alpha) - w^-(\alpha)| \}. \quad (9)$$

Подобные метрики встречаются в нечетком анализе (см., например, [13]).

Рассмотрим множество нечетких векторов  $J_0^n$  вида  $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ , компоненты которого принадлежат  $J_0$ . На этом множестве зададим метрику формулой

$$\rho_n(\tilde{Z}, \tilde{W}) = \sum_{i=1}^n \rho(\tilde{z}_i, \tilde{w}_i),$$

где  $\rho$  определяется формулой (9).

С помощью леммы 3 устанавливается следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Пусть  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — строго монотонная непрерывная функция. Тогда нелинейный оператор осреднения  $F_\phi : J_0^n \rightarrow J_0$ , определяемый формулой (8), непрерывен.

Поясним, что здесь непрерывность понимается в том смысле, что малым приращениям  $\rho_n(\tilde{Z}, \tilde{W})$  соответствуют малые приращения  $\rho(F_\phi(\tilde{Z}), F_\phi(\tilde{W}))$ .

**5. Сравнение нелинейных нечетких средних для различных определяющих функций.** Обсудим вопрос о сравнении нечетких средних. В литературе содержатся различные показатели сравнения (ранжирования) нечетких чисел. Мы будем рассматривать следующий критерий сравнения нечетких чисел, заданных в интервальной форме.

Будем писать  $\tilde{z} < \tilde{w}$  для нечетких чисел  $\tilde{z}$  и  $\tilde{w}$ , если одновременно

$$z^-(\alpha) \leq w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) \leq w^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (10)$$

Такое определение используется, например, в книге [6, гл. 4, 5]. В частности, там приведена эквивалентная формулировка в терминах функций принадлежности нечетких чисел  $\tilde{z}$  и  $\tilde{w}$ . Именно,  $\tilde{z} < \tilde{w}$ , если

- (i) для всех  $w \in \mathbb{R}$  найдется вещественное число  $z$ , удовлетворяющее неравенству  $\mu_{\tilde{z}}(z) \geq \mu_{\tilde{w}}(w)$ ;
- (ii) для любого  $z \in \mathbb{R}$  найдется такое вещественное число  $w \geq z$ , что  $\mu_{\tilde{z}}(z) \leq \mu_{\tilde{w}}(w)$ .

По существу, определение (10) вводит отношение частичной упорядоченности на множестве нечетких чисел.

**Пример 3.** Пусть  $\tilde{z}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$  и  $\tilde{z}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$  — трапецеидальные нечеткие числа. Соотношение  $\tilde{z}_1 < \tilde{z}_2$  для них означает выполнение следующих условий: первое из соотношений (10) эквивалентно совокупности условий  $a_1 \leq a_2$ ,  $b_1 \leq b_2$ ; а второе — совокупности условий  $d_1 \leq d_2$  и  $c_1 \leq c_2$ .

Справедливо следующее утверждение о соотношениях между нелинейными средними.

**Теорема 4.** Пусть  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  — совокупность нечетких чисел. Пусть  $\phi(x)$  — непрерывная вогнутая (выпуклая вниз) возрастающая функция, либо выпуклая (вверх) убывающая функция. Тогда справедливо соотношение  $\tilde{z}_{cp} < \tilde{z}_\phi$ . Здесь нечеткие средние  $\tilde{z}_{cp}$  и  $\tilde{z}_\phi$  определяются формулами (1) и (7) соответственно.

Если  $\phi(x)$  — непрерывная выпуклая вниз убывающая функция либо выпуклая вверх возрастающая функция, то  $\tilde{z}_{cp} > \tilde{z}_\phi$ .

*Доказательство.* Рассмотрим, например, первый случай, когда функция  $\phi$  выпукла вниз и монотонно возрастает. В соответствии с (8) нужно показать, что

$$z_{cp}^-(\alpha) \leq z_{\phi}^-(\alpha), \quad z_{cp}^+(\alpha) \leq z_{\phi}^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (11)$$

Проведем рассуждения для левых индексов. Заметим, что нечеткое число

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(\tilde{z}_i)\right) = \bar{z}_{\phi}$$

имеет левый индекс

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^-(\alpha))\right).$$

Зафиксируем  $\alpha \in (0, 1]$ . В силу свойства выпуклости вниз функции  $\phi(x)$  функция  $g(x) = \phi^{-1}(x)$  выпукла вверх. Тогда, как известно (см., например, [7, гл. III]), для любых чисел  $y_1, \dots, y_n$  и  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , удовлетворяющих условиям  $\beta_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ , выполнено неравенство

$$g\left(\sum_{i=1}^n \beta_i y_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \beta_i g(y_i).$$

Полагая здесь  $y_i = \phi(z_i^-(\alpha))$  и используя равенство  $\phi^{-1}(\phi(y)) = y$ , получим

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^-(\alpha))\right) \geq \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^-(\alpha),$$

т.е. соотношение (11) для левых индексов. Аналогичные рассуждения справедливы для правых индексов.  $\square$

В частности, теорема 4 справедлива при  $\beta_i = 1/n$  ( $i = 1, \dots, n$ ), когда  $\tilde{z}_{cp}$  есть средняя арифметическая.

Пусть заданы положительные нечеткие числа  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ . Обозначим среднее (7) при определяющих функции  $\phi_p(x)$ ,  $\phi_G(x)$  и  $\phi_H(x)$  через  $\tilde{z}_p$ ,  $\tilde{z}_G$  и  $\tilde{z}_H$  соответственно. Из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 2.** *Справедливо соотношение  $\tilde{z}_{cp} \prec \tilde{z}_p$  при  $p > 1$  и  $\tilde{z}_{cp} \succ \tilde{z}_p$  при  $0 < p < 1$ .*

*Доказательство.* Функция  $\phi_p(x) = x^p$  при  $p > 1$  выпукла вниз и монотонно возрастает, а при  $0 < p < 1$  выпукла вверх и монотонно возрастает для  $x > 0$ . Тогда теорема 4 дает нечеткий аналог неравенства между средними степенными и средней арифметической.  $\square$

**Следствие 3.** *Справедливо соотношение  $\tilde{z}_G \prec \tilde{z}_{cp}$ .*

*Доказательство.* В этом случае определяющая функция в (7) есть  $\phi_G(x) = \log_a(x)$  ( $a > 1$ ). Она выпукла вверх и монотонно возрастает при  $x > 0$ . Теорема 4 представляет собой аналог для нечетких чисел известного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (см., например, [15, гл. II, § 2.5]) для вещественных чисел.  $\square$

**Следствие 4.** *Имеет место соотношение  $\tilde{z}_H \prec \tilde{z}_{cp}$ .*

*Доказательство.* Определяющая функция  $\phi_H(x) = 1/x$  выпукла вниз и монотонно убывает при  $x > 0$ . Теорема 4 дает нечеткий аналог неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим.  $\square$



**6. Заключение.** Линейные средние нечетких чисел и их систем достаточно хорошо изучены (см., например, [16, гл. 7], [10, 12, 17]). Однако результаты, установленные в настоящей статье, ранее не освещались. Они могут найти применение, в частности, для «нечеткой» задачи агрегирования, когда агрегируемая информация представляет собой набор нечетких чисел (ср., например, [5]).

Полученные в данной работе результаты по нелинейным средним систем нечетких чисел являются, по-видимому, пионерскими. Они могут быть использованы в статистике «нечетких» данных, так же как соответствующие числовые средние в «обычной» статистике, где среднее подбирается в зависимости от задачи.

Представляется возможным развитие результатов настоящей статьи в направлении (бесконечных) рядов нечетких чисел и интегралов.

В заключение отметим, что «нечеткий подход» к изучению неопределенности является в некотором смысле альтернативой вероятностному подходу. Близкие к данной работе по тематике результаты для нелинейных средних случайных величин содержатся в недавней работе автора [8].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А. Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. *Джисини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970.
3. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: Бином, 2015.
5. *Посадский А. И., Сивакова Т. В., Судаков В. А.* Агрегирование нечетких суждений экспертов/<https://doi.org/10.20948/prepr-2019-101>. — Москва: Препринт ИПМ №101, 2019.
6. *Смоляк С. А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. — М.: Наука, 2002.
7. *Харди Г., Поля Д., Литтлвуд Д.* Неравенства. — М.: МЦНМО, 2008.
8. *Хацкевич В. Л.* О некоторых нелинейных характеристиках центра группирования случайных величин// Изв. вузов. Мат. — 2020. — № 8. — С. 50–58.
9. *Diamond P., Kloeden P.* Metric spaces of fuzzy sets// Fuzzy Sets Syst. — 1990. — 35, № 2. — P. 241–249.
10. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24. — P. 279–300.
11. *Feng Y., Hu L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables// Fuzzy Syst. — 2001. — 120. — P. 487–497.
12. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers// Fuzzy Sets Syst. — 2003. — 136. — P. 363–374.
13. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — 12. — P. 215–229.
14. *Nahmias S.* Fuzzy variables// Fuzzy Sets Syst. — 1978. — 1. — P. 97–110.
15. *Nguyen H. T.* A note on the extension principle for fuzzy sets// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — 64. — P. 369–380.
16. *Nguyen H. T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin: Springer, 2006.
17. *de la Rosa de Saa S., Gil M. A., Gonzalez-Rodriguez G., Lopez M. T., Lubiano M. A.* Fuzzy rating scale-based questionnaires and their statistical analysis// IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2015. — 23. — P. 111–126.
18. *Zadeh L. A.* The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning// Inform. Sci. — 1975. — 8. — P. 199–249.
19. *Zadeh L. A.* The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, II// Inform. Sci. — 1975. — 8. — P. 301–357.
20. *Zadeh L. A.* The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, III// Inform. Sci. — 1975. — 9. — P. 43–80.

Хацкевич Владимир Львович

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил

«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

E-mail: vlkhats@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 88–107  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-88-107

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ  
С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ.  
II. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ  
НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Работа содержит вторую и третью части обзора по вопросам интегрируемости систем с пятью степенями свободы (первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 208. — С. 91–121). В первой части была подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй и третьей частях рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к пятимерной сфере и к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

**Ключевые слова:** динамическая система с пятью степенями свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION  
WITH FIVE DEGREES OF FREEDOM:  
ANALYSIS AND INTEGRABILITY.  
II. DYNAMICAL SYSTEMS ON TANGENT BUNDLES

© 2022 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. The work contains the second and third parts of the survey on the integrability of systems with five degrees of freedom (the first part: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **208**, (2022), pp. 91–121). In the first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field was described in detail. In the second and third parts, we consider more general dynamical systems on tangent bundles to the five-dimensional sphere and other smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

**Keywords and phrases:** dynamical system with five degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

**AMS Subject Classification:** 34Cxx, 70Cxx

**Введение.** Данная работа является обзором по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с пятью степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы автора по системам с четырьмя степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое пятимерное многообразие, то касательное (кокасательное) его расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно, с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи [6, 22, 30, 33].

Работа состоит из трех частей. В первой части (см. [70]) проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики шестимерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении пятимерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Данная статья содержит вторую и третью части обзора. Во второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к пятимерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по пятимерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширным классам гладких пятимерных многообразий и также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

## 2. БОЛЕЕ ОБЩИЙ КЛАСС ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ПЯТИМЕРНОЙ СФЕРЫ

Как мы знаем, в динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы с пространствами положений — конечномерными сферами. Таким образом, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. Так, например, изучение шестимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к пятимерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [17, 29, 44, 47].

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики свободного шестимерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к пятимерной сфере. При этом исследование проводилось, начиная от систем при отсутствии силового поля, и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий [48, 49, 72].

Построение неконсервативного силового поля, действующего на шестимерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для шестимерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (ср. с [73]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности пятимерной сферы, вообще говоря, в неконсервативном поле сил.

В данном разделе 2 показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике шестимерного твердого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к пятимерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [40] и обобщают ранее рассмотренные.

**2.1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к пятимерному многообразию.** Рассмотрим гладкое пятимерное риманово многообразие  $M^5$  с метрикой  $g_{ij}$ , которая в заданных локальных координатах  $x = (x^1, \dots, x^5)$  на многообразии порождает аффинную связность  $\Gamma_{jk}^i(x)$ . Рассмотрим также касательное расслоение  $T_*M^5\{z_5, \dots, z_1; x^1, \dots, x^5\}$ , где  $z = (z_5, \dots, z_1)$  — координаты в касательном пространстве.

Если  $z_i = \dot{x}^i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , то уравнения геодезических линий на нем примут вид (дифференцирование, вообще говоря, в данном случае берется по натуральному параметру)

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^5 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (2.1.1)$$

**2.2. Системы на касательном расслоении к пятимерной сфере.** Рассмотрим следующую систему (2.2.1), (2.2.2) десятого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_5 + bg(\alpha), \\ \dot{z}_5 = F(\alpha) - (z_1^2 + \dots + z_4^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_4 = z_4 z_5 f(\alpha) + (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_3 = z_3 z_5 f(\alpha) - z_3 z_4 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - (z_1^2 + z_2^2)f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_5 f(\alpha) - z_2 z_4 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + z_2 z_3 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + z_1^2 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_5 f(\alpha) - z_1 z_4 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + z_1 z_3 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - z_1 z_2 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3}, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = z_4 f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = -z_3 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1}, \\ \dot{\beta}_3 = z_2 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2}, \\ \dot{\beta}_4 = -z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^5\{z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$  к пятимерной сфере

$$\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4 : 0 \leq \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq \pi, \beta_4 \bmod 2\pi\}.$$

Функции  $F(\alpha)$ ,  $f(\alpha)$  и  $g(\alpha) - 2\pi$ -периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек  $\alpha = 0 \bmod \pi/2$ ,  $b \geq 0$ . Функция  $f(\alpha)$  определяет метрику на сфере, а функции  $F(\alpha)$  и  $g(\alpha)$  — (внешнее) силовое поле. О задачах как с внешним, так и внутренним полями см. также в [61, 62, 65].

Первое уравнение подсистемы (2.2.1) и подсистема (2.2.2) задают координаты  $z_5, \dots, z_1$  в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (2.2.1), (2.2.2) без последнего уравнения является независимой подсистемой девятого порядка (ввиду цикличности переменной  $\beta_4$ ).

Система (2.2.1), (2.2.2) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\tilde{g}(\alpha) + F(\alpha) - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3] \frac{1}{f(\alpha)} = 0, \quad (2.2.3a)$$

$$\ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \left[ \frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] - [\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3] \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \quad (2.2.3b)$$

$$\ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \left[ \frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] - [\dot{\beta}_3^2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_3] \sin \beta_2 \cos \beta_2 + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0, \quad (2.2.3c)$$

$$\ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 \left[ \frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] - \dot{\beta}_4^2 \sin \beta_3 \cos \beta_3 + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} = 0, \quad (2.2.3d)$$

$$\ddot{\beta}_4 - b\dot{\beta}_4 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_4 \left[ \frac{f^2(\alpha) - \tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)} \right] + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + 2\dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4 \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} = 0, \quad (2.2.3e)$$

где

$$\tilde{g}(\alpha) = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}.$$

**2.3. Первые интегралы, метрики и силовые поля.** При  $b = 0$  система (2.2.1), (2.2.2) является консервативной и обладает полным набором (шестью) первых интегралов:

$$F_1(z_5, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_5^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \text{const},$$

$$F_2(z_4, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \text{const},$$

$$F_3(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 = C_3 = \text{const},$$

$$F_4(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 \sin \beta_2 = C_4 = \text{const},$$

$$F_5(z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_3) = z_1 \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 = C_5 = \text{const},$$

$$F_6(z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6 = \text{const}.$$

При  $b > 0$  система (2.2.1), (2.2.2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [40]).

Выделим два существенных случая для функции  $f(\alpha)$ , определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2.3.1)$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (2.3.2)$$

Случай (2.3.1) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного шестимерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. часть I: [70]).

Случай (2.3.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на пятимерной сфере так же, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой всеобъемлющего шестимерного пространства. В частности, при  $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$  система (2.2.1), (2.2.2) описывает геодезический поток на пятимерной сфере.

**Замечание 2.1.** В случае (2.3.1), если

$$g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}, \quad (2.3.3)$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает движение свободного шестимерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin \alpha, \quad (2.3.4)$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает также закрепленный шестимерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей шестимерное пространство, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим (асимптотическим) предельным множествам системы (2.2.1), (2.2.2).

Для полного интегрирования системы (2.2.1), (2.2.2) необходимо знать, вообще говоря, *девять* независимых первых интегралов. Однако после замены переменных в касательном пространстве

$$w_1 = \frac{z_4}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}, \quad w_2 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_3 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_4 = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2}, \quad w_5 = z_5, \quad (2.3.5)$$

система (2.2.1), (2.2.2) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -w_5 + g(\alpha), \\ \dot{w}_5 &= F(\alpha) - w_4^2 f(\alpha), \\ \dot{w}_4 &= w_4 w_5 f(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_k &= d_k \frac{1 + w_k^2 \cos \beta_k}{w_k \sin \beta_k}, \\ \dot{\beta}_k &= d_k, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

$$\dot{\beta}_4 = -Z_1(w_1, \dots, w_5) f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (2.3.8)$$

где  $Z_1(w_1, \dots, w_5) = z_1$  в силу замены (2.3.5),  $d_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.3.6)—(2.3.8) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.6), по одному — для систем (2.3.7) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.8) (т.е. всего *шесть*).

**2.4. Случай (2.3.1).** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \quad (2.4.1)$$

В частности, при  $m = a = 1$  получаем случай (2.3.4).

**Теорема 2.1.** В случаях (2.3.1), (2.4.1) система (2.2.1), (2.2.2) обладает полным набором (шестью), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.

**Следствие 2.1.** Система (2.2.3) при условиях (2.3.1), (2.4.1) обладает шестью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_4 = u_1 \tau^a, \quad w_5 = u_2 \tau^a,$$

то поиск ключевого первого интеграла

$$\Phi_1(w_5, w_4; \alpha) = C_1$$

системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля [29]

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2] du_1, \quad (2.4.2)$$

общее решение которого  $u_1 = U_1(u_2)$  если и интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций, то выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл  $\Phi_2(w_5, w_4; \alpha) = C_2$  системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2) du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \quad (2.4.3)$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид

$$\Phi_{k+2}(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin \beta_k} = C_{k+2} = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.4.4)$$

а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_6(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_4}{d\beta_3} = -\frac{z_1}{z_2 \sin \beta_3}, \quad (2.4.5)$$

при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при  $k = 2, 3$ , окончательно получим его вид:

$$\Phi_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \arctg \frac{C_5 \cos \beta_3}{\sqrt{C_4^2 \sin^2 \beta_3 - C_5^2}} = C_6 = \text{const}. \quad (2.4.6)$$

В частности, при  $a = 1$  равенство (2.4.2) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_5}{\sin \alpha}, \frac{w_4}{\sin \alpha}\right) = \frac{w_5^2 + w_4^2 - bw_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}.$$

**2.5. Случай (2.3.2).** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1} \alpha}{\cos^{2k+1} \alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k \alpha}{\cos^k \alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.5.1)$$

**Теорема 2.2.** В случаях (2.3.2), (2.5.1) система (2.2.1), (2.2.2) обладает полным набором (шестью), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.

**Следствие 2.2.** Система (2.2.3) при условиях (2.3.2), (2.5.1) обладает шестью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_4 = u_1 \left( \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right)^k, \quad w_5 = u_2 \left( \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right)^k,$$

то поиск ключевого первого интеграла

$$\Phi_1(w_5, w_4; \alpha) = C_1$$

системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля (2.4.2) (только с подстановкой  $a \leftrightarrow k$ ), общее решение которого  $u_1 = U_1(u_2)$  выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_5, w_4; \alpha) = C_2$$

системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1-U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kb u_2}.$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид (2.4.4). А дополнительный первый интеграл

$$\Phi_6(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства (2.4.5), при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при  $k = 2, 3$ , окончательно получим его в виде (2.4.6).

В частности, при  $k = 1$  равенство (2.4.2) ( $a \leftrightarrow k$ ) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1 \left( \frac{w_5 \cos \alpha}{\sin \alpha}, \frac{w_4 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{(w_5^2 + w_4^2) \cos^2 \alpha - b w_5 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha \cos \alpha} = C_1 = \text{const}.$$

В предыдущих работах автора [50, 52, 53] уже рассматривались задачи о движении свободного шестимерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к пятимерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по пятимерной сфере в более общих, чем ранее, неконсервативных силовых полях.

### 3. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ К ГЛАДКОМУ ПЯТИМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ

Выше было показано, что изучение шестимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к пятимерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выше был также введен класс задач о движении точки по гладкой пятимерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удастся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В данном же разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому пятимерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4, см. [66–68]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.



**3.1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы.** Как известно, в случае пятимерного гладкого риманова многообразия  $M^5$  с координатами  $(\alpha, \beta)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_4)$ , и аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i(x)$  уравнения геодезических линий на касательном расслоении  $T_*M^5\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_4; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ ,  $\alpha = x^1$ ,  $\beta_1 = x^2, \dots, \beta_4 = x^5$ ,  $x = (x^1, \dots, x^5)$ , имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^5 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.1.1)$$

Изучим структуру уравнений (3.1.1) при изменении координат на касательном расслоении  $T_*M^5$ . Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки  $x$  многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^5 R^{ij}(x) z_j, \quad (3.1.2)$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^5 T_{ji}(x) \dot{x}^i,$$

при этом  $R^{ij}$ ,  $T_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, 5$ , — функции от  $x^1, \dots, x^5$ , так что матрицы  $R = (R^{ij})$  и  $T = (T_{ji})$  удовлетворяют соотношению  $RT = E$ . Назовем также уравнения (3.1.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении  $T_*M^5$ .

Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^5 \dot{T}_{ji} \dot{x}^i + \sum_{i=1}^5 T_{ji} \ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^5 T_{ji,k} \dot{x}^k, \quad (3.1.3)$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \dots, 5.$$

Подставляя в (3.1.3) уравнения (3.1.1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^5 T_{ij,k} \dot{x}^j \dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^5 T_{ij} \Gamma_{pq}^j \dot{x}^p \dot{x}^q; \quad (3.1.4)$$

при этом в последней системе вместо  $\dot{x}^i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , надо подставить формулы (3.1.2), в результате чего в правой части последнего равенства будет стоять квадратичная форма по переменным  $z_j$ . Другими словами, равенство (3.1.4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^5 Q_{ijk} \dot{x}^j \dot{x}^k|_{(3.1.2)} = 0, \quad (3.1.5)$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^5 T_{is}(x) \Gamma_{jk}^s(x) - T_{ij,k}(x). \quad (3.1.6)$$

**Предложение 3.1.** Система (3.1.1) в той области, где  $\det R(x) \neq 0$ , эквивалентна составной системе (3.1.2), (3.1.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (3.1.1) к эквивалентной системе уравнений (3.1.2), (3.1.4) зависит как от замены переменных (3.1.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности  $\Gamma_{jk}^i(x)$ .

**3.2. Достаточно общий случай.** Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -z_5, \\
\dot{\beta}_1 &= z_4 f_1(\alpha), \\
\dot{\beta}_2 &= z_3 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\
\dot{\beta}_3 &= z_2 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\
\dot{\beta}_4 &= z_1 f_4(\alpha) g_3(\beta_1) h_2(\beta_2) i(\beta_3),
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

где  $f_k(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ,  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2, 3$ ,  $h_m(\beta_2)$ ,  $m = 1, 2$ ,  $i(\beta_3)$  — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты  $z_1, \dots, z_5$  в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических (в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения и др.):

$$\begin{cases}
\ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_4 + 2\Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4 = 0,
\end{cases} \tag{3.2.2}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (3.2.1) уравнения (3.1.4) примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_5 - \left[ 2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_3(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_4 - \\
&\quad - \left[ 2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_2(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_3 - \\
&\quad - \left[ 2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2) z_1 z_2, \tag{3.2.3a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_5 - \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_4 - \\
&\quad - \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_1(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_2 z_3 - \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \frac{f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2)}{f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2)} i^2(\beta_3) z_1^2, \tag{3.2.3b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_3 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_5 - \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_3 z_4 - \\
&\quad - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h_1^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) \frac{f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \tag{3.2.3c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_4 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4 z_5 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_3^2 - \\
&\quad - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) \frac{f_4^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \tag{3.2.3d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_5 &= \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_4^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_3^2 + \Gamma_{33}^\alpha f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) z_2^2 + \\
&\quad + \Gamma_{44}^\alpha f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \tag{3.2.3e}
\end{aligned}$$

и уравнения (3.2.2) почти всюду эквивалентны составной системе (3.2.1), (3.2.3) на касательном расслоении  $T_* M^5 \{z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$  гладкого пятимерного многообразия  $M^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ .

Для полного интегрирования системы (3.2.1), (3.2.3) необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано далее при изучении систем с диссипацией.

**Предложение 3.2.** *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \quad (3.2.4a)$$

$$2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \quad (3.2.4b)$$

$$2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.4c)$$

$$2\Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4d)$$

$$\left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \quad (3.2.4e)$$

$$\left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.4f)$$

$$\left[ 2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_3(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4g)$$

$$\left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_1(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.4h)$$

$$\left[ 2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_2(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4i)$$

$$\left[ 2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) f_4^2(\alpha) g_3^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.4j)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(z_5, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_5^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (3.2.5)$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (3.2.5) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (3.2.4) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (3.2.4) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения  $f_k(\alpha)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ,  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2, 3$ ,  $h_m(\beta_2)$ ,  $m = 1, 2$ ,  $i(\beta_3)$  системы (3.2.4) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (3.2.5) для системы (3.2.1), (3.2.3) уравнений геодезических (3.2.2). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (3.2.4) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (3.2.1) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = \dots = f_4(\alpha) = f(\alpha), \quad (3.2.6)$$

при этом функции  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2, 3$ ,  $h_m(\beta_2)$ ,  $m = 1, 2$ ,  $i(\beta_3)$  должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (3.2.4):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \quad (3.2.7a)$$

$$2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.7b)$$

$$2\Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_3(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.7c)$$

$$\left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_1(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) \equiv 0, \quad (3.2.7d)$$

$$\left[ 2\Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h_2(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) g_3^2(\beta_1) h_2^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0, \quad (3.2.7e)$$

$$\left[ 2\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] g_2^2(\beta_1) h_1^2(\beta_2) + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) g_3^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) \equiv 0. \quad (3.2.7f)$$

Таким образом, функции  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2, 3$ ,  $h_m(\beta_2)$ ,  $m = 1, 2$ ,  $i(\beta_3)$  зависят от коэффициентов связности через систему (3.2.7), а ограничения на функцию  $f(\alpha)$  будут даны ниже.

**Предложение 3.3.** Если выполнены свойства (3.2.6), (3.2.7), при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \dots = \Gamma_{\alpha 4}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (3.2.8)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_4, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (3.2.9)$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}.$$

**Предложение 3.4.** Если выполнены условия предложения 3.3, а также

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g_3(\beta_1) = g(\beta_1), \quad (3.2.10)$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_{14}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (3.2.11)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (3.2.12)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

**Предложение 3.5.** Если выполнены условия предложений 3.3, 3.4, а также

$$h_1(\beta_2) = h_2(\beta_2) = h(\beta_2), \quad (3.2.13)$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_{24}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \quad (3.2.14)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_4(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \quad (3.2.15)$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}.$$

**Предложение 3.6.** Если выполнены условия предложений 3.3–3.5, при этом справедливо равенство

$$\Gamma_{34}^4(\alpha, \beta) = \Gamma_4(\beta_3), \quad (3.2.16)$$

то система (3.2.1), (3.2.3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_5(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) \Psi_3(\beta_3) = C_5 = \text{const}, \quad (3.2.17)$$

$$\Psi_3(\beta_3) = i(\beta_3) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{3,0}}^{\beta_3} \Gamma_4(b) db \right\}. \quad (3.2.18)$$

**Предложение 3.7.** Если выполнены условия предложений 3.3–3.6, то система (3.2.1), (3.2.3) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_6(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta_4 \pm \int_{\beta_{3,0}}^{\beta_3} \frac{C_5 i(b)}{\sqrt{C_4^2 \Phi_3^2(b) - C_5^2}} db = C_6 = \text{const}, \quad (3.2.19)$$

где после взятия интеграла (3.2.19) вместо постоянных  $C_4, C_5$  нужно подставить левые части равенств (3.2.12), (3.2.17), соответственно.

Набор первых интегралов (3.2.5), (3.2.9), (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17), (3.2.19) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.2.1), (3.2.3) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из шести, а не из девяти, первых интегралов, будет показано ниже).

Как и выше, необходимо отметить, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.19) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

### 3.3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы.

Теперь несколько модифицируем систему (3.2.1), (3.2.3) при условиях (3.2.6)–(3.2.8), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.13), (3.2.14), (3.2.16), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент  $F(\alpha)$  во втором уравнении системы (3.3.1). Рассматриваемая система на касательном расслоении  $T_*M^5\{z_5, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$  гладкого пятимерного многообразия  $M^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$  примет вид

$$\dot{\alpha} = -z_5, \quad (3.3.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_5 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f^2(\alpha) z_4^2 + \Gamma_{22}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 + \Gamma_{33}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 + \\ + \Gamma_{44}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4 z_5 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 - \\ - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_5 - \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_3 z_4 - \\ - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_5 - \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_2 z_4 - \\ - \left[ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_2 z_3 - \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.3.1e)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_5 - \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_1 z_4 - \\ & - \left[ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_3 - \left[ 2\Gamma_4(\beta_3) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) z_1 z_2, \end{aligned} \quad (3.3.1f)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_4 f(\alpha), \quad (3.3.1g)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_3 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (3.3.1h)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.3.1i)$$

$$\dot{\beta}_4 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i(\beta_3), \quad (3.3.1j)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_4 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4 + 2\Gamma_4(\beta_3) \dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4 = 0. \end{cases}$$

**Предложение 3.8.** Если выполнены условия предложения 3.2, то система (3.3.1) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_5, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_5^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da. \quad (3.3.2)$$

**Предложение 3.9.** Если выполнены условия предложений 3.3–3.6, то система (3.3.1) имеет четыре гладких первых интеграла вида (3.2.9), (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17).

**Предложение 3.10.** Если выполнены условия предложения 3.7, то система (3.3.1) имеет первый интеграл вида (3.2.19).

Набор первых интегралов (3.3.2), (3.2.9), (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17), (3.2.19) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.3.1) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из шести, а не из девяти, первых интегралов, будет показано ниже).

Аналогично мы вынуждены подчеркнуть, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.19) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

### 3.4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы.

Теперь усложним систему (3.3.1) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент  $b\delta(\alpha)$  в первом уравнении следующей системы:

$$\dot{\alpha} = -z_5 + b\delta(\alpha), \quad (3.4.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_5 = & F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f^2(\alpha) z_4^2 + \Gamma_{22}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 + \Gamma_{33}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 + \\ & + \Gamma_{44}^\alpha f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.4.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = & \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4 z_5 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_3^2 - \\ & - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.4.1c)$$

$$\dot{z}_3 = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_5 - \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_3 z_4 - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) z_2^2 - \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \quad (3.4.1d)$$

$$\dot{z}_2 = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_5 - \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_2 z_4 - \left[ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_2 z_3 - \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i^2(\beta_3) z_1^2, \quad (3.4.1e)$$

$$\dot{z}_1 = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_5 - \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_1 z_4 - \left[ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_3 - \left[ 2\Gamma_4(\beta_3) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3} \right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) z_1 z_2, \quad (3.4.1f)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_4 f(\alpha), \quad (3.4.1g)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_3 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (3.4.1h)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.4.1i)$$

$$\dot{\beta}_4 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) i(\beta_3), \quad (3.4.1j)$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\tilde{\delta}(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \Gamma_{44}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_4 - b\dot{\beta}_4\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_4 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_4 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_4 + 2\Gamma_4(\beta_3)\dot{\beta}_3\dot{\beta}_4 = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}(\alpha) = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}.$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы десятого порядка (3.4.1) при условии (3.2.7), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_{44}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)i^2(\beta_3) = \Gamma_5(\alpha). \quad (3.4.2)$$

Введем также (по аналогии с (3.2.7)) ограничение и на функцию  $f(\alpha)$ : она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (3.2.4):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \quad (3.4.3)$$

Для полного интегрирования системы (3.4.1) необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_5 = z_5, \quad w_4 = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2}, \quad w_3 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_2 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_1 = \frac{z_4}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}, \quad (3.4.4)$$

система (3.4.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_5 + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_5 = F(\alpha) + \Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha)w_4^2, \\ \dot{w}_4 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_4 w_5, \end{cases} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{cases} w'_3 = d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2}{w_3} \left[2\Gamma_4(\beta_3) + \frac{d \ln |i(\beta_3)|}{d\beta_3}\right], \\ \beta'_3 = d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{cases} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{cases} w'_2 = d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2}{w_2} \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \beta'_2 = d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{cases} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{cases} w'_1 = d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2}{w_1} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \beta'_1 = d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{cases} \quad (3.4.8)$$

$$\beta'_4 = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (3.4.9)$$

где выполнены условия

$$\begin{aligned} d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= \mathcal{Z}_4(w_5, \dots, w_1)f(\alpha), \\ d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= \mathcal{Z}_3(w_5, \dots, w_1)f(\alpha)g(\beta_1), \\ d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= \mathcal{Z}_2(w_5, \dots, w_1)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \\ d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= \mathcal{Z}_1(w_5, \dots, w_1)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)i(\beta_3), \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

при этом

$$Z_k = \mathcal{Z}_k(w_5, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (3.4.11)$$

— функции в силу замены (3.4.4).

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.4.5)—(3.4.9) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.5), по одному — для систем (3.4.6)—(3.4.8) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.9) (т.е. всего *шесть*).

**Теорема 3.1.** Пусть для некоторых  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  выполняются равенства

$$\Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \quad (3.4.12)$$

Тогда система (3.4.5)—(3.4.9) при выполнении условий (3.2.7), (3.4.3) обладает полным набором (шестью) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Действительно, для начала сопоставим системе третьего порядка (3.4.5) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_5}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_5(\alpha)f^2(\alpha)w_4^2}{-w_5 + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + d \ln |f(\alpha)|/d\alpha]w_4 w_5}{-w_5 + b\delta(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_5 = u_5\delta(\alpha), \quad w_4 = u_4\delta(\alpha), \quad (3.4.14)$$



приводим систему (3.4.13) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\delta(\alpha) \frac{du_5}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha) u_5 &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_5(\alpha) f^2(\alpha) \delta^2(\alpha) u_4^2}{-u_5 \delta(\alpha) + b \tilde{\delta}(\alpha)}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_4}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha) u_4 &= \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + d \ln |f(\alpha)|/d\alpha] \delta^2(\alpha) u_4 u_5}{-u_5 \delta(\alpha) + b \tilde{\delta}(\alpha)},\end{aligned}\quad (3.4.15)$$

что почти всюду эквивалентно

$$\begin{aligned}\delta(\alpha) \frac{du_5}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_5(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_4^2 + \tilde{\delta}(\alpha) u_5^2 - b \tilde{\delta}(\alpha) u_5}{-u_5 + b}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_4}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_5(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_4 u_5 + \tilde{\delta}(\alpha) u_4 u_5 - b \tilde{\delta}(\alpha) u_4}{-u_5 + b}, \\ F_3(\alpha) &= \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.\end{aligned}\quad (3.4.16)$$

А после выполнения условий (3.4.12) система (3.4.16) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_5}{du_4} = \frac{\lambda + \kappa u_4^2 + u_5^2 - b u_5}{(1 - \kappa) u_4 u_5 - b u_4}.\quad (3.4.17)$$

Уравнение (3.4.17) имеет вид уравнения Абеля [29]. В частности, при  $\kappa = -1$  оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_5^2 + u_4^2 - b u_5 + \lambda}{u_4} = C_1 = \text{const},\quad (3.4.18)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_5, w_4; \alpha) = G_1 \left( \frac{w_5}{\delta(\alpha)}, \frac{w_4}{\tilde{\delta}(\alpha)} \right) = \frac{w_5^2 + w_4^2 - b w_5 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_4 \delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}.\quad (3.4.19)$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.5) при  $\kappa = -1$ . Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.18) при  $u_3 \neq 0$  следующим образом:

$$\left( u_5 - \frac{b}{2} \right)^2 + \left( u_4 - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda.\quad (3.4.20)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0,\quad (3.4.21)$$

и фазовое пространство системы (3.3.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.20).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.18) первое уравнение системы (3.4.16) при  $\kappa = -1$  примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)} \frac{du_5}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - b u_5 + u_5^2) - C_1 U_1(C_1, u_5)}{-u_5 + b},\quad (3.4.22)$$

где

$$U_1(C_1, u_5) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_5^2 - b u_5 + \lambda)} \right\},\quad (3.4.23)$$

при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (3.4.21).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (3.4.5) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_5, w_4; \alpha) = G_2 \left( \delta(\alpha), \frac{w_5}{\delta(\alpha)}, \frac{w_4}{\tilde{\delta}(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}\quad (3.4.24)$$

и при  $\kappa = -1$  он найдется из квадратуры

$$\ln |\delta(\alpha)| = \int \frac{(b - u_5) du_5}{2(\lambda - b u_5 + u_5^2) - C_1 \{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_5^2 - b u_5 + \lambda)} \} / 2},$$

где  $u_5 = w_5/\delta(\alpha)$ . При этом после взятия этого интеграла вместо  $C_1$  можно формально подставить левую часть равенства (3.4.19). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции  $\delta(\alpha)$ . Поэтому выражение первых интегралов (3.4.19), (3.4.24) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции  $\delta(\alpha)$ .

Первые интегралы для систем (3.4.6)—(3.4.8) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (3.4.25)$$

о функциях  $\Psi_s(\beta_s)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , см. (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.9), находится по аналогии с (3.2.19):

$$\Theta_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \int_{\beta_{3,0}}^{\beta_3} \frac{C_5 i(b)}{\sqrt{C_4^2 \Psi_3^2(b) - C_5^2}} db = C_6 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных  $C_4, C_5$  можно формально подставить соответствующие левые части равенства (3.4.25).

**3.5. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией.** Если  $\alpha$  — периодическая координата периода  $2\pi$ , то система (3.4.5) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [40]. При этом при  $b = 0$  она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.3.2), (3.2.9). В силу (3.4.12)

$$\Phi_1(z_5, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_5^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da \cong w_5^2 + w_4^2 + \lambda \delta^2(\alpha), \quad (3.5.1)$$

где « $\cong$ » означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (3.4.3) и (3.4.12)

$$\Phi_2(z_4, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_4^2} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} \cong w_4 \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (3.5.2)$$

где « $\cong$ » означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.5.1), (3.5.2) (или (3.3.2), (3.2.9)) также является первым интегралом системы (3.4.5) при  $b = 0$ . Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$w_5^2 + w_4^2 - b w_5 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha) \quad (3.5.3)$$

и (3.5.2) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.5). Однако отношение функций (3.5.3), (3.5.2) является первым интегралом системы (3.4.5) (при  $\kappa = -1$ ) при любом  $b$ .

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 46–51.
2. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 71–86.
3. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с  $n$  эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // Докл. АН СССР. — 1983. — 272, № 6. — С. 1364–1367.
4. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
5. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.

6. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на  $so(4)$ // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
8. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
9. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
10. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
11. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 22–39.
12. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
15. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
16. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
17. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
18. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
19. Лошкин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 76–133.
20. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики  $n$ -мерного твердого тела// Функци. анал. прилож. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.
21. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
22. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
23. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
24. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. Тихонов А. А. Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
27. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
28. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — 1. — С. 52–58.
31. Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
32. Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — 4. — С. 57–69.

33. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
34. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
35. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
36. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
37. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на  $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
38. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
39. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
40. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
41. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
42. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
43. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
45. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
46. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
47. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
48. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
49. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
50. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
51. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
52. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
53. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
55. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
56. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
57. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.

59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — 208. — С. 91–121.
71. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 080001.
72. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
73. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
74. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 209 (2022). С. 108–116  
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-108-116

УДК 517.9, 531.01

НЕКОТОРЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ,  
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ  
НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ  
ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе получены тензорные инварианты (дифференциальные формы) однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

**Ключевые слова:** динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

SOME TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC,  
POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS  
ON THE TANGENT BUNDLES  
OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2022 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we construct tensor invariants (differential forms) of homogeneous dynamical systems on the tangent bundles of smooth two-dimensional manifolds. We establish the relationship between the presence of such invariants and the existence of complete sets of first integrals, which are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. Due to force fields, systems considered are dissipative; they are generalizations of systems considered earlier.

**Keywords and phrases:** dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

**AMS Subject Classification:** 34Cxx, 70Cxx

**1. Введение.** Как известно (см. [14, 15, 60]), наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естественен (см. [1, 2]). Для систем, обладающих притягивающими или

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций (см. [25, 55, 56]).

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий (см. [26, 28, 29, 37]). Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (см. [56]).

В работе предьявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем (ср. [5, 6, 16, 18]). При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

**2. Пример системы с одной степенью свободы.** Рассмотрим следующую гладкую динамическую систему на плоскости с одной степенью свободы  $\alpha$ :

$$\dot{\alpha} = -\omega + b\delta(\alpha), \quad \dot{\omega} = F(\alpha), \quad (1)$$

которая эквивалентна следующему уравнению:

$$\ddot{\alpha} - b\tilde{\delta}(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) = 0, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Пара гладких функций  $(F(\alpha), \delta(\alpha))$  определяет силовое поле в системе: функция  $F(\alpha)$  описывает консервативную составляющую поля, а функция  $\delta(\alpha)$  — возможные рассеяние или подкачку энергии в системе. При  $b = 0$  консервативная система (1) обладает гладким интегралом энергии:

$$\frac{\omega^2}{2} + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_0 = \text{const}; \quad (2)$$

при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ , т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма

$$d\alpha \wedge d\omega \quad (3)$$

площади с единичной плотностью. При интегрировании системы можно использовать или первый интеграл энергии (2), или факт сохранения фазовой площади (3).

Иначе обстоит дело в случае  $b \neq 0$ . Поскольку у системы (1) появляются, вообще говоря, притягивающие или отталкивающие (асимптотические) предельные множества, первый интеграл системы — трансцендентная функция (в смысле комплексного анализа; см. [41, 43, 45]). Приведем ее для следующего важного случая:

$$F(\alpha) = \lambda\delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Действительно, первый интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(\alpha, \omega) &= \delta(\alpha) \exp \Psi(t) = C_1 = \text{const}, \\ \Psi(t) &= \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}; \end{aligned} \quad (5)$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы алгебраических равенств

$$\delta(\alpha) = 0, \quad \omega = 0 \quad (6)$$

(см. также [13]).

Поскольку появляются асимптотические предельные множества, не существует никакой даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры фазовой плоскости (ср. с [7, 9, 62]). Но можно (наряду с первым интегралом) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными функциями.

Действительно, если  $\mu_1 \neq 0$  — один из корней уравнения  $\mu^2 - b\mu + \lambda = 0$  (для простоты действительный), то искомая 2-форма имеет вид

$$T_1(\alpha, \omega) = \exp \left\{ -\frac{1}{\mu_1} \Psi(t) \right\} d\alpha \wedge d\omega, \quad (7)$$

$$\Psi(t) = \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}.$$

**3. Инварианты систем уравнений геодезических.** Рассмотрим гладкое двумерное риманово многообразие  $M^2\{\alpha, \beta\}$  с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$  и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении  $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$  (ср. с [56]). Для этого изучим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha), \quad \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha), \quad (8)$$

где  $f_1(\alpha)$  и  $f_2(\alpha)$  — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты  $z_1, z_2$  в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [37, 56], например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на поверхностях вращения, плоскости Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

т.е. выполнены равенства

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\beta\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (10)$$

В случае (8) соотношения на касательном расслоении  $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$  примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}(\alpha, \beta)z_2^2 - f_2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2 - f_1(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)z_1^2, \\ \dot{z}_2 &= -f_2(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - f_1(\alpha) \cdot 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)z_1 z_2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)z_1^2, \end{aligned} \quad (11)$$

а при условиях (10) упростятся:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -f_2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -f_2(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)z_1^2, \end{aligned} \quad (12)$$

и уравнения (9) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (8), (12) на многообразии  $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$  с новыми координатами  $z_1, z_2$  на касательном пространстве.

Для полного интегрирования системы (8), (12) необходимо знать, вообще говоря, три независимых тензорных инварианта [60]: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм. При этом, конечно, первые интегралы (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [51, 52, 54]).

В [37] рассмотрены примеры систем геодезических на двумерной сфере с различными метриками, а в [56] — примеры систем геодезических на двумерных поверхностях вращения и на плоскости Лобачевского.



**Теорема 1.** Если выполнены условия

$$f_1^2(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) + f_2^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \equiv 0, \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \quad (13)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha), \quad (14)$$

то система (8), (12) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}, \quad (15)$$

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1 \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad \Phi_0(\alpha) = f_1(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(b) db \right\}, \quad (16)$$

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = \beta \mp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b) \sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(b) - C_2^2}} db = C_3 = \text{const}. \quad (17)$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной  $\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau}$  и фазовой  $z_1^* = \ln |z_1|$  — фазовый поток системы (8), (12) сохраняет объем на касательном расслоении  $TM^2\{z_2, z_1^*; \alpha, \beta\}$ , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dz_2 \wedge dz_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta.$$

Система равенств (13) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (15) (или см. ниже (19)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [3, 11]). Ну а поиск как интеграла (15), так и (16) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий (см. [2, 12, 20, 56]).

**4. Инварианты потенциальных систем.** Несколько модифицируем систему (8), (12), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле в проекциях на оси  $\dot{z}_1, \dot{z}_2$  соответственно:

$$\tilde{F}(z_2, z_1; \alpha) = \begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении  $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$  примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - f_2(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta) f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha); \end{cases} \quad (18)$$

она почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - F_2(\alpha) f_2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} - F_1(\beta) f_1(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta} = 0, \end{cases}$$

на касательном расслоении  $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ .

**Теорема 2.** Если выполнены условия (13), (14), то система (18) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const}, \quad (19)$$

$$V(\alpha, \beta) = V_2(\alpha) + V_1(\beta) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_2(a) da - 2 \int_{\beta_0}^{\beta} F_1(b) db,$$

а также при  $F_1(\beta) \equiv 0$  — первым интегралом (16) и

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = \beta \mp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b) \sqrt{\Phi_0^2(b) [C_1 - V(b, \beta_0)] - C_2^2}} db = C_3 = \text{const.} \quad (20)$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной  $\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau}$  и фазовой  $z_1^* = \ln |z_1|$  — фазовый поток системы (18) сохраняет объем на касательном расслоении  $TM^2\{z_2, z_1^*; \alpha, \beta\}$ , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dz_2 \wedge dz_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta.$$

**5. Инварианты систем со знакопеременной диссипацией.** Далее несколько модифицируем систему (18), вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент  $b\delta(\alpha)$ ,  $b > 0$ , в первом уравнении системы (21) (в отличие от системы (18)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси  $\dot{z}_1, \dot{z}_2$  соответственно:

$$\tilde{F}(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении  $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$  примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - f_2(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta) f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha); \end{cases} \quad (21)$$

она почти всюду эквивалентна следующей системе на касательном расслоении  $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ :

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\alpha} - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_2^1(\alpha) + \\ + b^2 \delta^2(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta} - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta} = 0, \end{cases}$$

Здесь, как и выше,  $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$ .

Будем интегрировать систему четвертого порядка (21) при выполнении свойств (13), (14), а также при  $F_1(\beta) \equiv 0$ . При этом происходит отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha) z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \end{cases} \quad (22)$$

при наличии также четвертого уравнения

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \quad (23)$$

Будем также предполагать, что для некоторого  $\kappa \in \mathbb{R}$  выполнено равенство

$$\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (24)$$

где  $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$ ,  $\Delta(\alpha) = \delta(\alpha)/f_2(\alpha)$ , а для некоторых  $\lambda_2^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2$ , должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_2(\alpha) &= \lambda_2^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_2^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) &= f_2(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_2(\alpha), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (25)$$

Условие (24) назовем «геометрическим», а условия из группы (25) — «энергетическими».

Условие (24) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности  $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции  $\Delta(\alpha)$ . Условия же группы (25) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к функциям  $\Delta^2(\alpha)/2$  и  $\Delta(\alpha)$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду также относительно функции  $\Delta(\alpha)$  (см. также [46, 47, 49, 51]).

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (24) и (25). Тогда система (22), (23) обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными [10, 24] первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [10]). В частности, если  $\kappa = -1$ ,  $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$ , явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(z_2, z_1; \alpha) &= G_1 \left( \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{f_2^2(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + (b - \lambda_1^1)z_2\delta(\alpha)f_2(\alpha) - \lambda_2^0\delta^2(\alpha)}{z_1\delta(\alpha)f_2(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (26)$$

При этом дополнительные первые интегралы имеют следующие структуры:

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G_2 \left( \Delta(\alpha), \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (27)$$

$$\Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = G_3 \left( \Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_3 = \text{const}. \quad (28)$$

Выражение функций (26)–(28) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции  $\Delta(\alpha)$ . Так, например, при  $\kappa = -1$ ,  $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$  дополнительный первый интеграл системы (22) найдется из дифференциального соотношения

$$d \ln |\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_2)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad u_2 = \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{z_1}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0, \quad U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)} \right\}, \quad C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции  $\Delta(\alpha)$ .

**Теорема 4.** Если для систем вида (22), (23) существуют первые интегралы вида (26)–(28), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие три инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами (ср. с [31, 32, 34, 35]):

$$\begin{aligned} &\rho_1(z_2, z_1; \alpha) dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha, \\ &\rho_1(z_2, z_1; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda_1^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \frac{u_2^2 + u_1^2 - (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0}{u_1}, \\ &\rho_2(z_2, z_1; \alpha) dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha, \end{aligned}$$

$$\rho_2(z_2, z_1; \alpha) = \Delta(\alpha) \exp \left\{ (b + \lambda_1^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \exp \left\{ - \int \frac{(b + u_2) du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\},$$

$$\rho_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha \wedge d\beta,$$

$$\rho_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \exp \left\{ (b + \lambda_1^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot G_3 \left( \Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right),$$

но зависящие с первыми интегралами (26)–(28).

Для полной интегрируемости системы (22), (23) можно использовать или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм (ср. [33, 36, 40]).

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [23, 56]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [10, 24]).

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения, касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к двумерной сфере, а также более общих систем на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского (см. [21–23]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.

20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на  $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.

45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
60. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
61. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
62. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru



## ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОНТРОЛЯ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

**Аннотация.** В работе объясняются такие понятия, как сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля. Предложено решение задачи контроля методом статистических испытаний. Сформулирована постановка расширенной задачи контроля, подготовлен материал к рассмотрению задачи диагностирования. Данная работа является третьей работой цикла, посвященного задачам контроля.

**Ключевые слова:** сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля, расширенная задача контроля.

## GENERALIZED CONTROL PROBLEM IN DIAGNOSTIC PROBLEMS

© 2022 M. V. SHAMOLIN

**ABSTRACT.** In this paper, we explain such concepts as control sphere, control ellipsoid, and control tube. The solution of the control problem by the method of statistical tests is proposed. The statement of the extended problem of control is formulated and necessary preparations for considering the diagnosis problem are made. This work is the third work of the cycle devoted to control problems.

**Keywords and phrases:** control sphere, control ellipsoid, control tube, extended control problem.

**AMS Subject Classification:** 34Cxx, 70Cxx

**1. Задача контроля.** Рассмотрим неавтономную динамическую систему с полностью наблюдаемым фазовым вектором  $x$ , описываемую уравнениями

$$\dot{x} = f_0(x, t), \quad (1)$$

на временном отрезке  $[0, T]$ . Будем полагать, что множество  $X^0$  начальных значений  $x^0$  пространственной составляющей фазового вектора известно и ограничено. Будем считать также, что в момент времени  $t_0$ ,  $0 \leq t_0 \leq T$ , правая часть уравнения (1) заменяется на  $f_j(x, t)$  следующим образом:

$$\dot{x} = f_j(x, t), \quad (2)$$

т.е. происходит  $j$ -я неисправность из списка  $l$  неисправностей, возникновение которых возможно в системе управления движением рассматриваемого динамического объекта.

Введем в рассмотрение вектор  $y(t)$ , координаты которого представляют собой подмножество координат фазового вектора  $x(t)$ , т.е.

$$y(t) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_m}), \quad m \leq n. \quad (3)$$

Допустим, что существует такой вектор  $y(t)$ , называемый *вектором контроля*, что наблюдение за его компонентами позволит судить об исправности или неисправности системы управления объектом, т.е. о наличии в правой части уравнений (1) либо функции  $f_0$ , либо одной из функций  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , из (2).

Вообще говоря, задача контроля может быть решена с помощью различных по множеству координат (размерности) векторов контроля  $y(t)$ . Поэтому нам естественно стремиться к тому, чтобы вектор контроля был меньшей размерности. Для систем со сложными нелинейными функциями  $f_j$  в (2) правильный выбор компонент вектора  $y(t)$  подтверждается моделированием возникновения различных неисправностей и определением факта наличия в системе управления неисправности по наблюдению за вектором  $y(t)$ . При удовлетворительных результатах определения факта неисправности конкретный набор компонент (пространственной составляющей) фазового вектора  $x$  принимается за вектор контроля.

Пусть даны уравнения (1), множество  $X^0$  начальных условий  $x^0$ , время  $T$  и набор функций  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , в (2). Пусть существует поверхность  $\pi_k$  в пространстве координат вектора  $y(t)$  такая, что вектор контроля, составленный из компонент решения уравнения (1), на отрезке времени  $[0, T]$  не выйдет на поверхность  $\pi_k$ , а вектор контроля  $y(t)$ , составленный из соответствующих компонент решений  $x$  любой из систем (2) с начальными условиями  $x^0 = x(t_0) \in X^0$ , выйдет на  $\pi_k$  в момент времени  $t_k$ ,  $t_0 \leq t_k \leq T$ .

Таким образом, критерием наличия неисправности в системе управления объекта, описанного уравнениями (1), будет выход вектора контроля (3) на поверхность  $\pi_k$  в некоторый момент времени  $t_k < T$ . Назовем поверхность  $\pi_k$  *поверхностью контроля*.

Такая поверхность контроля  $\pi_k$  является, вообще говоря, функцией начальных условий  $x^0 \in X^0$  и набора функций  $f_j$ ,  $j = 0, \dots, l$ . Построение такой поверхности контроля  $\pi_k$  в случае нелинейных уравнений движения (1) и (2) аналитически является достаточно трудной задачей. Однако при знании функций  $f_j$ ,  $j = 0, \dots, l$ , и относительной малости области начальных условий  $X^0$  возможно построение поверхности  $\pi_k$  *методом статистических испытаний* (см. также [10, 11]).

*1.1. Сфера контроля.* Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f_0(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leq t \leq T_0, \quad (4)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный фазовый вектор функционального состояния рассматриваемой системы,  $f_0(x, t)$  — определенная и непрерывная вектор-функция,  $S^0$  — известная ограниченная с центром в начале координат радиуса  $R^0$  сфера начальных значений,  $T_0$  — конечное время.

Предположим, что система (4) удовлетворяет условиям существования и единственности решений (для этого достаточно сделать функцию не просто непрерывной, но непрерывно дифференцируемой). Пусть, кроме того, при условии  $f(0, t) \equiv 0$ ,  $\forall t$  тривиальное решение системы (4) асимптотически устойчиво, а сама система описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени в рассматриваемой области пространства при помощи координат  $u(t)$  системы управления. Структура координат  $u(t)$  и их параметры выбираются, исходя из цели управления

$$x(t) \equiv 0 \quad (5)$$

и условий устойчивости системы (4), полученных, например, с помощью функции Ляпунова  $V(x, t) > 0$  почти всюду, т.е. осуществляя синтез управления с помощью пары

$$\{V(x, t); u(x, t)\}, \quad (6)$$

где  $u(x, t) \in U$ ,  $U$  — замкнутое и ограниченное множество, для определенности, евклидова пространства. Систему (4), удовлетворяющую перечисленным условиям, будем называть *исправной*.

Пусть, далее, в той части динамических уравнений, которая отвечает за систему управления, может произойти  $l$  (обобщенных) неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^l. \quad (7)$$

Таким образом, в некоторый (случайный) момент времени  $t$  правая часть системы (4) изменяется каким-либо из  $l$  способов. При этом система (4) заменяется на одну из систем следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_j(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \\ t_0 &\leq t < T_0, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (8)$$



Траектория системы (4) после возникновения неисправности *непрерывно продолжается* траекторией одной из систем (8) (см. также [2, 6, 15]).

Введем в рассмотрение вектор контроля (3). Как уже указывалось, задача контроля может решаться с помощью различных векторов контроля (в смысле размерности).

Предположим, что наблюдение за компонентами выбранного вектора контроля (3) дает возможность судить о том, что система (8) исправна или в этой системе произошла неисправность.

Задачу контроля переформулируем следующим образом.

В фазовом пространстве вектора контроля  $y(t)$  требуется построить сферу  $S_R$  радиуса  $R$  такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля при интегрировании системы (4) с начальными условиями из выбранной сферы  $S^0$  в течение времени  $t < T_0$  лежали внутри сферы  $S_R$ , а траектории систем (8) пересекались (лучше трансверсально) со сферой  $S_R$ .

Пусть система (4) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности (7) таковы, что они доставляют неустойчивость системе (4) [1, 4, 7] (в данном случае под неустойчивостью системы понимается неустойчивость ее тривиального решения). В случайный момент времени происходит неисправность, т.е. непрерывный переход на траекторию одной из систем (8), которая выходит из окрестности начала координат.

В этом случае, проводя «розыгрыш» начальных условий  $x^0$  из ограниченного множества  $S^0$  и с этими начальными условиями интегрируя систему (4) на интервале времени  $[t_0, T_0]$ , можно построить  $m$  ансамблей фазовых портретов координат вектора контроля  $y(t)$ . За сферу контроля  $S_R$  можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей. Если через  $a$  обозначить длину отрезка от начала координат до максимален удаленной точки этого объема, то радиус  $R$  сферы  $S_R$  выбирается так, чтобы  $R > a$ .

Пусть, далее, система (4) находится в малой окрестности начала координат под воздействием малого шума, который зададим функцией плотности распределения  $F_1(x)$  отклонений системы. Радиус  $R$  сферы  $S_R$  в этом случае выбирается так, чтобы

$$\int_{\|y\|>R} F_1(x) dx \ll 1,$$

т.е. чтобы выход  $y(t)$  за сферу означал, что в системе (4) произошла неисправность.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем (8) имеются устойчивые системы (в данном случае под устойчивостью системы понимается устойчивость ее тривиального решения). Траектории  $y(t)$  таких систем, выходящие из сферы  $S^0$ , также должны пересекать сферу  $S_R$  (лучше трансверсально).

В любом случае необходимо найти наиболее простое решение задачи контроля, такое, однако, чтобы оно обеспечивало правильное решение основной задачи диагностики — задачи диагностирования (в данной работе мы не выделяем задачу диагностирования).

Таким образом, выход изображающей точки вектора контроля  $y(t)$  системы (4) на поверхность сферы  $S_R$  будет означать, что в системе произошла некоторая неисправность.

Сферу контроля  $S_R$  можно, кроме того, использовать для того, чтобы отфильтровать уже при решении задачи контроля часть систем вида (8), т.е. уменьшить список  $l$  априорных неисправных систем, с помощью которого в последующем проще будет диагностировать действительно происшедшую (т.е. настоящую) в системе (4) неисправность.

Это можно осуществить, если указать области на сфере контроля  $S_R$ , в которые траектория  $j$ -й системы (8) не может попадать. Если такие области ненулевой меры существуют и траектории вектора контроля попадают в эти области, то  $j$ -я гипотеза отбрасывается сразу.

Рассмотрим далее сферу контроля  $S_R$  и квадратичную форму

$$(y, \dot{y}) = 0.$$

Этим уравнением для каждой из систем (8) определяется некоторый объем траекторий вектора контроля. Границу этого объема внутри аппроксимируем конической поверхностью, пересечение которой со сферой  $S_R$  обозначим через  $S_R^j$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Фазовые траектории вектора контроля  $y(t)$ , полученные интегрированием  $j$ -й системы (8) с начальными условиями из сферы  $S^0$

радиуса  $R^0 < R$ , будут выходить из сферы  $S_R$  через область  $S_R^j$ . Те из областей  $S_R^j$ , которые не пересекаются с другими при попадании в них фазовой траектории вектора контроля, сразу определяют номер неисправности. В противном случае, т.е. если фазовая траектория вектора контроля попадает в области, в которые траектория  $j$ -й системы (8) не может попадать,  $j$ -я гипотеза отбрасывается сразу.

В случае  $m = n$  области  $S_R^j$  можно рассматривать в качестве начальных областей при счете параметров алгоритма диагностирования.

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно уменьшить список (8) и даже диагностировать некоторые неисправности.

*1.2. Эллипсоид контроля.* Только что было продемонстрировано, что одной из основных задач контроля движения управляемой системы является сокращение избыточной информации и получение такой информации, которая позволяет не пропускать недопустимое состояние системы. В этой связи изучим другой возможный подход при решении задачи внешнетраекторного контроля.

Предположим, что на координаты вектора контроля (3) наложено следующее ограничение на интервале  $t \in [t_0, T_0]$  движения системы:

$$(|x_{k_1}|, \dots, |x_{k_m}|) \leq (\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_m(t)), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_m(t)$  — непрерывные положительные функции, определенные на отрезке  $[t_0, T_0]$ .

Требуется в фазовом пространстве рассматриваемой управляемой динамической системы найти область, в которой может находиться вектор состояния системы, такую, что движение системы, начавшееся в любой точке этой области, гарантирует выполнение условия (9), при этом для каждой координаты, не входящей в вектор контроля (3), в каждый момент времени  $t \in [t_0, T_0]$  можно найти интервал изменения, также гарантирующий выполнение нужного условия.

Поставленная задача часто решается методом построения для рассматриваемой системы функции Ляпунова в следующей форме:

$$V = x^T Bx + V_0(x) \quad (10)$$

с положительно определенной матрицей  $B$ , при этом функция  $V_0(x)$  является бесконечно малой функцией возле начала координат порядка, большего 2.

Уравнение

$$x^T Bx = D, \quad (11)$$

где  $D$  — некоторая положительная постоянная, определяет в фазовом пространстве эллипсоид. Матрица  $B$  задает форму эллипсоида, а величина  $D$  — его размер. Значения полуосей  $d_k$  этого эллипсоида определяются величинами собственных чисел  $\lambda_k$  матрицы  $B$ :

$$d_k = \sqrt{\frac{D}{\lambda_k}},$$

а направления главных осей совпадают с направлениями собственных векторов матрицы  $B$ . Величину  $D$  размера эллипсоида (11) выберем таким образом, чтобы изменяющаяся поверхность функции Ляпунова (10) лежала внутри эллипсоида (11).

Таким образом, выбранный эллипсоид (11) будет областью функционирования рассматриваемой управляемой динамической системы, и он может быть выбран в качестве эллипсоида контроля.

Вариант построения областей допустимых отклонений для задачи контроля для линейных систем дифференциальных уравнений обсуждался также в [12, 16, 22].

*1.3. Трубка контроля.* Рассмотрим управляемую динамическую систему (4). Множество начальных условий системы (4) представляет собой сферу  $S_0$  радиуса  $R_0$  в пространстве фазовых переменных с центром в точке  $x_0$ , через которую проходит программная траектория, т.е. траектория цели.

Производя «розыгрыш» начальных условий и интегрируя с этими начальными условиями систему (4) и системы (8) в пространстве вектора контроля (3) вокруг программной траектории,

можно построить трубку такую, что траектории вектора контроля  $y(t)$  на интервале времени  $[t_0, T_0]$  системы (4) будут лежать внутри этой трубки, а для систем (8) — пересекаться (лучше трансверсально) с поверхностью трубки.

Такую трубку назовем *трубкой контроля*. Выход траектории вектора контроля рассматриваемой системы на поверхность трубки контроля будет означать, что в диагностическом пространстве рассматриваемой управляемой динамической системы произошла неисправность. Построение трубки для задачи контроля при движении по глассе обсуждалось в [18].

Выделим в отдельный пункт методику построения поверхности контроля методом статистических испытаний [3, 8, 20].

**2. Построение поверхности контроля методом статистических испытаний.** Для произвольного момента времени  $\bar{t}$  и номера  $i$  компоненты  $x_i$  вектора контроля  $y(t)$ ,  $i = k_1, \dots, k_m$ ,  $m \leq n$ , статистически оценим значения  $x_{i \max}$ ,  $x_{i \min}$ , в пределах которых заключено значение  $x_i(\bar{t})$ . Для этого зададим на множестве начальных условий  $X^0$  распределение случайной величины  $x(t_0)$  — начальных условий системы уравнений (1). Взяв область начальных условий в виде  $n$ -мерного куба, можно задать, например, равномерное распределение  $n$ -мерной случайной величины

$$x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$$

с независимыми распределениями по каждой из координат.

*Статистический эксперимент* будет состоять в следующем.

1. Розыгрыш случайной величины  $x(t_0)$ .

2. Вычисление значения новой случайной величины  $x(\bar{t})$  — значения фазового вектора  $x(t)$  в момент времени  $\bar{t}$ . Эта случайная величина получается как результат применения оператора  $L_{f_0}^{\bar{t}}$  (соответствующего правой части системы с  $f_0$ ) численного интегрирования системы (1) на отрезке времени  $[t_0, \bar{t}]$  к случайной величине  $x(t_0)$ , т.е.

$$x(\bar{t}) = L_{f_0}^{\bar{t}}(x(t_0)).$$

Тогда для выборки независимых значений случайной величины  $x^j(t_0)$ ,  $j = 1, \dots, N_1$ , где  $N_1$  — объем выборки, получим выборку независимых значений другой случайной величины  $x^j(\bar{t})$ . Каждый элемент такой выборки —  $n$ -мерный вектор. Выделим значения  $i$ -й компоненты фазового вектора  $x$  и получим выборку случайной величины  $x_i^j(\bar{t})$ ,  $j = 1, \dots, N_1$ . Из этой выборки можно найти два следующих значения:

$$x_{i \min}(\bar{t}) = \min_{j=1, \dots, N_1} x_i^j(\bar{t}), \quad x_{i \max}(\bar{t}) = \max_{j=1, \dots, N_1} x_i^j(\bar{t});$$

3. Проводя  $N_2$  серий по  $N_1$  экспериментов каждая, получим две выборки новых случайных величин объемом  $N_2$ :

$$x_{i \min}^1(\bar{t}), \dots, x_{i \min}^{N_2}(\bar{t}) \quad \text{и} \quad x_{i \max}^1(\bar{t}), \dots, x_{i \max}^{N_2}(\bar{t}).$$

Каждая из них представляет собой выборку независимых одинаково распределенных величин  $x_{i \min}$  и  $x_{i \max}$ , соответственно. При этих условиях распределение случайной величины

$$\frac{\bar{x} - a}{\sigma / \sqrt{N_2}},$$

где  $a = Mx_{i \max}^k$  — математическое ожидание случайной величины  $x_{i \max}^k$ ,  $\sigma^2 = Dx_{i \max}^k$  — его дисперсия, а среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} x_{i \max}^k, \quad -$$

близко к нормальному с параметрами  $(0, 1)$  (см. [5, 9, 13]). Заменив дисперсию  $\sigma^2$  ее состоятельной оценкой, полученной из выборки  $\sigma_{N_2}^2$ , получим также распределение, близкое к нормальному, т.е. к  $N(0, 1)$ .

Теперь из соотношения

$$\lim_{N_2 \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - a}{\sigma_{N_2}/\sqrt{N_2}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha$$

получается доверительный интервал для математического ожидания  $a$  величины  $x_{i \max}$ :

$$P \left\{ \bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}} < a < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}} \right\} \approx 1 - 2\alpha, \quad (12)$$

где  $1 - 2\alpha$  — доверительная вероятность. Ширина интервала зависит от  $\alpha$ , по значению которого определяется  $u_\alpha$ : из таблицы значений функции

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

и объема выборки  $N_2$ .

Оценка  $\sigma_{N_2}^2$  является состоятельной, если  $\sigma_{N_2} = \sigma_{\max}/N_2$ , где  $\sigma_{\max}$  — стандартная ошибка в выборке  $x_{i \max}^k$ , вычисляемая следующим образом (см. также [14, 23]):

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N_2} \left( \frac{x_{i \max}^k}{N_2} \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^{N_2} \frac{x_{i \max}^k}{N_2} \right)^2}.$$

Таким образом, по выборке  $x_{i \max}^k$ ,  $k = 1, \dots, N_2$ , при заданной доверительной вероятности  $1 - 2\alpha$  построен доверительный интервал для математического ожидания (12) величины  $x_{i \max}$ . Аналогично можно построить интервал для математического ожидания  $Mx_{i \min}$ .

Теперь, взяв в качестве нужных величин

$$\bar{x}_{i \max}(\bar{t}) = \bar{x}' + u_\alpha \frac{\sigma'_{N_2}}{\sqrt{N_2}} \quad \text{и} \quad \underline{x}_{i \min}(\bar{t}) = \bar{x}'' + u_\alpha \frac{\sigma''_{N_2}}{\sqrt{N_2}},$$

получим интервал для значений фазовой координаты  $x_i(\bar{t})$ :

$$\underline{x}_{i \min}(\bar{t}) \leq x_i(\bar{t}) \leq \bar{x}_{i \max}(\bar{t}),$$

внутри которого будут находиться величины  $x_i(\bar{t})$  с доверительной вероятностью  $1 - 2\alpha$ . Величины  $\bar{x}'$ ,  $\bar{x}''$  и  $\sigma'_{N_2}$ ,  $\sigma''_{N_2}$ , вообще говоря, различны, так как представляют собой статистические средние разных выборок:  $x_{i \max}$  и  $x_{i \min}$ , соответственно.

*Процедура построения поверхности контроля* системы (1) на отрезке времени  $[t_0, T]$  с вектором контроля  $y(t)$  сводится теперь к следующему.

Методом статистических испытаний строятся оценки  $\underline{x}_{i \min}(t_l)$ ,  $\bar{x}_{i \max}(t_l)$  для каждой из координат  $x_i$  вектора контроля  $y(t)$ . Моменты времени  $t_l$  представляют собой величины

$$t_l = t_0 + lh, \quad l = 1, \dots, \left[ \frac{T - t_0}{h} \right]$$

(здесь  $[\dots]$  — целая часть), где  $h$  — шаг метода численного интегрирования системы (1).

Получаем набор оценок  $\underline{x}_{i \min}(t_l)$ ,  $\bar{x}_{i \max}(t_l)$ . Теперь в качестве поверхности контроля  $\pi_k$  возьмем границу объема, определяемого через следующее теоретико-множественное произведение:

$$V = \prod_{i=1}^m \left[ \min_l \underline{x}_{k_i}(t_l), \max_l \bar{x}_{k_i}(t_l) \right], \quad l = 1, \dots, \left[ \frac{T - t_0}{h} \right],$$

где  $k_i$  — номера компонент, составляющих вектор контроля  $y(t)$ . Эта поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей чем  $1 - 2\alpha$ . Для построения такой поверхности требуется  $N_1 N_2$  численных экспериментов, т.е. численных интегрирований системы (1) с начальными условиями  $x(t_0)$ , где  $x(t_0)$  —  $n$ -мерная случайная величина с заданным распределением на области  $X^0$  начальных условий.

4. Для построенной поверхности контроля  $\pi_k$  и заданного набора функций  $f_i$  (см. (2)) методом статистических испытаний можно установить вероятность  $p_i$  выхода траектории решения

системы (2) с функцией  $f_i$  в правой части на границу  $\pi_k$ . Для этого на множестве  $X^0$  начальных условий задается некоторое распределение случайной величины  $x(t_0)$  — начальных условий системы (2). Затем численно интегрируется система (2) с функцией  $f_i$  в правой части на отрезке времени  $[t_0, T]$ . Таким образом, получается следующая последовательность:

$$x(t_l) = L_{f_i}^{t_l}(x(t_0)), \quad t_l = t_0 + lh, \quad l = 1, \dots, \left[ \frac{T - t_0}{h} \right].$$

Здесь  $L_{f_i}^{t_l}$  — оператор метода численного интегрирования системы (2) с функцией  $f_i$  в правой части с шагом интегрирования  $h$ .

Далее формируем следующую случайную величину  $\xi$ :

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists l, i : x_i(t_l) < \underline{x}_{i \min} \text{ или } x_i(t_l) > \bar{x}_{i \max}; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (13)$$

т.е.  $\xi = 1$  при выходе траектории решения системы (2) с начальными условиями  $x(t_0)$  на границу поверхности контроля  $\pi_k$  на отрезке времени  $[t_0, T]$  и  $\xi = 0$  в противном случае.

Математическое ожидание величины  $\xi$  равно  $M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p = p_i$ . Оценив по выборке значений величины  $\xi$  ее математическое ожидание, получим оценку вероятности выхода траектории на поверхность контроля  $\pi_k$  за время  $[t_0, T]$ . Таким образом, в схеме опытов Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте  $p_i$  надо определить математическое ожидание  $M\xi$  по выборке случайной величины  $\xi$ . Одним опытом в данном случае является розыгрыш значения  $x(t_0)$  как случайной величины с заданным на области начальных условий  $X^0$  распределением с дальнейшим формированием последовательности  $x(t_l)$ ,  $l = 1, \dots, N_3$ , и вычислением значения величины  $\xi$  по правилу (13). Статистической оценкой математического ожидания  $M\xi$  является величина

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{k=1}^{N_3} \xi_k}{N_3},$$

где  $N_3$  — объем выборки случайной величины  $\xi$ . Будучи суммой большого количества независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi$ , величина  $\bar{\xi}$  является нормально распределенной величиной с математическим ожиданием  $M\xi_k = a$  и дисперсией  $\sigma^2 = D\xi_k$ . Тогда справедливо равенство

$$\lim_{N_3 \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha,$$

где  $1 - 2\alpha$  — доверительная вероятность выполнения оценки

$$\left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha.$$

Заменив величину  $\sigma$  ее статистической оценкой  $\sigma_{N_3}$ , которая является состоятельной (см. также [24, 26, 27]), получим аналогичную оценку математического ожидания случайной величины  $\bar{\xi}$ :

$$\lim_{N_3 \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma_{N_3}/\sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha.$$

Так как математическое ожидание  $M\xi = a = p_i$ , то, взяв статистические средние в виде  $\bar{\xi} = \mu_{N_3}/N_3$ , где  $\mu_{N_3}$  — число успехов в  $N_3$  опытах и

$$\sigma_{N_3} = \sqrt{\frac{\mu_{N_3}}{N_3} \left( 1 - \frac{\mu_{N_3}}{N_3} \right)}$$

— состоятельная оценка для величины  $\sigma = \sqrt{D\xi_k}$  в схеме Бернулли (см. также [31, 33]), получим доверительный интервал для вероятности  $p_i$ :

$$\frac{\mu_{N_3}}{N_3} - \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}} \sigma_{N_3} < p_i < \frac{\mu_{N_3}}{N_3} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}} \sigma_{N_3} \quad (14)$$

с доверительной вероятностью  $1 - 2\alpha$ . Задавшись доверительной вероятностью  $1 - 2\alpha$ , величину  $u_\alpha$  получим из таблиц (ср. с [17, 25, 29]).

Величины  $\sigma_{N_3}$  и  $\mu_{N_3}$  вычисляются из выборки случайной величины  $\xi$ . Таким образом, с заданной доверительной вероятностью  $1 - 2\alpha$  найден доверительный интервал для вероятности  $p_i$  (см. (14)) выхода траектории системы (2) с функцией  $f_i$  в правой части на поверхность контроля  $\pi_k$ . Величина  $p_i$  характеризует надежность контроля в случае возникновения  $i$ -й списочной неисправности. Ввиду статистического характера построения поверхности контроля  $\pi_k$  может быть принята следующая процедура контроля и обнаружения неисправностей: при выходе траектории вектора контроля  $y(t)$  на поверхность контроля  $\pi_k$  включается алгоритм диагностирования неисправностей (ср. [19, 21, 28]).

5. При попадании траектории в слой фазового пространства, прилегающий к поверхности контроля  $\pi_k$  с ее внутренней стороны, также может быть включен алгоритм диагностирования. Слой фазового пространства, прилегающий к поверхности  $\pi_k$ , при попадании траектории в который включается алгоритм диагностирования, можно представить как трубку между поверхностью  $\pi_k$  и поверхностью  $\mu_k$ , где  $\mu_k$  — граница объема  $\bar{V}$  (здесь опять имеется в виду теоретико-множественное произведение):

$$\bar{V} = \prod_{i=1}^m \left[ \max_l \underline{x}_{k_i}(t_l), \min_l \bar{x}_{k_i}(t_l) \right], \quad l = 1, \dots, \left[ \frac{T - t_0}{h} \right].$$

Таким образом, методом статистических испытаний получено решение задачи контроля, т.е. способ построения в определенных доверительных пределах поверхности контроля  $\pi_k$ , а также найдены вероятности выхода траектории систем с той или иной возможной неисправностью из априорного списка на границу поверхности контроля  $\pi_k$ . Это дает возможность выбрать такую вероятность контроля, с помощью которой в последующем решается основная задача дифференциальной диагностики — задача диагностирования, т.е. задача обнаружения происшедшей в системе данной конкретной неисправности, вообще говоря, конкретной неисправности из априорного списка неисправностей.

В связи с этим возникает необходимость дать *расширенную (обобщенную) постановку задачи контроля*, позволяющую контролировать не только неисправности из априорного списка, но и «близкие» к ним, возникшие в их окрестностях.

**3. Расширенная (обобщенная) постановка задачи контроля.** Рассмотрим диагностическое пространство (см. [32])

$$(M; O_1, \dots, O_l; A_1, \dots, A_3). \quad (15)$$

В пространстве (15) будут протекать процессы, описываемые уравнениями (1) и (2), а также уравнениями

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (16)$$

обусловленными неисправностями не из априорного списка, но близкими к ним, происшедшими в их окрестностях  $O_1, \dots, O_l$  пространства (15), например, неисправностью, закон развития которой, возможно приводящий к неисправности с математическим ожиданием  $a = 0$  из априорного списка, можно моделировать путем уменьшения  $a$  до нуля, изменяющейся по линейному закону

$$a(t) = a_{\text{ном}} b(t - t_0), \quad t > t_0, \quad (17)$$

где  $a_{\text{ном}}$  — номинальное значение коэффициента  $a$ , а  $b$  — отрицательная постоянная. Достигнув нуля, значение  $a$  больше не меняется. Значение  $a = 0$  в силу (17) может достигаться за время, отличное от времени выхода на поверхность контроля системой (1) со списочной неисправностью при  $a = 0$ . Неисправность (17) близка к списочной (когда  $a = 0$ ), но не совпадает с ней.

Таким образом, управляемая динамическая система, описываемая уравнениями (16), содержит элементы с неполной информацией, и для описания такой системы используют дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) \in \{f(x, t)\}, \quad (18)$$

где через  $F(x, t)$  обозначено обусловленное возникновением неисправностей не из априорного списка множество скоростей, которые могут возникнуть в сферах влияния опорных систем (2), т.е. в окрестностях  $O_1, \dots, O_l$  опорных неисправностей пространства (15).

*Расширенная (обобщенная) постановка задачи контроля* (ее также можно назвать постановкой расширенной задачи контроля) может быть сформулирована следующим образом.

Пусть дана управляемая динамическая система (1), ограниченное множество начальных условий  $X^0$  (замкнутость данного множества не требуем), время  $T$ , набор функций  $f_j(x, t)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , в (2) и диагностическое пространство (15) (см. [28, 30]).

Требуется найти такой вектор контроля (3), чтобы он содержал минимальное подмножество (в смысле размерности) координат фазового вектора  $x(t)$  состояния системы и позволял построить выпуклую поверхность контроля  $\pi_k$  минимального объема в пространстве координат найденного вектора  $y(t)$  такую, что вектор  $y(t)$ , составленный из компонент решения уравнения (1) на отрезке времени  $[t_0, T]$ , не выходил бы на поверхность контроля  $\pi_k$ , а векторы контроля  $y(t)$ , составленные из соответствующих компонент решений любой из систем (2) и любой из систем (16), (18), обусловленных неисправностью не из априорного списка (2), но принадлежащих окрестностям  $O_1, \dots, O_l$  диагностического пространства (15) и приводящих к недопустимым отклонениям системы (1) с начальными условиями  $x^0 = x(t_0) \in X^0$ , выходили бы на поверхность  $\pi_k$  в момент времени  $t_k \in [t_0, T]$  (ср. [25, 29]).

Таким образом, критерием наличия неисправности в диагностическом пространстве объекта, движение которого описано уравнениями (1), будет выход вектора контроля  $y(t)$  на поверхность контроля  $\pi_k$  в некоторый момент времени  $t_k < T$  (ср. [29]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. В. Абсолютная устойчивость имитационных динамических систем в первом приближении // Докл. АН СССР. — 1988. — 299, № 2. — С. 296–301.
2. Борисенко И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 3. — С. 775–790.
3. Борисенко И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
4. Жуков В. П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автомат. телемех. — 2005. — № 12. — С. 51–64.
5. Жуков В. П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автомат. телемех. — 2008. — № 1. — С. 30–38.
6. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование линейных динамических систем // Автомат. телемех. — 1979. — № 8. — С. 120–128.
7. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121.
8. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Мат. сб. — 1960. — 51 (93), № 1. — С. 99–128.
9. Филиппов А. Ф. Классификация компактных инвариантных множеств динамических систем // Изв. РАН. Сер. мат. — 1993. — 57, № 6. — С. 130–140.
10. Чикин М. Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
11. Чикин М. Г. К существованию правой производной у решений уравнений одного класса разрывных систем // Автомат. телемех. — 1988. — № 1. — С. 170–171.
12. Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
13. Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и дополн.. — М.: Экзамен, 2007.
14. Шамолин М. В. Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение // Электрон. модел. — 2009. — 31, № 1. — С. 97–115.
15. Шамолин М. В. Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой // Электрон. модел. — 2009. — 31, № 3. — С. 73–90.

16. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 4. — С. 55–66.
17. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 1. — С. 45–52.
18. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 5. — С. 31–44.
19. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — 33, № 3. — С. 121–126.
20. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 150. — С. 88–109.
21. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 160. — С. 137–141.
22. *Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A.* Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — 54, № 10. — P. 2328–2340.
23. *Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.* On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst., Control Lett. — 2002. — 46. — P. 323–342.
24. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — 31, № 3. — P. 167–175.
25. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — 12, № 1. — P. 79–108.
26. *Ceci C., Gerardi A., Tardelli P.* Existence of optimal controls for partially observed jump processes// Acta Appl. Math. — 2002. — 74, № 2. — P. 155–175.
27. *Choi D. H., Kim S. H., Sung D. K.* Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. — 2014. — 50, № 3. — P. 2119–2326.
28. *Fleming W. H.* Optimal control of partially observable diffusions// SIAM J. Control. — 1968. — 6, № 2. — P. 194–214.
29. *Ho D.-T., Grothli E. I., Sujit P. B., Johansen T. A., Sousa J. B.* Optimization of wireless sensor network and UAV data acquisition// J. Intel. Robot. Syst. — 2015. — 78, № 1. — P. 159–179.
30. *Ober R. J.* Balanced parameterization of classes of linear systems \*// SIAM J. Control Optim. — 1991. — 29, № 6. — P. 1251–1287.
31. *Rieder U., Winter J.* Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model// Math. Meth. Oper. Res. — 2009. — 70. — P. 567–596.
32. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — P. 976–1024.
33. *Tang X., Wang S.* A low hardware overhead self-diagnosis technique using Reed–Solomon codes for self-repairing chips// IEEE Trans. Comput. — 2010. — 59, № 10. — P. 1309–1319.

Шамолин Максим Владимирович  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru



## ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте [math@viniti.ru](mailto:math@viniti.ru)

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (\*.tex и \*.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,  
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)  
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,  
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)  
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,  
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)	Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)
Акбаров Сергей Саидмузафарович, д.ф.-м.-н., профессор (НИУ «Высшая школа экономики»)	Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)	Маслов Виктор Павлович, академик РАН, профессор (НИУ «Высшая школа экономики»)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)	Орлов Дмитрий Олегович, академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)	Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)	Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, НИУ «Высшая школа экономики»)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)	Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.-н., профессор (Университет Флоренции)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.-н., профессор (МПГУ, ВИНИТИ РАН)	Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет при Правительстве РФ, ВИНИТИ РАН)
Дудин Евгений Борисович, к.т.н. (ВИНИТИ РАН)	Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович	Попов Владимир Леонидович
Акбаров Сергей Саидмузафарович	Степанов Сергей Евгеньевич
Кругова Елена Павловна	Шамолин Максим Владимирович
Овчинников Алексей Витальевич	Юлдашев Турсун Камалдинович