

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 220



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 220 (2023)

Дата публикации 13 февраля 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

Н. И. Гусева
А. В. Овчинников
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 220

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«КЛАССИЧЕСКАЯ И СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ»,
ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ПРОФЕССОРА ЛЕВОНА СЕРГЕЕВИЧА АТАНАСЯНА

(15 ИЮЛЯ 1921 г. — 5 ИЮЛЯ 1998 г.)

МОСКВА, 1–4 НОЯБРЯ 2021 г.

ЧАСТЬ 1



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Вадим Фёдорович Кириченко (<i>некролог</i>)	3
Дифференциальная геометрия $(n - m)t$ -мерных комплексов в n -мерном проективном пространстве (<i>О. О. Белова</i>)	17
Бесконечные произведения биномов с растущей степенью (<i>В. М. Бурлаков</i>)	28
Об одном обобщении алгебры кватернионов (<i>И. М. Бурлаков</i>)	33
Об оценке числа элементарных преобразований (<i>Н. П. Гушель</i>)	38
Условие секулярности для системы McKean (<i>С. А. Дуэновский</i>)	44
Особенности задачи о синхронизации двух осцилляторов Ван дер Поля—Дуффинга в случае прямой связи и наличия симметрии (<i>Д. А. Куликов</i>)	49
О бесконечных произведениях эйлерова типа (<i>Е. В. Лукьянова, М. П. Бурлаков</i>)	61
Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле. I (<i>В. М. Морозов, В. И. Каленова, М. Г. Рак</i>)	71
Критерии прямолинейности кривой (<i>И. В. Поликанова</i>)	86
О строении объекта аффинной связности и тензора кручения в расслоении линейных реперов (<i>К. В. Полякова</i>)	99
Статистические структуры на многообразиях и их погружения (<i>А. А. Рылов</i>)	113
Спонтанная кластеризация в марковских цепях. I. Фрактальная пыль (<i>В. В. Учайкин</i>)	125

ВАДИМ ФЁДОРОВИЧ КИРИЧЕНКО



24 марта 2021 года на 74-м году жизни после тяжёлой и продолжительной болезни скончался доктор физико-математических наук, профессор Московского педагогического государственного университета Вадим Фёдорович Кириченко. Российская наука потеряла одного из ведущих геометров, талантливого ученого, скромного и сердечного человека.

В. Ф. Кириченко родился 11 мая 1947 года в поселке Стрелка Среднеканского района Хабаровского края (ныне Магаданская область), где его отец возглавлял крупное химическое предприятие. Когда Вадиму Фёдоровичу исполнилось два года, трагически погибла его мать, и семья вернулась в Москву.

После восьмого класса Вадим Фёдорович поступил в электротехнический техникум, весьма престижный в те годы, где изучали первые электронные вычислительные машины. В 1965 году он окончил техникум с отличием и два года проработал в Научно-исследовательском акустическом институте.

В 1967 году Вадим Фёдорович поступил на механико-математический факультет МГУ, который окончил с отличием в 1972 году и начал работу над кандидатской диссертацией, обучаясь в

аспирантуре у профессора Анатолия Михайловича Васильева. В 1975 году он окончил аспирантуру при кафедре дифференциальной геометрии МГУ, и в 1976 году успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Новые результаты теории K -пространств», в которой был получен ряд глубоких результатов, касающихся геометрии одного из самых интересных классов почти эрмитовых многообразий — приближенно келеровых многообразий.

После успешной защиты диссертации Вадим Фёдорович в 1976 году был принят на кафедру спецкурсов высшей математики Московского энергетического института, где в 1982 году ему было присвоено звание доцента; там он проработал до 1990 года. В этот период без отрыва от преподавательской работы он написал и успешно защитил в 1986 году в МГУ докторскую диссертацию на тему «Дифференциальная геометрия обобщенных почти эрмитовых многообразий». В диссертации он разработал метод присоединённых G -структур, который позволил впервые с единых позиций исследовать почти эрмитовы, почти контактные, почти кватернионные структуры, f -структуры Яно и их гиперболические аналоги. В 1989 году Вадиму Фёдоровичу было присвоено звание профессора. В 1990 году В. Ф. Кириченко был приглашён в Московский педагогический государственный институт (сейчас университет) им. В. И. Ленина на должность профессора кафедры геометрии. В течение 15 лет — с 1999 по 2014 г. — Вадим Фёдорович заведовал этой кафедрой. В период с 1991 по 2015 год им были подготовлены 36 кандидатов физико-математических наук. Семь человек под его руководством окончили докторантуру и продолжают работу над своими диссертациями. В течение 26 лет — с 1988 по 2014 г. — Вадим Фёдорович возглавлял научный семинар «Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях».

Вадим Фёдорович Кириченко был настоящим русским интеллигентом. Он был доброжелательным, исключительно деликатным человеком, интересным и приятным собеседником. Никто не слышал, чтобы он повысил голос или сделал резкое замечание. Терпеливо занимался с каждым аспирантом, не считаясь со временем.

Вадим Фёдорович был талантливым педагогом. Он читал лекции по всем базовым курсам геометрии бакалавриата и магистратуры, а также курсы «Дифференциальная геометрия и топология», «Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях», «Современные проблемы математики», «Тензорное исчисление», «Анализ на многообразиях», «Геометрические аспекты специальной теории относительности», «Группы Ли и алгебры Ли», «Действие групп на многообразиях и однородные пространства», «Многомерная дифференциальная геометрия». В 2003 году была издана написанная им монография «Дифференциально-геометрические структуры на многообразии»; в 2013 году вышло второе дополненное издание этой книги. Вадим Фёдорович является также автором или соавтором следующих учебных пособий и монографий: «Теория групп Ли», «Введение в современную геометрию», «Введение в топологию», «Топологические основы дифференциальной геометрии», «Дифференциально-геометрические структуры. Ч. 1», «Дифференциально-геометрические структуры. Ч. 2», «Основы общей топологии», «Геометрия. Т. 1», «Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти», «Введение в современную геометрию. Тензорное исчисление», «Введение в современную геометрию. Аффинная геометрия».

Область научных интересов В. Ф. Кириченко — многомерная дифференциальная геометрия и её приложения. Он изучал почти эрмитовы, почти контактные, почти кватернионные структуры, f -структуры Яно и их преобразования. Приведем лишь некоторые результаты, полученные Вадимом Фёдоровичем.

В кандидатской диссертации В. Ф. Кириченко ввел новый метод исследования, принципиально отличающийся от методов, используемых его современниками. Этот метод состоит в применении обобщенного метода подвижного репера и широком использовании структурных уравнений Картана, записанных в специализированном репере. Таким образом, исследование геометрических свойств K -пространств производится большей частью не на самом K -пространстве, а на пространстве некоторой G -структуры, естественным образом присоединённой к K -пространству, что позволяет глубже понять природу геометрических свойств самого K -пространства. Именно здесь В. Ф. Кириченко закладывает основы своего метода присоединённых G -структур, который позволил с единых позиций исследовать такие, на первый взгляд различные, дифференциально-геометрические структуры, как почти эрмитовы и почти контактные. Именно, он выводит

структурные уравнения K -пространства в A -репере. Эти уравнения несут всю информацию о K -пространстве. Далее вводится понятие структурных тензоров, естественным образом связанных с K -пространством, вычисляются компоненты классических тензоров через компоненты структурных тензоров. Используя этот метод, Вадим Фёдорович получил следующие результаты.

1. Найден критерий точечного (глобального) постоянства типа K -пространств, доказана эквивалентность точечного и глобального постоянства типа K -пространств. Доказано, что класс K -пространств нулевого постоянного типа совпадает с классом келеровых многообразий, а класс K -пространств ненулевого типа совпадает с классом шестимерных собственных (т.е. не келеровых) K -пространств. Показано, что полное собственное K -пространство постоянного типа компактно и имеет конечную фундаментальную группу; полное связное собственное K -пространство постоянного типа знакоустойчивой голоморфной бисекционной кривизны изометрично S^6 .

2. Найден критерий точечного (глобального) постоянства HS -кривизны K -пространства и доказана эквивалентность точечного и глобального постоянств HS -кривизны K -пространства. Доказана теорема, дающая полную классификацию собственных K -пространств постоянной HS -кривизны: K -пространство (ненулевой) постоянной HS -кривизны представляет собой шестимерное ориентируемое многообразие постоянной положительной кривизны и, следовательно, в случае полноты и связности изометрично S^6 ; K -пространство нулевой постоянной HS -кривизны есть келерово многообразие, являющееся локально евклидовым пространством.

3. Доказано, что всякое неприводимое собственное K -пространство является K -пространством максимального ранга; K -пространство максимального ранга является многообразием Эйнштейна с положительной кривизной Риччи; собственное полное K -пространство Эйнштейна, в частности, полное K -пространство максимального ранга компактно и имеет конечную фундаментальную группу; не существует собственных K -пространств Эйнштейна неположительной голоморфной бисекционной кривизны. Доказано ковариантное постоянство структурных тензоров первого и второго рода K -пространств в почти эрмитовой связности.

4. Получены дифференциальные уравнения деформаций произвольной K -структуры. Доказано, что K -структура на шестимерной сфере недеформируема, следовательно, множество K -структур на ней дискретно (в естественной топологии). Более того, доказано, что этот вывод справедлив для произвольных K -пространств максимального ранга с определенными ограничениями на их секционную (т.е. риманову) кривизну. Доказано, что пространство инфинитезимальных деформаций произвольной K -структуры максимального ранга полного риманова многообразия, в частности, K -структуры полного шестимерного собственного K -пространства, конечномерно.

5. Доказано, что почти эрмитово подмногообразие K -пространства есть K -пространство, которое в случае максимального ранга вложено как вполне геодезическое подмногообразие; если $N \subset M^n$ — келерово подмногообразие K -пространства максимального ранга, то $\dim N \leq [n/3]$; K -пространство максимального ранга не имеет почти эрмитовых подмногообразий коразмерности 2. Кроме того, доказано отсутствие у K -пространства максимального ранга почти эрмитовых подмногообразий коразмерности, имеющих, как K -пространства, максимальный ранг. Введено понятие ординарного подмногообразия K -пространства и доказано, что ординарное подмногообразие коразмерности 6 K -пространства максимального ранга является K -пространством максимального ранга, вложенным как вполне геодезическое подмногообразие.

6. Доказано, что не существует ненулевых замкнутых биоднородных форм типа $(p, 0)$ либо $(0, p)$ на компактном K -пространстве с положительной кривизной Риччи, в частности, на полном K -пространстве максимального ранга. Кроме того, доказано, что на компактном K -пространстве с неотрицательной кривизной Риччи замкнутость биоднородной формы типа $(p, 0)$ либо $(0, p)$ равносильна ее гармоничности и равносильна ковариантному постоянству (в римановой связности). Отсюда непосредственно следует отсутствие ненулевых точных биоднородных форм в K -пространстве такого вида. Другим следствием является постоянство ранга замкнутой биоднородной формы типа $(p, 0)$ либо $(0, p)$ на связном компактном K -пространстве с неотрицательной кривизной Риччи. Доказано, что на K -пространстве максимального ранга не существует точных биоднородных форм бистепени $(1, 1)$; на K -пространстве максимального ранга не существует

ковариантно постоянных (в римановой связности) чистых тензоров; K -пространство максимального ранга имеет нулевой класс Чженя степени 2, в частности, односвязное K -пространство максимального ранга $2m$ с почти эрмитовой связностью допускает в качестве группы голономии подгруппу специальной унитарной группы $SU(m)$.

7. Доказано, что связное шестимерное подмногообразие алгебры Кэли, на котором с помощью 3-векторного произведения индуцирована K -структура, представляет собой либо область на шестимерной сфере, либо (некомпактное) келерово многообразие, являющееся минимальной поверхностью.

В докторской диссертации В. Ф. Кириченко развит алгебраические аспекты разработанного им метода присоединенных G -структур.

Он вводит ключевое понятие Q -алгебры над кольцом $\hat{A}$ с инволюцией, т.е. левого $\hat{A}$ -модуля V , снабженного невырожденной эрмитовой формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям и называемой метрикой, и бинарной операцией $*$: $V \times V \rightarrow V$, антилинейной по каждому аргументу и согласованной с метрикой тождеством $\langle X * Y, Z \rangle + \langle Y, X * Z \rangle = 0$. Антилинейность операции композиции в Q -алгебре определяет существенную специфику ее свойств по сравнению с классическими алгебраическими конструкциями. В то же время условие согласованности операции композиции с метрикой позволяет выявить большое значение в теории Q -алгебр таких классических понятий, как абелевость, полупростота, простота и редуктивность. Показано, что эти понятия становятся наиболее содержательными в случае правильных Q -алгебр, т.е. Q -алгебр, у которых всякий левый идеал является двусторонним идеалом. Важными примерами правильных Q -алгебр являются антикоммутативные Q -алгебры, названные K -алгебрами, а также Q -алгебры, удовлетворяющие тождеству $\langle X * Y, Z \rangle + \langle Y * Z, X \rangle + \langle Z * X, Y \rangle = 0$, названные A -алгебрами, со строго невырожденной метрикой (знакоопределенной метрикой в классическом случае). Показано, что имеет место определенный параллелизм редуктивных Q -алгебр и редуктивных алгебр Ли. Доказано, что всякая редуктивная Q -алгебра распадается в прямое произведение абелева идеала и неабелевых простых идеалов, и притом единственным образом с точностью до порядка сомножителей. Доказано, что расщепляемая Q -алгебра с конечномерной вещественной реализацией распадается в прямое произведение абелева идеала и неабелевых простых идеалов эллиптического и гиперболического типов, и притом единственным образом с точностью до порядка сомножителей. Если $\hat{A}$ — поле с нетривиальной инволюцией, то невырожденная Q -алгебра ненулевого постоянного типа над $\hat{A}$ является трехмерной неабелевой K -алгеброй, причем для комплексных Q -алгебр верно и обратное. Класс Q -алгебр нулевого постоянного типа над $\hat{A}$ совпадает с классом эрмитовых почти абелевых Q -алгебр над $\hat{A}$ (абелевых в случае строго невырожденной метрики). Доказано, что всякая тривиально оснащенная K -алгебра либо абелева, либо является простой трехмерной K -алгеброй эллиптического либо гиперболического типа.

Введено понятие обобщенных почти эрмитовых структур (GAH -), обобщающие соответствующие понятия классических почти эрмитовых структур. Показано, что этот класс включает в себя в качестве подкласса метрические f -структуры, в частности, почти эрмитовы структуры и почти контактные структуры классического и гиперболического типов. Показано, что некоторые из классических понятий, вводимые весьма формально, значение которых до сих пор определялось по существу эмпирически (например, понятие квазикелеровой структуры) имеют существенно более прозрачный смысл и естественную природу с точки зрения этой общей теории. Более того, впервые показана естественность «гиперболических аналогов» основных понятий геометрии почти эрмитовых многообразий, формально и большей частью эпизодически вводимых различными авторами. Эффективность разработанного аппарата демонстрируется на проблеме изучения почти эрмитовых многообразий постоянного типа — понятия, введенного и изучавшегося А. Греем и другими авторами для приближенно келеровых многообразий. Дается естественное и эффективное обобщение постоянства типа на случай произвольных GAH -многообразий. Доказано, что (в основном) класс почти эрмитовых многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом эрмитовых многообразий, а класс почти эрмитовых многообразий ненулевого постоянного типа — с классом шестимерных G_1 -многообразий с (абсолютно) неинтегрируемой структурой. Получена

полная классификация эрмитово-однородных квазикелеровых многообразий точечно постоянно-го типа со знакоопределенной метрикой. Получен критерий локальной однородности псевдориманова многообразия и инвариантности заданной на нем произвольной тензорной структуры, в терминах поведения тензора кривизны и структурных тензоров при параллельных переносах в некоторой связности. Более того, это естественно приводит к важному понятию эрмитово-однородной GAH -структуры, для которой указанная связность найдена в явном виде. Получена полная классификация эрмитово-однородных естественноредуктивных почти эрмитовых многообразий. Доказана сильная структурная теорема для Q -многообразий, утверждающая, что расщепляемое редуктивное квазиоднородное GAH -многообразие ранга $r > 0$ локально эквивалентно произведению обобщенного келерова многообразия и голоморфно неприводимых квазикелеровых Q -многообразий классического и гиперболического типов, причем это разложение однозначно определено каноническим разложением присоединенной Q -алгебры этого многообразия. Доказано, что задание почти эрмитовой структуры гиперболического типа (т.е. почти параэрмитовой структуры) на римановом многообразии равносильно заданию на нем почти антикватернионной структуры.

Почти антикватернионная структура естественным образом возникает 1) на касательном пучке многообразия с инфинитезимальной связностью; 2) на декартовом квадрате риманова многообразия; на многообразии три-ткани. Подробно изучена соответствующая почти параэрмитова структура в первом случае, названная основной GAH -структурой касательного пучка. Доказана, что инволютивность одного из собственных распределений произвольной почти параэрмитовой структуры влечет метабелевость присоединенной Q -алгебры, причем ее абелевость равносильна инволютивности обоих собственных распределений. В качестве следствия получается, что почти параэрмитова структура на декартовом квадрате риманова многообразия является паракелеровой, и что основная GAH -структура в касательном пучке с фиксированной римановой метрикой к гладкому многообразию M псевдоэрмитова, причем эрмитовой она будет тогда и только тогда, когда кривизна связности равна нулю. Более того, если M — риманово многообразие, то композиционный тензор основной GAH -структуры совпадает с оператором кривизны и, таким образом, основная GAH -структура по существу определяет всю геометрию риманова многообразия. Рассмотрены некоторые геометрические приложения этого факта, в частности, связь с теоремой де Рама. Показано, что основная GAH -структура в касательном пучке риманова многообразия является почти келеровой, в частности, естественно определяет симплектическую структуру в этом пучке. Используя основную GAH -структуру, Вадим Фёдорович построил ряд GAH -структур высших рангов, по своим свойствам резко отличающихся от классических почти эрмитовых структур.

Разработаны более углубленные методы изучения GAH -структур с использованием дифференциально-геометрических инвариантов высших порядков. Это оказалось наиболее удобно осуществить для расщепляемых (слабо) редуктивных обобщенных квазикелеровых (GQ -) многообразий и их подклассов. Для таких многообразий построено расслоение реперов присоединенных Q -алгебр, которое рассматривается как G -структура в более обширном расслоении реперов. Использование этих расслоений позволяет автоматически вычислять дифференциально-геометрические инварианты высших порядков, в частности, изучать строение спектра тензора римановой кривизны указанных видов многообразий с помощью стандартной техники структурных уравнений Картана и их дифференциальных продолжений. Выяснено, что спектр тензора римановой кривизны расщепляемого редуктивного GAH -многообразия выражается через композиционный тензор, его ковариантный дифференциал и специальный тензор на присоединенной Q -алгебре, названный тензором кривизны присоединенной Q -алгебры. В терминах этих тензоров найден критерий точечного и глобального постоянств голоморфной секционной кривизны расщепляемого редуктивного GQK -многообразия и доказан аналог классической теоремы Шура для таких многообразий в случае их квазиоднородности.

Получена полная классификация расщепляемых редуктивных натуральных пространственных форм, являющихся строго квазикелеровыми многообразиями. Рассмотрены голоморфные

подмногообразия GAH -многообразий, т.е. римановы подмногообразия GAH -многообразий, являющиеся GAH -многообразиями, отображение вложения которых индуцирует гомоморфизм присоединенных Q -алгебр. Доказано, что инвариантные подмногообразия метрических f -многообразий, в частности, почти эрмитовы подмногообразия почти эрмитовых многообразий, являются голоморфными относительно канонической GAH -структуры. С учетом этого обстоятельства получено широкое обобщение результатов А. Грея и других авторов о наследственности основных классов почти эрмитовых многообразий. Также получено обобщение известного результата А. Грея о минимальности почти эрмитовых подмногообразий квазикелерова многообразия на случай голоморфных подмногообразий расщепляемых GAH -многообразий со знакоопределенной метрикой. Подход, основанный на понятии голоморфного подмногообразия, оказался чрезвычайно эффективным при рассмотрении GAH -многообразий, удовлетворяющих аксиоме голоморфных m -плоскостей. С его помощью получена полная классификация расщепляемых редутивных GQK -многообразий, удовлетворяющих аксиоме голоморфных m -плоскостей. В частности, все такие многообразия оказались натуральными пространственными формами. Вводится понятие аксиомы инвариантных m -плоскостей, которое является еще более широким обобщением аксиомы голоморфных m -плоскостей на случай GAH -многообразий, получена полная классификация расщепляемых редутивных строго квазикелеровых многообразий, удовлетворяющих этой аксиоме.

Получен критерий некереровости GNK -структуры эрмитово-однородного GNK -многообразия, согласно которому эрмитово-однородное расщепляемое GNK -многообразие является обобщенно-келеровым тогда и только тогда, когда оно локально симметрично. Получена полная классификация эрмитово-однородных приближенно келеровых многообразий с компактной фундаментальной группой голоморфных изометрий. Изучено строение спектра тензора римановой кривизны эрмитово-однородного приближенно келерова многообразия с полупростой фундаментальной группой голоморфных изометрий. Получена полная классификация шестимерных эрмитово-однородных приближенно келеровых многообразий со знакоопределенной метрикой и неинтегрируемой структурой. Получена теорема о разложении для GNK -многообразий, согласно которой расщепляемое редутивное GNK -многообразие локально эквивалентно произведению обобщенного келерова многообразия и голоморфно неприводимых приближенно келеровых многообразий классического и гиперболического типов с неинтегрируемой структурой, причем это разложение однозначно соответствует каноническому разложению его присоединенной K -алгебры. Найдено условие эйнштейновости голоморфно неприводимых составляющих этого разложения. Изучен ряд свойств голоморфно неприводимых GNK -многообразий, с учетом которых доказано, что полное расщепляемое полупростое GNK -многообразие со знакоопределенной метрикой компактно и имеет конечную фундаментальную группу. В частности, одномерное число Бетти такого многообразия равно нулю. Получена полная классификация расщепляемых редутивных GNK -многообразий точечно постоянной голоморфной секционной, голоморфной проективной либо голоморфной конформной кривизны, в частности, доказан аналог теоремы Шура для этих видов кривизн. Рассмотрение таких многообразий является чрезвычайно популярной тематикой в геометрии почти эрмитовых многообразий.

В геометрии почти эрмитовых, главным образом, келеровых, многообразий весьма популярны T -рекуррентные многообразия, где T — тот или иной тензор. Этот интерес в существенной мере определяется значением T -рекуррентных многообразий в теоретической физике. Вадимом Фёдоровичем получена полная классификация (нетривиально) рекуррентных либо конформно рекуррентных расщепляемых редутивных GNK -многообразий. Найдены критерии локальной симметричности расщепляемого редутивного GNK -многообразия и получена полная классификация таких многообразий в случае постоянства их типа при $s \neq 0$. Доказано отсутствие голоморфных подмногообразий коразмерностей 2 и 4 для ряда видов GAH -многообразий, главным образом, GNK -многообразий, а также отсутствие эрмитовых подмногообразий размерности большей трети размерности самого многообразия у эйнштейновых полупростых приближенно келеровых многообразий со знакоопределенной метрикой.

Вводится понятие обобщенных почти контактных метрических (GAC -) многообразий, которые рассматриваются как многообразия дефекта 1, что накладывает существенную специфику на методы исследования таких многообразий. Интерес к этой тематике объясняется тем, что почти контактные метрические структуры являются вместе с почти эрмитовыми структурами важнейшим и содержательнейшим примером дифференциально-геометрических структур на многообразиях. Следует отметить, что недостатки использования традиционного дифференциально-геометрического аппарата для изучения почти эрмитовых структур в еще большей мере относятся к почти контактным метрическим структурам. Это очень наглядно проявляется в сложности обобщения основных классов почти контактных метрических структур. Причиной этого является сложность строения спектра ковариантного дифференциала оператора структуры и, как следствие, тензора аффинной деформации римановой связности в каноническую, в которой ковариантно постоянны основные тензоры структуры. Выяснено строение указанных тензоров, причем установлено, что в отличие от случая классических почти эрмитовых структур, различные подклассы почти контактных метрических структур имеют различные канонические связности. В частности, первая группа структурных уравнений Картана имеет разное строение для каждого из подклассов, и поэтому их изучение носит «автономный», а не централизованный характер, как в случае (обобщенных) квазикелеровых структур. В то же время наличие канонической связности для каждого из этих подклассов дало возможность их изучения с единых методологических позиций, ввиду чего упомянутые виды структур названы структурами квазикелерова типа. К ним относятся слабо косимплектические, приближенно сасакиевы, почти косимплектические и почти сасакиевы структуры, а также их подклассы. Исходя из анализа строения канонической связности для каждого из указанных классов структур, Вадим Фёдорович дает определения подклассов GAC -структур, наиболее естественно обобщающие классические определения перечисленных выше основных подклассов почти контактных метрических структур.

Для обобщенной слабо косимплектической (GNC_S -) структуры, обобщающей классическое понятие слабо косимплектической структуры, введенное в 1969 г. Проппе и систематически изучавшееся Блэром, Шоуэрсом и другими авторами получены следующие результаты. Доказано, что псевдорасщепляемое редуктивное GNC_S -многообразие локально эквивалентно либо многообразию вида $M \times N \times R^1$, либо многообразию вида $M \times N \times S^5$, где M — приближенно келерово многообразие классического типа, N — приближенно келерово многообразие гиперболического типа, S^5 — пятимерная сфера, снабженная канонической слабо косимплектической структурой или ее гиперболическим аналогом. Получена полная классификация псевдорасщепляемых редуктивных GNC_S -многообразий, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных m -плоскостей, а также полная классификация псевдорасщепляемых редуктивных GNC_S -многообразий точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.

В изучении обобщенной приближенно сасакиевой (GNS -) структуры, обобщающее понятие приближенно сасакиевой структуры, изучавшееся Яно, Блэром, Шоуэрсом и другими авторами, основной результат гласит, что псевдорасщепляемое редуктивное GNS -многообразие является либо обобщенным сасакиевым, либо локально эквивалентно пятимерной сфере, снабженной канонической приближенно сасакиевой структурой или ее гиперболическим аналогом. Получена полная классификация псевдорасщепляемых редуктивных GNS -многообразий, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных m -плоскостей, а также полная классификация псевдорасщепляемых редуктивных GNS -многообразий точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.

Изучены некоторые аспекты геометрии обобщенных почти косимплектических (GAC_S -) структур, которые обобщают классическое понятие почти косимплектической структуры, изучавшееся К. Яно, С. Голдбергом, З. Ольчаком и другими авторами. Найдены некоторые геометрические характеристики GAC_S -многообразий. Найден критерий точечного и глобального постоянства Φ -голоморфной секционной кривизны псевдорасщепляемого редуктивного GAC_S -многообразия. Основной результат дает полную классификацию псевдорасщепляемых редуктивных GAC_S -многообразий, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных m -плоскостей.

Далее рассматриваются обобщенные почти сасакиевы (GAS -) структуры, обобщающие классическое понятие почти сасакиевой структуры, равносильное понятию контактной метрической

структуры и играющее особо важную роль в геометрии почти контактных метрических многообразий. Основной полученный здесь результат показывает, что псевдорасщепляемое редуktивное GAS -многообразие, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных m -плоскостей, является многообразием Сасаки постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны либо его гиперболическим аналогом. Получена полная классификация таких многообразий. Этот результат завершает полную классификацию псевдорасщепляемых редуktивных обобщенных почти контактных многообразий квазикелерова типа, в частности, классических почти контактных метрических многообразий квазикелерова типа, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных m -плоскостей.

Многочисленные результаты В. Ф. Кириченко опубликованы в авторитетных российских и зарубежных журналах. Они изложены в указанной выше монографии, и докладывались на российских и международных конференциях, в том числе на IV Международном Конгрессе математиков в Цюрихе (Швейцария, 1994 г.), где доклад профессора Кириченко был отмечен программным комитетом конференции и удостоен Travel-гранта, а также на II Европейском Конгрессе в Будапеште (Венгрия, 1996 г.). В общей сложности В. Ф. Кириченко опубликовал более 140 научных статей, учебных пособий, учебников и монографий.

Вадим Фёдорович дважды был лауреатом премии Международной соровоской программы образования в области точных наук. За добросовестный труд он награжден Почетной грамотой Министерства образования РФ (2012 г.), дипломами МПГУ в 2012–2014 годах. В 2017 году МПГУ номинировал профессора Кириченко на присуждение Медали и премии имени Н.И. Лобачевского «За выдающиеся работы в области геометрии и ее приложений». Творческая биография Вадима Фёдоровича включена в целый ряд биографических изданий, в том числе зарубежных.

Вадим Фёдорович много сил и времени отдавал чтению лекций в вузах и математических центрах Москвы, Одессы, Тарту, Грозного, Оренбурга, Нижнего Новгорода, Казани, Вильнюса, Калининграда, Минска, Твери. Он реферировал научные статьи, активно сотрудничая с ВИНТИ, писал рецензии на диссертации. Долгие годы был заместителем председателя Специализированного ученого совета Д212.154.11 по защитах кандидатских и докторских диссертаций. В течение 15 лет — с 2004 по 2018 год — был в числе организаторов ежегодной Международной конференции «Геометрия в Одессе». В. Ф. Кириченко обладал энциклопедическими знаниями во многих областях современной математики. Школа, созданная Вадимом Фёдоровичем, живет и развивается. Прежде всего, это его ученики — сотрудники кафедры геометрии и других кафедр МПГУ: О. Е. Арсеньева (обобщенные почти кватернионные многообразия и автодуальная геометрия), Л. А. Игнаточкина (конформные преобразования почти эрмитовых структур), А. В. Никифорова (голоморфные преобразования почти эрмитовых многообразий), Е. А. Полькина (конциркулярная геометрия локально конформно квазисасакиевых многообразий), А. Р. Рустанов (геометрия квазисасакиевых многообразий и их обобщений), А. В. Савинов (геометрия главных 1 -расслоений над нечетномерной базой), С. В. Умнова (геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений), а также сотрудники других вузов как в России, так и за рубежом: Х. М. Абоуд (Ирак, голоморфно-геодезические преобразования почти эрмитовых многообразий), А. В. Аристархова (Московская область, контактно-автодуальная геометрия некоторых классов почти контактных метрических многообразий), Ахмад Махмуд Аль Салех Абу Салим (Иордания, обобщенные многообразия Кенмоцу), М. Б. Банару (Смоленск, эрмитова геометрия шестимерных подмногообразий алгебры Кэли), Н. Н. Дондукова (Улан-Удэ, проективные преобразования почти контактных метрических структур), Б. В. Заятуев (Улан-Удэ, дифференциальная геометрия тангенциальных эрмитовых поверхностей), Л. В. Степанова (Смоленск, контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий), С. В. Харитонова (Оренбург, геометрия локально конформно почти косимплектических многообразий), Е. В. Черевко (Украина, геометрия специальных диффеоморфизмов конформно-келеровых многообразий), А. А. Шихаб (Ирак, конгармоническая геометрия почти эрмитовых многообразий). Многие из них уже имеют своих учеников.

Вадим Фёдорович любил дальние велосипедные путешествия и путешествия вообще, очень любил море, Одессу. Он хорошо рисовал, пел; особенно любил украинские песни и песни Александры Пахмутовой. Свободное время отдавал чтению, очень любил Достоевского, Есенина, Евтушенко. Еще увлекался астрономией, философией.

Вадим Фёдорович был очень чистым и светлым человеком, необыкновенно отзывчивым, верным и преданным другом, замечательным отцом. Светлая память о нем навсегда останется в наших сердцах.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ В. Ф. КИРИЧЕНКО

1. Кириченко В. Ф. Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторным произведением на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли// Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. — 1973. — № 3. — С. 70–75.
2. Кириченко В. Ф. Некоторые типы K -пространств// Усп. мат. наук. — 1975. — 30, № 3. — С. 163–164.
3. Кириченко В. Ф. О почти эрмитовых подмногообразиях K -пространств// Пробл. геом. (ВИНИТИ АН СССР). — 1975. — 7. — С. 39–47.
4. Кириченко В. Ф. Деформации K -структур// Пробл. геом. (ВИНИТИ АН СССР). — 1975. — 7. — С. 27–37.
5. Кириченко В. Ф. Некоторые свойства тензоров на K -пространствах// Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. — 1975. — № 6. — С. 78–85.
6. Кириченко В. Ф. Некоторые результаты теории K -пространств// Тез. докл. VI Всесоюзн. конф. по совр. пробл. геом.. — Вильнюс, 1975. — С. 112–115.
7. Кириченко В. Ф. K -пространства постоянного типа// Сиб. мат. ж. — 1976. — 17, № 2. — С. 282–289.
8. Кириченко В. Ф. K -пространства постоянной голоморфной секционной кривизны// Мат. заметки. — 1976. — 19, № 5. — С. 805–814.
9. Кириченко В. Ф. О свойствах чистых тензоров на K -пространствах// Тр. МЭИ. — 1976. — № 292. — С. 11–16.
10. Кириченко В. Ф. Классификация некоторых типов K -пространств// Тез. докл. Всесоюзн. науч. конф. по неевклидовой геом.. — Казань, 1976. — С. 94.
11. Кириченко В. Ф. K -пространства максимального ранга// Мат. заметки.. — 22, № 4. — С. 465–476.
12. Кириченко В. Ф. K -алгебры и их роль в геометрии K -пространств. — Деп. в ВИНИТИ, № 4521-77 Деп., 1977.
13. Кириченко В. Ф. Дифференциальная геометрия K -пространств// Пробл. геом. (ВИНИТИ АН СССР). — 1977. — 8. — С. 139–161.
14. Кириченко В. Ф. r -Квазианалитические векторы на K -пространствах// Изв. вузов. Мат. — 1979. — № 12. — С. 27–34.
15. Кириченко В. Ф. Q -алгебры и их роль в геометрии K -пространств// Тез. докл. VII Всесоюзн. конф. по совр. пробл. геом.. — Минск, 1979. — С. 85.
16. Кириченко В. Ф., Глебов Б. Н. Определение функции хода осевых лучей круглосимметричного зеркального отражателя// Тр. МЭИ. — 1979. — 401. — С. 19–24.
17. Кириченко В. Ф. Устойчивость почти эрмитовых структур на подмногообразиях алгебры Кэли// Усп. мат. наук. — 1980. — 35, № 1. — С. 199–200.
18. Кириченко В. Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли// Изв. вузов. Мат. — 1980. — № 8. — С. 32–38.
19. Кириченко В. Ф. Об однородных римановых пространствах с инвариантной тензорной структурой// Докл. АН СССР. — 1980. — 252, № 2. — С. 291–293.
20. Кириченко В. Ф. K -алгебры и K -пространства постоянного типа с индефинитной метрикой// Мат. заметки. — 1981. — 29, № 2. — С. 265–278.
21. Кириченко В. Ф. О геометрии однородных KK -пространств// Мат. заметки. — 1981. — 30, № 4. — С. 569–582.
22. Кириченко В. Ф. Постоянство типа по Ванхекке и натуральные пространственные формы// Изв. АН Эст. ССР. Физ. мат. — 1981. — 30. — С. 319–325.
23. Кириченко В. Ф. Локальная структура строго приближенно келеровых f -многообразий// в кн.: Дифференциальная геометрия. Межвуз. науч. сб.. — Саратов, 1981. — С. 43–49.
24. Кириченко В. Ф. Почти эрмитовы многообразия постоянного типа// Докл. АН СССР. — 1981. — 259, № 6. — С. 1293–1297.
25. Кириченко В. Ф. Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии// Докл. АН СССР. — 1981. — 260, № 4. — С. 795–799.
26. Кириченко В. Ф. Обобщенные приближенно келеровы многообразия постоянной голоморфной конформной кривизны// Докл. АН СССР. — 1982. — 265, № 2. — С. 287–291.

27. Kirichenko V. F. Sur la geometrie des varietes approximativement cosymplectiques// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1982. — 295, № 1. — P. 673–676.
28. Kirichenko V. F. Classification des varietes prescues sasakiennes satisfaisant a l'axiome des plans Φ -holomorphes// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1982. — 295, № 1. — P. 739–742.
29. Кириченко В. Ф. Обобщенные почти келеровы многообразия, удовлетворяющие аксиоме r -голоморфных плоскостей// Докл. АН БССР. — 1982. — 26, № 9. — С. 780–782.
30. Кириченко В. Ф. K -алгебры и структура K -пространств максимального ранга// Изв. вузов. Мат. — 1982. — № 1. — С. 19–25.
31. Кириченко В. Ф. Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Укр. геом. сб. — № 25. — С. 60–69.
32. Кириченко В. Ф. О геометрии приближенно сасакиевых многообразий// Докл. АН СССР. — 1983. — 269, № 1. — С. 24–29.
33. Кириченко В. Ф. Почти косимплектические многообразия, удовлетворяющие аксиоме Φ -голоморфных плоскостей// Докл. АН СССР. — 1983. — 273, № 2. — С. 280–284.
34. Кириченко В. Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — 47, № 6. — С. 1208–1223.
35. Кириченко В. Ф. О геометрии t -рекуррентных многообразий// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 171–172.
36. Кириченко В. Ф. Эрмитово-однородные обобщенные почти эрмитовы многообразия// Докл. АН СССР. — 1984. — 277, № 6. — С. 1310–1315.
37. Кириченко В. Ф. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — 48, № 4. — С. 711–734.
38. Кириченко В. Ф. Обобщенная эрмитова геометрия в касательном расслоении// Изв. АН Эст. ССР. Физ. Мат. — 1984. — 33, № 3. — С. 363–368.
39. Кириченко В. Ф. Касательное расслоение с точки зрения обобщенной эрмитовой геометрии// Изв. вузов. Мат. — 1984. — № 7. — С. 50–58.
40. Кириченко В. Ф. Эрмитово-однородные многообразия// Тез. докл. VI Прибалт. геом. конф. — Таллин, 1984. — С. 52–53.
41. Кириченко В. Ф. О геометрии обобщенных приближенно келеровых многообразий// Тез. докл. VIII Всесоюз. конф. по совр. пробл. геом. — Одесса, 1984. — С. 69.
42. Кириченко В. Ф. Голоморфные подмногообразия обобщенных приближенно келеровых многообразий// Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 1. — С. 43–48.
43. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий// Пробл. геом. (ВИНИТИ АН СССР). — 1986. — 18. — С. 25–71.
44. Акивис М. А., Кириченко В. Ф. и др. Анатолий Михайлович Васильев// Усп. мат. наук. — 1988. — 43, № 4. — С. 159–160.
45. Кириченко В. Ф. Аксиомы CR -сфер в геометрии квазикелеровых многообразий// Тез. докл. IX Всесоюз. конф. по совр. пробл. геом. — Кишинев, 1988. — С. 148.
46. Кириченко В. Ф. О геометрии локально конформно-келеровых многообразий// Тез. докл. конф. пробл. теор. и прикл. мат. — Тарту, 1990. — С. 49–52.
47. Кириченко В. Ф. Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны// Мат. сб. — 1991. — 182, № 3. — С. 353–363.
48. Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия пространства Лобачевского, I// Тез. докл. Междунар. науч. конф «Лобачевский и современная геометрия». — Казань, 1992. — С. 40–41.
49. Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия пространства Лобачевского, II// Тез. докл. Республ. науч.-метод. конф. — Одесса, 1992. — С. 70.
50. Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия пространства Лобачевского, III// Тез. докл. конф. мат. Беларуси. — Гродно, 1992. — С. 76.
51. Кириченко В. Ф. Тензор Бохнера и автодуальная геометрия келеровых многообразий// Тез. докл. Междунар. мат. конф. — Минск, 1992. — С. 32.
52. Кириченко В. Ф. Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия// Мат. заметки. — 1992. — 51, № 5. — С. 57–66.
53. Kirichenko V. F. On geometry of homogeneous Riemannian spaces// in: Webs and Quasigroups. — Tver, 1993. — P. 92–98.

54. Кириченко В. Ф., Аль-Отман А. М. О геометрии тензора Бохнера приближенно келеровых многообразий// Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 5. — С. 155–156.
55. Кириченко В. Ф., Банару М. Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли// Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 1. — С. 205–206.
56. Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry, I// Geom. Dedic. — 1994. — 51. — P. 75–104.
57. Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry, II// Geom. Dedic. — 1994. — 52. — P. 53–85.
58. Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия шестимерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли// Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. — 1994. — № 3. — С. 6–13.
59. Кириченко В. Ф., Щипкова Н. Н. О геометрии многообразий Грея–Вайсмана// Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 2. — С. 155–156.
60. Kirichenko V. F., Arseneva O. E. Bochner tensor and self-dual geometry of Kähler manifolds// Proc. VI Int. Congr. Math.. — Zurich, 1994. — P. 47.
61. Кириченко В. Ф., Степанова Л. В. О геометрии гиперповерхностей квазикелеровых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — 50, № 2. — С. 213–214.
62. Кириченко В. Ф. Новые примеры метрик Эйнштейна на гладких многообразиях// Усп. мат. наук. — 1995. — 50, № 6. — С. 183–184.
63. Кириченко В. Ф., Ежова Н. А. Конформные инварианты многообразий Вайсмана–Грея// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 2. — С. 163–164.
64. Кириченко В. Ф., Заятцев Б. В. Дифференциальная геометрия тангенциальных эрмитовых поверхностей// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 4. — С. 203–204.
65. Kirichenko V. F., Arseneva O. E. Differential geometry of generalized almost quaternionic structures, I// arXiv: arXiv:dg-ga/9702013.
66. Kirichenko V. F., Arseneva O. E. Differential geometry of generalized almost quaternionic structures, II// arXiv: arXiv:dg-ga/9702014.
67. Kirichenko V. F., Volkova E. S. Einsteinian almost contact manifolds of Killing type// in: Webs and Quasigroups. — Tver, 1996–97. — P. 96–97.
68. Кириченко В. Ф., Родина Е. В. О геометрии трансасакиевых и почти трансасакиевых многообразий// Фундам. прикл. мат. — 1997. — 3, № 3. — С. 837–846.
69. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е. Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей// Мат. сб. — 1998. — 189, № 1. — С. 21–44.
70. Кириченко В. Ф., Борисовский И. П., Липагина Л. В. Интегральные многообразия контактных распределений// Мат. сб. — 1998. — 189, № 12. — С. 119–134.
71. Кириченко В. Ф. Киллинговы f -многообразия постоянного типа// Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — 63, № 5. — С. 127–146.
72. Кириченко В. Ф., Игнаточкина Л. А., Третьякова И. В. Конформные инварианты приближенно келеровых многообразий// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 5. — С. 654–663.
73. Кириченко В. Ф. О постоянстве типа почти эрмитовых многообразий// Мат. заметки. — 2000. — 68, № 5. — С. 668–676.
74. Кириченко В. Ф. Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений// Фундам. прикл. мат. — 2000. — 6, № 4. — С. 1095–1120.
75. Кириченко В. Ф., Власова Л. И. О геометрии конциркулярно приближенно келеровых многообразий, I// Тез. докл. VIII Белорус. мат. конф. Ч. 2. — Минск, 2000. — С. 97.
76. Кириченко В. Ф., Власова Л. И. О геометрии конциркулярно приближенно келеровых многообразий, II// в кн.: Труды Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 5. — Казань, 2000. — С. 53–54.
77. Kirichenko V. F. Hermitian and Einsteinian metrics generated by almost anti-quaternionic structure// Proc. Int. Congr. Differ. Geom.. — Bilbao, 2000. — P. 51.
78. Кириченко В. Ф. О геометрии подмногообразий Лагранжа// Мат. заметки. — 2001. — 69, № 1. — С. 36–51.
79. Кириченко В. Ф. О геометрии многообразий Кенмоцу// Докл. РАН. — 2001. — 380, № 5. — С. 585–587.
80. Кириченко В. Ф., Никифорова А. В. О голоморфно-проективных преобразованиях почти эрмитовых структур// Усп. мат. наук. — 2002. — 56, № 6. — С. 149–150.

81. Кириченко В. Ф., Власова Л. И. Конциркулярная геометрия приближенно келеровых многообразий// Мат. сб. — 2002. — 193, № 5. — С. 53–76.
82. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий// Мат. сб. — 2002. — 193, № 8. — С. 71–10..
83. Кириченко В. Ф., Коннов В. В. Почти келеровы многообразия гиперболического типа// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — 67, № 4. — С. 21–66.
84. Кириченко В. Ф., Валеев Р. Р. О геометрии псевдокосимплектических многообразий// в кн.: Юбилейный сб. «70 лет кафедре математического анализа МПГУ». — М.: МПГУ, 2004. — С. 220–229.
85. Кириченко В. Ф., Левковец В. А. О геометрии L -многообразий// в кн.: Юбилейный сб. «70 лет кафедре математического анализа МПГУ». — М.: МПГУ, 2004. — С. 220–229.
86. Кириченко В. Ф. О геометрии почти контактных многообразий// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2004». — Одесса, 2004. — С. 38–39.
87. Кириченко В. Ф., Левковец В. А. О геометрии L -многообразий// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2004». — Одесса, 2004. — С. 35–37.
88. Кириченко В. Ф. О геометрии приближенно трансасакиевых многообразий// Докл. РАН. — 2004. — 397, № 6. — С. 733–736.
89. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е. Автодуальная геометрия эрмитовых поверхностей// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2005». — Одесса, 2005. — С. 6–9.
90. Кириченко В. Ф. Обобщенные классы Грея—Хервеллы и голоморфно-проективные преобразования обобщенных почти эрмитовых структур// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 5. — С. 109–134.
91. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е. Конциркулярная геометрия приближенно келеровых многообразий// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2006». — Одесса, 2006. — С. 85–87.
92. Кириченко В. Ф., Аристархова А. В. О современной теории комплексных чисел и ее приложениях к геометрии// в кн.: Научные труды МПГУ. Серия «Естественные науки». — М.: Прометей, 2006. — С. 19–24.
93. Об интегрируемости фундаментальных распределений LCQS-структуры// в кн.: Некоторые вопросы математики, информатики и методики их преподавания. — М.: Прометей, 2006. — С. 98–100.
94. Кириченко В. Ф., Левковец В. А. О геометрии L -многообразий// Мат. заметки. — 2006. — 78, № 6. — С. 854–869.
95. Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н. Контактнo-геодезические преобразования почти контактных метрических структур// Мат. заметки. — 2006. — 80, № 2. — С. 209–220.
96. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е. Интегральные многообразия контактных распределений// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2007». — Одесса, 2007. — С. 59–61.
97. Кириченко В. Ф., Баклашова Н. С. Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты// Мат. заметки. — 2007. — 82, № 3. — С. 347–360.
98. Кириченко В. Ф., Полькина Е. А. Геодезическая жесткость некоторых классов почти контактных метрических многообразий// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 9. — С. 42–60.
99. Кириченко В. Ф., Сулейманова Э. А. Эрмитова геометрия голоморфно 2-геодезических преобразований второго линейного типа// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Астрахани-2007». — Астрахань, 2007. — С. 29–30.
100. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е., Баклашова Н. С. О геометрии контактной формы Ли// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2008». — Одесса, 2008. — С. 59–60.
101. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур// Мат. заметки. — 2008. — 84, № 6. — С. 838–850.
102. Кириченко В. Ф., Кузаконь В. М., Тенюх К. М. Обобщенные классы Грея—Хервеллы и голоморфно-геодезические преобразования обобщенных почти эрмитовых структур, I// Proc. Int. Geom. Center.. — 1. — С. 23–39.
103. Кириченко В. Ф., Аристархова А. В. О контактно-автодуальной геометрии 5-мерных квази-сасакиевых многообразий// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2009». — Одесса, 2009. — С. 40.
104. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е., Полькина Е. А. О конформных преобразованиях почти контактных метрических структур// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2009». — Одесса, 2009. — С. 41.
105. Kirichenko V. F., Habeeb M. Aboud holomorphic-geodesic transformations of almost Hermitian manifolds// Int. Math. Forum — 2009. — 4, № 46. — P. 2293–2299.

106. Кириченко В. Ф., Полькина Е. А. Критерий конциркулярной подвижности квази-сасакиевых многообразий// Мат. заметки. — 2009. — 86, № 3. — С. 380–388.
107. Кириченко В. Ф., Кусова Е. В. О геометрии слабо косимплектических многообразий// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 2. — С. 33–42.
108. Кириченко В. Ф., Шихаб А. О геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно кэлеровых многообразий// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 2. — С. 43–54.
109. Кириченко В. Ф., Кузаконь В. М. Обобщенные классы Грея—Хервеллы и голоморфно-геодезические преобразования обобщенных почти эрмитовых структур, II// Proc. Int. Geom. Center. — 2011. — 2. — С. 26–35.
110. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Шихаб А. Геометрия тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых многообразий// Мат. заметки. — 2011. — 90, № 1. — С. 87–100.
111. О почти геодезических отображениях класса 2 почти эрмитовых многообразий// Мат. заметки. — 2011. — 90, № 4. — С. 517–526.
112. Кириченко В. Ф., Аристархова А. В. Контактно-автодуальная геометрия квази-сасакиевых 5-многообразий// Мат. заметки. — 2011. — 90, № 5. — С. 643–658.
113. Кириченко В. Ф., Харитонова С. В. О геометрии нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий// Мат. заметки. — 2012. — 91, № 1. — С. 40–53.
114. Кириченко В. Ф. Конформные инварианты почти контактных метрических структур// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2012». — Одесса, 2012. — С. 46.
115. Кириченко В. Ф., Терпстра М. А. О геометрии характеристического вектора LCQS-многообразий// Мат. заметки. — 2012. — 92, № 6. — С. 864–871.
116. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е. Эрмитовы аспекты геометрии пространств постоянной кривизны// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2013». — Одесса, 2013. — С. 49.
117. Кириченко В. Ф., Кузаконь В. М. О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях// Укр. мат. ж.. — 65, № 7. — С. 1005–1008.
118. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е. Q -алгебры основных типов почти контактных метрических многообразий// Proc. Int. Geom. Center. — 2013. — 6, № 4. — С. 3–30.
119. Кириченко В. Ф., Черевко Е. В. Кси-инвариантные формы Ли на почти эрмитовых многообразиях// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2014». — Одесса, 2014. — С. 34.
120. Banaru M. B., Kirichenko V. F. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds// J. Math. Sci. — 2015. — 207, № 4. — P. 513–537.
121. Кириченко В. Ф., Полькина Е. А. Контактная форма Ли и конциркулярная геометрия локально конформно квази-сасакиевых многообразий// Мат. заметки. — 2015. — 99, № 1. — С. 12.
122. Кириченко В. Ф. Инволютивные гиперраспределения и голоморфные векторные поля на почти эрмитовых многообразиях// Тез. доклада Междунар. конференции «Геометрия в Одессе-2015». — Одесса, 2015.
123. Кириченко В. Ф., Кузаконь В. М., Арсеньева О. Е. О геометрии торсообразующих векторных полей на почти контактных метрических многообразиях// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2016». — Одесса, 2016. — С. 72.
124. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е. Псевдо-голоморфные торсообразующие почти контактные метрические многообразия// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе-2016». — Одесса, 2016. — С. 73.
125. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е., Суровцева Е. В. Эрмитова геометрия почти контактного метрического многообразия// Тез. докл. Междунар. конф. «Алгебраические и геометрические методы анализа». — Одесса, 2017. — С. 105.
126. Кириченко В. Ф., Суровцева Е. В. Риманова геометрия фундаментального распределения// Тез. докл. Междунар. конф. «Алгебраические и геометрические методы анализа». — Одесса, 2017. — С. 118.
127. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е., Рустанов А. Р. Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу// Тез. докл. Междунар. конф. «Алгебраические и геометрические методы анализа». — Одесса, 2017. — С. 96.
128. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Харитонова С. В. Свойства кривизны почти $C(\lambda)$ -многообразий// Тез. докл. Междунар. конф. «Алгебраические и геометрические методы анализа». — Одесса, 2017. — С. 104.

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ И МОНОГРАФИИ В. Ф. КИРИЧЕНКО

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Монография. — М.: МПГУ, 2003.
2. *Кириченко В. Ф.* Теория групп Ли / Учебное пособие. — Тверь: ТГУ, 1995.
3. *Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф.* Введение в современную геометрию / Учебное пособие. — Тверь: ТГУ, 1997.
4. *Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф.* Введение в топологию / Учебное пособие. — Тверь: ТГУ, 1998.
5. *Кириченко В. Ф.* Топологические основы дифференциальной геометрии / Учебное пособие. — Тверь: ТГУ, 1999.
6. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры. Ч. 1 / Учебное пособие. — Тверь: ТГУ, 2001.
7. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры. Ч. 2 / Учебное пособие. — Тверь: ТГУ, 2001.
8. *Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф.* Основы общей топологии / Учебное пособие. — М.: МПГУ, 2004.
9. *Кириченко В. Ф., Гусева Н. И., Денисова Н. С. и др.* Геометрия. Т. 1 / Учебник. — М.: Академия, 2012.
10. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Монография. — Одесса: Печатный Двор, 2013.
11. *Кириченко В. Ф., Кузаконь И. М., Пришляк О. О.* Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти / Монография. — Київ: НАН України, 2013.
12. *Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е.* Введение в современную геометрию. Тензорное исчисление / Учебное пособие. — Одесса: Печатный Двор, 2015.
13. *Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е.* Введение в современную геометрию. Аффинная геометрия / Учебное пособие. — Одесса: Печатный Двор, 2015.

*О. Е. Арсеньева, М. Б. Банару, М. П. Бурлаков,
Н. И. Гусева, Ф. В. Кириченко, А. Р. Рустанов,
С. В. Харитонов, А. М. Шелехов*



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 17–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-17-27

УДК 514.76

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ $(n - m)m$ -МЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ В n -МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. О. О. БЕЛОВА

Аннотация. В проективном пространстве P_n рассмотрен $(n - m)m$ -мерный комплекс. В главном расслоении, ассоциированном с этим комплексом, строится фундаментально-групповая связность, ее объекты кривизны и кручения. Исследование комплекса производится методом Картана—Лаптева. Показано, что фундаментальный объект 1-го порядка данного комплекса является псевдоквазитензором, кривизна — псевдотензором, а кручение образует геометрический объект лишь в совокупности с подобъектом связности и фундаментальным объектом. Произведено композиционное оснащение $(n - m)m$ -мерного комплекса. Доказано, что данное оснащение индуцирует связности трех типов в главном расслоении, ассоциированном с комплексом.

Ключевые слова: метод Картана—Лаптева, комплекс, проективное пространство, связность, кривизна, кручение, композиционное оснащение.

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF $(n - m)m$ -DIMENSIONAL COMPLEXES IN n -DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

© 2023 О. О. BELOVA

ABSTRACT. We consider an $(n - m)m$ -dimensional complex in the projective space P_n . In the principal bundle associated with this complex, we construct a fundamental-group connection and calculate the curvature and torsion of this connection. We examine this complex by the Cartan–Laptev method. We prove that the fundamental object of the 1th order of this complex is a pseudoquasitensor, the curvature is a pseudotensor, and the torsion is a geometric object only in combination with the connection subobject and the fundamental object. We perform the compositional framing of the $(n - m)m$ -dimensional complex. Also, we prove that this framing induces connections of three types in the principal bundle associated with the complex.

Keywords and phrases: Cartan–Laptev method, complex, projective space, connection, curvature, torsion, compositional framing.

AMS Subject Classification: 53A20, 53C05

1. Введение. Теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства является одной из наиболее красивых и интересных областей дифференциальной геометрии [9]. Данная теория находит применение в интегральной геометрии и теоретической физике.

r -Мерный комплекс K_r m -мерных плоскостей — это r -мерное подмногообразие грассманова многообразия $Gr(m, n)$, состоящего из m -мерных плоскостей проективного пространства P_n , где $r < (m + 1)(n - m)$. Различные виды комплексов K_r в пространстве P_n получаются путем различного взаимного расположения плоскости PT_pV^r с многообразием Сегре $S_p(m, n - m - 1)$, где в качестве PT_pV^r рассматривается $(r - 1)$ -мерная плоскость, полученная путем проективизации касательной плоскости T_pV^r с центром в точке $p \in V^r$, V^r — алгебраическое многообразие, соответствующее данному комплексу при грассмановом отображении (см. [10]).

Многообразие Сегре $S(m, n)$ является образом прямого произведения $P_m \times P_n$ двух проективных пространств P_m и P_n (см. [16]). Данное многообразие имеет важное значение для дифференциальной геометрии грассмановых многообразий (см., например, [1–7, 30]), которая является средством построения различных многообразий в проективных пространствах. Так, многообразие Сегре $S(2, 2)$ связано с грассмановым многообразием $Gr(2, 5)$ (см. [9]). В [12] при помощи условия редуцируемости главных расслоений найден дифференциально-геометрический признак многообразий Сегре.

Дифференциальная геометрия комплексов многомерных плоскостей полностью не изучена, поэтому представленная работа является актуальной. В данной статье при исследовании комплекса $K_{(n-m)m}$ применяется метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева, который основан на инвариантном дифференциально-алгебраическом аппарате структурных дифференциальных форм рассматриваемых расслоений [17, 18, 20, 26, 33]. На данном комплексе задана фундаментально-групповая связность, найдены дифференциальные уравнения компонент объекта связности Γ , которая широко используется для параллельных перенесений [18, 32], и выражения компонент объектов кривизны и кручения. Объект связности содержит два подобъекта, задающие связности в соответствующих подрасслоениях. Показано, что объект кривизны является псевдотензором, а кручение является геометрическим объектом лишь в совокупности с компонентами фундаментального объекта 1-го порядка и подобъекта связности, задающего связность в подрасслоении с типовым слоем — фактор-группой, действующей на m -плоскости и в двойственной плоскости. При осуществлении композиционного оснащения комплекса $K_{(n-m)m}$ индуцируются связности трех типов в ассоциированном расслоении, причем одна из данных связностей является средней по отношению к двум другим.

2. Аппарат исследования. Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{I'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами (см., например, [14])

$$dA_{I'} = \theta_{I'}^{J'} A_{J'}, \quad (I', \dots = \overline{0, n}), \quad (1)$$

где d — символ обычного дифференцирования в пространстве P_n , а $\theta_{I'}^{J'}$ — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям Картана

$$D\theta_{J'}^{I'} = \theta_{J'}^{K'} \wedge \theta_{K'}^{I'}, \quad (2)$$

линейной группы $GL(n+1)$. В формулах (2) D является символом внешнего дифференцирования.

Замечание 1. Отметим, что линейная группа $GL(n+1)$ действует эффективно в линейном пространстве $L(n+1)$ и неэффективно в проективном пространстве P_n .

С помощью условия

$$\theta_{I'}^{I'} = 0 \quad (3)$$

из линейной группы $GL(n+1)$ можно выделить специальную линейную группу $SGL(n+1)$, эффективно действующую в пространстве P_n .

Замечание 2. В [26] показано, что однородный аналитический аппарат (1)–(3) неудобен для выделения подгрупп.

Введем новые формы (см., например, [14, 15])

$$\omega_{J'}^{I'} = \theta_{J'}^{I'} - \delta_{J'}^{I'} \theta_0^0. \quad (4)$$

Разбивая индекс $I' = \{0, I\}$, можно записать более детально формы (4)

$$\begin{aligned} \omega_0^I &= \theta_0^I, \quad \omega_J^I = \theta_J^I - \delta_J^I \theta_0^0, \quad \omega_I^0 = \theta_I^0, \\ \omega_0^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем деривационные формулы (1) подробно

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \quad (I, J, K, \dots = \overline{1, n}), \quad (6)$$

где $A = A_0$, $\omega^I = \omega_0^I$, $\omega_I = \omega_I^0$, а форма $\theta = \theta_0^0$ играет роль множителя пропорциональности.

Таблица 1. Классификация семейств плоскостей.

Многообразие Грассмана	Комплексы	Коконгруэнция	Псевдоконгруэнция	Конгруэнция	Линейчатая пов-ть с m -мерным образ. элем., $(m + r)$ -мерная пов-ть	Плоскость L_m
$(m + 1)(n - m)$		$m(n - m)$		$n - m$	$1 \leq r \leq n - m - 1$	m

Из структурных уравнений (2), вводя базисные формы (5) и для простоты опуская 0 у форм ω_0^I и ω_I^0 , получаем уравнения Картана

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \quad (7)$$

которым удовлетворяют базисные формы ω^I , ω_J^I , ω_I проективной группы $GP(n)$, действующей эффективно в пространстве P_n .

Замечание 3. Для дальнейшего исследования будем пользоваться неоднородным аналитическим аппаратом с деривационными формулами (6) и структурными уравнениями (7).

3. Комплекс $K_{(n-m)m}$. В проективном пространстве P_n рассмотрим m -мерную плоскость L_m ($1 \leq m < n$). Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_I\}$ с деривационными формулами (6) (ср. [19])

$$\begin{aligned} dA &= \theta A + \omega^a A_a + \omega^\alpha A_\alpha, \\ dA_a &= \theta A_a + \omega_a^b A_b + \omega_a^\alpha A_\alpha + \omega_a A, \\ dA_\alpha &= \theta A_\alpha + \omega_\alpha^a A_a + \omega_\alpha^\beta A_\beta + \omega_\alpha A, \end{aligned}$$

помещая вершины A, A_a на плоскость L_m . Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$a, b, c, \dots = 1, \dots, m; \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = m + 1, \dots, n.$$

В этом случае уравнения стационарности данной плоскости имеют вид $\omega^\alpha = 0$ и $\omega_a^\alpha = 0$.

Рассмотрим комплекс $K_{(n-m)m}$ m -мерных плоскостей L_m . Примем формы ω_a^α за базисные, тогда уравнения комплекса $K_{(n-m)m}$ имеют вид (ср. [11, 13])

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta. \quad (8)$$

Замечание 4. В. И. Близникас дал классификацию подмногообразий $Gr(m, n, r)$ многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ (см. [8]) и назвал данный комплекс $K_{(n-m)m}$ коконгруэнцией m -мерных плоскостей.

В таблице 1 граничные многообразия выделены темным цветом с указанием их размерностей и межграничные многообразия с размерностями, находящимися в пределах размерностей граничных многообразий.

Используя структурные уравнения (7) проективной группы $GP(n)$, действующей в пространстве P_n , найдем дифференциалы базисных форм

$$D\omega_a^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b} \omega_a) \wedge \omega_b^\beta. \quad (9)$$

Продолжая систему (8), находим дифференциальные уравнения на компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$ в следующем виде:

$$\Delta \Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a = \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \omega_b^\gamma, \quad (10)$$

причем $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha b} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha b}$, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом (см., например, [29, 33]):

$$\Delta \Lambda_{\beta}^{\alpha a} = d\Lambda_{\beta}^{\alpha a} + \Lambda_{\beta}^{\gamma a} \omega_{\gamma}^{\alpha} + \Lambda_{\beta}^{\alpha b} \omega_b^a - \Lambda_{\gamma}^{\alpha a} \omega_{\beta}^{\gamma}.$$

Замечание 5. Фундаментальный объект 1-го порядка Λ комплекса $K_{(n-m)m}$ является псевдоквазитензором. Фундаментальный объект 1-го порядка конгруэнции B_{n-m} также является псевдоквазитензором [11], а фундаментальный объект 1-го порядка комплекса $K_{m(n-m+1)}$ состоит из двух псевдотензоров [13]. В нашем случае, если $\omega^a = 0$, получим центрированную плоскость, тогда фундаментальный объект станет псевдотензором.

4. Главное расслоение. С комплексом $K_{(n-m)m}$ ассоциируется главное расслоение $G_s(K)$ со структурными уравнениями (9) и уравнениями

$$\begin{aligned} D\omega_b^a &= \omega_b^c \wedge \omega_c^a + (\delta_b^a \omega_c + \delta_c^a \omega_b) \wedge \omega^c + (\delta_b^a \Lambda_{\alpha}^{\beta c} \omega_{\beta} - \delta_{\alpha}^{\beta} \delta_b^c \omega_{\beta}^a) \wedge \omega_c^{\alpha}, \\ D\omega^a &= \omega^b \wedge \omega_b^a - \Lambda_{\beta}^{\alpha b} \omega_{\alpha}^a \wedge \omega_b^{\beta}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_{\alpha} \wedge \omega_a^{\alpha}; \\ D\omega_{\beta}^{\alpha} &= \omega_{\beta}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha} \omega_a \wedge \omega^a + (\Lambda_{\gamma}^{\alpha a} \omega_{\beta} + \delta_{\beta}^{\alpha} \Lambda_{\gamma}^{\mu a} \omega_{\mu} + \delta_{\gamma}^{\alpha} \omega_{\beta}^a) \wedge \omega_a^{\gamma}; \\ D\omega_{\alpha}^a &= (\delta_b^a \omega_{\alpha}^{\beta} - \delta_{\alpha}^{\beta} \omega_b^a) \wedge \omega_{\beta}^b + \omega_{\alpha} \wedge \omega^a; \\ D\omega_{\alpha} &= \omega_{\alpha}^a \wedge \omega_a + \omega_{\alpha}^{\beta} \wedge \omega_{\beta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Базой главного расслоения $G_s(K)$ является комплекс $K_{(n-m)m}$, а типовым слоем — s -членная подгруппа G_s стационарности плоскости L_m , причем $s = n(n+1) - m(n-m-1)$.

Теорема 1. В главном расслоении $G_s(K)$ выделяются следующие фактор-расслоения:

1. расслоение $P(K)$ со структурными уравнениями (9), (11) и типовым слоем — фактор-группой $P = GP(m)$ группы $GP(n)$, действующей на плоскости L_m ;
2. расслоение $H(K)$ имеет структурные уравнения (9), (11), (12). Типовым слоем фактор-расслоения $H(K)$ является фактор-группа H группы G , действующая на плоскости L_m и в двойственной плоскости.

Доказательство следует из структурных уравнений (9), (11), (12).

5. Фундаментально-групповая связность. На данном комплексе $K_{(n-m)m}$ способом Лаптева — Лумисте (см., например, [21, 27]) зададим связность, для этого рассмотрим преобразование слоевых форм

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{ba}^{ac} \omega_c^{\alpha}, \quad \tilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_{\alpha}^{ab} \omega_b^{\alpha}, \quad \tilde{\omega}_{\alpha}^a = \omega_{\alpha}^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^{\beta}, \\ \tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha} &= \omega_{\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_{\gamma}^a, \quad \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^b \omega_b^{\alpha}, \quad \tilde{\omega}_{\alpha} = \omega_{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega_b^{\beta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Найдем структурные уравнения форм связности. Для этого продифференцируем формы (13) внешним образом, используя структурные уравнения (9), (11), (12). Выразим формы Пфаффа ω из (13) и подставим в полученные уравнения. Раскроем скобки, делая обратную замену по формулам (13) в тех слагаемых, где формы $\tilde{\omega}$ внешним образом умножаются на базисные. Получим

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}_b^a &= \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + (\delta_b^a \tilde{\omega}_c + \delta_c^a \tilde{\omega}_b) \wedge \tilde{\omega}^c + (-\Gamma_{ba}^{dc} \Gamma_{d\beta}^{ae} - \delta_b^a \Gamma_{d\alpha}^c \Gamma_{\beta}^{de} - \Gamma_{ba}^c \Gamma_{\beta}^{ae}) \omega_c^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^{\beta} - \\ &\quad - (\Delta \Gamma_{ba}^{ac} + (\Gamma_{b\beta}^{ae} \Lambda_{\alpha}^{\beta c} - \delta_b^e \Gamma_{\alpha}^{ec} - \delta_b^e \Gamma_{\alpha}^{ac}) \omega_e + (\delta_b^e \Gamma_{e\alpha}^a + \delta_e^a \Gamma_{b\alpha}^c) \omega^e + \delta_b^a \omega_{\alpha}^a - \delta_b^a \Lambda_{\alpha}^{\beta c} \omega_{\beta}) \wedge \omega_c^{\alpha}, \\ D\tilde{\omega}^a &= \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + (-\Gamma_{\alpha}^{eb} \Gamma_{e\beta}^{ac}) \omega_b^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^c - (\Delta \Gamma_{\alpha}^{ab} + \Gamma_{\beta}^{ac} \Lambda_{\alpha}^{\beta b} \omega_c - \Gamma_{e\alpha}^{ab} \omega^e + \Lambda_{\alpha}^{\beta b} \omega_{\beta}^a) \wedge \omega_b^{\alpha}, \\ D\tilde{\omega}_{\alpha}^a &= \tilde{\omega}_{\alpha}^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta} \wedge \tilde{\omega}_{\beta}^a + \tilde{\omega}_{\alpha} \wedge \tilde{\omega}^a + (-\Gamma_{\alpha\beta}^{eb} \Gamma_{e\gamma}^{ac} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu b} \Gamma_{\mu\gamma}^{ac} - \Gamma_{\alpha\beta}^b \Gamma_{\gamma}^{ac}) \omega_b^{\beta} \wedge \omega_{\gamma}^c - \\ &\quad - (\Delta \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac} \Lambda_{\beta}^{\gamma b} \omega_c + (\delta_{\alpha}^c \Gamma_{\beta}^{\gamma b} - \delta_{\beta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha}^{ab}) \omega_{\gamma}^c - \Gamma_{\beta}^{ab} \omega_{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^b \omega^a) \wedge \omega_b^{\beta}, \\ D\tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha} &= \tilde{\omega}_{\beta}^{\gamma} \wedge \tilde{\omega}_{\gamma}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha} \tilde{\omega}_a \wedge \tilde{\omega}^a + (-\Gamma_{\beta\gamma}^{\eta a} \Gamma_{\eta\mu}^{\alpha b} - \delta_{\beta}^{\alpha} \Gamma_{c\gamma}^a \Gamma_{\mu}^{cb}) \omega_a^{\gamma} \wedge \omega_b^{\mu} - \\ &\quad - (\Delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + (\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha b} \Lambda_{\gamma}^{\mu a} - \delta_{\beta}^{\alpha} \Gamma_{\gamma}^{ba}) \omega_b + \delta_{\beta}^{\alpha} \Gamma_{b\gamma}^a \omega^b - (\delta_{\beta}^{\mu} \Lambda_{\gamma}^{\alpha a} + \delta_{\beta}^{\alpha} \Lambda_{\gamma}^{\mu a}) \omega_{\mu} - \delta_{\gamma}^{\alpha} \omega_{\beta}^a) \wedge \omega_a^{\gamma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\tilde{\omega}_a &= \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + (-\Gamma_{a\alpha}^{eb} \Gamma_{e\beta}^c) \omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta - \left(\Delta \Gamma_{a\alpha}^b + (\Gamma_{a\alpha}^{cb} + \Gamma_{a\beta}^c \Lambda_\alpha^{\beta b}) \omega_c + \delta_a^b \omega_\alpha \right) \wedge \omega_b^\alpha, \\
D\tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}_\alpha^a \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta + (-\Gamma_{\alpha\beta}^{ca} \Gamma_{c\gamma}^b - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu a} \Gamma_{\mu\gamma}^b) \omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma - \\
&\quad - (\Delta \Gamma_{\alpha\beta}^a + (\Gamma_{\alpha\gamma}^b \Lambda_\beta^{\gamma a} + \Gamma_{\alpha\beta}^{ba}) \omega_b - \Gamma_{b\beta}^a \omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a} \omega_\gamma) \wedge \omega_a^\beta.
\end{aligned}$$

Связность в главном расслоении задается с помощью поля объекта групповой связности $\Gamma = \{\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_\alpha^{ab}, \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{a\alpha}^b, \Gamma_{\alpha\beta}^a\}$ на базе $K_{(n-m)m}$. Компоненты объекта Γ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
\Delta \Gamma_{b\alpha}^{ac} + (\Gamma_{b\beta}^{ae} \Lambda_\alpha^{\beta c} - \delta_b^e \Gamma_\alpha^{ec} - \delta_b^e \Gamma_\alpha^{ac}) \omega_e + (\delta_b^e \Gamma_{e\alpha}^c + \delta_e^a \Gamma_{b\alpha}^c) \omega_e + \delta_b^c \omega_\alpha^a - \delta_b^a \Lambda_\alpha^{\beta c} \omega_\beta = \Gamma_{b\alpha\beta}^{ace} \omega_e^\beta, \\
\Delta \Gamma_\alpha^{ab} + \Gamma_\beta^{ac} \Lambda_\alpha^{\beta b} \omega_c - \Gamma_{e\alpha}^{ab} \omega_e + \Lambda_\alpha^{\beta b} \omega_\beta^a = \Gamma_{\alpha\beta}^{abc} \omega_c^\beta, \\
\Delta \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac} \Lambda_\beta^{\gamma b} \omega_c + (\delta_c^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma \Gamma_{c\beta}^{ab}) \omega_\gamma - \Gamma_\beta^{ab} \omega_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^b \omega^a = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \omega_\gamma^\gamma, \\
\Delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + (\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha b} \Lambda_\gamma^{\mu a} - \delta_\beta^\alpha \Gamma_\gamma^{ba}) \omega_b + \delta_\beta^\alpha \Gamma_{b\gamma}^a \omega^b - (\delta_\beta^\mu \Lambda_\gamma^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{\mu a}) \omega_\mu - \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a = \Gamma_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} \omega_b^\mu, \\
\Delta \Gamma_{a\alpha}^b + (\Gamma_{a\alpha}^{cb} + \Gamma_{a\beta}^c \Lambda_\alpha^{\beta b}) \omega_c + \delta_a^b \omega_\alpha = \Gamma_{a\alpha\beta}^{bc} \omega_c^\beta, \\
\Delta \Gamma_{\alpha\beta}^a + (\Gamma_{\alpha\gamma}^b \Lambda_\beta^{\gamma a} + \Gamma_{\alpha\beta}^{ba}) \omega_b - \Gamma_{b\beta}^a \omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a} \omega_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} \omega_b^\gamma.
\end{aligned} \tag{14}$$

Замечание 6. Объект групповой связности Γ образует геометрический объект в совокупности с фундаментальным объектом 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$. Данный объект содержит два подобъекта $\Gamma_1 = \{\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_\alpha^{ab}, \Gamma_{a\alpha}^b\}$ и $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\}$, задающие связность в соответствующих подрасслоениях.

Замечание 7. Для комплекса $K_{(n-m)m}$ m -мерных плоскостей L_m нельзя задать обобщенные аффинные [22] и билинейные связности, а также нормальную линейную связность, которые были исследованы в [13] для комплекса $K_{(n-m+1)m}$ центрированных плоскостей L_m^* . Кроме того, для комплекса $K_{(n-m)m}$ нельзя задать плоскостную и нормальную обобщенные аффинные связности, которые были изучены автором в [31] для пространства центрированных плоскостей. Отметим также, что связность Столярова [28] в данном случае также не может быть задана, так как в структурные уравнения входят другие формы.

6. Объект кривизны. Учитывая во внешних дифференциалах форм связности (13) дифференциальные уравнения (14) компонент объекта фундаментально-групповой связности Γ , полученные в предыдущем пункте, запишем структурные уравнения

$$\begin{aligned}
D\tilde{\omega}_b^a &= \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + (\delta_b^a \tilde{\omega}_c + \delta_c^a \tilde{\omega}_b) \wedge \tilde{\omega}^c + R_{b\alpha\beta}^{ace} \omega_c^\alpha \wedge \omega_e^\beta, \\
D\tilde{\omega}^a &= \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + R_{\alpha\beta}^{abc} \omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta, \\
D\tilde{\omega}_\alpha^a &= \tilde{\omega}_\alpha^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^a + \tilde{\omega}_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a + R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \omega_b^\beta \wedge \omega_\gamma^\gamma, \\
D\tilde{\omega}_\beta^\alpha &= \tilde{\omega}_\beta^\gamma \wedge \tilde{\omega}_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \tilde{\omega}_a \wedge \tilde{\omega}^a + R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} \omega_a^\gamma \wedge \omega_b^\mu, \\
D\tilde{\omega}_a &= \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + R_{a\alpha\beta}^{bc} \omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta, \\
D\tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}_\alpha^a \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta + R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} \omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma,
\end{aligned}$$

где компоненты объекта кривизны R имеют вид

$$\begin{aligned}
R_{b\alpha\beta}^{ace} &= \Gamma_b^{a[ce]} - \Gamma_b^{d[ce]} \Gamma_{d\beta}^{ae} - \delta_b^a \Gamma_{d[\alpha}^{[c} \Gamma_{\beta]}^{de]} - \Gamma_{b[\alpha}^{[c} \Gamma_{\beta]}^{ae]}, \\
R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} &= \Gamma_\alpha^{a[bc]} - \Gamma_\alpha^{e[bc]} \Gamma_{e\gamma}^{ac} - \Gamma_\alpha^{[\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^{b]ac} - \Gamma_{\alpha[\beta}^{[b} \Gamma_{\gamma]}^{ac]}, \\
R_{\alpha\beta}^{abc} &= \Gamma_{[\alpha}^{a[b} \Gamma_{\beta]}^{c]} - \Gamma_{[\alpha}^{e[b} \Gamma_{\beta]}^{ac]}, \\
R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} &= \Gamma_\beta^{a[\alpha b]} - \Gamma_\beta^{[\eta} \Gamma_{\gamma\mu}^{a]ab} - \delta_\beta^\alpha \Gamma_{c[\gamma}^{[a} \Gamma_{\mu]}^{cb]}, \\
R_{a\alpha\beta}^{bc} &= \Gamma_a^{[bc]} - \Gamma_a^{[b} \Gamma_{\alpha\beta]}^{c]}, \\
R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} &= \Gamma_{\alpha[\beta}^{[a} \Gamma_{\gamma]}^{b]} - \Gamma_{\alpha[\beta}^{[a} \Gamma_{c\gamma]}^{b]} - \Gamma_{\alpha[\beta}^{[a} \Gamma_{\mu\gamma]}^{b]}.
\end{aligned}$$

В данных выражениях квадратные скобки означают альтернирование по парам индексов, например,

$$\Gamma_{\alpha[\beta\gamma]}^{[ab]} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta}^{ba}).$$

Продолжая дифференциальные уравнения (14) и учитывая сравнения на компоненты объекта кривизны R , соответствующие уравнениям (10), находим следующие дифференциальные сравнения по модулю базисных форм ω_a^α :

$$\begin{aligned} & \Delta R_{b\alpha\beta}^{ace} + \left(R_{b\alpha\gamma}^{acd} \Lambda_\beta^{\gamma e} + R_{b\gamma\beta}^{ade} \Lambda_\alpha^{\gamma c} - \delta_b^a R_{\alpha\beta}^{dce} - \delta_b^d R_{\alpha\beta}^{ace} + \Gamma_{b\gamma}^{ad} \Lambda_{[\alpha\beta]}^{\gamma[ce]} \right) \omega_d + \\ & + \left(\delta_b^a R_{d\alpha\beta}^{ce} + \delta_d^a R_{b\alpha\beta}^{ce} \right) \omega^d - \delta_b^a \Lambda_{[\alpha\beta]}^{\gamma[ce]} \omega_\gamma \equiv 0, \\ & \Delta R_{\alpha\beta}^{abc} + \left(R_{\alpha\gamma}^{abe} \Lambda_\beta^{\gamma c} + R_{\gamma\beta}^{aec} \Lambda_\alpha^{\gamma b} + \Gamma_\gamma^{ae} \Lambda_{[\alpha\beta]}^{\gamma[bc]} \right) \omega_e - R_{e\alpha\beta}^{abc} \omega^e + \delta_e^a \Lambda_{[\alpha\beta]}^{\gamma[bc]} \omega_\gamma^e \equiv 0, \\ & \Delta R_{a\alpha\beta}^{bc} + \left(R_{a\alpha\beta}^{ebc} + R_{a\alpha\gamma}^{be} \Lambda_\beta^{\gamma c} - R_{a\beta\gamma}^{ce} \Lambda_\alpha^{\gamma b} + \Gamma_{a\gamma}^e \Lambda_{[\alpha\beta]}^{\gamma[bc]} \right) \omega_e \equiv 0, \\ & \Delta R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} + \left(R_{\alpha\beta\mu}^{abe} \Lambda_\gamma^{\mu c} + R_{\alpha\mu\gamma}^{aec} \Lambda_\beta^{\mu b} + \Gamma_{\alpha\mu}^{ae} \Lambda_{[\beta\gamma]}^{\mu[bc]} \right) \omega_e + R_{\alpha\beta\mu}^{bc} \omega^\mu + \left(\delta_e^a R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu bc} - \delta_\alpha^\mu R_{e\beta\gamma}^{abc} \right) \omega_\mu^e - R_{\beta\gamma}^{abc} \omega_\alpha \equiv 0, \\ & \Delta R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} + \left(R_{\beta\gamma\eta}^{\alpha ac} \Lambda_\mu^{\eta b} + R_{\beta\eta\mu}^{\alpha cb} \Lambda_\gamma^{\eta a} - \delta_\beta^\alpha R_{\gamma\mu}^{cab} + \Gamma_{\beta\eta}^{\alpha c} \Lambda_{[\gamma\mu]}^{\eta[ab]} \right) \omega_c + \delta_\beta^\alpha R_{c\gamma\mu}^{ab} \omega^c - \left(\delta_\beta^\alpha \Lambda_{[\gamma\mu]}^{\eta[ab]} + \delta_\beta^\eta \Lambda_{[\gamma\mu]}^{\alpha[ab]} \right) \omega_\eta \equiv 0, \\ & \Delta R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} + \left(R_{\alpha\beta\gamma}^{cab} + R_{\alpha\beta\mu}^{ac} \Lambda_\gamma^{\mu b} + R_{\alpha\mu\gamma}^{cb} \Lambda_\beta^{\mu a} + \Gamma_{\alpha\mu}^c \Lambda_{[\beta\gamma]}^{\mu[ab]} \right) \omega_c - R_{c\beta\gamma}^{ab} \omega_\alpha^c + R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu ab} \omega_\mu \equiv 0. \end{aligned}$$

Учитывая условие симметрии $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha ba}$ для пфаффовых производных фундаментального объекта 1-го порядка, последние сравнения упростятся

$$\begin{aligned} & \Delta R_{b\alpha\beta}^{ace} + \left(R_{b\alpha\gamma}^{acd} \Lambda_\beta^{\gamma e} + R_{b\gamma\beta}^{ade} \Lambda_\alpha^{\gamma c} - \delta_b^a R_{\alpha\beta}^{dce} - \delta_b^d R_{\alpha\beta}^{ace} \right) \omega_d + \left(\delta_b^a R_{d\alpha\beta}^{ce} + \delta_d^a R_{b\alpha\beta}^{ce} \right) \omega^d \equiv 0, \\ & \Delta R_{\alpha\beta}^{abc} + \left(R_{\alpha\gamma}^{abe} \Lambda_\beta^{\gamma c} + R_{\gamma\beta}^{aec} \Lambda_\alpha^{\gamma b} \right) \omega_e - R_{e\alpha\beta}^{abc} \omega^e \equiv 0, \\ & \Delta R_{a\alpha\beta}^{bc} + \left(R_{a\alpha\beta}^{ebc} + R_{a\alpha\gamma}^{be} \Lambda_\beta^{\gamma c} - R_{a\beta\gamma}^{ce} \Lambda_\alpha^{\gamma b} \right) \omega_e \equiv 0, \\ & \Delta R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} + \left(R_{\alpha\beta\mu}^{abe} \Lambda_\gamma^{\mu c} + R_{\alpha\mu\gamma}^{aec} \Lambda_\beta^{\mu b} \right) \omega_e + R_{\alpha\beta\mu}^{bc} \omega^\mu + \left(\delta_e^a R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu bc} - \delta_\alpha^\mu R_{e\beta\gamma}^{abc} \right) \omega_\mu^e - R_{\beta\gamma}^{abc} \omega_\alpha \equiv 0, \\ & \Delta R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} + \left(R_{\beta\gamma\eta}^{\alpha ac} \Lambda_\mu^{\eta b} + R_{\beta\eta\mu}^{\alpha cb} \Lambda_\gamma^{\eta a} - \delta_\beta^\alpha R_{\gamma\mu}^{cab} \right) \omega_c + \delta_\beta^\alpha R_{c\gamma\mu}^{ab} \omega^c \equiv 0, \\ & \Delta R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} + \left(R_{\alpha\beta\gamma}^{cab} + R_{\alpha\beta\mu}^{ac} \Lambda_\gamma^{\mu b} + R_{\alpha\mu\gamma}^{cb} \Lambda_\beta^{\mu a} \right) \omega_c - R_{c\beta\gamma}^{ab} \omega_\alpha^c + R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu ab} \omega_\mu \equiv 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2. *Объект кривизны R связности Γ на комплексе $K_{(n-m)m}$ является псевдотензором (см. [24]), который содержит два подпсевдотензора $R_1 = \{R_{e\alpha\beta}^{abc}, R_{\alpha\beta}^{abc}, R_{c\alpha\beta}^{ab}\}$ и $R_2 = \{R_1, R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab}\}$.*

Доказательство следует из сравнений (15).

7. Объект кручения. Учитывая в структурных уравнениях (9) базисных форм формы связности, находим

$$D\omega_a^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \tilde{\omega}_a^b - \delta_a^b \tilde{\omega}_\alpha^a + \Lambda_\beta^{\alpha b} \tilde{\omega}_a) \wedge \omega_b^\beta + S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} \omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma,$$

где компоненты объекта кручения S имеют вид

$$S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} = \delta_a^{[b} \Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha c]} - \delta_{[\beta}^\alpha \Gamma_{a\gamma]}^{[bc]} - \Lambda_{[\beta}^{\alpha[b} \Gamma_{a\gamma]}^{c]}.$$

Учитывая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты объекта связности Γ и компоненты фундаментального объекта 1-го порядка Λ , получим дифференциальные сравнения

$$\Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} + \left(2S_{a[\beta\mu}^{\alpha[be} \Lambda_\gamma^{\mu c]} + \delta_a^e M_{\beta\gamma}^{\alpha bc} \right) \omega_e \equiv 0 \pmod{\omega_a^\alpha},$$

где $M_{\beta\gamma}^{\alpha bc} = \delta_{[\beta}^\alpha \Gamma_{\gamma]}^{[bc]} + \Gamma_{\mu[\beta}^{\alpha[b} \Lambda_{\gamma]}^{\mu c]}$, причем

$$\Delta M_{\beta\gamma}^{\alpha bc} + 2M_{[\beta\mu}^{\alpha[be} \Lambda_\gamma^{\mu c]} \omega_e + S_{e\beta\gamma}^{\alpha bc} \omega^e \equiv 0,$$

откуда вытекает

Теорема 3. *Объект кручения S связности Γ на комплексе $K_{(n-m)m}$ является геометрическим объектом лишь в совокупности с компонентами $\{\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{\alpha}^{ab}\}$ подобъекта Γ_2 и фундаментальным объектом $\Lambda_{\beta}^{\alpha a}$.*

8. Композиционное оснащение комплекса. Оснащением многообразия называется процесс присоединения к точкам базы некоторых дополнительных геометрических образов в пространстве P_n , которые позволяют естественным образом определить связность в проективном расслоении [15], при этом связность индуцируется данным оснащением. Классические оснащения были рассмотрены в [15, 25]. К таким оснащениям относятся оснащение Картана и нормализация Нордена. Оснащения многообразий плоскостей были описаны в [23].

Осуществим композиционное оснащение (см. [26]) комплекса $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой плоскости L_m $(n - m - 1)$ -мерную плоскость C_{n-m-1} , не имеющую общих точек с плоскостью L_m , и точку $C = A + \lambda^a A_a$.

Замечание 8. Плоскость C_{n-m-1} является аналогом плоскости Э. Картана. Прямая сумма данной плоскости и плоскости L_m дает все проективное пространство P_n , т.е.

$$L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n.$$

Замечание 9. Точка $C = A + \lambda^a A_a$ принадлежит плоскости L_m и не принадлежит плоскости N_{m-1} — аналогу нормали 2-го рода А. П. Нордена. Прямая сумма данной точки и плоскости N_{m-1} дает плоскость L_m , т.е.

$$C \in L_m, \quad C \notin N_{m-1}, \quad C \oplus N_{m-1} = L_m.$$

Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $C_{\alpha} = A_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^a A_a + \lambda_{\alpha} A$.

Рассмотрим дифференциалы точек C_{α} , учтем в них деривационные формулы и выражения базисных точек плоскости C_{n-m-1} и точки C , свернем часть слагаемых при помощи оператора Δ . Тогда

$$\begin{aligned} dC_{\alpha} &= (\delta_{\alpha}^{\beta} \theta + \omega_{\alpha}^{\beta} + (\delta_{\gamma}^{\beta} \lambda_{\alpha}^a + \lambda_{\alpha} \Lambda_{\gamma}^{\beta a}) \omega_a^{\gamma}) C_{\beta} + (\Delta \lambda_{\alpha}^a + \lambda_{\alpha} \omega^a + \omega_{\alpha}^a - (\lambda_{\beta}^a \lambda_{\alpha}^b + \lambda_{\gamma}^a \lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\gamma b}) \omega_b^{\beta}) A_a + \\ &\quad + (\Delta \lambda_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^a \omega_a + \omega_{\alpha} - (\lambda_{\beta} \lambda_{\alpha}^a + \lambda_{\alpha} \lambda_{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\gamma a}) \omega_a^{\beta}) A, \\ dC &= (\theta + \lambda^a \omega_a - (\lambda_{\beta} \Lambda_{\alpha}^{\beta a} + \lambda^a \lambda_{\alpha}) \omega_a^{\alpha}) C + ((\Lambda_{\beta}^{\alpha a} + \delta_{\beta}^{\alpha} \lambda^a) \omega_a^{\beta}) C_{\alpha} + \\ &\quad + (\Delta \lambda^a - \lambda^a \lambda^b \omega_b + \omega^a + (\lambda^a \lambda^b \lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}^a \Lambda_{\alpha}^{\beta b} - \lambda_{\alpha}^a \lambda^b + \lambda^a \lambda_{\beta} \Lambda_{\alpha}^{\beta b}) \omega_b^{\alpha}) A_a. \end{aligned}$$

Данные уравнения можно переписать в виде сравнений

$$\begin{aligned} dC_{\alpha} &\equiv (\delta_{\alpha}^{\beta} \theta + \omega_{\alpha}^{\beta}) C_{\beta} + (\Delta \lambda_{\alpha}^a + \lambda_{\alpha} \omega^a + \omega_{\alpha}^a) A_a + (\Delta \lambda_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^a \omega_a + \omega_{\alpha}) A, \\ dC &\equiv (\theta + \lambda^a \omega_a) C + (\Delta \lambda^a - \lambda^a \lambda^b \omega_b + \omega^a) A_a. \end{aligned}$$

Требуя относительную инвариантность оснащающей плоскости C_{n-m-1} и точки C , из данных сравнений получим дифференциальные уравнения для компонент оснащающего геометрического объекта $\lambda = \{\lambda_{\alpha}^a, \lambda_{\alpha}, \lambda^a\}$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda^a - \lambda^a \lambda^b \omega_b + \omega^a &= \lambda_{\alpha}^{ab} \omega_b^{\alpha}, \\ \Delta \lambda_{\alpha}^a + \lambda_{\alpha} \omega^a + \omega_{\alpha}^a &= \lambda_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^{\beta}, \\ \Delta \lambda_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^a \omega_a + \omega_{\alpha} &= \lambda_{\alpha\beta}^a \omega_b^{\beta}. \end{aligned} \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения (16) можно записать в виде сравнений по модулю базисных форм ω_a^{α}

$$\begin{aligned} \Delta \lambda^a - \lambda^a \lambda^b \omega_b + \omega^a &\equiv 0, \\ \Delta \lambda_{\alpha}^a + \lambda_{\alpha} \omega^a + \omega_{\alpha}^a &\equiv 0, \\ \Delta \lambda_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^a \omega_a + \omega_{\alpha} &\equiv 0, \end{aligned} \tag{17}$$

откуда следует

Теорема 4. *Оснащающий геометрический объект $\lambda = \{\lambda_{\alpha}^a, \lambda_{\alpha}, \lambda^a\}$ является квазитензором.*

9. Связность 1-го типа.

Теорема 5. Композиционное оснащение комплекса $K_{(n-m)t}$ позволяет задать связность (1-го типа) в ассоциированном расслоении.

Доказательство. Учитывая дифференциальные сравнения

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{b\alpha}^{ac} + (\Gamma_{b\beta}^{ae}\Lambda_{\alpha}^{\beta c} - \delta_b^a\Gamma_{\alpha}^{ec} - \delta_b^e\Gamma_{\alpha}^{ac})\omega_e + (\delta_b^a\Gamma_{e\alpha}^c + \delta_e^a\Gamma_{b\alpha}^c)\omega_e^e + \delta_b^c\omega_{\alpha}^a - \delta_b^a\Lambda_{\alpha}^{\beta c}\omega_{\beta} &\equiv 0, \\ \Delta\Gamma_{\alpha}^{ab} + \Gamma_{\beta}^{ac}\Lambda_{\alpha}^{\beta b}\omega_c - \Gamma_{e\alpha}^{ab}\omega_e^e + \Lambda_{\alpha}^{\beta b}\omega_{\beta}^a &\equiv 0, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac}\Lambda_{\beta}^{\gamma b}\omega_c + (\delta_c^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_{\alpha}^{\gamma}\Gamma_{c\beta}^{ab})\omega_{\gamma}^c - \Gamma_{\beta}^{ab}\omega_{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^b\omega^a &\equiv 0, \\ \Delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + (\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha b}\Lambda_{\gamma}^{\mu a} - \delta_{\beta}^{\alpha}\Gamma_{\gamma}^{ba})\omega_b + \delta_{\beta}^{\alpha}\Gamma_{b\gamma}^a\omega^b - (\delta_{\beta}^{\mu}\Lambda_{\gamma}^{\alpha a} + \delta_{\beta}^{\alpha}\Lambda_{\gamma}^{\mu a})\omega_{\mu} - \delta_{\gamma}^{\alpha}\omega_{\beta}^a &\equiv 0, \\ \Delta\Gamma_{a\alpha}^b + (\Gamma_{a\alpha}^{cb} + \Gamma_{a\beta}^c\Lambda_{\alpha}^{\beta b})\omega_c + \delta_a^b\omega_{\alpha} &\equiv 0, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + (\Gamma_{\alpha\gamma}^b\Lambda_{\beta}^{\gamma a} + \Gamma_{\alpha\beta}^{ba})\omega_b - \Gamma_{b\beta}^a\omega_{\alpha}^b + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_{\gamma} &\equiv 0, \end{aligned}$$

соответствующие уравнениям (14) на компоненты объекта связности Γ , и сравнения (17) компонент оснащающего квазитензора λ , получим, что оснащающий квазитензор λ позволяет охватить компоненты объекта групповой связности следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{a\alpha}^b &= \delta_a^b\lambda_{\alpha}, & \Gamma_{\alpha}^{ab} &= \Lambda_{\alpha}^{\beta b}\lambda_{\beta}^a, \\ \Gamma_{b\alpha}^{ac} &= \delta_b^c\lambda_{\alpha}^a - \delta_b^a\Lambda_{\alpha}^{\beta c}\lambda_{\beta}, & \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} &= \lambda_{\gamma}^a M_{\alpha\beta}^{\gamma b}, \\ \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} &= M_{\beta\gamma}^{\alpha a} - \delta_{\beta}^{\alpha}\Lambda_{\gamma}^{\mu a}\lambda_{\mu}, & \Gamma_{\alpha\beta}^a &= \lambda_{\gamma} M_{\alpha\beta}^{\gamma a}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $M_{\beta\gamma}^{\alpha a} = -(\delta_{\gamma}^{\alpha}\lambda_{\beta}^a + \Lambda_{\gamma}^{\alpha a}\lambda_{\beta})$. □

Обозначим первый охват через

$$\Gamma = \left\{ \Gamma_{a\alpha}^b, \Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{\alpha}^{ab}, \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}, \Gamma_{\alpha\beta}^a \right\}.$$

10. Связность 2-го типа. Внесем в дифференциальные уравнения (16) формы связности $\tilde{\omega}$ (13), получим выражения ковариантных дифференциалов компонент объекта λ через ковариантные производные

$$\nabla\lambda^a = \nabla_{\alpha}^b\lambda^a\omega_b^{\alpha}, \quad \nabla\lambda_{\alpha}^a = \nabla_{\beta}^b\lambda_{\alpha}^a\omega_b^{\beta}, \quad \nabla\lambda_{\alpha} = \nabla_{\beta}^a\lambda_{\alpha}\omega_a^{\beta},$$

где ковариантные дифференциалы компонент объекта λ имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla\lambda^a &= d\lambda^a + \lambda^b\tilde{\omega}_b^a - \lambda^a\lambda^b\tilde{\omega}_b + \tilde{\omega}^a, \\ \nabla\lambda_{\alpha}^a &= d\lambda_{\alpha}^a + \lambda_{\alpha}^b\tilde{\omega}_b^a - \lambda_{\beta}^a\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta} + \lambda_{\alpha}\tilde{\omega}^a + \tilde{\omega}_{\alpha}^a, \\ \nabla\lambda_{\alpha} &= d\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta} + \lambda_{\alpha}\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_{\alpha}, \end{aligned}$$

а ковариантные производные выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}^b\lambda^a &= \lambda_{\alpha}^{ab} - \lambda^c\Gamma_{c\alpha}^{ab} + \lambda^a\lambda^c\Gamma_{c\alpha}^b - \Gamma_{\alpha}^{ab}, \\ \nabla_{\beta}^b\lambda_{\alpha}^a &= \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_{\alpha}^c\Gamma_{c\beta}^{ab} + \lambda_{\gamma}^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \lambda_{\alpha}\Gamma_{\beta}^{ab} - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}, \\ \nabla_{\beta}^a\lambda_{\alpha} &= \lambda_{\alpha\beta}^a + \lambda_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a} - \lambda_{\alpha}^b\Gamma_{b\beta}^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a. \end{aligned}$$

Продолжая дифференциальные уравнения (16), находим

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\alpha}^{ab} + F_{\alpha}^{\beta b}\omega_{\beta}^a - \lambda^a F_{\alpha}^{\beta b}\omega_{\beta} + (\Lambda_{\alpha}^{\beta b}\lambda_{\beta}^{ac} - \lambda_{\alpha}^{ab}\lambda^c - \lambda_{\alpha}^{cb}\lambda^a)\omega_c &\equiv 0, \\ \Delta\lambda_{\alpha\beta}^a + \lambda_{\beta}\omega_{\alpha}^a + (\Lambda_{\beta}^{\gamma a}\lambda_{\alpha\gamma}^b + \lambda_{\alpha\beta}^{ba})\omega_b + (-M_{\alpha\beta}^{\gamma a} + \delta_{\alpha}^{\gamma}\Lambda_{\beta}^{\mu a}\lambda_{\mu})\omega_{\gamma} &\equiv 0, \\ \Delta\lambda_{\alpha\beta}^{ab} + (-\delta_c^a M_{\alpha\beta}^{\gamma b} + \delta_c^b\delta_{\alpha}^{\gamma}\lambda_{\beta}^a)\omega_{\gamma}^c + \Lambda_{\beta}^{\gamma b}\lambda_{\alpha\gamma}^a\omega_{\alpha} + \Lambda_{\beta}^{\gamma b}\lambda_{\alpha\gamma}^{ac}\omega_c + \lambda_{\alpha\beta}^b\omega^a &\equiv 0, \end{aligned}$$

где $F_{\alpha}^{\beta b} = \Lambda_{\alpha}^{\beta b} + \delta_{\alpha}^{\beta}\lambda^b$.

Теорема 6. Ковариантные производные оснащающего квазитензора λ в групповой связности Γ образуют тензор.

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из дифференциальных сравнений для ковариантных производных

$$\begin{aligned}\Delta \nabla_{\alpha}^b \lambda^a + (\Lambda_{\alpha}^{\beta b} \nabla_{\beta}^c \lambda^a - \lambda^a \nabla_{\alpha}^b \lambda^c - \lambda^c \nabla_{\alpha}^b \lambda^a) \omega_c &\equiv 0, \\ \Delta \nabla_{\beta}^b \lambda_{\alpha}^a + \nabla_{\beta}^b \lambda_{\alpha} \omega^a + \Lambda_{\beta}^{\gamma b} \nabla_{\gamma}^c \lambda_{\alpha}^a \omega_c &\equiv 0, \\ \Delta \nabla_{\beta}^a \lambda_{\alpha} + (\nabla_{\beta}^a \lambda_{\alpha}^b + \Lambda_{\beta}^{\gamma a} \nabla_{\gamma}^b \lambda_{\alpha}) \omega_b &\equiv 0.\end{aligned}$$

□

Из данной теоремы вытекает инвариантность обращения в нуль ковариантных производных компонент оснащающего квазитензора λ . Приравнивая их нулю и учитывая формулы (18) для компонент $\Gamma_{a\alpha}^b$, $\Gamma_{b\alpha}^{ac}$, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}$, найдем выражения остальных компонент объекта связности Γ

$$\begin{aligned}\overset{02}{\Gamma}_{\alpha}^{ab} &= \lambda_{\alpha}^{ab} + \Lambda_{\alpha}^{\beta b} \lambda_{\beta}^a - \lambda^b \mu_{\alpha}^a, \\ \overset{02}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{ab} &= \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}^{ab} + 2\lambda_{\gamma}^a M_{\alpha\beta}^{\gamma b} + \lambda_{\alpha} \lambda^b \mu_{\beta}^a, \\ \overset{02}{\Gamma}_{\alpha\beta}^a &= \lambda_{\alpha\beta}^a + 2\lambda_{\gamma} M_{\alpha\beta}^{\gamma a},\end{aligned}\tag{19}$$

где $\mu_{\alpha}^a = \lambda_{\alpha}^a - \lambda^a \lambda_{\alpha}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Композиционное оснащение комплекса $K_{(n-m)m}$ позволяет задать связность (2-го типа)

$$\overset{02}{\Gamma} = \left\{ \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}^b, \overset{0}{\Gamma}_{b\alpha}^{ac}, \overset{0}{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \overset{02}{\Gamma}_{\alpha}^{ab}, \overset{02}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{ab}, \overset{02}{\Gamma}_{\alpha\beta}^a \right\}$$

в ассоциированном расслоении.

11. Связность 3-го типа. Если предположить, что связность 1-го типа является средней (см., например, [5]) по отношению к двум связностям, одной из которых является связность 2-го типа, а другой — некоторая связность 3-го типа, т.е.

$$\overset{01}{\Gamma} = \frac{1}{2} \left(\overset{02}{\Gamma} + \overset{03}{\Gamma} \right),$$

то, учитывая равенства (18) и (19), получим

$$\begin{aligned}\overset{03}{\Gamma}_{\alpha}^{ab} &= -\lambda_{\alpha}^{ab} + \Lambda_{\alpha}^{\beta b} (\lambda_{\beta}^a + \mu_{\beta}^a) + \lambda^b \mu_{\alpha}^a, \\ \overset{03}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{ab} &= -\lambda_{\alpha\beta}^{ab} + \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}^{ab} - \lambda_{\alpha} \lambda^b \mu_{\beta}^a, \\ \overset{03}{\Gamma}_{\alpha\beta}^a &= -\lambda_{\alpha\beta}^a.\end{aligned}\tag{20}$$

Теорема 8. Композиционное оснащение комплекса $K_{(n-m)m}$ позволяет задать связность (3-го типа)

$$\overset{03}{\Gamma} = \left\{ \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}^b, \overset{0}{\Gamma}_{b\alpha}^{ac}, \overset{0}{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \overset{03}{\Gamma}_{\alpha}^{ab}, \overset{03}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{ab}, \overset{03}{\Gamma}_{\alpha\beta}^a \right\}$$

в ассоциированном расслоении.

Доказательство следует из первых выражений (18) и формул (20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белова О. О. Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2000. — № 31. — С. 8–11.
2. Белова О. О. Геометрическая характеристика индуцированных связностей центрированного многообразия Грассмана // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 10–13.

3. Белова О. О. Связность 2-го типа в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2007. — № 38. — С. 6–12.
4. Белова О. О. Геометрическая характеристика индуцированных связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2008. — № 39. — С. 13–18.
5. Белова О. О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 2. — С. 29–67.
6. Белова О. О. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 6. — С. 812–822.
7. Белова О. О. Редукция расслоений грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей при нормализации// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 180. — С. 3–8.
8. Близникас В. И. Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексных прямых// Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1974. — 6. — С. 43–111.
9. Бубякин И. В. О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 с единственным торсом// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — 24, № 2. — С. 3–12.
10. Бубякин И. В. О строении комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащих конечное число торсов// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — 24, № 4. — С. 3–16.
11. Жовтенко О. М. Роль оснащения Бортолотти конгруэнции плоскостей Диффер. геом. многообр. фигур. — 2000. — № 31. — С. 31–36.
12. Коннов В. В. Об одном условии редуцируемости главных расслоений и его применении в проективной геометрии подмногообразий Фундам. прикл. мат. — 2001. — 7, № 4. — С. 1003–1035.
13. Кулешов А. В. Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2010. — № 41. — С. 75–85.
14. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — 2. — С. 275–382.
15. Лумисте Ю. Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях// Уч. зап. Тартус. ун-та. — 1965. — 177. — С. 6–41.
16. Никитина Е. С., Бубякин И. В. К геометрии многообразия Сегре $S(m, n)$ // Мат. заметки СВФУ. — 2004. — С. 57–62.
17. Полякова К. В. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием пар касательной и соприкасающейся плоскостей поверхности// Тр. геом. сем. Казан. ун-та. — 1997. — 23. — С. 99–112.
18. Полякова К. В. Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 2. — С. 129–177.
19. Полякова К. В. Обобщение деривационных формул проективного пространства// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2009. — № 40. — С. 109–117.
20. Полякова К. В. Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — 105, № 1. — С. 84–94.
21. Полякова К. В., Шевченко Ю. И. Способ Лаптева—Лумисте задания связности и горизонтальные векторы// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2012. — № 43. — С. 114–121.
22. Сафонов Д. А. Обобщенная аффинная связность и ее вырождение в аффинную связность// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — № 45. — С. 120–125.
23. Шевченко Ю. И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1978. — № 9. — С. 124–133.
24. Шевченко Ю. И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград: КГУ, 1998.
25. Шевченко Ю. И. Оснащения подмногообразий голономного и неголономного центропроективных многообразий// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1997. — № 28. — С. 86–98.
26. Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. — Калининград: КГУ, 2000.
27. Шевченко Ю. И. Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 185–193.
28. Шевченко Ю. И. Вырождение плоскостной аффинной связности Столярова// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 2. — С. 155–161.
29. Aikivis M. A., Goldberg V. V. Projective Differential Geometry of Submanifolds. — North-Holland, 1993.
30. Belova O. The third type bunch of connections induced by an analog of Norden's normalization for the Grassmann-like manifold of centered planes// Miskolc Math. Notes. — 2013. — 14, № 2. — P. 557–560.

31. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes// Mathematics. — 2021. — 9, № 7. — 782.
32. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Univ. Palackého, 2015.
33. *Polyakova K. V.* Prolongations generated by horizontal vectors// J. Geom. — 2019. — 110. — 53.

Белова Ольга Олеговна

Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Калининград

E-mail: olgaobelova@mail.ru



БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ С РАСТУЩЕЙ СТЕПЕНЬЮ

© 2023 г. В. М. БУРЛАКОВ

Аннотация. В статье рассматриваются бесконечные произведения биномов с растущей степенью переменной. Даны формулы для вычисления степенных коэффициентов в бесконечных произведениях, представляющих гладкие функции. Приводится условие сходимости бесконечных произведений с растущей степенью.

Ключевые слова: бесконечное произведение, разложение функций, экспоненциальная функция.

INFINITE PRODUCTS OF BINOMIALS WITH INCREASING DEGREE

© 2023 V. M. BURLAKOV

ABSTRACT. In this paper, we considered infinite products of binomials with increasing degree of the variable. We present formulas for calculating power coefficients in infinite products representing smooth functions and propose a condition for the convergence of infinite products with increasing degree.

Keywords and phrases: infinite product, function expansion, exponential function.

AMS Subject Classification: 05A15, 11A25, 26A99

Простейшим бесконечным произведением биномов с растущей степенью переменной можно считать переразложение суммы бесконечной геометрической прогрессии в произведение в следующем тождестве

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^k + \dots = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots (1 + x^{2^n}) \dots \quad (1)$$

Для $x \in (-1; 1)$ это бесконечное произведение биномов с растущей степенью сходится и даёт представление функции $f(x) = (1 - x)^{-1}$, то т.е.

$$(1 - x)^{-1} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) \quad (2)$$

Обобщением формулы (2) будут следующие разложения гладких функций $f(x)$ в бесконечные произведения биномов с растущей степенью

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^n)^{a_n} \quad \text{или} \quad f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - x^n)^{b_n}, \quad (3)$$

которые при некоторых a_n и b_n впервые рассматривал Эйлер [5]. При этом согласно критерию сходимости бесконечных произведений [1], такие произведения будут сходиться тогда и только тогда, когда будут сходиться следующие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ln(1 + x^n) \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ln(1 - x^n)$$

Как отыскать коэффициенты a_n и b_n в этих тождествах? Рассмотрим сначала, как найти коэффициенты b_n . Для этого надо второе тождество (3) прологарифмировать, а затем продифференцировать:

$$\begin{aligned} -\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{b_1}{1-x} + \frac{2b_2x}{1-x^2} + \frac{3b_3x^2}{1-x^3} + \dots + \frac{nb_nx^{n-1}}{1-x^n} + \dots = \\ &= b_1(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n+\dots)+ \\ &+ 2b_2(x+x^3+x^5+x^7+x^9+\dots+x^{2n+1}+\dots)+ \\ &+ 3b_3(x^2+x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+\dots+x^{3n+2}+\dots)+\dots+ \\ &+ mb_m(x^{m-1}+x^{2m-1}+x^{3m-1}+x^{4m-1}+\dots+x^{mn+m-1}+\dots)+\dots \end{aligned}$$

Если положить

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots,$$

то для отыскания b_k получим систему линейных уравнений

$$\sum_{k/m} kb_k = c_{m-1}. \quad (4)$$

В частности, для $f(x) = e^x$ будем иметь $-f'(x)/f(x) = -1$, и из (4) получим $b_n = -\mu(n)/n$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса [2, 3], т.е.

$$e^x = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\mu(n)/n}. \quad (5)$$

Если же взять функцию $f(x) = e^{x^m}$, то $-f'(x)/f(x) = -mx^{m-1}$, и из (4) получим, что

$$e^{x^m} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\frac{m}{n}\mu(\frac{n}{m})}, \quad (6)$$

где полагаем, что $\mu(q) = 0$, если q не целое число. При этом можно утверждать, что бесконечные произведения (4) и (5) сходятся на интервале $(-1; 1)$, поскольку ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \ln(1-x^n)$$

мажорируются рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-x^n),$$

который сходится на указанном интервале [4]

И теперь, располагая тождествами (5) и (6), можем произвольную экспоненциальную функцию $f(x) = \exp(q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \dots + q_mx^m + \dots)$ представить бесконечным произведением биномов с растущей степенью:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp q_0 \cdot \exp q_1x \cdot \exp q_2x^2 \cdot \exp q_3x^3 \cdot \dots \cdot \exp q_mx^m \cdot \dots = \\ &= e^{q_0} \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\frac{\mu(n)q_1}{n}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\frac{2}{n}\mu(\frac{n}{2})q_2} \dots \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\frac{m}{n}\mu(\frac{n}{m})q_m} \dots \end{aligned}$$

и таким образом для экспоненциальной функции получаем

$$f(x) = \exp \sum_{m=0}^{\infty} q_mx^m = e^{q_0} \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{n} \mu(\frac{n}{m}) q_m} \quad (7)$$

Хотя формально в показателях степеней биномов стоят бесконечные суммы, на самом деле для каждого n эти суммы будут конечными:

$$f(x) = \exp \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m = e^{q_0} (1-x)^{-q_1} \cdot (1-x^2)^{\frac{q_1}{2}-q_2} \cdot (1-x^2)^{\frac{q_1}{3}-q_3} \cdot \dots$$

В системе линейных уравнений (4) сумму по делителям натуральных чисел n можно заменить суммой по всем натуральным $m \leq n$. Для этого введём в рассмотрение так называемые *мигающие функции* (см. [2]), которые можно определить следующей формулой

$$\beta_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi h n i}{m}\right),$$

и которые принимают такие значения

$$\beta_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = km, \\ 0, & \text{если } n \neq km. \end{cases}$$

Тогда систему уравнений (4) можно переписать в таком виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k \beta_k(n) = c_{n-1}, \quad (8)$$

а её решение находить по формулам Крамера через мигающие функции:

$$b_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \beta_1(1) & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ \beta_1(2) & 2\beta_2(2) & \dots & 0 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \beta_1(n-1) & 2\beta_2(n-1) & \dots & (n-1)\beta_{n-1}(n-1) & c_{n-1} \\ \beta_1(n) & 2\beta_2(n) & \dots & (n-1)\beta_{n-1}(n) & c_n \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Система (8) удобна ещё тем, что формула (9) даёт общий член последовательности b_n , если она уже задана тем или иным способом. Например, известно, что $b_n = -\mu(n)/n$ для функции $\exp x$. И тогда (9) даёт нам такую формулу для функции Мёбиуса:

$$\mu(n) = \begin{vmatrix} \beta_1(1) & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \beta_1(2) & \beta_2(2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \beta_1(n-1) & \beta_2(n-1) & \dots & \beta_{n-1}(n-1) & 0 \\ \beta_1(n) & \beta_2(n) & \dots & \beta_{n-1}(n) & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим ещё такое тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \beta_k(m) x^{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) x^{n-1}$$

где $S(n) = \beta_1(n) + 2\beta_2(n) + 3\beta_3(n) + \dots + n\beta_n(n)$ — сумма делителей числа n . Отсюда

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n t^{n-1} dt}{1-t^n} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-x^n) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} S(n) t^{n-1} dt \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S(m) x^m}{m},$$

то есть

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1} = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S(m) x^m}{m}. \quad (10)$$

Как заметил Эйлер [5], в тождестве

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) x^n$$

коэффициенты $L(n)$ дают количество представлений числа n другими натуральными числами. Поэтому из (10) получаем, что

$$L(n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S(m)x^m}{m} \right) \Big|_{x=0}.$$

Возьмём ещё такое тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_k(m) x^{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^{n-1},$$

где $\tau(n) = \beta_1(n) + \beta_2(n) + \beta_3(n) + \dots + \beta_n(n)$ — количество делителей числа n . Интегрируя его, получим, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\frac{1}{n}} = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)x^m}{m}. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь первое из тождеств (3). Для того чтобы найти коэффициенты a_n введём в рассмотрение арифметические функции $\gamma_m(n) = e^{\pi n i / m} \beta_m(n)$. Тогда прологарифмировав и продифференцировав первую из формул (3), получим следующие тождества:

$$\begin{aligned} -\frac{f'(x)}{f(x)} &= -\frac{a_1}{1+x} - \frac{2a_2x}{1+x^2} - \frac{3a_3x^2}{1+x^3} - \dots - \frac{na_nx^{n-1}}{1+x^n} - \dots = \\ &= a_1(\gamma_1(1) + \gamma_1(2)x + \gamma_1(3)x^2 + \gamma_1(4)x^3 + \gamma_1(5)x^4 + \gamma_1(6)x^5 + \dots) + \\ &+ 2a_2(\gamma_2(1) + \gamma_2(2)x + \gamma_2(3)x^2 + \gamma_2(4)x^3 + \gamma_2(5)x^4 + \gamma_2(6)x^5 + \dots) + \dots + \\ &+ na_n(\gamma_n(1) + \gamma_n(2)x + \gamma_n(3)x^2 + \gamma_n(4)x^3 + \gamma_n(5)x^4 + \gamma_n(6)x^5 + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Откуда получается система уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k \gamma_k(n) = c_{n-1}, \quad (12)$$

для нахождения коэффициентов a_n в первой формуле (3) для произвольной (гладкой) функции.

Например, если взять $f(x) = (1-x)^{-1}$, то

$$-f'(x)/f(x) = -(1-x)^{-1} = -1 - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n - \dots,$$

и подставляя $c_n = -1$ в (12) получим $a_{2^n} = 1$ и $a_m = 0$ для $m \neq 2^n$, т.е. тождество (1).

Произведения, входящие в тождества (3), являются частными случаями произведения биномов $(1-zx^n)$. Как найти разложение произвольной функции в произведения таких биномов? Как и прежде, прологарифмируем и продифференцируем тождество

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-zx^n)^{a_n};$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned} -\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{a_1 z}{1-zx} + \frac{2a_2 zx}{1-zx^2} + \frac{3a_3 zx^2}{1-zx^3} + \dots + \frac{na_n zx^{n-1}}{1-zx^n} + \dots = \\ &= a_1(z + z^2x + z^3x^2 + z^4x^3 + z^5x^4 + \dots) + \\ &+ 2a_2(zx + z^2x^3 + z^3x^5 + z^4x^7 + z^5x^9 + \dots) + \\ &+ 3a_3(zx^2 + z^2x^5 + z^3x^8 + z^4x^{11} + z^5x^{14} + \dots) + \dots = \\ &= a_1(\beta_1(1)z + \beta_1(2)z^2x + \beta_1(3)z^3x^2 + \beta_1(4)z^4x^3 + \beta_1(5)z^5x^4 + \dots) + \\ &+ 2a_2(\beta_2(1)z^{\frac{1}{2}} + \beta_2(2)z^{\frac{2}{2}}x + \beta_2(3)z^{\frac{3}{2}}x^2 + \beta_2(4)z^{\frac{4}{2}}x^3 + \beta_2(5)z^{\frac{5}{2}}x^4 + \dots) + \\ &+ 3a_3(\beta_3(1)z^{\frac{1}{3}} + \beta_3(2)z^{\frac{2}{3}}x + \beta_3(3)z^{\frac{3}{3}}x^2 + \beta_3(4)z^{\frac{4}{3}}x^3 + \beta_3(5)z^{\frac{5}{3}}x^4 + \dots) + \dots = \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \beta_k z^{\frac{1}{k}} \right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \beta_k z^{\frac{2}{k}} \right) x + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \beta_k z^{\frac{3}{k}} \right) x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

и для вычисления a_n получаем такую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \beta_k(n) z^{\frac{n}{k}} = c_{n-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлаков М. П. Алгебраические структуры математического анализа. — Грозный: Изд-во ЧИГУ, 1991.
2. Бурлаков В. М., Бурлаков М. П. Мемуар о бесконечных произведениях. — М.: Изд-во «Ким», 2019.
3. Бурлаков В. М., Бурлаков М. П. Второй мемуар о бесконечных произведениях. — М.: Изд-во «Ким», 2020.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1969.
5. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 1. — М.: ГИФМЛ, 1961.

Валерий Михайлович Бурлаков
 Пензенский государственный университет
 E-mail: burlakovmihail@mail.ru



ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ

© 2023 г. И. М. БУРЛАКОВ

Аннотация. В статье рассматривается такое обобщение алгебр кватернионов и гиперкомплексных алгебр Клиффорда над полем комплексных чисел, при котором m -я степень вектора подстилающего пространства будет суммой m -х степеней координат этого вектора.

Ключевые слова: кватернионы, алгебры Клиффорда, циклические алгебры, групповые алгебры, процедура удвоения.

ON A GENERALIZATION OF THE QUATERNION ALGEBRA

© 2023 I. M. BURLAKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider a generalization of quaternion algebras and hypercomplex Clifford algebras over the field of complex numbers in which the m th power of a vector of the underlying space is the sum of the m th powers of the coordinates of this vector.

Keywords and phrases: quaternions, Clifford algebras, cyclic algebras, group algebras, doubling procedure.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 15A72

Открытие Гамильтоном кватернионов было знаковым событием в математике и послужило источником многих важных структур математики [1]. Обобщением кватернионов стали алгебры гиперкомплексных чисел Клиффорда, которые нашли приложения в разных разделах математики и теоретической физики [7].

Алгебры Клиффорда $\mathbf{K}_n$ устроены следующим образом. Пусть $\mathbf{V}_n$ — линейное n -мерное пространство и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ — некоторый его базис. Тогда базисом линейного пространства алгебры $\mathbf{K}_n$ над подстилающим пространством $\mathbf{V}_n$ будет совокупность мономов

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2 \dots k_r} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} \cdot \dots \cdot \mathbf{e}_{k_r},$$

где $k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$. Умножение в алгебре $\mathbf{K}_n$ задаётся на некотором базисе $\mathbf{V}_n$ следующими структурными уравнениями:

$$\mathbf{e}_k^2 = 1; \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = -\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k, \quad k \neq h; \quad (1)$$

на любые элементы алгебры $\mathbf{K}_n$ умножение распространяется по ассоциативности и дистрибутивности. При этом базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, векторы которого удовлетворяют структурным уравнениям, называется *каноническим*. Если $\mathbf{V}_n$ вещественное линейное пространство, то алгебра $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(\mathbb{R})$ будет вещественной, а в случае комплексных пространств $\mathbf{V}_n$ алгебра $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(\mathbb{C})$ будет комплексной.

Из (1) следует *фундаментальное тождество*

$$(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (2)$$

для любого вектора $x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in \mathbf{V}_n \subset \mathbf{K}_n$. Это тождество лежит в основе разнообразных приложений алгебр Клиффорда.

Алгебры $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(\mathbb{C})$ можно обобщить так, чтобы для любого $m \in \mathbf{N}$ выполнялось следующее *фундаментальное тождество*:

$$(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)^m = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m, \quad (3)$$

где $x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ — произвольный вектор n -мерного линейного комплексного пространства $\mathbf{V}_n$.

Серия таких алгебр (для каждого $m \geq 2$) получается, если для векторов некоторого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ в n -мерном линейном комплексном пространстве $\mathbf{V}_n$ задать такой закон умножения:

$$\mathbf{e}_k^m = 1, \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = \alpha_m \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k, \text{ если } k > h, \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = \alpha_m^{m-1} \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k, \text{ если } k < h, \quad (4)$$

где $\alpha_m = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m)$. Такие алгебры были введены в рассмотрение в начале 1970-х гг. М. П. Бурлаковым (см. [3, 6]). Они называются *элементарными алгебрами порядка m* и обозначаются $\mathbf{B}_n^m$. Базисом алгебры $\mathbf{B}_n^m$ будут мономы

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2 \dots k_n} = \mathbf{e}_1^{k_1} \cdot \mathbf{e}_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \mathbf{e}_n^{k_n},$$

где $0 \leq k < m$, так что произвольный элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_n^m$ имеет вид

$$\mathbf{x} = \sum x_{k_1 k_2 \dots k_n} \mathbf{e}_{k_1 k_2 \dots k_n},$$

и произведение базисных мономов по ассоциативности определяется структурными тождествами (4), а на произвольные элементы алгебры $\mathbf{B}_n^m$ переносится по дистрибутивности.

Структурные уравнения (4) обеспечивают выполнение фундаментального тождества (3). Для малых m и n его проверка не представляет труда. Например, если $m = 3$, и $n = 2$, то

$$(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2)^3 = x_1^3 + (1 + \alpha_3 + \alpha_3^2) x_1^2 x_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (1 + \alpha_3 + \alpha_3^2) x_1 x_2^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3,$$

так как $1 + \alpha_3 + \alpha_3^2 = 0$. Однако доказательство тождества (3) для любых элементарных алгебр — задача нетривиальная.

Есть разные варианты доказательства тождества (3), но, пожалуй, самое элегантное принадлежит В. П. Кузьмину. Прежде всего, заметим, что

$$(x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) \cdot (c \mathbf{e}_1 + b \mathbf{e}_2) = (c \mathbf{e}_1 + \alpha_m^{m-1} b \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2).$$

Отсюда получается такая цепочка тождеств

$$\begin{aligned} (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2)^m &= (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2)^{m-2} \cdot (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) = \\ &= (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2)^{m-2} \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m^{m-1} y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2) = \\ &= (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2)^{m-3} \cdot (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m^{m-1} y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2) = \\ &= (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2)^{m-4} \cdot (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m^{2(m-1)} y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2)^2 = \dots = \\ &= (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m^{(m-2)(m-1)} y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2)^{m-2} = \\ &= (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m^{(m-1)(m-1)} y \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2)^{m-1} = (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2)^m, \end{aligned}$$

так как $\alpha_m^{(m-1)(m-1)} = \alpha_m$. Таким образом,

$$\begin{aligned} (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2)^m &= \sum_{k=0}^m P_m^k(\alpha_m) x^{m-k} y^k \mathbf{e}_1^{m-k} \cdot \mathbf{e}_2^k = \\ &= (x \mathbf{e}_1 + \alpha_m y \mathbf{e}_2)^m = \sum_{k=0}^m \alpha_m^k P_m^k(\alpha_m) x^{m-k} y^k \mathbf{e}_1^{m-k} \cdot \mathbf{e}_2^k, \end{aligned}$$

поэтому $P_m^k(\alpha_m) = \alpha_m^k P_m^k(\alpha_m)$ или $(1 - \alpha_m^k) P_m^k(\alpha_m) = 0$, т.е. $P_m^k(\alpha_m) = 0$.

Таким образом, формула (3) доказана для любых m и $n = 2$. На любые значения n формула (3) распространяется по индукции. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1} \cdot (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) &= \alpha_m (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_{n+1}, \\ (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_{n+1} &= \alpha_m^{m-1} \mathbf{e}_{n+1} \cdot (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

то по уже доказанному получаем

$$\begin{aligned} ((x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) + x_{n+1} \mathbf{e}_{n+1})^m &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)^m + x_{n+1}^m = \\ &= x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m + x_{n+1}^m, \end{aligned}$$

и тождество (3) доказано полностью.

Очевидно, что $\mathbf{B}_n^2 = \mathbf{K}_n(\mathbb{C})$, т.е. алгебры $\mathbf{B}_n^m$ обобщают комплексные алгебры Клиффорда. В частности, алгебры $\mathbf{B}_2^m$ представляют собой обобщение комплексных кватернионов, так как $\mathbf{B}_2^2 = \mathbf{K}_2(\mathbb{C}) = \mathbf{H}(\mathbb{C})$. И многие свойства комплексных алгебр Клиффорда имеют свои аналоги в алгебрах $\mathbf{B}_n^m$.

1. Алгебры $\mathbf{K}_n(\mathbb{C})$ и $\mathbf{B}_n^m$ устроены одинаково: для алгебр Клиффорда

$$\mathbf{K}_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \overbrace{\mathbf{H}(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes \mathbf{H}(\mathbb{C})}^k, & \text{если } n = 2k, \\ \overbrace{\mathbf{H}(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes \mathbf{H}(\mathbb{C})}^k \otimes \mathbb{C}_2(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{12\dots n}$ и $\mathbb{C}_2(\mathbf{e})$ — циклическая алгебра второго порядка или алгебра двойных комплексных чисел, а для элементарных алгебр

$$\mathbf{B}_n^m = \begin{cases} \overbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \dots \otimes \mathbf{B}_2^m}^k, & \text{если } n = 2k, \\ \overbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \dots \otimes \mathbf{B}_2^m}^k \otimes \mathbb{C}_m(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases} \quad (5)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{e}_{2k-1} \cdot \mathbf{e}_{2k}^{m-1} \cdot \mathbf{e}_{2k+1}$ и $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ — циклическая алгебра порядка m , порождённая элементом $\mathbf{e}$.

Действительно, для $\mathbf{B}_1^m = \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$ и $\mathbf{B}_2^m$ формула (5) очевидна. Далее,

$$\mathbf{B}_3^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbb{C}_m(\mathbf{e}'_3),$$

где $\mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — алгебра, порождённая $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, а $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3$. Далее,

$$\mathbf{B}_4^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4),$$

где $\mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_4$. Затем

$$\mathbf{B}_5^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4) \otimes \mathbb{C}_2(\mathbf{e}'_5),$$

где $\mathbf{e}'_5 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \mathbf{e}_5$. Затем

$$\mathbf{B}_6^m = \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4) \otimes \mathbf{B}_2^m(\mathbf{e}'_5, \mathbf{e}'_6),$$

где $\mathbf{e}'_6 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6$. И так далее.

2. Обозначим через $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ центр алгебры $\mathbf{A}$. Как известно,

$$\mathbf{S}(\mathbf{K}_n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } n = 2k, \\ \mathbb{C}_2(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{12\dots n}$ и $\mathbb{C}_2(\mathbf{e})$ — комплексная циклическая алгебра второго порядка или алгебра двойных комплексных чисел. А для любой алгебры $\mathbf{B}_n^m$

$$\mathbf{S}(\mathbf{B}_n^m) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } n = 2k, \\ \mathbb{C}_m(\mathbf{e}), & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^{m-1} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4^{m-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{e}_{2k-1} \cdot \mathbf{e}_{2k}^{m-1} \cdot \mathbf{e}_{2k+1}$ и $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ — комплексная циклическая алгебра порядка m . Это сразу следует из (5).

Алгебры $\mathbf{B}_2^m$ являются обобщением алгебры комплексных кватернионов, и их свойства схожи со свойствами алгебры $\mathbf{H}(\mathbb{C}) = \mathbf{B}_2^2$. И так же, как среди алгебр гиперкомплексных чисел Клиффорда над полем комплексных чисел, алгебра $\mathbf{K}(\mathbb{C})_2$ имеет отдельное название алгебры

комплексных кватернионов, так и для алгебр $\mathbf{B}_2^m$ используется отдельное название алгебр *бионов m -го порядка*.

3. Любой элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_2^m$ можно записать так:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2^2 + \dots + \mathbf{x}_{m-1} \mathbf{e}_2^{m-1},$$

где $\mathbf{x}_k = x_{k0} + x_{k1} \mathbf{e}_1 + x_{k2} \mathbf{e}_1^2 + \dots + x_{km-1} \mathbf{e}_1^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$, подобно тому, как для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{e}_2, \quad \text{где} \quad \mathbf{x}_0 = x_{00} + x_{01} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x}_1 = x_{10} + x_{11} \mathbf{e}_1,$$

т.е. алгебры бионов получаются удвоением алгебр циклических чисел $\mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$, так же, как алгебра комплексных кватернионов получается удвоением алгебры двойных чисел $\mathbb{C}_2(\mathbf{e}_1)$.

4. Чтобы сформулировать следующее свойство бионов, имеющее аналог в алгебре комплексных кватернионов, надо обобщить на алгебру $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ операцию сопряжения двойных чисел.

Для любого $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{e} + x_2 \mathbf{e}^2 + \dots + x_{m-1} \mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, циклическое число

$$\mathbf{x}(\alpha_m) = x_0 + \alpha_m x_1 \mathbf{e} + \alpha_m^2 x_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \alpha_m^{m-1} x_{m-1} \mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$$

называется *резольвентой* $\mathbf{x}$, а оператор $\hat{\alpha}_m: \mathbb{C}_m(\mathbf{e}) \rightarrow \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, такой, что $\hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\alpha_m)$ называется *резольвентным оператором*. При этом $\hat{\alpha}_2(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}$ для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_2(\mathbf{e})$, т.е. резольвентный оператор представляет собой обобщение оператора сопряжения в алгебре двойных комплексных чисел на алгебры циклических чисел любых порядков. И так же, как сопряжение, оператор $\hat{\alpha}_m$ является m -инволютивным автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, т.е.

$$\hat{\alpha}_m(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) + \hat{\alpha}_m(\mathbf{y}), \quad \hat{\alpha}_m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\alpha}_m(\mathbf{y}), \quad \hat{\alpha}_m^m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$.

5. Для любого $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{e} + x_2 \mathbf{e}^2 + \dots + x_{m-1} \mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e}) \subset \mathbf{B}_2^m$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} = \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{e}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \hat{\alpha}_m^{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}),$$

так же, как для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_2(\mathbf{e}_1) \subset \mathbf{B}_2^2 \equiv \mathbf{H}(\mathbb{C})$ имеем такое тождество: $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_2$.

6. В алгебре $\mathbf{B}_2^m$ линейное уравнение $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}$ эквивалентно системе линейных уравнений в алгебре $\mathbf{B}_2^m \equiv \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_1)$ с определителем

$$\Delta(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_{m-1}(\alpha_m) & \dots & \mathbf{b}_1(\alpha_m^{m-1}) \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0(\alpha_m) & \dots & \mathbf{b}_2(\alpha_m^{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{b}_{m-1} & \mathbf{b}_{m-2}(\alpha_m) & \dots & \mathbf{b}_0(\alpha_m^{m-1}) \end{vmatrix},$$

так как

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2^2 \dots \mathbf{x}_{m-1} \mathbf{e}_2^{m-1}) \cdot (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{b}_2 \mathbf{e}_2^2 \dots \mathbf{b}_{m-1} \mathbf{e}_2^{m-1}) \\ &= (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{b}_0 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}_{m-1}(\alpha_m) + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{b}_{m-2}(\alpha_m^2) + \dots + \mathbf{x}_{m-1} \cdot \mathbf{b}_1(\alpha_m^{m-1})) + \\ &+ (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}_0(\alpha_m) + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{b}_{m-1}(\alpha_m^2) + \dots + \mathbf{x}_{m-1} \cdot \mathbf{b}_2(\alpha_m^{m-1})) \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + \\ &+ (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{b}_{m-1} + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}_{m-2}(\alpha_m) + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{b}_{m-3}(\alpha_m^2) + \dots + \mathbf{x}_{m-1} \cdot \mathbf{b}_0(\alpha_m^{m-1})) \cdot \mathbf{e}_2^{m-1}. \end{aligned}$$

Величина $\Delta(\mathbf{b})$ называется *детерминантом* элемента $\mathbf{b} \in \mathbf{B}_2^m$. При этом, если

$$\mathbf{b} = b_0 + b_1 \mathbf{e}_2 + b_2 \mathbf{e}_2^2 + \dots + b_{m-1} \mathbf{e}_2^{m-1} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e}_2) \subset \mathbf{B}_2^m,$$

где $b_k \in \mathbb{C}$, то

$$\Delta(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} b_0 & b_{m-1} & \dots & b_1 \\ b_1 & b_0 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_0 \end{vmatrix},$$

и $\Delta(\mathbf{b})$ будет называться *детерминантом циклического числа $\mathbf{b}$* .

Детерминант элемента $\mathbf{b} \in \mathbf{B}_2^m$ обладает такими свойствами: во-первых, $\Delta(\mathbf{b}) \in \mathbb{C}$, во-вторых, $\Delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \Delta(\mathbf{c}) \Delta(\mathbf{b})$ для любых $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{B}_2^m$, т.е. детерминант является *мультипликативной функцией*, $\Delta: \mathbf{B}_2^m \rightarrow \mathbb{C}$. Последнее означает, что алгебры $\mathbf{B}_2^m$ являются *композиционными алгебрами*

с формой m -й степени, подобно тому, как $\mathbf{B}_2^m \equiv \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — композиционная алгебра с квадратичной формой [5]. И тождества $\Delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \Delta(\mathbf{c})\Delta(\mathbf{b})$ — это аналог *тождества четырёх квадратов*.

7. Заметим ещё, что для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}).$$

Это тождество позволяет для элементов любых циклических алгебр $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ ввести в рассмотрение операцию *сопряжения*, полагая

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}).$$

Определённое так сопряжение для любых алгебр $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$ обладает такими свойствами:

$$\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \Delta(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}}$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}_m(\mathbf{e})$. И если $\Delta(\mathbf{x}) \neq 0$, то $\mathbf{x}^{-1} = \bar{\mathbf{x}}/\Delta(\mathbf{x})$.

Мультипликативность детерминанта элементов алгебр $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, $\mathbf{B}_2^m$ лежит в основе приложений этих алгебр. В частности, если детерминант текущего элемента принять за фундаментальную форму на линейном пространстве алгебры $\mathbb{C}_m(\mathbf{e})$, то на $2m$ -мерном пространстве получим *почти евклидову* геометрию, расстояния в которой даются модулем детерминанта, а движения задаются линейными алгебраическими функциями, у которых детерминант коэффициента равен единице. Такие геометрические структуры называются комплексными циклическими геометриями [4]. Аналогично и на линейном пространстве алгебры $\mathbf{B}_2^m$ возникают геометрические структуры, фундаментальной формой для которых служит детерминант текущего элемента данной алгебры [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Н. В.* Из истории векторного исчисления. — М.: Изд. МАИ, 1992.
2. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2019.
3. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
4. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Изд-во «Ким», 2020.
5. *Жевлаков К. А., Слинёко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
6. *Микеш Й., Бурлаков М. П., Юкл М., Бурлаков И. М.* Гиперкомплексные структуры высших порядков. — М.—Оломоуц: Изд-во «Ким», 2020.
7. *Delanghe R., Bracks F., Sommen F.* Clifford Analysis. — Boston–London–Melbourne: Pitnam Publ., 1982.

Бурлаков Игорь Михайлович
Тверской государственный университет
E-mail: don.burlakoff@yandex.ru



ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

© 2023 г. Н. П. ГУШЕЛЬ

Аннотация. Изучаются элементарные преобразования, неприводимые дивизоры, сечения и степени стабильности проективных расслоений над алгебраическими кривыми.

Ключевые слова: векторное расслоение, алгебраическая кривая, проективное расслоение, дивизор, элементарное преобразование.

ON ESTIMATING THE NUMBER OF ELEMENTARY TRANSFORMATIONS

© 2023 N. P. GUSHEL

ABSTRACT. Elementary transformations, irreducible divisors, sections, and degrees of stability of projective bundles over algebraic curves are studied.

Keywords and phrases: vector bundle, algebraic curve, projective bundle, divisor, elementary transformation.

AMS Subject Classification: 14E05

Любое неразложимое векторное расслоение ранга r над неособой алгебраической кривой рода g может быть получено из тривиального конечным числом $n(g, r)$ элементарных преобразований. Известно, что $n(g, 2) \leq g+1$ (см. [6]). Доказано (см. [2, с. 50–52]), что $n(g, r) < \deg E + r(2g - \mu^-(E))$. В случае ранга $r \geq 3$ не известна точная нижняя грань $n(g, r)$ даже для эллиптических кривых, т.е. при $g = 1$. В данной работе получена точная оценка $n(1, 3) \leq 5$.

Пусть X — проективное расслоение $\pi : X = P(E) \rightarrow C$, где E — векторное расслоение ранга r над неособой неприводимой кривой C рода g над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $M = \mathcal{O}_{P(E)}(1)$ тавтологический пучок Гротендика (по определению $\pi_* M \cong E$) и $L_P = \pi^* \mathcal{O}_C(P)$, $P \in C$. Теми же буквами будем обозначать классы дивизоров, соответствующих этим пучкам.

1. Если E — векторное расслоение ранга r над неособой кривой C , $y \in C$ и V_y — одномерное векторное подпространство в слое E_y над точкой y , то однозначно определен эпиморфизм $\alpha : E \rightarrow \mathcal{O}_y \rightarrow 0$ и имеет место точная последовательность пучков:

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_y \longrightarrow 0 \quad (1)$$

где $\ker \alpha = \text{elm}_V(E) = E'$ — локально свободный пучок ранга r и

$$\det(E') = \det(E) - y.$$

Последовательность (1) продолжается до коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & O_y^{r-1} & \longrightarrow & E_y & \xrightarrow{\alpha_y} & O_y \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & O_y \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \alpha' & & & & \\
 & & E(-y) & \xlongequal{\quad} & E(-y) & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{2}$$

Отметим, что $\ker \alpha' = E(-y) = \text{elm}_{V'}(E')$, где $E(-y) = E \otimes O_C(-y)$, $V'_y - (r-1)$ -мерное векторное подпространство в слое E'_y над точкой y .

2. Пусть $E' = \text{elm}_Y(E)$. Проективное расслоение $X' = P(E')$ называется элементарным преобразованием расслоения $X = P(E)$ с центром $Y = P(O_y)$; обозначим X' через $\text{elm}_Y(X)$. Имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 & \overline{X} & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 X & \xrightarrow{\text{elm}_Y} & X' \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\
 & C &
 \end{array}$$

где $f : \overline{X} \rightarrow X$ — моноидальное преобразование с центром $Y = P(O_y)$, $\Gamma = f^{-1}(Y)$ — исключительный дивизор преобразования f . Пусть $L_y = \pi^{-1}(y)$, где $y = \pi(Y)$, $g : \overline{X} \rightarrow X'$ — моноидальное преобразование с центром $Y' = P(O_y^{r-1})$, стягивающее $\overline{L}_y = f^*(L_y) - \Gamma$; тогда $\text{elm}_Y = g \cdot f^{-1}$.

Элементарные преобразования проективных расслоений обобщают проекции линейчатых поверхностей из точки (см. [4]).

3. Если A — подрасслоение E , то имеем два случая в зависимости от того, принадлежит ли точка $Y = P(O_y)$ проецизации фактора $B = E/A$ или не принадлежит.

Пусть $P(O_y) \in P(E/A)$; тогда получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & O_y \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & O_y \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & A & \xlongequal{\quad} & A & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{3}$$

где $B' = \text{elm}_Y(B)$.

Пусть $P(O_y) \notin P(E/A)$; тогда получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & B & \xlongequal{\quad} & B & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & O_y \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & O_y \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{4}$$

где $A' = \text{elm}_V(A)$.

4. Векторное расслоение E называется нормализованным, если $h^0(E) \neq 0$ и для всякого обратимого пучка L над C при $\deg L < 0$ выполняется $h^0(E \otimes L) = 0$. Если E нормализовано, то $s_1(P(E)) = c_1(E)$ — один из инвариантов $P(E)$.

4.1. Пусть $E = O_C \oplus O_C(D_1) \oplus O_C(D_2)$ нормализовано и $0 \geq \deg D_1 \geq \deg D_2$, $d_1 = \deg D_1$, $d_2 = \deg D_2$. Тогда $X = P(E)$ имеет минимальные сечения

$$M = Q_1 = P(O_C(D_1) \oplus O_C(D_2)), \quad Q_2 = P(O_C(D_2)) \subset Q_1,$$

$$\deg_E Q_2 = -d_1 \geq 0, \quad Q_2 \equiv M^2 - d_1 \cdot M \cdot L = M \cdot (M - d_1 \cdot L), \quad s_1(X) = d_1 + d_2 \leq 0,$$

$$\begin{aligned}
 s_2(X) &= s_1(P(E^*)) = s_1\left(P\left((O_C \oplus O_C(D_1) \oplus O_C(D_2))^*\right)\right) = \\
 &= s_1\left(P\left(O_C \oplus (O_C(D_1) \oplus O_C(D_2))^*\right)\right) = s_1\left(P\left(O_C \oplus O_C(-D_1) \oplus O_C(-D_2)\right)\right) = \\
 &= s_1\left(P\left(O_C \oplus O_C(D_2 - D_1) \oplus O_C(D_2)\right)\right) = 2d_2 - d_1 \leq 0
 \end{aligned}$$

(см. [3]). Заметим, что

$$Q_1 \cong P\left(O_C \oplus O_C(D_2 - D_1)\right),$$

$\deg(D_2 - D_1) \leq 0$ и $\deg(D_2 - D_1) = -e$, где e — классический инвариант линейчатой поверхности Q_1 .

4.2. Пусть $E \cong O_C \oplus E_k \otimes O_C(D)$ — нормализованное векторное расслоение ранга 3, где $\deg D = d$, E_k — неразложимое нормализованное векторное расслоение ранга 2, $s_1(E_k) = k$, $k = 0$ или 1. Согласно [3] возможны следующие случаи: $d < 0$ или $d = 0$, D не эффективен.

Расслоение $X = P(O_C \oplus E_k \otimes O_C(D))$ имеет инварианты $s_1(X) = \deg D + \deg E_k = d + k$ и

$$\begin{aligned}
 s_2(X) &= s_1(P(E^*)) = s_1\left(P\left((O_C(D) \oplus E_k)^*\right)\right) = s_1\left(P(O_C(-D) \oplus E_k^*)\right) = \\
 &= s_1\left(P\left(O_C(-D) \oplus (E_k \otimes \det E_k^*)\right)\right) = s_1\left(P\left(O_C(-D) \oplus (E_k \otimes (\det E_k)^*)\right)\right) = \\
 &= s_1\left(P\left(O_C \oplus \left(E_k \otimes (\det E_k)^* \otimes O_C(D)\right)\right)\right) = \deg(E_k \otimes (\det E_k)^* \otimes O_C(D)) = 2d - k.
 \end{aligned}$$

5. Теорема. $n(1, 3) \leq 5$.

Доказательство. Предъявим последовательность элементарных преобразований, с помощью которых можно получить из $P(E) = P(O_C \oplus O_C \oplus O_C)$ любой из трех видов (см., например, [1]) неразложимых проективных расслоений над эллиптической кривой.

Шаг 1. Пусть в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C$, $A = O_C$, $B = O_C$, $y = y_1$; тогда

$$P(O_{y_1}) \in P(O_C), \quad P(O_{y_1}) \in P(O_C), \quad B' = O_C(-y_1).$$

В этом случае из (3) следует, что

$$E' = O_C \oplus O_C(-y_1)$$

(см. также [5]). Пусть теперь в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C$, $A = O_C$, $B = O_C \oplus O_C$, $y = y_1$,

$$P(O_{y_1}) \in P(O_C \oplus O_C), \quad P(O_{y_1}) \in P(O_C);$$

тогда

$$B' = O_C \oplus O_C(-y_1), \quad E' = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1).$$

Шаг 2. Если $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1)$, то получим три частных случая.

(i) $P(O_{y_2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \in P(O_C(-y_1))$. Пусть в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C(-y_1)$, и $A = O_C$, $B = O_C(-y_1)$, $y = y_2$; тогда

$$P(O_{y_2}) \in P(O_C), \quad P(O_{y_2}) \in P(O_C(-y_1)), \quad B' = O_C(-y_1 - y_2).$$

В этом случае из (3) следует, что

$$E' = O_C \oplus O_C(-y_1 - y_2)$$

(см. также [5]). Пусть теперь в (3) имеем $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1)$, $A = O_C$, $B = O_C \oplus O_C(-y_1)$, $y = y_2$,

$$P(O_{y_2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1)), \quad P(O_{y_2}) \in P(O_C);$$

тогда

$$B' = O_C \oplus O_C(-y_1 - y_2), \quad E' = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1 - y_2)O_C.$$

(ii) $P(O_{y_2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \notin P(O_C(-y_1))$ и $P(O_{y_2}) = R$, где R — базисная точка в линейной системе $|C_0 + f|$; тогда из (4) и [5] следует

$$E' = O_C \oplus O_C(-y_1) \oplus O_C(-y_2).$$

(iii) $E = O_C \oplus O_C \oplus O_C(-y_1)$, $P(O_{y_2}) \in P(O_C \oplus O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \notin P(O_C(-y_1))$, $P(O_{y_2}) \neq R$, где R — базисная точка в линейной системе $|C_0 + f|$; тогда из (4) и [5] следует, что

$$E' = O_C \oplus E_0 \otimes O_C(-y_2),$$

где E_0 — нормализованное неразложимое двумерное векторное расслоение с первым классом Черна, равным 0, и $h^0(E_0) = h^1(E_0) = 0$.

Шаг 3. $E = O_C \oplus E_0 \otimes O_C(-y_2)$, $P(O_{y_3}) \notin P(E_0 \otimes O_C(-y_2))$, $P(O_{y_3}) \in P(O_C)$; тогда из (4) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & E_0 \otimes O_C(-y_2) & \xlongequal{\quad} & E_0 \otimes O_C(-y_2) & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & O_C \oplus E_0 \otimes O_C(-y_2) & \longrightarrow & O_{y_3} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & O_C(-y_3) & \longrightarrow & O_C & \longrightarrow & O_{y_3} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{5}$$

где E' неразложимо, $c_1(E') = c_1(O_C(-y_3 - 2y_2)) = -3$, $h^0(E') = 0$, $h^1(E') = 3$. Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow O_C \longrightarrow E' \otimes O_C(y_3) \longrightarrow E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2) \longrightarrow 0.$$

Можно так подобрать $L = O_C(y_3 - y_2)$, что

$$h^0(E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2)) = h^1(E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2)) = 0,$$

например, $y_3 - y_2 \sim 0$. В этом случае $E' \otimes O_C(y_3)$ нормализовано неразложимо и

$$s_1\left(P(E' \otimes O_C(y_3))\right) = c_1(E' \otimes O_C(y_3)) = 0.$$

Шаг 4. Пусть в (4) вместо E взято E' из (5) и $P(O_{y_4}) \notin P(E_0 \otimes O_C(-y_2))$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & E_0 \otimes O_C(-y_2) & \xlongequal{\quad} & E_0 \otimes O_C(-y_2) & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & O_{y_4} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & O_C(-y_3 - y_4) & \longrightarrow & O_C(-y_3) & \longrightarrow & O_{y_4} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (6)$$

Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow O_C \longrightarrow E'' \otimes O_C(y_3 + y_4) \longrightarrow E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2 + y_4) \longrightarrow 0.$$

В этом случае $E'' \otimes O_C(y_3 + y_4)$ нормализовано неразложимо и

$$s_1\left(P(E'' \otimes O_C(y_3 + y_4))\right) = c_1(E'' \otimes O_C(y_3 + y_4)) = 2.$$

Шаг 5. Пусть в (3) вместо E взято E'' из (6) и $P(O_{y_5}) \in P(E_0 \otimes O_C(-y_2))$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_0 \otimes O_C(-y_2 - y_5) & \longrightarrow & E_0 \otimes O_C(-y_2) & \longrightarrow & O_{y_5} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & E''' & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & O_{y_5} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & O_C(-y_3 - y_4) & \xlongequal{\quad} & O_C(-y_3 - y_4) & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (7)$$

Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow O_C \longrightarrow E''' \otimes O_C(y_3 + y_4) \longrightarrow E_0 \otimes O_C(y_3 - y_2 + y_4 + y_5) \longrightarrow 0.$$

В этом случае $E'' \otimes \mathcal{O}_C(y_3 + y_4)$ нормализовано неразложимо и

$$s_1\left(P(E''' \otimes \mathcal{O}_C(y_3 + y_4))\right) = c_1(E''' \otimes \mathcal{O}_C(y_3 + y_4)) = 1.$$

Получены все неразложимые трехмерные проективные расслоения над эллиптической кривой. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гушель Н. П.* Очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над эллиптической кривой// Мат. заметки. — 1990. — 47, № 6. — С. 15–22.
2. *Гушель Н. П.* Об элементарных преобразованиях проективных расслоений над кривыми// Тр. X Международ. конф. «Колмогоровские чтения». — Ярославль, 2012. — С. 50–52.
3. *Гушель Н. П.* О неприводимых дивизорах, сечениях и степенях стабильности проективных расслоений над кривыми// Мат. IX Всеросс. конф. — Ярославль, 2020. — С. 196–201.
4. *Тюрин А. Н.* Геометрия модулей векторных расслоений// Усп. мат. наук. — 1974. — 29, № 6. — С. 59–88.
5. *Homma Y.* Projective normality and the defining equations of ample invertible sheaves on elliptic ruled surfaces with negative invariant// Natural Sci. Rept. Ochanomizu Univ. — 1982. — 33, № 1-2. — P. 17–26.
6. *Nagata M., Maruyama M.* Note on the structure of a ruled surface// J. Reine Angew. Math. — 1970. — 239/240. — P. 68–73.

Гушель Николай Петрович
 Петербургский государственный университет путей сообщения,
 Ярославский филиал
 E-mail: gushel_n@mail.ru



УСЛОВИЕ СЕКУЛЯРНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МСКЕАН

© 2023 г. С. А. ДУХНОВСКИЙ

Аннотация. В работе исследуется кинетическая система уравнений McKean двух групп частиц с периодическими начальными данными в весовом пространстве. Система сводится к интегро-дифференциальному оператору, содержащему неинтегрируемые члены. Найдено условие секулярности, которое позволяет устранить недиссипативную часть и тем самым свести к нелинейному уравнению в гильбертовом пространстве, что является основным шагом к доказательству стабилизации решения.

Ключевые слова: кинетическая система McKean, ряд Фурье, весовое пространство, задача Коши.

SECULAR CONDITION FOR THE MCKEAN SYSTEM

© 2023 S. A. DUKHNOVSKII

ABSTRACT. In this paper, we study the McKean kinetic system for two groups of particles with periodic initial data in the weight space. The system is reduced to an integro-differential operator containing nonintegrable terms. We find a secularity condition that allows one to eliminate the nondissipative part and hence reduce the problem to a nonlinear equation in a Hilbert space; this is the main step towards proving the stabilization of the solution.

Keywords and phrases: McKean kinetic system, Fourier series, weight space, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 35L45, 35L60, 35Q20

1. Введение. Кинетические уравнения играют большую роль для описания динамики частиц [3], в частности, в физической химии. Доказана стабилизация решения систем уравнений к состоянию равновесия в статьях [7, 8, 12, 13] для периодических начальных условий. Кинетические системы являются неинтегрируемыми [6, 11], т.е. тест Пенлеве для них не выполнен. Решения системы McKean найдены с помощью различных техник (усеченного ряда Пенлеве, метода G'/G , автомодельное преобразование, бегущей волны) в работах [2, 4, 5, 9, 10]. В работе [1] найдено условие секулярности для кинетической модели Карлемана. В данном исследовании будет проведен анализ для нашей системы подобным образом.

Рассмотрим одномерную систему McKean (см. [4, 9–11]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\partial_t w - \partial_x w = -\frac{1}{\varepsilon}(w^2 - uw), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u^0, \quad w(x, 0) = w^0, \quad (3)$$

где $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ — плотности групп частиц со скоростями $c = 1, -1$, ε — параметр Кнудсена из кинетической теории газов, $u^0(x)$, $w^0(x)$ — периодические начальные данные с периодом 2π . Данная система описывает одноатомный разреженный газ, состоящий из двух групп

частиц. Система Мскеан является неинтегрируемой системой, т.е. для нее тест Пенлеве неприменим (см. [9]). Взаимодействие происходит следующим образом. Частица из первой группы, взаимодействуя с частицей второй группы, переходят в две частицы второй группы. Аналогично две частицы второй группы, взаимодействуя друг с другом, переходят в частицу первой группы и второй группы соответственно.

Мы ищем решение для малых возмущений состояния равновесия $w_e^2 = u_e w_e$, $u_e, w_e > 0$ системы (1)–(3)). Положим

$$u = u_e + w_e^{1/2} \varepsilon^2 \hat{u}, \quad w = w_e + w_e^{1/2} \varepsilon^2 \hat{w}. \quad (4)$$

В этом случае имеем

$$\partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u} - w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2} (\hat{w}^2 - \hat{u} \hat{w}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\partial_t \hat{w} - \partial_x \hat{w} + w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2} (\hat{w}^2 - \hat{u} \hat{w}), \quad (6)$$

$$\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}^0, \quad \hat{w}|_{t=0} = \hat{w}^0. \quad (7)$$

Для периодических решений с нулевыми средними

$$\hat{u}(t, x) = u_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} u_k(t) e^{ikx}, \quad \hat{w}(t, x) = w_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} w_k(t) e^{ikx},$$

где $\mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$, введем весовые пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$, $\mathcal{H}_\sigma$ с нормами

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 &= \int_0^\infty e^{2\gamma t} |u_0(t)|^2 dt + \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2 dt, \\ \|\hat{u}|_{t=0}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 &= |u_0^0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k^0|^2; \end{aligned}$$

здесь $\gamma > 0$, $\sigma = \text{const}$. Предполагаем, что

$$u_0^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}^0(x) dx = w_0^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{w}^0(x) dx = 0.$$

Перепишем систему (5)–(7) через коэффициенты Фурье для $k \neq 0$:

$$\frac{d}{dt} u_k + i k u_k = - \left(\frac{d}{dt} w_k - i k w_k \right), \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} w_k - i k w_k + \frac{1}{\varepsilon} w_e (w_k - u_k) = -\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}} (w_{k_1} w_{k_2} - u_{k_1} w_{k_1}), \quad (9)$$

$$u_k|_{t=0} = u_k^0, \quad w_k|_{t=0} = w_k^0 \quad (10)$$

и для $k = 0$

$$\frac{d}{dt} u_0 = -\frac{d}{dt} w_0, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} w_0 + \frac{1}{\varepsilon} w_e (w_0 - u_0) = -\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1 + k_2 = 0, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}} (w_{k_1} w_{k_2} - u_{k_1} w_{k_1}), \quad (12)$$

$$u_0|_{t=0} = 0, \quad w_0|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

Решая уравнение (8), находим решение

$$u_k = -w_k + (u_k^0 + w_k^0) e^{-ikt} + 2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} w_k ds. \quad (14)$$

Для $k = 0$ имеем $u_0 = -w_0$.

В результате для w_k получаем имеем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} w_k - 2ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik(s-t)} w_k ds = \\ = w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} d_k e^{-ikt} + \varepsilon w_e^{1/2} \left(l_k(w) - 2B_k(w, w) \right) - \varepsilon w_e^{1/2} T_k^{\text{add}}(w), \quad (15) \\ w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}. \end{aligned}$$

Здесь $T_k^{\text{add}}(w)$ является оператором возмущения базовой системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} w_k - 2ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik(s-t)} w_k ds = \\ = w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} d_k e^{-ikt} + \varepsilon w_e^{1/2} \left(l_k(w) - 2B_k(w, w) \right), \quad (16) \\ w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_k = w_e^{1/2} (u_k^0 + w_k^0), \quad T_k^{\text{add}}(w) = w_0 l \left(4w_k - (u_k^0 + w_k^0) e^{-ikt} - 2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} w_k ds \right), \\ l_k(w) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} (u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0) e^{-ik_1 t} w_{k_2}, \quad B_k(w, w) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} w_{k_2} \left(w_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} w_{k_1} ds \right). \end{aligned}$$

Сделаем замену для перехода к однородным начальным данным:

$$w_k = w_k^0 \exp \left[l \left(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon} \right) t \right] + y_k, \quad y_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}; \mathcal{H}_\sigma). \quad (17)$$

Далее рассматриваем задачу без оператора возмущения. Доказывается, что y_k имеет место бесконечная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} T_k(y_k) \equiv \frac{d}{dt}y_k - ik y_k + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} y_k - 2ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik(s-t)} y_k ds = \\ = w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k e^{-ikt} + f_k(t) e^{-2w_e t/\varepsilon} + \varepsilon w_e^{1/2} (L_k(y) - 2B_k(y, y)), \quad (18) \\ y_k|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_k = w_e^{1/2} (u_k^0 + w_k^0) - \frac{ikw_e^{1/2}}{ik - w_e \frac{1}{\varepsilon}} w_k^0, \quad B_k(y, y) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} y_{k_2} \left(y_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds \right), \\ f_k(t) = \frac{ikw_e}{ik - w_e \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} w_k^0 e^{ikt} + \varepsilon w_e^{1/2} (f_k^L(t) - 2f_k^B(t)), \quad f_k^L(t) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} (u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0) e^{-ik_1 t} w_{k_2}^0 e^{ik_2 t}, \\ f_k^B(t) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} w_{k_2}^0 e^{ik_2 t} \left(w_{k_1}^0 e^{(ik_1 - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})t} - \frac{ik_1 w_{k_1}^0}{2(ik_1 - w_e \frac{1}{\varepsilon})} \left(e^{(ik_1 - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1 t} \right) \right), \\ L_k(y) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} (u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0) e^{-ik_1 t} y_{k_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left(w_{k_2}^0 e^{(ik_2-2w_e \frac{1}{\varepsilon})t} \left(y_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds \right) + \right. \\
& \left. + y_{k_2} \left(w_{k_1}^0 e^{(ik_1-2w_e \frac{1}{\varepsilon})t} - \frac{ik_1 w_{k_1}^0}{2(ik_1 - w_e \frac{1}{\varepsilon})} \left(e^{(ik_1-2w_e \frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1 t} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

2. Уравнение для нулевой моды. Из системы (12) для $k = 0$ получаем

$$\frac{d}{dt} w_0 + 2 \frac{1}{\varepsilon} w_e w_0 = -\varepsilon w_e^{1/2} \left(2w_0 w_0 + \sum_{\substack{k_1+k_2=0, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} (w_{k_1} w_{k_2} - u_{k_1} w_{k_2}) \right), \quad w_0|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Перепишем (19) следующим образом:

$$\frac{d}{dt} w_0 + 2 \frac{1}{\varepsilon} w_e w_0 = -\varepsilon w_e^{1/2} (2w_0 w_0 - l_0(w) + 2B_0(w, w)), \quad w_0|_{t=0} = 0. \quad (20)$$

Здесь $l_0(w)$, $B_0(w, w)$ определены аналогичным образом как и выше для $k \neq 0$. Совершим замену

$$w_k = w_k^0 \exp \left[\left(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon} \right) t \right] + y_k, \quad y_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}), \quad \|y\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}^2 = \int_0^\infty e^{2\gamma t} |y|^2 dt.$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} y_0 + 2 \frac{1}{\varepsilon} w_e y_0 = -\varepsilon w_e^{1/2} (2y_0 y_0 - f_0(t) e^{-2w_e \frac{1}{\varepsilon} t} - l_0(y) + 2B_0(y, y)), \quad y_0|_{t=0} = 0.$$

3. Конечная аппроксимация. Чтобы построить аппроксимационное решение задачи Коши (5)–(7), введем конечную аппроксимацию бесконечной системы (18) для $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
T_k(y_k^{(m)}) & \equiv \frac{d}{dt} y_k^{(m)} - ik y_k^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} y_k^{(m)} - 2ik w_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik(s-t)} y_k^{(m)} ds = \\
& = w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k^{(m)} e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t) e^{-2w_e \frac{1}{\varepsilon} t} + \varepsilon w_e^{1/2} \left(L_k^{(m)}(y_k^{(m)}) - 2B_k^{(m)}(y_k^{(m)}, y_k^{(m)}) \right), \quad (21) \\
& y_k^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad |k| \leq m.
\end{aligned}$$

В правой части появился сингулярный член $w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k^{(m)} e^{-ikt}$, который не принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$. Для его устранения будем искать решение системы (21) в форме

$$y_k^{(m)} = Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), \quad z_k^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad Q_k^{(m)} \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}, \quad z_k^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)}),$$

где $z_k^{(m)} = (z_k^{(m)}, |k| \leq m, k \neq 0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_k^{(m)} & = \left(w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k^{(m)} - Q_k^{(m)} \right) e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t) e^{-2w_e \frac{1}{\varepsilon} t} + \\
& + \varepsilon w_e^{1/2} \left(L_k^{(m)} \left(Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}) \right) - \right. \\
& \left. - 2B_k^{(m)} \left(Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}) \right) \right). \quad (22)
\end{aligned}$$

В переменных $(z_k^{(m)}, Q_k^{(m)})$ система (22) при выполнении условия секулярности

$$w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k^{(m)} - Q_k^{(m)} = 0, \quad |k| = 1, \dots, m, \quad (23)$$

запишется в виде

$$z_k^{(m)} = f_k^{(m)}(t)e^{-2w_e \frac{1}{\varepsilon} t} + \varepsilon w_e^{1/2} \left(L_k^{(m)} \left(Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}) \right) - \right. \\ \left. - 2B_k^{(m)} \left(Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}) \right) \right).$$

Мы получили систему в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$. Положим $y_0 = z_0$. В этом случае для нулевой моды имеем

$$z_0 = -\varepsilon w_e^{1/2} \int_0^t e^{2w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \left(2z_0 z_0 - f_0(t) e^{-2w_e \frac{1}{\varepsilon} t} - l_0(y) + 2B_0(y, y) \right) ds. \quad (24)$$

Заметим, что здесь для нулевой моды условие секулярности отсутствует.

4. Заключение. Рассмотрена одномерная дискретная система McKean. Найдено нелинейное уравнение для k -й и нулевой моды. Нахождение условия секулярности в дальнейшем позволит установить экспоненциальную стабилизацию решения к положительному состоянию равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева О. А., Духновский С. А. Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестн. МГСУ. — 2015. — № 3. — С. 33–40.
2. Веденяпин В. В., Мингалев И. В., Мингалев О. В. О дискретных моделях квантового уравнения Больцмана // Мат. сб. — 1993. — 184, № 11. — С. 21–38.
3. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 3. — С. 3–51.
4. Духновский С. А. Тест Пенлеве и автомодельное решение кинетической модели // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — С. 91–94.
5. Ильин О. В. Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла // Теор. мат. физ. — 2012. — 170, № 3. — С. 481–488.
6. Линдблом О., Эйлер Н. Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати // Теор. мат. физ. — 2002. — 131, № 2. — С. 522–526.
7. Радкевич Е. В. О дискретных кинетических уравнениях // Докл. РАН. — 2012. — 447, № 4. — С. 369–373.
8. Радкевич Е. В. О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения // Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — 47. — С. 108–139.
9. Dukhnovsky S. A. On solutions of the kinetic McKean system // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2020. — 94, № 3. — P. 3–11.
10. Dukhnovsky S. A. The tanh-function method and the (G'/G) -expansion method for the kinetic McKean system // Differ. Equations Control Processes. — 2021. — № 2. — P. 87–100.
11. Euler N., Steeb W.-H. Painlevé test and discrete Boltzmann equations // Austr. J. Phys. — 1989. — 42. — P. 1–10.
12. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. Local equilibrium of the Carleman equation // J. Math. Sci. — 2015. — 207, № 2. — P. 296–323.
13. Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations // J. Math. Sci. — 2018. — 235, № 4. — P. 393–453.

Духновский Сергей Анатольевич

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 49–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-49-60

УДК 517.928

ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ О СИНХРОНИЗАЦИИ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ—ДУФФИНГА В СЛУЧАЕ ПРЯМОЙ СВЯЗИ И НАЛИЧИЯ СИММЕТРИИ

© 2023 г. Д. А. КУЛИКОВ

Аннотация. Рассматриваются два связанных осциллятора Ван дер Поля—Дуффинга в случае прямой симметричной связи. Показано, что для автоколебательной системы характерна синхронизация колебаний, т.е. наличие в системе устойчивых предельных циклов. Получены асимптотические формулы для соответствующих решений. Обнаружено, что на поведение решений не влияет наличие или отсутствие резонансов собственных частот у линеаризованной задачи.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля—Дуффинга, прямая связь, синхронизация, нормальная форма, резонанс собственных частот, устойчивость, автоколебания.

FEATURES OF THE PROBLEM ON SYNCHRONIZATION OF TWO VAN DER POL–DUFFING OSCILLATORS IN THE CASE OF A DIRECT CONNECTION AND THE PRESENCE OF SYMMETRY

© 2023 D. A. KULIKOV

ABSTRACT. Two coupled van der Pol–Duffing oscillators are considered in the case of direct symmetric coupling. We show that synchronization of oscillations (i.e., the presence of stable limit cycles) is typical for self-oscillating systems. Asymptotic formulas for the corresponding solutions are obtained. It is found that the behavior of solutions is not affected by the presence or absence of resonances of eigenfrequencies in the linearized problem.

Keywords and phrases: van der Pol–Duffing oscillator, feedforward, synchronization, normal form, resonance of eigenfrequencies, stability, self-oscillations.

AMS Subject Classification: 34C15, 34C23, 34C25

1. Введение. В работе будет рассмотрена одна из возможных постановок задачи о синхронизации двух автоколебательных систем. При этом под синхронизацией понимается классический вариант такого явления. Соответствующие определения, концепции можно найти в монографиях [2, 10], а также в статьях [5, 11]. В данной работе будет рассмотрен сравнительно редкий вариант постановки задачи, когда связь «прямая» в смысле определений из [2, 5, 10, 11].

Обычно изучают задачи о синхронизации, если связь «диффузионная» («пассивная», «активная», «инерционная» [5]). Напомним, что это приводит, например, к анализу системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 &= -\dot{x}_1x_1^2 + bx_1^3 + d_1(x_2 - x_1) + d_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 &= -\dot{x}_2x_2^2 + bx_2^3 + d_1(x_1 - x_2) + d_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2),\end{aligned}$$

где $b, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. В связи с большим числом приложений (см., например, [10, 11]) особым вниманием пользовался вариант, когда коэффициенты d_1, d_2 достаточно малы: $d_1 = \varepsilon d_3$, $d_2 = \varepsilon d_4$, где, в свою очередь, $d_3, d_4 \in \mathbb{R}$. Последний вариант был изучен достаточно подробно (см. [10, 11], а также работы [8, 13]).

В отмеченных работах было показано существование полностью синхронизированных колебаний, когда соответствующая система имеет устойчивый цикл, для которого характерно тождество $x_1(t) = x_2(t)$. Вторым вариантом представляет противофазный цикл, для которого характерно тождество $x_2(t) = -x_1(t)$. Более того, существует диапазон параметров задачи, когда изучаемая система имеет циклы, для которых $|x_1(t)| \neq |x_2(t)|$, т.е. наличие асимметрических циклов. Такие циклы описывают вариант обобщенной синхронизации. Следует подчеркнуть, что особую сложность при анализе задачи о синхронизации колебаний вызывают обычно вопросы, связанные с исследованием устойчивости соответствующих решений в смысле определений А. М. Ляпунова. Последний вопрос тесно связан с проблемой физической реализации найденных периодических решений.

В работах [8, 13, 14] для анализа задачи о синхронизации колебаний была использована одна из версий метода нормальных форм (нормальных форм Пуанкаре—Дюлака), а также использован подходящий вариант метода Крылова—Боголюбова. В данной работе при анализе соответствующих нелинейных уравнений системы дифференциальных уравнений будет использован подход работ [8, 13, 14], который позволяет отвечать на достаточно широкий спектр вопросов: о существовании, устойчивости и свойствах соответствующих синхронных колебаний.

Следует подчеркнуть, что задачи о синхронизации осцилляторов в случае «диффузионной» связи, как правило, приводят к более богатой, многообразной динамике решений, чем в случае прямой связи, но и случай прямой связи заслуживает внимания и соответствующего анализа. В частности, из-за наличия достаточно большого числа приложений в радиофизике [2] и других разделах теории нелинейных колебаний. Такая связь часто гарантирует синхронизацию автоколебательных систем, когда в обеих их частях устанавливаются устойчивые в смысле классического определения А. М. Ляпунова автоколебательные решения, например, устойчивые (орбитально асимптотически устойчивые) циклы.

2. Постановка задачи. В работе рассматривается задача о взаимодействии (синхронизации) двух одинаковых осцилляторов Ван дер Поля—Дуффинга в случае наличия прямой связи. Согласно работам [2, 5, 10, 11] это с математической точки зрения приводит к необходимости анализа следующей системы из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_1 + (1 + \delta_1\varepsilon)x_1 + c(1 + \delta_2\varepsilon)x_2 &= -x_1^2\dot{x}_1 + dx_1^2, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_2 + c(1 + \delta_2\varepsilon)x_1 + (1 + \delta_1\varepsilon)x_2 &= -x_2^2\dot{x}_2 + dx_2^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $c, d, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Наконец, $\gamma = \pm 1$ и нужный вариант будет выбран позже. Далее будем считать, что $c \in (0, 1)$. Вариант $\gamma = 0$ заслуживает отдельного внимания и соответствует критическому случаю в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия.

Сразу подчеркнем, что при $c = 0$ получаем два несвязанных осциллятора Ван дер Поля—Дуффинга, каждый из которых в окрестности нулевого состояния равновесия имеет орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл, если $\gamma = 1$ [9].

Действительно, рассмотрим осциллятор Ван дер Поля—Дуффинга

$$\ddot{x} - 2\varepsilon\dot{x} + (1 + \delta_1\varepsilon)x = -\dot{x}x^2 + bx^3.$$

Из изложенного в монографии [9] (см. § 9 из нее) у последнего дифференциального уравнения имеется устойчивый предельный цикл, для которого справедлива асимптотическая формула

$$x = 2\sqrt{2\varepsilon}^{1/2} \cos(t + \varphi_0) + o(\varepsilon),$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Подчеркнем, что последняя асимптотическая формула может быть выписана с большей точностью. Из последнего замечания вытекает, что при $c = 0$ получаем соответствующие периодические решения системы дифференциальных уравнений (1), которые имеют следующий

вид:

$$x_1(t, \varepsilon) = 2\sqrt{2}\varepsilon^{1/2} \cos(t + \varphi_1) + o(\varepsilon), \quad x_2(t, \varepsilon) = 2\sqrt{2}\varepsilon^{1/2} \cos(t + \varphi_2) + o(\varepsilon),$$

где φ_1, φ_2 — произвольны и каждый осциллятор совершает колебания, фазы которых не связаны.

Наличие связи, т.е. присутствие коэффициента $c \neq 0$, естественно, меняет динамику осцилляторов (1). Далее в работе будет рассмотрена окрестность нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (1). Подчеркнем, что у системы дифференциальных уравнений (1) при всех значениях параметров существует нулевое состояние равновесия. Далее в работе будет изучаться окрестность нулевого состояния равновесия. Под такой окрестностью, как обычно, будем понимать шар радиуса $\delta > 0$ с центром в нуле фазового пространства (пространства начальных условий), т.е. множество, выделяемое условием $x_1^2 + \dot{x}_1^2 + x_2^2 + \dot{x}_2^2 \leq \delta^2$. Для такого анализа будет использован метод нормальных форм (метод нормальных форм Пуанкаре—Дюлака).

Прежде чем перейти к непосредственному использованию метода нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия в линейном приближении и изучим устойчивость решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_1 + (1 + \delta_1\varepsilon)x_1 + c(1 + \delta_2\varepsilon)x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_2 + c(1 + \delta_2\varepsilon)x_1 + (1 + \delta_1\varepsilon)x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В свою очередь, это приводит к анализу расположения точек спектра операторного пучка, который получаем из системы (2) путем подстановки

$$x_1 = \exp(\lambda t)p_1, \quad x_2 = \exp(\lambda t)p_2,$$

$p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тем самым сводим задачу к анализу вопроса о существовании нетривиальных решений у системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)p_1 + c(1 + \delta_2\varepsilon)p_2 &= 0, \\ c(1 + \delta_2\varepsilon)p_1 + (\lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)p_2 &= 0. \end{aligned}$$

В итоге, как обычно, вопрос об устойчивости сводится к анализу характеристического уравнения, которое в данном случае имеет следующий вид

$$(\lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)^2 - c^2(1 + \delta_2\varepsilon)^2 = 0.$$

Для определения λ получаем два квадратных уравнения

$$\lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + (1 + \delta_1\varepsilon) + c(1 + \delta_2\varepsilon) = 0, \quad \lambda^2 - 2\varepsilon\gamma\lambda + (1 - c + (\delta_1 - \delta_2)\varepsilon) = 0.$$

Напомним, что $c \in (0, 1)$, а $\varepsilon \ll 1$. При $\gamma = -1$ все корни обоих квадратных уравнений лежат в левой полуплоскости и, следовательно, все решения системы дифференциальных уравнений (2) асимптотически устойчивы, напротив, при $\gamma = 1$ решения линейной системы дифференциальных уравнений (2) неустойчивы. Далее будем считать, что вариант с $\gamma = 1$ основной, т.е. нулевое решение системы дифференциальных уравнений (1) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ неустойчиво.

В этом разделе отметим, что при $\varepsilon = 0$ система дифференциальных уравнений (2) приобретает следующий вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 + cx_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + x_2 + cx_1 = 0.$$

Если ее записать в векторной форме, то получаем систему

$$\ddot{x} + Ax = 0, \quad x = \text{colon}(x_1, x_2), \quad (3)$$

где

$$A = A(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

При $c \in (0, 1)$ у матрицы $A(c)$ есть два положительных собственных числа $\lambda_1 = 1 + c$, $\lambda_2 = 1 - c$, которым отвечают собственные элементы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Более того, система (3) имеет следующие периодические решения

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \exp(i\sigma_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \bar{E}_1(t) &= \exp(-i\sigma_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ E_2(t) &= \exp(i\sigma_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \bar{E}_2(t) &= \exp(-i\sigma_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

где $\sigma_1 = \sqrt{1+c}$, $\sigma_2 = \sqrt{1-c}$.

Отметим, что σ_1/σ_2 , т.е. отношение собственных частот, принимает любое значение, принадлежащее $[1, \infty)$. При $c = 0$, естественно, $\sigma_1/\sigma_2 = 1$ и этот случай соответствует варианту несвязанных осцилляторов, при $c = c_2 = 3/5$ получаем, что $\sigma_1 : \sigma_2 = 2$, а при $c = c_3 = 4/5$ отношение частот равно 3. При $c = c_2$, $c = c_3$ реализуются младшие внутренние резонансы собственных частот. Подчеркнем, что в большинстве задач теории нелинейных колебаний [1, 3] наличие внутренних резонансов существенно влияет на поведение решений с начальными условиями из достаточно малой окрестности состояния равновесия.

Как будет показано далее, в данной задаче ситуация иная и наличие или отсутствие внутренних резонансов, и в том числе «младших» не играет при анализе системы дифференциальных уравнений (1) существенной роли.

Методика анализа системы дифференциальных уравнений (1) следует работам [8, 13, 14], где также изучались задачи синхронизации автоколебаний, но в случае «диффузионной» связи [2, 5, 10, 11]. Такая задача изучена значительно подробнее, ей посвящено большое число публикаций (кроме уже отмеченных, см. например, [5, 10, 11]).

3. Нормальная форма. Решения системы дифференциальных уравнений (1) будем искать (см., например, [8, 13]) в следующем виде:

$$x(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \varepsilon^{1/2} u(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + \varepsilon v(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + \varepsilon^{3/2} w(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (4)$$

где $z_j = z_j(s)$, $s = \varepsilon t$, $j = 1, 2$, s — «медленное» время, а

$$\begin{aligned} u(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) &= \begin{pmatrix} u_1(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ u_2(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \end{pmatrix}, & v(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) &= \begin{pmatrix} v_1(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ v_2(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \end{pmatrix}, \\ w(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) &= \begin{pmatrix} w_1(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ w_2(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вспомогательные комплекснозначные функции $z_j(s)$ будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z'_1 = \varphi_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \varepsilon), \quad z'_2 = \varphi_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \varepsilon), \quad (5)$$

которую принято называть нормальной формой (нормальной формой Пуанкаре—Дюлака). Отметим, что основную роль при анализе структуры окрестности нулевого решения системы дифференциальных уравнений (1) играет не система дифференциальных уравнений (5), а ее «главная» часть

$$z'_1 = \psi_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \quad z'_2 = \psi_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \quad (6)$$

а $\psi_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \varphi_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, 0)$, $j = 1, 2$. В системах (5), (6) и далее штрихом обозначена производная по s , т.е.

$$\frac{d}{dt}(G(t, s)) = \frac{\partial G}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial s} = \dot{G} + \varepsilon G'.$$

Положим в равенстве (4)

$$\begin{aligned} u(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) &= z_1(s) \exp(i\sigma_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{z}_1(s) \exp(-i\sigma_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + z_2(s) \exp(i\sigma_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \bar{z}_2(s) \exp(-i\sigma_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а также будем считать, что вектор-функции $v, w \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$.

Функция $g(t_1, t_2) = g(t_1, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$, где $t_1 = \sigma_1 t$, $t_2 = \sigma_2 t$, если для нее выполнены следующие три свойства.

1. Она достаточно гладко зависит от своих аргументов при всех t_1, t_2 и $|z_j| < \sigma_0$ — некоторой положительной постоянной, $j = 1, 2$.
2. По переменным t_1, t_2 она имеет период 2π , т.е. справедливы тождества

$$g(t_1 + 2\pi, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = g(t_1, t_2 + 2\pi, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = g(t_1, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2).$$

3. Наконец, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(t_1, t_2), E_1(t_1)) dt_1 dt_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(t_1, t_2), \bar{E}_1(t_1)) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(t_1, t_2), E_2(t_2)) dt_1 dt_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(t_1, t_2), \bar{E}_2(t_2)) dt_1 dt_2 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где использована укороченная запись $g(t_1, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = g(t_1, t_2)$. В последних равенствах

$$E_1(t_1) = \exp(it_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2(t_2) = \exp(it_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$: пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

тогда $(\alpha, \beta) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2$.

Замечание 1 (об условиях разрешимости). Рассмотрим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{y} + Ay = F(t_1, t_2), \quad (8)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad F(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} F_1(t_1, t_2) \\ F_2(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \quad t_j = \sigma_j t, \quad j = 1, 2.$$

Если $F(t_1, t_2) \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$, то последняя система дифференциальных уравнений имеет единственное решение $y(t) = y(t_1, t_2) \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ (см., например, [4, § 23]). Подчеркнем, что центральную роль в последнем замечании играют условия (равенства) (7), которые принято называть условиями разрешимости системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений (8) (см. [4]).

Приступим теперь к определению членов суммы (4), а также правых частей нормальной формы («укороченной» нормальной формы) (6). Для этого подставим сумму (4) в систему дифференциальных уравнений (1) и выделим слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^{1/2}$, ε , $\varepsilon^{3/2}$.

При $\varepsilon^{1/2}$ получим систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{u} + A(c)u = 0.$$

Последнее равенство выполнено за счет выбора вектор-функции $u = u(t) = u(t_1, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$.

Для определения v получим аналогичную систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{v} + A(c)v = 0,$$

у которой есть единственное решение, принадлежащее $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ (см. замечание 1 об условиях разрешимости). Это решение с необходимостью нулевое ($v = 0$).

Содержательная задача получается на третьем шаге, если выделить слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^{3/2}$. В результате получаем уравнение

$$\ddot{w} + A(c)w = \Phi_3(t_1, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \quad (9)$$

где

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} \Phi_{31}(t_1, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ \Phi_{32}(t_1, t_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \end{pmatrix}, \quad t_1 = \sigma_1 t, \quad t_2 = \sigma_2 t,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{31} = & -2 \left((i\sigma_1 z_1' q_1 - i\sigma_1 \bar{z}_1' \bar{q}_1) + (i\sigma_2 z_2' q_2 - i\sigma_2 \bar{z}_2' \bar{q}_2) \right) + \\ & + 2\gamma \left((i\sigma_1 z_1 q_1 - i\sigma_1 \bar{z}_1 \bar{q}_1) + (i\sigma_2 z_2 q_2 - i\sigma_2 \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right) - \delta_1 \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) + (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right) + \\ & - c\delta_2 \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) - (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right) + F_{31}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{32} = & -2 \left((i\sigma_1 z_1' q_1 - i\sigma_1 \bar{z}_1' \bar{q}_1) - (i\sigma_2 z_2' q_2 - i\sigma_2 \bar{z}_2' \bar{q}_2) \right) + \\ & + 2\gamma \left((i\sigma_1 z_1 q_1 - i\sigma_1 \bar{z}_1 \bar{q}_1) - (i\sigma_2 z_2 q_2 - i\sigma_2 \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right) - c\delta_2 \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) + (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right) - \\ & - \delta_1 \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) - (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right) + F_{32}, \end{aligned}$$

$$F_{31} = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) + (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right)^3 + d \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) + (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right)^3,$$

$$F_{32} = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) - (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right)^3 + d \left((z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) - (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \right)^3.$$

В последних формулах использованы краткие обозначения: $q_1 = \exp(i\sigma_1 t)$, $q_2 = \exp(i\sigma_2 t)$. Условия разрешимости (7) (см. замечание 1 об условиях разрешимости), примененные к системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений (9), приводят к равенствам, которые после элементарных алгебраических преобразований приводят к системе дифференциальных уравнений (6) для комплекснозначных функций $z_1(s)$, $z_2(s)$.

Эта система приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} z_1' &= \left(\gamma - \frac{d_1}{2i\sigma_1} \right) z_1 - \left(\frac{1}{2} z_1 |z_1|^2 + z_1 |z_2|^2 \right) + \frac{d}{i\sigma_1} \left(\frac{3}{2} z_1 |z_1|^2 + 3z_1 |z_2|^2 \right), \\ z_2' &= \left(\gamma - \frac{d_2}{2i\sigma_2} \right) z_2 - \left(z_2 |z_1|^2 + \frac{1}{2} z_2 |z_2|^2 \right) + \frac{d}{i\sigma_2} \left(3z_2 |z_1|^2 + \frac{3}{2} z_2 |z_2|^2 \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $d_1 = \delta_1 + c\delta_2$, $d_2 = \delta_1 - c\delta_2$. Напомним, что $\gamma = \pm 1$ или 0. Подчеркнем, что в силу специфики системы (1) и, следовательно, системы (6) для вспомогательных комплексных переменных $z_1 = z_1(s)$, $z_2 = z_2(s)$ получаем систему дифференциальных уравнений (10), где структура правых частей не зависит от наличия или отсутствия резонансов, но, естественно, коэффициенты зависят от величин σ_1 , σ_2 . В итоге получаем нормальную форму, которую в теории нелинейных колебаний принято называть «нерезонансной» [1, 3].

Замечание 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений более общего вида

$$\ddot{x} - 2\varepsilon \dot{x} + Ax + \varepsilon Bx = F(x, \dot{x}, \varepsilon),$$

где A , B — матрицы второго порядка, $F(x, \dot{x}, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция от x , $\dot{x}$, $x = \text{colon}(x_1, x_2)$, $\dot{x} = \text{colon}(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, а также $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. При этом вектор-функция $F(x, \dot{x}, \varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет в нуле по переменным x , $\dot{x}$ порядок малости выше первого.

Пусть матрица A имеет собственные числа σ_1^2 , σ_2^2 и $\sigma_1 : \sigma_2 = 3$. У последней системы укороченная нормальная форма в ситуации общего положения имеет следующий вид (см., например, [1, гл. 6] или [3, гл. 3, 7])

$$\begin{aligned} z_1' &= (1 + i\beta_1) z_1 + l_{11} z_1 |z_1|^2 + l_{12} z_1 |z_2|^2 + l_{13} z_2^3, \\ z_2' &= (1 + i\beta_2) z_2 + l_{21} z_2 |z_1|^2 + l_{22} z_2 |z_2|^2 + l_{23} z_2 \bar{z}_1^2, \end{aligned}$$

где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{21}, l_{22}, l_{23} \in \mathbb{C}$. При этом, естественно, $|l_{13}|^2 + |l_{23}|^2 \neq 0$.

Напротив, если $\sigma_1 : \sigma_2 \neq 3$, то в нормальной форме с необходимостью $l_{13} = l_{23} = 0$, т.е. «укороченная» нормальная форма будет «нерезонансной».

Специфика рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (1) проявилась в том, что в изучаемом диапазоне изменения параметров всегда $l_{13} = l_{23} = 0$.

4. Анализ нормальной формы. Для анализа нормальной формы (10) можно и удобно перейти к тригонометрической форме записи комплексных переменных $z_1(s)$, $z_2(s)$. Положим

$$z_1(s) = \rho_1(s) \exp(i\varphi_1(s)), \quad z_2(s) = \rho_2(s) \exp(i\varphi_2(s)). \quad (11)$$

После замены (11) система дифференциальных уравнений (10) переписывается в виде четырех уравнений для амплитудных и фазовых переменных:

$$\rho'_1 = \gamma\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1\rho_2^2, \quad \rho'_2 = \gamma\rho_2 - \rho_1^2\rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3, \quad (12)$$

$$\varphi'_1 = \frac{d_1}{2\sigma_1} - 3\frac{d\rho_1^2}{2\sigma_1} - 3\frac{d\rho_2^2}{\sigma_1}, \quad \varphi'_2 = \frac{d_2}{2\sigma_2} - 3\frac{d\rho_1^2}{\sigma_2} - 3\frac{d\rho_2^2}{2\sigma_2}. \quad (13)$$

Из результатов, изложенных в [8, 13, 14], вытекает, что определяющую роль играет система дифференциальных уравнений для амплитудных переменных ρ_1 , ρ_2 . В нашем случае это система дифференциальных уравнений (12).

Следует различать два случая. Первый из них выделяется условием $\gamma = -1$ и 0. Второй случай возникает, если $\gamma = 1$.

Лемма 1. *При $\gamma = -1$ или 0 все решения системы дифференциальных уравнений (12) стремятся к нулевому состоянию равновесия, если $t \rightarrow \infty$.*

Доказательство. При так выбранных γ ($\gamma = -1$ или 0) для системы дифференциальных уравнений (12) можно указать функцию Ляпунова $V(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1^2 + \rho_2^2)/2$. Ее производная в силу системы дифференциальных уравнений

$$D_t V = \gamma(\rho_1^2 + \rho_2^2) - \frac{1}{2}(\rho_1^4 + 4\rho_1^2\rho_2^2 + \rho_2^4) \leq -\frac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 < 0$$

при всех ρ_1 , ρ_2 таких, что $\rho_1^2 + \rho_2^2 \neq 0$. Следовательно, (см., например, гл. 4 из монографии [4]),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\rho_1^2 + \rho_2^2) = 0. \quad \square$$

Из леммы 1 вытекает, в частности, что система дифференциальных уравнений (12) может иметь ненулевые состояния равновесия только при $\gamma = 1$. Отметим, что при $\gamma = 1$ система дифференциальных уравнений (12) диссипативна, т.е. все ее решения с течением времени входят в шар радиуса R с центром в нуле. В нашем случае $R = 2 + \mu$, где μ любая положительная постоянная (см., главу 4 из [4]).

Лемма 2. *Пусть теперь $\gamma = 1$. Тогда система дифференциальных уравнений (12) имеет три нетривиальных состояния равновесия:*

$$\rho_1 = \sqrt{2}, \quad \rho_2 = 0; \quad (S_1)$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \sqrt{2}; \quad (S_2)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2/3}. \quad (S_3)$$

При этом состояния равновесия (S_1) , (S_2) системы дифференциальных уравнений (12) асимптотически устойчивы, а (S_3) — неустойчивое (седловое) состояние равновесия.

Доказательство существования состояний равновесия (S_1) , (S_2) , (S_3) основывается на анализе систем алгебраических уравнений

$$\rho_1 \left(1 - \frac{1}{2}\rho_1^2 - \rho_2^2 \right) = 0, \quad \rho_2 \left(1 - \rho_1^2 - \frac{1}{2}\rho_2^2 \right) = 0,$$

у которой есть следующие решения:

$$\rho_1 = \rho_2 = 0; \quad \rho_1 = \sqrt{2}, \rho_2 = 0; \quad \rho_1 = 0, \rho_2 = \sqrt{2}; \quad \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2/3}.$$

Решение $\rho_1 = \rho_2 = 0$ соответствует нулевому состоянию равновесия S_0 , которое неустойчиво.

Анализ устойчивости указанных состояний равновесия использует теорему об устойчивости по первому (линейному) приближению. Это приводит к необходимости анализа матрицы Якоби в точках (S_1) , (S_2) , (S_3) . В нашем случае матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}\rho_1^2 - \rho_2^2 & -2\rho_1\rho_2 \\ -2\rho_1\rho_2 & 1 - \rho_1^2 - \frac{3}{2}\rho_2^2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$J_1 = J|_{S_1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = J|_{S_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = J|_{S_3} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что собственные значения матриц J_1 , J_2 лежат в левой полуплоскости, а J_3 имеет собственные числа $\lambda_1 = 2/3$, $\lambda_2 = -2$. Фазовые переменные $\varphi_1 = \varphi_1(s)$, $\varphi_2 = \varphi_2(s)$ находим после интегрирования уравнений (13), где правые части не зависят от φ_1 , φ_2 . В результате получим, что нормальная форма (10) имеет периодические решения (предельные циклы)

$$z_1 = \sqrt{2} \exp(i\omega_1 s + i\psi_1), \quad z_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{d_1 - 6d}{2\sigma_1}, \quad \psi_1 \in \mathbb{R}, \quad (C_1)$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{2} \exp(i\omega_2 s + i\psi_2), \quad \omega_2 = \frac{d_2 - 6d}{2\sigma_2}, \quad \psi_2 \in \mathbb{R}, \quad (C_2)$$

а также инвариантный двумерный тор T_2 , заполненный решениями вида

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \exp(i\omega_3 s + i\psi_3), & \omega_3 &= \frac{d_1 - 6d}{2\sigma_1}, \\ z_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \exp(i\omega_4 s + i\psi_4), & \omega_4 &= \frac{d_2 - 6d}{2\sigma_2}. \end{aligned} \quad \psi_3, \psi_4 \in \mathbb{R}, \quad (T_2)$$

Подчеркнем, что $\omega_3 = \omega_1$, $\omega_4 = \omega_2$.

В ситуации общего положения тор (T_2) нерезонансный (см. [12, гл. 4]) и заполнен почти периодическими решениями с двумя базисными частотами.

Из результатов работ [8, 13, 14] вытекает справедливость утверждения.

Теорема. Пусть $\gamma = 1$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система дифференциальных уравнений (1) имеет два устойчивых (орбитально асимптотически устойчивых) цикла $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$, соответствующих (C_1) , (C_2) — циклам нормальной формы (10). Для решений, формирующих цикл $C_1(\varepsilon)$, справедливо асимптотическое равенство

$$x(t, \varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon^{1/2} \left(\exp(i\sigma_1(\varepsilon)t + i\psi_1) + \exp(-i\sigma_1(\varepsilon)t - i\psi_1) \right) a + o(\varepsilon),$$

где $\sigma_1(\varepsilon) = \sigma_1 + \varepsilon\omega_1 + o(\varepsilon)$, $\psi_1 \in \mathbb{R}$.

Для решений, формирующих цикл $C_2(\varepsilon)$, справедлива аналогичная формула:

$$x(t, \varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon^{1/2} \left(\exp(i\sigma_2(\varepsilon)t + i\psi_2) + \exp(-i\sigma_2(\varepsilon)t - i\psi_2) \right) b + o(\varepsilon),$$

где $\sigma_2(\varepsilon) = \sigma_2 + \varepsilon\omega_2 + o(\varepsilon)$, $\psi_2 \in \mathbb{R}$.

Наконец, тору (T_2) соответствует двумерный инвариантный тор $T_2(\varepsilon)$ уже системы дифференциальных уравнений (1), сформированный решениями вида

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon^{1/2} \left(\left(\exp(i\sigma_3(\varepsilon)t + i\psi_3) + \exp(-i\sigma_3(\varepsilon)t - i\psi_3) \right) a + \right. \\ &\quad \left. + \left(\exp(i\sigma_4(\varepsilon)t + i\psi_4) + \exp(-i\sigma_4(\varepsilon)t - i\psi_4) \right) b \right) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\psi_3, \psi_4 \in \mathbb{R}$, $\sigma_3(\varepsilon) = \sigma_1 + \varepsilon\omega_3 + o(\varepsilon)$, $\sigma_4(\varepsilon) = \sigma_2 + \varepsilon\omega_4 + o(\varepsilon)$. В ситуации общего положения тор $T_2(\varepsilon)$ нерезонансный (см. [12, гл. 4]), т. е., как правило, отношение $\sigma_3(\varepsilon)/\sigma_4(\varepsilon)$ не является рациональным числом.

Подчеркнем, что

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\omega_3 = \omega_1$, $\omega_4 = \omega_2$. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что в автоколебательной системе (1) с физической точки зрения реализуются циклы $C_1(\varepsilon)$ или $C_2(\varepsilon)$. Физически реализуется, конечно, один из них, и этот выбор зависит от начальных условий системы дифференциальных уравнений (1). В приложениях в такой ситуации говорят о бистабильности.

Уместно напомнить, что при $\gamma = -1$ и $\gamma = 0$ все решения системы дифференциальных уравнений (1) с достаточно малыми условиями при $t \rightarrow \infty$ приближаются к нулевому состоянию равновесия. Это вытекает из леммы 1 и формы представления решений в виде суммы (4).

5. Некоторые замечания о резонансе 1 : 2. Напомним, что к младшим резонансам следует отнести резонанс 2 : 1 (1 : 2). В нашем случае это означает, что $\sigma_1 : \sigma_2 = 2$. Такой резонанс реализуется, если $c = 3/5$, а случай, близкий к нему, если $c \approx 3/5$. Изучение системы дифференциальных уравнений (1) в случае реализации резонанса 2 : 1 или близкого к нему варианта не приводит к изменению динамики решений изучаемой системы, но уже по иной причине. Она не связана, как в предыдущем случае, с наличием симметрии у системы (1). В данном случае все проще. У системы дифференциальных уравнений (1) отсутствуют квадратичные слагаемые. На втором этапе реализации алгоритма для определения вектор-функции $v(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ получаем систему однородных дифференциальных уравнений и в результате находим, что $v = 0$, и условия разрешимости выполнялись вне зависимости от наличия или отсутствия резонанса.

Иная ситуация возникает, если систему дифференциальных уравнений заменить на аналогичную, но содержащую квадратичные слагаемые:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_1 + (1 + \delta_1\varepsilon)x_1 + c(1 + \delta_2\varepsilon)x_2 &= p_1x_1^2 + p_2x_1\dot{x}_1 + p_3\dot{x}_1^2 - x_1^2\dot{x}_1 + dx_1^3, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\gamma\dot{x}_2 + (1 + \delta_2\varepsilon)x_2 + c(1 + \delta_1\varepsilon)x_1 &= p_1x_2^2 + p_2x_2\dot{x}_2 + p_3\dot{x}_2^2 - x_2^2\dot{x}_2 + dx_2^3, \end{aligned} \quad (14)$$

где в добавленных слагаемых коэффициенты $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$.

Как и в предыдущей части работы (см. п. 3) решения будем искать в виде суммы

$$x(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \varepsilon u(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + \varepsilon^2 v(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + \dots \quad (15)$$

Здесь

$$u(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = (z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z_j = z_j(s), \quad s = \varepsilon t.$$

При этом считаем, что комплекснозначные функции $z_1(s)$, $z_2(s)$ удовлетворяют нормальной форме (6). В целом реализуется близкий к изложенному ранее алгоритм с небольшим, но принципиальным отличием, что сумма (15) содержит разложение по степеням ε . Это характерно для вариантов, при которых реализуется внутренний резонанс 2 : 1 (см. более детально в работах [6, 7]). После подстановки суммы (15) в систему дифференциальных уравнений (14) и выделения слагаемых при одинаковых степенях ε получаем последовательность систем линейных уравнений. Так, при ε^2 получаем систему для определения $v = v(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ следующего вида

$$v_t + A(c_2)v = \Phi_2(t, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \quad (16)$$

где $\Phi_2 = \text{colon}(\Phi_{21}, \Phi_{22})$, $c_2 = 3/5$, $\Phi_{21} = p_1(u_1)^2 + p_2u_1\dot{u}_1 + p_3(\dot{u}_1)^2$, $\Phi_{22} = p_1(u_2)^2 + p_2u_2\dot{u}_2 + p_3(\dot{u}_2)^2$. Из условий ее разрешимости в классе функций $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ с учетом того обстоятельства, что $\sigma_1 = 2\sigma_2$, получаем систему

$$\dot{z}_1 = \left(\gamma - \frac{d_1}{2i\sigma_1} \right) z_1 + l_1 z_2^2, \quad \dot{z}_2 = \left(\gamma - \frac{d_2}{2i\sigma_2} \right) z_2 + l_2 z_1 \bar{z}_2, \quad (17)$$

где, как показали вычисления соответствующих интегралов, что

$$l_1 = \frac{p_2}{2} + i \left(\frac{\sigma p_3}{4} - \frac{p_1}{4\sigma} \right), \quad l_2 = p_2 + i \left(2p_3\sigma - \frac{p_1}{4\sigma} \right), \quad \sigma = \sigma_2 = \sqrt{3/5}.$$

Следовательно, $|l_1|^2 + |l_2|^2 \neq 0$, если, конечно, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0$. Итак, если систему дифференциальных уравнений (1) заменить на систему дифференциальных уравнений (14), в которой

присутствуют квадратичные члены, то при реализации в ней резонанса собственных частот $2 : 1$ (или близкого к резонансу выбора собственных частот) получаем традиционный вариант нормальной формы (см. систему (17)).

Отметим, что в ситуации общего положения кубические слагаемые не влияют на результат. Подчеркнем, что в работах [6, 7] задача о резонансе $2 : 1$ ($1 : 2$) была изучена достаточно подробно. Как было отмечено в этих работах, нормальная форма (17) и, следовательно, система (14) могут иметь периодические решения и в том числе устойчивые. Тем не менее варианты, когда они устойчивы, встречаются «редко», в очень узком диапазоне параметров (см. [7]). Как правило, такие периодические решения неустойчивы, и, следовательно, физически не реализуемы. Это, в частности, означает, что в постановке задачи для системы дифференциальных уравнений (14) при реализации резонанса $2 : 1$ синхронизация колебаний отсутствует.

В данном разделе приведен пример системы дифференциальных уравнений (17), в которой анализ достаточно элементарен. Этот пример имеет скорее иллюстративный характер, поясняющий некоторые предшествующие замечания.

Пусть $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (т.е. $d_1 = d_2 = 0$) и $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 = 1$. В таком случае получим частный случай системы (17)

$$z_1' = \gamma z_1 + z_2^2, \quad z_2' = \gamma z_2 + 2z_1 \bar{z}_2. \quad (18)$$

Пусть $z_1 = \rho_1 \cos \varphi$, $z_2 = \rho_2 \sin \varphi$. В полярных координатах она переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \gamma \rho_1 + \rho_2^2 \cos \psi, & \rho_2' &= \gamma \rho_2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos \psi, \\ \varphi_1' &= \frac{\rho_2^2}{\rho_1} \sin \psi, & \varphi_2' &= -2\rho_1 \rho_2 \sin \psi, \psi = 2\varphi_2 - \varphi_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычитая из удвоенного четвертого уравнения системы (19) третье уравнение, для медленных переменных ρ_1 , ρ_2 , ψ получаем вспомогательную систему дифференциальных уравнений:

$$\rho_1' = \gamma \rho_1 + \rho_2^2 \cos \psi, \quad \rho_2' = \gamma \rho_2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos \psi, \quad \psi' = -\left(4\rho_1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1}\right) \sin \psi. \quad (20)$$

Система дифференциальных уравнений (20) может иметь одно из двух ненулевых состояний равновесия. Первое из них $S_1 : \rho_1 = -\gamma/\sqrt{2}$, $\rho_2 = -\gamma/\sqrt{2}$, $\psi = 0$, которое существует, если $\gamma < 0$. Второе из них $S_2 : \rho_1 = \gamma/2$, $\rho_2 = \gamma/\sqrt{2}$, $\psi = \pi$. Оно существует, если $\gamma > 0$. Оба этих состояния равновесия неустойчивы.

Нетрудно убедиться, что состояниям равновесия S_1 и S_2 системы дифференциальных уравнений (20) соответствуют состояния равновесия системы (17) — нормальной формы. В свою очередь, им соответствуют периодические решения системы (14), период которых близок к $2\pi/\sigma$. При этом эти периодические решения неустойчивы. Детальное доказательство можно, например, найти в работах [6, 7].

6. Заключение. Как уже отмечалось, для решений системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия характерны два автоколебательных решения: предельные циклы $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$. При этом реализуется один из них. Но в любом случае при наличии прямой связи в данной системе происходит синхронизация, когда обе ее части (осцилляторы) совершают автоколебания, близкие к гармоническим.

Особенностью данной системы, т.е. системы дифференциальных уравнений (1), является то обстоятельство, что динамика не зависит от наличия или отсутствия резонансов собственных частот σ_1 и σ_2 . В большинстве задач синхронизации это не так. Наличие младших резонансов (например, $\sigma_1 : \sigma_2 = 3$) приводит к динамической системе, у которой поведение решений принципиально отличается от поведения решений системы, в которой младшие резонансы отсутствуют (например, $\sigma_1 : \sigma_2 \neq 3$).

Уместно отметить, что полученный результат базировался на использовании методов теории динамических систем: метода нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, интегральных многообразий. Во всяком случае, этот результат получен не с помощью каких-либо «физических» соображений, а на базе использования строгих математических методов.

Как показало применение метода нормальных форм, полученный результат во многом обязан наличию симметрии в системе (1). В обоих уравнениях оба члена, отвечающие за взаимодействие: $c(1 + \delta_2\varepsilon)x_2$ в первом уравнении и $c(1 + \delta_2\varepsilon)x_1$ — во втором, аналогичны. Нарушение такой симметрии, т.е. замены c на c_1 в первом из них, c на c_2 во втором уравнении, где $c_1 \neq c_2$, но сохраняется резонансность собственных частот, приводит при $\sigma_1 : \sigma_2 \approx 3$ к «резонансной» нормальной форме. Это достаточно радикально меняет динамику решений по сравнению с тем вариантом, когда $\sigma_1 : \sigma_2 \neq 3$.

При $|c| > 1$ с необходимостью нулевое состояние равновесия неустойчиво. Так, при любом $c > 1$ спектр устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (1) имеет при $\varepsilon = 0$ два чисто мнимых собственных значения $\pm i\sqrt{1+c}$ и два действительных $\sqrt{c-1}$, $-\sqrt{c-1}$, знаки которых различны. С физической точки зрения наличие такой «сильной» связи приводит к дестабилизации системы дифференциальных уравнений.

Добавим еще одно замечание. Был рассмотрен вариант, когда $c \in (0, 1)$. Аналогичная задача, приводящая к похожим выводам, возникает при $c \in (-1, 0)$. Для обоснования последнего замечания следует при $c \in (-1, 0)$ повторить все построения с небольшими модификациями.

Подчеркнем, что вариант, когда возможен резонанс $1 : 1$, а также близкий к нему, в работе не рассматривался ввиду не содержательности такого случая в нашей задаче. Напомним (см. введение), что резонанс $1 : 1$ (конечно, тоже младший резонанс) в системе дифференциальных уравнений (1) реализуется, если $c = 0$, т.е. когда осцилляторы не связаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. — М.: Мир, 1969.
3. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. Кузнецов А. П., Паксютов В. И. О динамике двух связанных осцилляторов Ван дер Поля—Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика. — 2003 *v 11. — № 6. — С. 48–63.
6. Куликов А. Н. Бифуркация малых периодических решений в случае, близком к резонансу 1:2 для одного класса нелинейных эволюционных уравнений // Динам. сист. — 2012. — 2 (30), № 3-4. — С. 241–258.
7. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хилиарда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях // Ж. вычисл. мат. физ. — 2019. — 59, № 4. — С. 670–683.
8. Куликов Д. А. Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов // Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика. — 2006. — 14, № 5. — С. 120–132.
9. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
10. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное явление. — М.: Техносфера, 2003.
11. Aranson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillations // Phys. D. — 1990. — 41, № 3. — P. 403–449.
12. Broer H. W., Dumortier F., van Strien S. J., Takens F. Structures in Dynamics: Dimensional Deterministic Studies. — Amsterdam: North-Holland, 1991.
13. Kulikov D. A. Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators // J. Appl. Math. Mech. — 2010. — 74, № 4. — P. 389–400.

14. *Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes's business cycle model// Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — 25, № 1. — P. 93–111.

Куликов Дмитрий Анатольевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 61–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-61-70

УДК 517.28, 519.101

О БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ЭЙЛЕРОВА ТИПА

© 2023 г. Е. В. ЛУКЬЯНОВА, М. П. БУРЛАКОВ

Аннотация. В статье рассматривается вывод рекуррентных и общих формул, выражающих количества представлений натурального числа n суммами других натуральных чисел через суммы делителей данного натурального числа.

Ключевые слова: бесконечное произведение, аддитивное разбиение чисел, рекуррентная формула, арифметическая функция.

ON INFINITE PRODUCTS OF EULER TYPE

© 2023 E. V. LUKYANOVA, M. P. BURLAKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider recurrent and general formulas expressing the number of representations of a natural number n by sums of other natural numbers in terms of sums of divisors of a given natural number.

Keywords and phrases: infinite product, additive partition of numbers, recurrent formula, arithmetic function.

AMS Subject Classification: 05A15, 11A25, 26A99

Один из основных разделов математического анализа, наряду с дифференциальным и интегральным исчислением, — это теория рядов, т.е. бесконечных сумм, слагаемыми которых являются члены числовых либо функциональных последовательностей. Исторически исследования по теории рядов развивались параллельно с созданием других разделов математического анализа. Примерами могут служить суммирование бесконечно убывающей прогрессии, ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

и некоторые другие бесконечные ряды. Этот ряд послужил образцом для представления других функций степенными рядами. Успех сопутствовал И. Ньютону, которого (наряду с Г. Лейбницем) считают создателем математического анализа. По этому поводу академик В. И. Арнольд сообщает нам следующее: «Интегрирование встречается уже у Архимеда, дифференцирование — у Паскаля и Ферма, связь между обеими операциями была известна Барроу. Что же сделал Ньютон в анализе? В чём его основное математическое открытие? Ньютон изобрёл ряды Тейлора — основное орудие анализа. . . Ньютон нашёл разложение всех элементарных функций — синуса, экспоненты, логарифма и т. д. — в ряды Тейлора и таким образом убедился, что все встречающиеся в анализе функции, разлагаются в степенные ряды. Эти ряды — один из них так и называется формулой бинома Ньютона (показатель в этой формуле, разумеется, не обязательно натуральное число) — он выписал и постоянно использовал. Ньютон справедливо считал, что все вычисления в анализе надо проводить не путём кратных дифференцирований, а с помощью разложений в степенные ряды. . . У него есть и сама формула Тейлора в общем виде» (см. [2]).

Помимо степенных рядов Тейлора и Маклорена исследовались ряды, составленные из разных функциональных последовательностей, например, ряды тригонометрических функций, известных нам как ряды Фурье.

Между тем, в математике существуют две основные арифметические операции — сложение и умножение. И потому естественно наряду с бесконечными суммами рассматривать бесконечные произведения.

Систематически бесконечные произведения первым рассматривал Л. Эйлер (1707—1783). В частности, ему принадлежат такие замечательные тождества:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2x}{\pi(2n-1)}\right) \left(1 + \frac{2x}{\pi(2n-1)}\right), \\ \sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\pi n}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi n}\right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-x})^{-1},\end{aligned}$$

где p_n — простые числа, занумерованные по возрастанию (см. [9]). В дальнейшем подобные произведения изучали такие выдающиеся математики, как К. Вейерштрасс, Б. Риман, Л. Дирихле и многие другие (см. [1, 8]).

Среди различных бесконечных произведений, которые рассматривал Эйлер, особое место занимают произведения биномов $(1 + x^n)$. Раскрывая скобки в таком произведении, получим ряд

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) &= (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6)(1 + x^7) \dots = \\ &= 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n.\end{aligned}$$

Каков закон образования коэффициентов этого ряда? Чтобы понять это, запишем представления натуральных чисел в виде различных не равных между собой слагаемых:

$$\begin{aligned}1 &= \underbrace{1}_1, & 2 &= \underbrace{2}_1, & 3 &= \underbrace{3}_1 = \underbrace{1+2}_2, & 4 &= \underbrace{4}_1 = \underbrace{1+3}_2, & 5 &= \underbrace{5}_1 = \underbrace{1+4}_2 = \underbrace{2+3}_3, \\ 6 &= \underbrace{6}_1 = \underbrace{1+5}_2 = \underbrace{3+3}_3 = \underbrace{1+2+3}_4, & 7 &= \underbrace{7}_1 = \underbrace{1+6}_2 = \underbrace{2+5}_3 = \underbrace{3+4}_4 = \underbrace{1+2+4}_5, \\ 8 &= \underbrace{8}_1 = \underbrace{1+7}_2 = \underbrace{2+6}_3 = \underbrace{3+5}_4 = \underbrace{1+2+5}_5 = \underbrace{1+3+4}_6, \\ 9 &= \underbrace{9}_1 = \underbrace{1+8}_2 = \underbrace{2+7}_3 = \underbrace{3+6}_4 = \underbrace{4+5}_5 = \underbrace{1+2+6}_6 = \underbrace{1+3+5}_7 = \underbrace{2+3+4}_8, \\ 10 &= \underbrace{10}_1 = \underbrace{1+9}_2 = \underbrace{2+8}_3 = \underbrace{3+7}_4 = \underbrace{4+6}_5 = \underbrace{1+2+7}_6 = \underbrace{1+3+6}_7 = \\ &= \underbrace{1+4+5}_8 = \underbrace{2+3+5}_9 = \underbrace{1+2+3+4}_{10}, \dots\end{aligned}$$

Отсюда видно (впервые это заметил Эйлер), что коэффициентами взятого ряда будут числа $l(n)$, равные количеству представлений в виде неупорядоченной суммы неравных положительных слагаемых. Будем говорить, что этот ряд — (*обычная*) *производящая функция последовательности* $l(n)$. Тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n$$

даёт нам представление этой производящей функции в виде бесконечного произведения степенных биномов вида $(1 + x^n)$.

Производящей функцией, или обычной производящей функцией, последовательности чисел $a(n)$ называется формальный ряд $A(t) = a(0) + a(1)t + a(2)t^2 + \dots + a(k)t^k + \dots$, где t — формальная переменная (см. [6]).

Эйлер нашёл и разложения в бесконечные произведения некоторых других производящих функций. Например, если обозначить $L(n)$ количество неупорядоченных представлений n в виде суммы равных или неравных положительных целых слагаемых, то для производящей функции последовательности $L(n)$ справедливо следующее тождество:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)x^n.$$

Это можно проверить, представив сомножители в произведении в виде сумм прогрессий. Иными словами, полагая

$$(1 - x^n)^{-1} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots + x^{kn} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{kn},$$

получим тождество

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{kn} \right) = \\ &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + \dots \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} 2 &= \underbrace{2}_1, & 3 &= \underbrace{3}_1 = \underbrace{1+2}_2 = \underbrace{1+1+1}_3, & 4 &= \underbrace{4}_1 = \underbrace{3+1}_2, \underbrace{2+2}_3 = \underbrace{2+1+1}_3 = \underbrace{1+1+1+1}_5, \\ 5 &= \underbrace{5}_1 = \underbrace{4+1}_2 = \underbrace{3+2}_3 = \underbrace{3+1+1}_4 = \underbrace{1+2+2}_5 = \underbrace{1+1+1+2}_6 = \underbrace{1+1+1+1+1}_7, \\ 6 &= \underbrace{6}_1 = \underbrace{5+1}_2 = \underbrace{4+2}_3 = \underbrace{3+3}_4 = \underbrace{1+2+3}_5 = \underbrace{4+1+1}_6 = \underbrace{2+2+2}_7 = \underbrace{2+2+1+1}_8 = \\ &= \underbrace{3+1+1+1}_9 = \underbrace{2+1+1+1+1}_{10} = \underbrace{1+1+1+1+1+1}_{11}, \\ 7 &= \underbrace{7}_1 = \underbrace{6+1}_2 = \underbrace{5+2}_3 = \underbrace{4+3}_4 = \underbrace{5+1+1}_5 = \underbrace{4+2+1}_6 = \underbrace{3+3+1}_7 = \\ &= \underbrace{4+1+1+1}_8 = \underbrace{3+2+2}_9 = \underbrace{3+2+1+1}_{10} = \underbrace{3+1+1+1+1}_{11} = \underbrace{2+2+1+1+1}_{12} = \\ &= \underbrace{2+2+2+1}_{13} = \underbrace{2+1+1+1+1+1}_{14} = \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}_{15}, \dots \end{aligned}$$

Итак, для произведений такого вида

$$P_1(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} \quad \text{и} \quad P_2(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) \quad (1)$$

получим следующие тождества:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)x^n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n, \quad (2)$$

где $L(x)$ даёт количество представлений натурального числа n суммами других натуральных чисел, а $l(x)$ даёт количество представлений натурального числа n такими суммами натуральных чисел, в которых нет одинаковых слагаемых (см. [9]). Подобные произведения будем называть *бесконечными произведениями эйлерова типа*.

В теории рядов важную роль играет вопрос сходимости ряда, т.е. существования предела такой последовательности

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad \dots,$$

которая называется *последовательностью частичных сумм ряда*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Аналогично можно поставить вопрос и о сходимости бесконечного произведения

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n, \quad (3)$$

т.е. о существовании предела последовательности

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 \cdot p_2, \quad P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \quad \dots, \quad P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n, \quad \dots,$$

которая называется *последовательностью частичных произведений бесконечного произведения P* . В том случае, когда последовательность P_n имеет конечный предел, говорят, что произведение P сходится, и предел P_n при $n \rightarrow \infty$ называют *значением* бесконечного произведения P .

Вопрос сходимости бесконечного произведения можно свести к вопросу сходимости некоторого ряда. Точнее, имеет место следующее простое утверждение (см. [7]).

Теорема (о сходимости бесконечных произведений). *Для того, чтобы бесконечное произведение (3) при $p_n > 0$ сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \ln p_1 + \ln p_2 + \ln p_3 + \dots + \ln p_n + \dots \quad (4)$$

При выполнении этого условия, если L сумма ряда (4), то $P = e^L$.

Заметим ещё, что при исследовании сходимости бесконечного произведения P часто представляется удобным, полагая $p_n = 1 + a_n$, записывать произведение P и ряд (4) в следующем виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n). \quad (5)$$

Тогда из приведённой выше теоремы получается следующее утверждение (см. [7]).

Следствие (из теоремы о сходимости произведений). *Если для достаточно больших n будет $a_n > 0$ (или $a_n < 0$), то для сходимости произведения (5) необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Приведённые здесь утверждения полностью решают вопрос сходимости бесконечных произведений.

Итак, произведения (2) сходятся в интервале $(-1; 1)$, так как согласно теореме о сходимости бесконечных произведений для сходимости произведений (1) необходимо и достаточно, чтобы сходился такой ряд:

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Таким образом, чтобы вычислить значения арифметических функций $L(n)$ или $l(n)$, надо будет последовательно раскрывать скобки в произведениях (1).

Вычислим несколько значений $L(n)$ из тождества

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)x^n : \\ (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + \dots) \times$$

$$\begin{aligned} & \times (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)(1 + x^4 + x^8 + \dots) \times \\ & \times (1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + x^6 + \dots)(1 + x^7 + \dots)(1 + x^8 + \dots)(1 + x^9 + \dots)(1 + x^{10} + \dots) = \\ & = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + \dots \end{aligned}$$

т.е. $L(1) = 1$, $L(2) = 2$, $L(3) = 3$, $L(4) = 5$, $L(5) = 7$, $L(6) = 11$, $L(7) = 15$, $L(8) = 22$, $L(9) = 30$, $L(10) = 42, \dots$

Вычислим теперь несколько значений $l(n)$ из тождества

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n : \\ (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8)(1+x^9)(1+x^{10}) \dots &= \\ 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + \dots \end{aligned}$$

т.е. $l(1) = 1$, $l(2) = 1$, $l(3) = 2$, $l(4) = 2$, $l(5) = 3$, $l(6) = 4$, $l(7) = 5$, $l(8) = 6$, $l(9) = 8$, $l(10) = 10, \dots$

Такой вычислительный алгоритм арифметических функций $L(n)$ и $l(n)$ неудобен тем, что требует умножения большого числа полиномов или степенных рядов. К тому же он никак не связан с канонической структурой натуральных чисел, т.е. с представлением натурального числа n произведением степеней его простых сомножителей, и потому не даёт ни рекуррентных, ни общих формул для вычисления значений $L(n)$ и $l(n)$. Поэтому актуальной представляется задача получения рекуррентных или конечных формул для вычисления значений арифметических функций $L(n)$ и $l(n)$ исходя из канонического разложения натурального числа n на простые сомножители.

Такие формулы были получены одним из авторов этой статьи ещё в середине семидесятых годов прошлого века, хотя впервые опубликованы лишь в 2019 г. в монографии [3], ставшей уже библиографической редкостью. Вывести их можно различными способами, один из которых излагается ниже.

Прологарифмируем, а затем продифференцируем первое из произведений (1). В результате получим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_1(x)} \left(\frac{dP_1(x)}{dx} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m + 2 \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m+1} + 3 \sum_{m=0}^{\infty} x^{3m+2} + \dots + k \sum_{m=0}^{\infty} x^{k(m+1)-1} + \dots = \\ &= S(1) + S(2)x + S(3)x^2 + S(4)x^3 + \dots + S(n)x^{n-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $S(n)$ получаются суммированием коэффициентов при степенях x в двойной сумме (6).

Чтобы выяснить теоретико-числовой смысл коэффициентов $S(n)$, введём в рассмотрение *мигающие функции* $\beta_m(n)$ (см. [3]), определённые формулой

$$\beta_m(n) = (1 + \alpha_m^n + \alpha_m^{2n} + \dots + \alpha_m^{(m-1)n})/m,$$

где $\alpha_m = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m)$, так что

$$\beta_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = mk, \\ 0, & \text{если } n \neq mk. \end{cases}$$

Выпишем (ради иллюстрации) несколько значений мигающих функций второго порядка

$$\beta_2(n) = \frac{1 + (-1)^n}{2} :$$

$\beta_2(0) = 1$, $\beta_2(1) = 0$, $\beta_2(2) = 1$, $\beta_2(3) = 0$, $\beta_2(4) = 1$, $\beta_2(5) = 0$, $\beta_2(6) = 1$, $\beta_2(7) = 0$, $\beta_2(8) = 1$, $\beta_2(9) = 0$, $\beta_2(10) = 1$, $\beta_2(11) = 0$, $\beta_2(12) = 1$, $\dots$; и третьего порядка

$$\beta_3(n) = \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n \right) :$$

$$\beta_3(0) = \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^0 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^0 \right) = \frac{1+1+1}{3} = 1,$$

$$\beta_3(1) = \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^1 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^1 \right) = 0,$$

$$\beta_3(2) = \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) = 0,$$

так как

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

Далее всё продолжается периодически, поскольку

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^3 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^3 = 1.$$

С помощью мигающих функций тождество (6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_1(x)} \left(\frac{dP_1(x)}{dx} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n} = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^m + \dots + \\ &\quad + 2(x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + \dots + x^{2m+1} + \dots) + \\ &\quad + 3(x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17} + \dots + x^{3m+2} + \dots) + \dots + \\ &\quad + n(x^{n-1} + x^{2n-1} + x^{3n-1} + x^{4n-1} + \dots + x^{(m+1)n-1} + \dots) + \dots + = \\ &= \beta_1(1) + \beta_1(2)x + \beta_1(3)x^2 + \beta_1(4)x^3 + \beta_1(5)x^4 + \dots + \beta_1(n)x^{n-1} + \dots + \\ &\quad + 2(\beta_2(1) + \beta_2(2)x + \beta_2(3)x^2 + \beta_2(4)x^3 + \beta_2(5)x^4 + \dots + \beta_2(n)x^{n-1} + \dots) + \\ &\quad + 3(\beta_3(1) + \beta_3(2)x + \beta_3(3)x^2 + \beta_3(4)x^3 + \beta_3(5)x^4 + \dots + \beta_3(n)x^{n-1} + \dots) + \dots + \\ &\quad + k(\beta_k(1) + \beta_k(2)x + \beta_k(3)x^2 + \beta_k(4)x^3 + \beta_k(5)x^4 + \dots + \beta_k(n)x^{n-1} + \dots) + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k(1) + x \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k(2) + x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k(3) + \dots + x^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k(n) = \\ &= S(1) + S(2)x + S(3)x^2 + S(4)x^3 + \dots + S(n)x^{n-1} + \dots, \quad (7) \end{aligned}$$

то есть

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k(n) = \beta_1(n) + 2\beta_2(n) + 3\beta_3(n) + 4\beta_4(n) + \dots + n\beta_n(n).$$

И отсюда видно, что $S(n)$ есть сумма делителей натурального числа n .

С другой стороны, вычислив $P_1'(x)$ из формулы (1) и разделив на $P_1(x)$, равенство (6) можно переписать так:

$$\frac{L(1) + 2L(2)x + 3L(3)x^2 + \dots + nL(n)x^{n-1} + \dots}{1 + L(1)x + L(2)x^2 + L(3)x^3 + \dots + L(n)x^n + \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} S(n)x^{n-1},$$

или, полагая для единообразия $L(0) = 1$,

$$\begin{aligned} L(1) + 2L(2)x + 3L(3)x^2 + \dots + nL(n)x^{n-1} + \dots = \\ = (L(0) + L(1)x + L(2)x^2 + \dots + L(n)x^n + \dots)(S(1) + S(2)x + S(3)x^2 + \dots + S(n)x^{n-1} + \dots), \end{aligned}$$

откуда и получается рекуррентная формула для арифметической функции $L(n)$

$$L(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n L(n-k)S(k+1), \quad (8)$$

полученная М. П. Бурлаковым в 1971 г.

Из этой рекуррентной формулы проистекает и формула общего члена для арифметической функции $L(n)$. Чтобы её найти, запишем такую систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} L(1) &= 1, \\ 2L(2) &= L(1)S(1) + S(2), \\ 3L(3) &= L(2)S(1) + L(1)S(2) + S(3), \\ 4L(4) &= L(3)S(1) + L(2)S(2) + L(1)S(3) + S(4) \dots, \\ nL(n) &= L(n-1)S(1) + L(n-2)S(2) + L(n-3)S(3) + \dots + L(1)S(n-1) + S(n) \dots, \end{aligned}$$

которая сразу следует из рекуррентной формул (3) и (5), и перепишем её так:

$$\begin{aligned} L(1) &= 1, \\ S(1)L(1) - 2L(2) &= -S(2), \\ S(2)L(1) + S(1)L(2) - 3L(3) &= -S(3), \\ S(3)L(1) + S(2)L(2) + S(1)L(3) - 4L(4) &= -S(4) \dots, \\ S(n-1)L(1) + S(n-2)L(2) + S(n-3)L(3) + \dots + S(1)L(n-1) - nL(n) &= -S(n) \dots, \end{aligned}$$

откуда видно, что эта бесконечная система линейных уравнений с неизвестными $L(n)$ *треугольная*, а потому из неё значения арифметической функции $L(n)$ можно последовательно находить по формулам Крамера:

$$\begin{aligned} L(1) &= 1, \\ L(2) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S(1) & -S(2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ S(1) & -2 \end{vmatrix}, \\ L(3) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ S(1) & -2 & -S(2) \\ S(2) & S(1) & -S(3) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S(1) & -2 & 0 \\ S(2) & S(1) & -3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

и так далее, и в общем случае получается, что

$$L(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ S(1) & -2 & 0 & \dots & -S(2) \\ S(2) & S(1) & -3 & \dots & -S(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S(n-1) & S(n-2) & S(n-3) & \dots & -S(n) \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Это и есть формула общего члена для арифметической функции $L(n)$, выражающая $L(n)$ через $S(1), S(2), S(3), \dots, S(n)$.

Вычислим по этой формуле несколько значений $L(n)$.

$$\begin{aligned} L(2) &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S(1) & -S(2) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2, \\ L(3) &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ S(1) & -2 & -S(2) \\ S(2) & S(1) & -S(3) \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{18}{6} = 3, \\ L(4) &= -\frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ S(1) & -2 & 0 & -S(2) \\ S(2) & S(1) & -3 & -S(3) \\ S(3) & S(2) & S(1) & -S(4) \end{vmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{24} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & -11 \end{vmatrix} = \frac{66 + 4 + 36 + 14}{24} = 5, \\
L(5) &= \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ S(1) & -2 & 0 & 0 & -S(2) \\ S(2) & S(1) & -3 & 0 & -S(3) \\ S(3) & S(2) & S(1) & -4 & -S(4) \\ S(4) & S(3) & S(2) & S(1) & -S(5) \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 1 & -4 & -7 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & -7 \\ 3 & 1 & -6 & -11 \\ 4 & 3 & 1 & -13 \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{1}{60} \begin{vmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 1 & -4 & -17 \\ 3 & 1 & -21 \end{vmatrix} = \frac{420}{60} = 7,
\end{aligned}$$

т.е.

$$L(1) = 1, L(2) = 2, L(3) = 3, L(4) = 5, L(5) = 7, \dots$$

Можно показать, что формулы, аналогичные (8) и (9), справедливы и для арифметической функции $l(n)$, а именно имеет место рекуррентная формула

$$l(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n l(n-k) S_1(k+1) \quad (10)$$

и формула общего члена

$$l(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ S_1(1) & -2 & 0 & \dots & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -3 & \dots & -S_1(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_1(n-1) & S_1(n-2) & S_1(n-3) & \dots & -S_1(n) \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где $S_1(n)$ — это сумма нечётных делителей натурального числа n .

Вычислим по этой формуле несколько значений $l(n)$:

$$\begin{aligned}
l(2) &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_1(1) & -S_1(2) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \\
l(3) &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ S_1(1) & -2 & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -S_1(3) \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{12}{6} = 2, \\
l(4) &= -\frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ S_1(1) & -2 & 0 & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -3 & -S_1(3) \\ S_1(3) & S_1(2) & S_1(1) & -S_1(4) \end{vmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{1}{24} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \frac{-30 - 2 - 6 - 10}{24} = 2, \\
l(5) &= \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ S_1(1) & -2 & 0 & 0 & -S_1(2) \\ S_1(2) & S_1(1) & -3 & 0 & -S_1(3) \\ S_1(3) & S_1(2) & S_1(1) & -4 & -S_1(4) \\ S_1(4) & S_1(3) & S_1(2) & S_1(1) & -S_1(5) \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -4 & -5 \\ 4 & 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{1}{60} \begin{vmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{20} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & -11 \end{vmatrix} = \frac{44 + 2 + 8 + 6}{20} = 3, \\
&l(1) = 1, \quad l(2) = 1, \quad l(3) = 2, \quad l(4) = 2, \quad l(5) = 3.
\end{aligned}$$

Доказательство формул (10) и (11) базируется на одном тождестве принадлежащем Эйлеру (см. [7]):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}.$$

Доказательство этого тождества использует формулу разности квадратов: с одной стороны,

$$\frac{(1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^6) \dots (1 - x^{2n}) \dots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \dots (1 - x^n) \dots} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n),$$

а с другой стороны, сокращая в левой части этого тождества все множители с чётными показателями, будем иметь тождество

$$\frac{(1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^6) \dots (1 - x^{2n}) \dots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \dots (1 - x^n) \dots} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}.$$

Таким образом, можем записать, что

$$P_2(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n.$$

Далее, как и прежде прологарифмируем и продифференцируем это тождество, и в результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_2(x)} \left(\frac{dP_2(x)}{dx} \right) &= \frac{1}{1-x} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \dots + \frac{(2n-1)x^{2(n-1)}}{1-x^{2n-1}} + \dots = \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots + \\
&\quad + 3(x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + \dots + x^{3n-1} + \dots) + \\
&\quad + 5(x^4 + x^9 + x^{14} + x^{19} + x^{24} + \dots + x^{5n-1} + \dots) + \dots = \\
&= \beta_1(1) + \beta_1(2)x + \beta_1(3)x^2 + \beta_1(4)x^3 + \dots + \beta_1(n)x^{n-1} + \dots + \\
&\quad + 3(\beta_3(1) + \beta_3(2)x + \beta_3(3)x^2 + \beta_3(4)x^3 + \dots + \beta_3(n)x^{n-1} + \dots) + \\
&\quad + 5(\beta_5(1) + \beta_5(2)x + \beta_5(3)x^2 + \beta_5(4)x^3 + \dots + \beta_5(n)x^{n-1} + \dots) + \dots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\beta_{2n-1}(1) + x \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\beta_{2n-1}(2) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\beta_{2n-1}(3) + \dots + \\
&\quad + x^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\beta_{2n-1}(n) + \dots = \\
&= S_1(1) + S_1(2)x + S_1(3)x^2 + S_1(4)x^3 + \dots + S_1(n)x^{n-1} + \dots,
\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\beta_{2n-1}(n) = \\ &= \beta_1(n) + 3\beta_3(n) + 5\beta_5(n) + 7\beta_7(n) + \dots + (2k-1)\beta_{2k-1}(n), \end{aligned}$$

где суммирование ведётся до k , для которого $n \leq 2k-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987.
2. Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. — М.: Наука, 1989.
3. Бурлаков В. М., Бурлаков М. П. Мемуар о бесконечных произведениях. — М.: Изд-во «Ким», 2019.
4. Бурлаков М. П. Дополнительные главы алгебры. Методические указания. — Грозный-ЧИГУ, 1987.
5. Виноградов И. М. Основы теории чисел». — М.: Наука, 1972.
6. Рыбников К. А. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1982.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Наука, 1987.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1985.
9. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 1. — М: ГИФМЛ, 1961.

Лукьянова Елена Викторовна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: lukyanovalv@list.ru

Бурлаков Михаил Петрович

Московский педагогический государственный университет

E-mail: burlakovmihail@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 71–85
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-71-85

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. I

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Математическими моделями рассматриваемых задач являются системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, который позволяет эффективно и корректно строить алгоритмы стабилизации. Метод основан на приводимости нестационарных систем, описывающих указанные задачи, к стационарным системам. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Работа публикуется с продолжением.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоритмы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. I

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Mathematical models of the problems considered are systems of differential equations with periodic coefficients. We present a rigorous analytical approach to this problem, which allows efficient and correct construction of stabilization algorithms. The method is based on the reducibility of nonstationary systems that describe these problems to stationary systems. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. The work is published with a continuation.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	72
Глава 1. Уравнения движения спутника при действии гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов	74
1.1. Уравнения движения трехосного спутника	74
1.2. Уравнения движения динамически симметричного спутника	78
Список литературы	82

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой работе рассматривается движение спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях. Предполагается, что центр масс движется по круговой орбите. Если орбиты — низкие (до 700 км), то следует учитывать и аэродинамические моменты, которые оказывают существенное влияние на движение. Среди возможных движений спутника вокруг центра масс особый интерес представляют стационарные движения (положения относительного равновесия и регулярные прецессии), которые являются одними из важных и распространенных рабочих режимов движения спутника.

Устойчивость этих стационарных движений в гравитационном поле подробно исследована в [3, 4, 6, 12, 18, 26, 28, 34, 56, 73]. Влияние гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов на устойчивость стационарных движений рассмотрено в [5, 15–17, 29, 32, 33, 46, 58, 68, 69]. При этом характер устойчивости в общем случае не является асимптотическим, и вопрос об их стабилизации тем или иным способом представляет практический интерес.

Как известно, одним из таких способов является стабилизация при помощи магнитных систем. Такие системы широко применяются в практике космических исследований. Методы создания управляющих моментов в магнитных системах основаны на различных типах электродинамического взаимодействия спутника с геомагнитным полем.

При одном методе используется эффект взаимодействия внутреннего магнитного момента спутника, создаваемого магнитными катушками, с геомагнитным полем. Другой метод управления основан на использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника. Первому методу посвящено большое число публикаций [23, 29, 41, 52, 62, 64, 78], обзор которых содержится в [24, 30, 61, 71, 72].

Второй метод был предложен в работе А. А. Тихонова [31]. Он был развит и модифицирован в работах А. А. Тихонова и его соавторов [1, 35, 36, 38, 40]. В этих работах наряду с моментами сил Лоренца используются внутренние магнитные моменты. Использование момента лоренцевых сил для управления космическим аппаратом рассмотрено также в [47, 48, 51].

При использовании обоих методов управляющий момент является функцией геомагнитного поля, индукция которого изменяется во время движения спутника по орбите вокруг Земли. В большинстве работ предполагается, что это изменение носит периодический характер, если орбита спутника — круговая. Поэтому математические модели рассматриваемых задач представляют собой системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это обстоятельство вносит существенные трудности как в изучение управляемости системы, так и в разработку эффективных алгоритмов управления.

При построении алгоритмов управления с обратной связью в литературе используются два подхода. Один основан на применении метода Ляпунова [36, 38], другой приводит к численному анализу линейной периодической системы на основании теории Флоке [23, 52, 62].

Выбор коэффициентов усиления в законе управления с обратной связью — центральный вопрос в этой задаче. Следует подчеркнуть, что при обоих указанных подходах выбор коэффициентов обратной связи не алгоритмизован, и способ их выбора не указан.

В работе представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, основанный на том, что линеаризованные модели рассматриваемых задач относятся к классу линейных нестационарных систем (ЛНС), допускающих конструктивное приведение к стационарным системам более высокой размерности, чем исходная система. Этот подход был развит для ЛНС определенного класса и ранее применялся для решения ряда прикладных задач [7–9, 53, 57], в том числе для задачи стабилизации стационарных движений спутника при использовании магнитных моментов различной природы [19–22].

Факт приводимости системы к стационарной эффективно используется как при анализе управляемости, так и при построении алгоритмов стабилизации. При наличии свойства управляемости в приведенной стационарной системе для нее строится оптимальный алгоритм стабилизации, основанный на LQR-методе на бесконечном интервале времени, который приводит к закону управления в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарной системы. Построенное стабилизирующее управление вводится в исходную нестационарную систему при помощи дополнительных переменных и соответствующего ограниченного преобразования. При этом коэффициенты обратной связи для закона управления в исходной системе оказываются переменными. Исходная нестационарная система, замкнутая таким управлением, также асимптотически устойчива.

Следует подчеркнуть, что выбор коэффициентов обратной связи в законе управления, имеющий важное и принципиальное значение, при указанном подходе хорошо алгоритмизован. Он состоит из определения коэффициентов управления для расширенной стационарной системы в соответствие со стандартной процедурой LQR (при этом требуется задать лишь параметры функционалов) и построения конструктивного преобразования к исходным переменным путем введения дополнительных переменных.

В работе рассмотрены задачи стабилизации стационарных движений спутника (относительно равновесия и регулярных прецессий) при помощи магнитных моментов различной природы. Исследованы вопросы управляемости, построены алгоритмы стабилизации и представлены результаты моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики.

В главе 1 выписаны выражения для моментов гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов; уравнения движения спутника около центра масс при действии моментов различной природы, указаны стационарные решения (положения равновесия и регулярные прецессии) и выписаны линеаризованные уравнения, которые служат основой для последующих алгоритмов стабилизации.

Глава 2 посвящена анализу и синтезу ЛНС, допускающих приведение к стационарным системам большей размерности. Рассмотрены методические примеры, иллюстрирующие применение предлагаемой методики.

В главе 3 рассмотрены следующие задачи стабилизации стационарных движений спутника в геомагнитном поле: стабилизация положения равновесия при помощи магнитных моментов; стабилизация положения равновесия при помощи моментов сил Лоренца; стабилизация положения равновесия при совместном использовании магнитных и лоренцевых моментов; стабилизация регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов.

В разделе Приложение показано применение разработанной методики приведения нестационарной по управлению системы к стационарной системе большой размерности при использовании более сложной модели геомагнитного поля. Приведены нелинейные уравнения управляемого движения для случая движения спутника по экваториальной орбите.

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПРИ ДЕЙСТВИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ, АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

В этой главе приводятся выражения для моментов гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов; уравнения движения спутника около центра масс при действии моментов различной природы, указаны стационарные решения (положения равновесия и регулярные прецессии) и выписаны линеаризованные уравнения, которые служат основой для последующих алгоритмов стабилизации.

В разделе 1.1 приводятся уравнения движения трехосного спутника, а в разделе 1.2 — динамически симметричного спутника. Управляющими являются моменты сил, возникающие при электродинамическом взаимодействии спутника с геомагнитным полем.

1.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХОСНОГО СПУТНИКА

Рассматривается движение спутника около центра масс под действием моментов сил различной природы.

1.1.1. Динамические уравнения, моменты действующих сил и уравнения измерений.

При выводе уравнений движения спутника используются две системы координат (см. рис. 1.1): $OXYZ$ — орбитальная система координат с началом в центре масс спутника: ось OZ направлена по радиус-вектору центра масс; OY — по нормали к плоскости орбиты, OX дополняет систему до правой тройки; e_r , e_r , e_n — единичные векторы осей OX , OZ , OY соответственно; $Oxyz$ — связанная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника.

Ориентация системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы $OXYZ$ задается матрицей Θ (см. [4]).

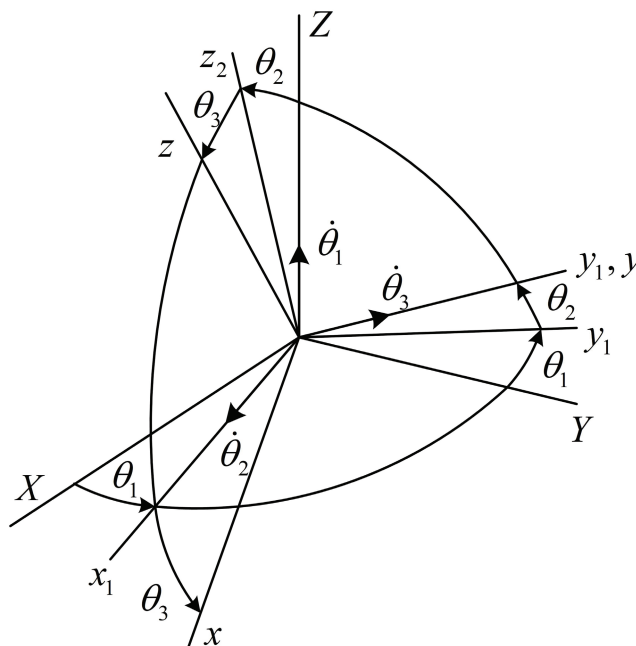


Рис. 1.1

В начальный момент система координат $Oxyz$ совпадает с $OXYZ$, ее положение обозначим $x_0y_0z_0$. Первый поворот осуществляется на угол θ_1 вокруг оси OZ . Матрица перехода к системе $x_1y_1z_1$ имеет вид

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Второй поворот осуществляется на угол θ_2 вокруг оси x_1 . Матрица перехода от системы $x_1y_1z_1$ к системе $x_2y_2z_2$ имеет вид

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Третий поворот на угол θ_3 вокруг оси Oy_2 , с матрицей перехода от системы $x_2y_2z_2$ к системе $x_3y_3z_3$:

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}.$$

Результирующая матрица перехода от системы координат $OXYZ$ к системе $Oxyz$ определяется матрицей

$$\mathbf{e}_\tau = (\Theta_{11}\Theta_{12}\Theta_{13}), \quad \mathbf{e}_n = (\Theta_{21}\Theta_{22}\Theta_{23}), \quad \mathbf{e}_r = (\Theta_{31}\Theta_{32}\Theta_{33}). \quad (1.1.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, & \Theta_{12} &= -\sin \theta_1 \cos \theta_2, & \Theta_{13} &= \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{21} &= \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, & \Theta_{22} &= \cos \theta_1 \cos \theta_2, & \Theta_{23} &= \sin \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{31} &= -\cos \theta_2 \sin \theta_3, & \Theta_{32} &= \sin \theta_2, & \Theta_{33} &= \cos \theta_2 \cos \theta_3. \end{aligned}$$

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника ω в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt} \cos \theta_3 + \omega_0 \Theta_{21}, \\ \omega_2 &= \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_2 + \omega_0 \Theta_{22}, \\ \omega_3 &= \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt} \sin \theta_3 + \omega_0 \Theta_{23}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

где ω_0 — величина орбитальной угловой скорости.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс при его движении по круговой орбите имеют вид [4]

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega = \mathbf{M}. \quad (1.1.3)$$

Здесь J_j ($j = 1, 2, 3$) — главные центральные моменты инерции спутника; $\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_m$ совокупность гравитационного, аэродинамического и магнитного моментов сил, действующих на спутник.

Гравитационный момент представляется в известном виде [4]

$$\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times J\mathbf{e}_r) \quad (1.1.4)$$

Аэродинамические моменты оказывают существенное влияние на движение спутника около центра масс на низких орбитах (до 700 км). Выражения для этих моментов достаточно сложны и зависят от формы и геометрии спутника [29, 58, 64, 65, 68, 69, 74]. Для аналитических исследований в большинстве работ принято следующее представление для аэродинамического момента

$$\mathbf{M}_a = \frac{1}{2} \rho V_c^2 C_d S (\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{r}_d), \quad (1.1.5)$$

где ρ — плотность атмосферы, V_c — скорость центра масс спутника, C_d — аэродинамический коэффициент, S — эффективная площадь, $\mathbf{e}_\tau$ — единичный вектор направления скорости центра масс, $\mathbf{r}_d$ — радиус-вектор от центра масс до центра давления.

Выражение (1.1.5) получено при следующих предположениях: атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве и ее плотность вдоль орбиты спутника считается постоянной; действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника.

Несколько более сложные модели аэродинамического момента представлены в [58, 65].

Магнитные моменты, в отличие от аэродинамических, которые являются пассивными, часто используются и как управляющие.

Как уже указывалось во введении, методы создания управляющих моментов основаны на различных типах взаимодействия спутника с магнитным полем Земли. При одном методе используется эффект взаимодействия собственного магнитного момента спутника, создаваемого магнитными катушками, с геомагнитным полем с вектором индукции $\mathbf{b}_0$. В этом случае управляющий механический момент имеет вид [76]

$$\mathbf{M}_m^c = \mathbf{m} \times \mathbf{b}_0, \quad (1.1.6)$$

где $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ m_3]^\top$ — собственный магнитный момент спутника; $\mathbf{b}_0$ — вектор индукции магнитного поля Земли, который задан в орбитальной системе координат.

Другой метод управления основан на использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника. Такой метод впервые был предложен А. А. Тихоновым [31]. В этой работе было показано, что путем изменения радиус-вектора центра заряда спутника относительно его центра масс можно создать момент лоренцевых сил и использовать его в качестве управляющего момента.

Момент этих сил относительно центра масс спутника определяется по формуле [1, 35, 36, 38, 40]

$$\mathbf{M}_m^q = q \mathbf{r}_q \times \Theta^\top (\mathbf{V}_c \times \mathbf{b}_0) \quad (1.1.7)$$

Здесь q — электростатический заряд, $\mathbf{r}_q = [x_q, y_q, z_q]^\top$ — радиус-вектор центра заряда спутника относительно его центра масс; $\mathbf{V}_c = R\omega_0 \mathbf{e}_\tau$ — скорость центра масс спутника, $\mathbf{e}_\tau$ — единичный вектор оси OX , R — радиус орбиты.

В формулах (1.1.6), (1.1.7), описывающих магнитные моменты различной природы, присутствует вектор $\mathbf{b}_0$, выражение для которого в общем случае имеет очень сложный вид. Существуют многочисленные аппроксимации геомагнитного поля различной степени сложности [5, 37, 39, 59, 60]. В большинстве аналитических исследований используется дипольная модель геомагнитного поля, (более сложная модель рассмотрена в Приложении 3.6.1) в которой вектор индукции меняется периодически с течением времени, если орбита спутника — круговая. В этом случае математическая модель вектора магнитной индукции в орбитальной системе координат имеет вид

$$\mathbf{b}_0(t) = \frac{\mu_E}{R^3} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \sin I \\ -\cos I \\ 2 \sin \omega_0 t \sin I \end{bmatrix} \quad (1.1.8)$$

(см. [76]). Здесь I — угол наклона плоскости орбиты спутника к плоскости экватора; μ_E — постоянная магнитного поля Земли. Компоненты векторов $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^\top$, $\mathbf{r}_q = [x_q, y_q, z_q]^\top$ далее считаются управляющими параметрами $\mathbf{u} = \mathbf{m}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}_q$.

Для работы систем ориентации требуется наличие информации об угловом движении спутника, которую доставляют бортовые датчики различного типа. При использовании активных магнитных систем требуется знание магнитного поля Земли в связанной со спутником системе координат, которое доставляет магнитометр.

Модель измерений магнитометра может быть записана в виде [76]

$$\sigma = \Theta^\top \mathbf{b}_0 + \Delta. \quad (1.1.9)$$

Здесь σ — вектор измерений магнитометра; Δ — вектор погрешностей магнитометра, которые могут быть вызваны различными факторами.

Уравнения движения (1.1.2), (1.1.3) при отсутствии управляющих моментов ($\mathbf{M}_m^c = 0$, $\mathbf{M}_m^q = 0$) допускают стационарные решения, отвечающие положениям относительного равновесия спутника, в которых оси связанной системы координат $Oxyz$ совпадают с осями орбитальной системы

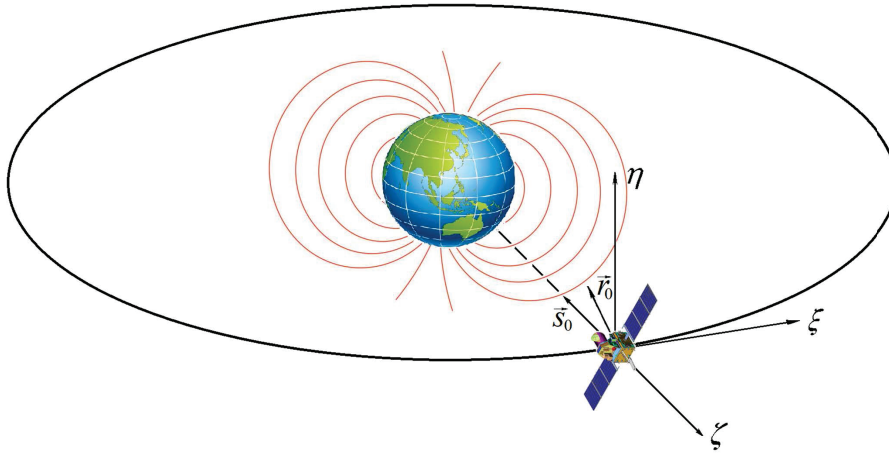


Рис. 1.2

координат $OXYZ$. Далее для определенности считаем, что углы поворота θ_i ($i = 1, 2, 3$) выбраны таким образом, что в положении относительного равновесия все углы и относительные угловые скорости равны нулю

$$\theta_i = 0, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1.10)$$

При этом главные центральные оси инерции спутника Ox, Oy, Oz соответственно совпадают с осями орбитальной системы координат OX, OY, OZ .

Как известно [3, 4, 26], достаточными условиями устойчивости положения равновесия (1.1.10) являются неравенства

$$J_2 > J_1 > J_3. \quad (1.1.11)$$

В этом положении равновесия наибольшая ось эллипсоида инерции спутника направлена по радиус-вектору, а наименьшая по нормали к плоскости орбиты (средняя ось — по касательной к орбите).

Необходимые условия устойчивости приведены в [3, 4].

1.1.2. Линеаризованные уравнения движения. Проведем линеаризацию уравнений движения спутника (1.1.2), (1.1.3), в окрестности относительного равновесия (1.1.10).

Выражения для проекций векторов орбитальной системы координат на оси, связанные со спутником $Oxyz$, линеаризованные в окрестности относительного равновесия (1.1.10), имеют вид $\mathbf{e}_\tau = (1 - \theta_1\theta_3)$, $\mathbf{e}_n = (\theta_11 - \theta_2)$, $\mathbf{e}_r = (-\theta_3\theta_21)$.

При линеаризации уравнений, очевидно, линеаризуются и выражения для моментов. Проекции гравитационного (1.1.4) и аэродинамического (1.1.5) моментов, линеаризованные в окрестности относительного равновесия (1.1.10), представляются в виде

$$M_{g1} = 3\omega_0^2(J_3 - J_2)\theta_2, \quad M_{g2} = 3\omega_0^2(J_3 - J_1)\theta_3, \quad M_{g3} = 0, \quad (1.1.12)$$

$$M_{a1} = 0, \quad M_{a2} = C_a\theta_3, \quad M_{a3} = C_a\theta_1. \quad (1.1.13)$$

Здесь предполагается, что $r_d = (l00)$, $C_a = \frac{1}{2}\rho V_c^2 C_d S l$.

Принимая во внимание, что управления $\mathbf{u} = \mathbf{m}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{r}_q$, требуемые для решения задачи стабилизации стационарных движений, формируются в виде обратной связи по компонентам вектора состояния θ_i , $\frac{d\theta_i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$), будем полагать (как и в [19, 20]), что $\Theta = E_3$. Тогда выражения для управляющих моментов $\mathbf{M}_m^c$ (1.1.6) и $\mathbf{M}_m^q$ (1.1.7) примут вид

$$\begin{aligned} M_{m1}^c &= \mu_0(2\beta_1 u_2 \sin \omega_0 t + u_3 \beta_4), \\ M_{m2}^c &= \mu_0(-2\beta_2 u_1 \sin \omega_0 t + \beta_2 u_3 \cos \omega_0 t), \\ M_{m3}^c &= -\mu_0(\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 \cos \omega_0 t), \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned}
M_{m1}^q &= \mu_0(-b_1 v_2 + b_2 v_3 \sin \omega_0 t), \\
M_{m2}^q &= \mu_0 \tilde{b}_1 v_1, \\
M_{m3}^q &= \mu_0 \tilde{b}_2 v_1 \sin \omega_0 t.
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Линеаризованные уравнения движения, управляемого собственным магнитным моментом $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$, и моментом лоренцевых сил $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^\top$ при введении безразмерного времени $\tau = \omega_0 t$, имеют вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_1 - \kappa_1 x_1 &= \mu_0[2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3 - b_1 v_2 + b_2 v_3 s\tau], \\
\ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3^* x_3 &= -\mu_0[\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 c\tau - \tilde{b}_2 v_1 s\tau], \\
\ddot{x}_2 - \kappa_2^* x_2 &= \mu_0[-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau + \tilde{b}_1 v_1].
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Здесь «точка» обозначает производную по времени τ ;

$$\begin{aligned}
x_1 &= \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \quad d_1 = \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\
\kappa_1 &= 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2^* = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2} + \frac{C_a}{J_2}, \quad \kappa_3^* = \frac{J_1 - J_2}{J_3} + \frac{C_a}{J_3}; \\
\beta_j &= \frac{sI}{J_j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_4 = \frac{cI}{J_1}, \quad \beta_5 = \frac{cI}{J_3}; \\
b_1 &= \frac{qR\omega_0 cI}{J_1}, \quad b_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_1}; \quad \tilde{b}_1 = \frac{qR\omega_0 cI}{J_2}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_3}.
\end{aligned}$$

Здесь и далее используются обозначения $c\tau = \cos \tau$, $s\tau = \sin \tau$, $sI = \sin I$, $cI = \cos I$. Для круговой орбиты

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{R^3}$$

μ — гравитационный параметр Земли. Тогда величина

$$\mu_0 = \frac{\mu E}{\mu}$$

не зависит от радиуса орбиты.

Выражения (1.1.14) и (1.1.15) на экваториальной ($I = 0$) и полярной ($I = \pi/2$) орбитах имеют вид соответственно

$$\begin{aligned}
M_{m1}^c &= \mu_0 \beta_4 u_3, \quad M_{m1}^q = -\mu_0 b_1 v_2, \\
M_{m2}^c &= 0, \quad M_{m2}^q = \mu_0 \tilde{b}_1 v_1, \\
M_{m3}^c &= -\mu_0 \beta_5 u_1, \quad M_{m3}^q = 0, \\
M_{m1}^c &= 2\mu_0 \beta_1 u_2 \sin \tau, \quad M_{m1}^q = \mu_0 b_2 v_3 \sin \tau, \\
M_{m2}^c &= \mu_0 \beta_2 u_3 \cos \tau, \quad M_{m2}^q = 0, \\
M_{m3}^c &= -\mu_0 \beta_3 u_2 \cos \tau, \quad M_{m3}^q = \mu_0 \tilde{b}_2 v_1 \sin \tau.
\end{aligned} \tag{I = 0}$$

$$\tag{I = \pi/2}$$

На экваториальной орбите, очевидно, система неуправляема в отсутствие лоренцевых сил. На полярной орбите система неуправляема в отсутствие собственных магнитных моментов. Итак, в зависимости от наклона орбиты целесообразно рассматривать использование тех или иных моментов. Следует отметить, что линеаризованные уравнения (1.1.16) представляют собой линейную систему, нестационарную по управлению как при действии собственного магнитного момента, так и при действии моментов лоренцевых сил. Основы теории таких систем изложены в главе 2. Линеаризованные уравнения измерений магнитометра (1.1.9) имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \mu_0(2x_2 sI s\tau + x_3 cI) + \Delta_1, \\
\sigma_2 &= \mu_0(-2x_1 sI s\tau + x_3 sI c\tau) + \Delta_2, \\
\sigma_3 &= -\mu_0(x_1 cI + x_2 sI c\tau) + \Delta_3.
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

1.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА

При исследовании движения осесимметричного спутника удобно ввести полусвязанную систему координат $Ox_p y_p z_p$, не участвующую в собственном вращении. Ось Oz_p направлена по оси симметрии спутника (см. рис 1.3).

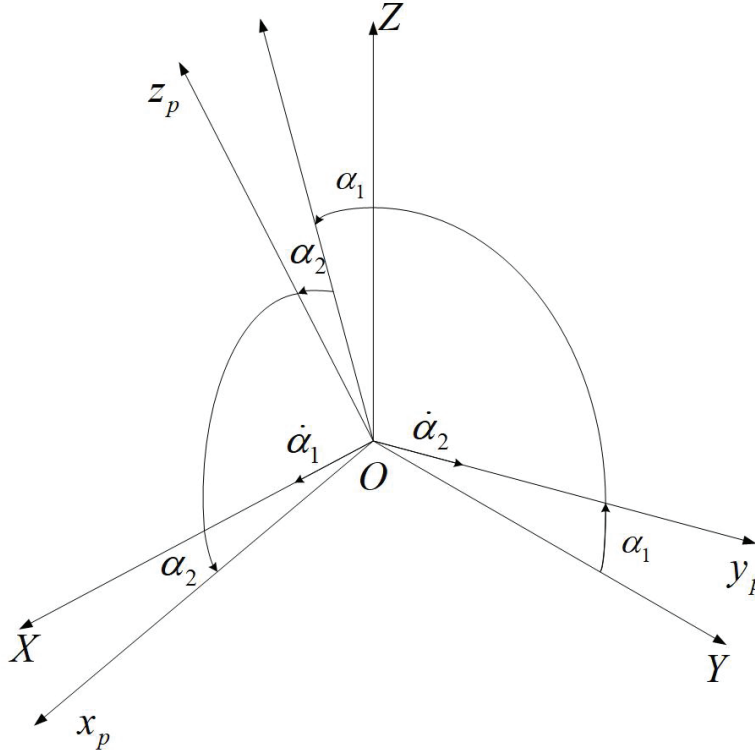


Рис. 1.3

Переход от орбитальной системы координат $OXYZ$ к системе $Ox_p y_p z_p$ осуществляется двумя поворотами. Первый поворот на угол α_1 вокруг оси OX приводит к системе $Ox_{p1} y_{p1} z_{p1}$. Второй поворот на угол α_2 вокруг оси Oy_{p1} приводит к системе $Ox_p y_p z_p$. Положение оси симметрии спутника задается двумя углами α_1, α_2 . Третий угол φ — угол собственного вращения. Ориентация системы $Ox_p y_p z_p$ относительно орбитальной системы координат $OXYZ$ определяется матрицей [37]

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c + \dot{\varphi} \mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — единичный вектор оси симметрии, $\boldsymbol{\omega}_c$ — угловая скорость системы координат $Ox_p y_p z_p$) в проекциях на оси $Ox_p y_p z_p$ имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\alpha_1}{dt} \cos \alpha_2 + \omega_o \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_y &= \frac{d\alpha_2}{dt} + \omega_o \cos \alpha_1, \\ \omega_z &= \frac{d\alpha_1}{dt} \sin \alpha_2 - \omega_o \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

где ω_o — величина угловой скорости орбитального движения.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс имеют вид

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega_c \times J\omega = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_u. \quad (1.2.2)$$

Здесь $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$ ($J_1 \neq J_3$), J_j — главные центральные моменты инерции спутника, $\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times J\mathbf{e}_r)$ — гравитационный момент, $\mathbf{M}_u$ — управляющий момент, который создается за счет взаимодействия собственного дипольного момента, формируемого магнитными катушками, с магнитным полем Земли: $\mathbf{M}_u = \mathbf{m} \times \mathbf{b}_0(t)$, $\mathbf{m} = (m_1 \ m_2 \ m_3)^\top$ — магнитный дипольный момент спутника, $\mathbf{b}_0(t)$ — вектор индукции геомагнитного поля.

Такой управляющий момент рассматривался в разделе 1.1, где вектор магнитной индукции определяется по формуле (1.1.8).

Компоненты гравитационного момента $\mathbf{M}_g$ в полусвязанной системе координат $Ox_py_pz_p$ имеют вид

$$\begin{aligned} M_{g1} &= 3\omega_0^2(J_3 - J_1)s\alpha_1c\alpha_1c\alpha_2, \\ M_{g2} &= 3\omega_0^2(J_3 - J_1)(c\alpha_1)^2s\alpha_2c\alpha_2, \\ M_{g3} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

где $s\alpha_1 = \sin \alpha_1$, $s\alpha_2 = \sin \alpha_2$, $c\alpha_1 = \cos \alpha_1$, $c\alpha_2 = \cos \alpha_2$.

В системе координат $Ox_py_pz_p$ вектор индукции магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{b}_0(t) = \frac{\mu_E}{R^3} [B_1 \ B_2 \ B_3]^\top,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= b_1c\alpha_2 + b_2s\alpha_1s\alpha_2 - b_3c\alpha_1s\alpha_2, \\ B_2 &= b_2c\alpha_1 + b_3s\alpha_1, \\ B_3 &= b_1s\alpha_2 - b_2s\alpha_1c\alpha_2 + b_3c\alpha_1c\alpha_2. \end{aligned}$$

Здесь $b_1 = sI \cos \omega_0 t$, $b_2 = -cI$, $b_3 = 2sI \sin \omega_0 t$.

Далее будем считать, что собственный магнитный момент направлен по оси симметрии спутника, т. е. $\mathbf{m} = (0 \ 0 \ m)^\top$.

Компоненты управляющего момента $\mathbf{M}_u$ в системе координат $Ox_py_pz_p$ имеют вид

$$\begin{aligned} M_{u1} &= -B_2m = \frac{\mu_E}{R^3}(cIc\alpha_1 - 2sIs\alpha_1 \sin \omega_0 t)m, \\ M_{u2} &= B_1m = \frac{\mu_E}{R^3}(sIc\alpha_2 \cos \omega_0 t - cIs\alpha_1s\alpha_2 - 2sIc\alpha_1s\alpha_2 \sin \omega_0 t)m, \\ M_{u3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Уравнения движения (1.2.1), (1.2.2) представляются в виде

$$\begin{aligned} J_1 \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} c\alpha_2 - 2 \frac{d\alpha_1}{dt} \frac{d\alpha_2}{dt} s\alpha_2 \right) + (2J_1\omega_0s\alpha_1c\alpha_2 + J_3r_0) \frac{d\alpha_2}{dt} + \\ + J_3\omega_0r_0c\alpha_1 + (4J_1 - 3J_3)\omega_0^2s\alpha_1c\alpha_1c\alpha_2 = M_{u1}, \end{aligned} \quad (1.2.5a)$$

$$\begin{aligned} J_1 \left[\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \right)^2 s\alpha_2c\alpha_2 \right] - (2J_1\omega_0s\alpha_1c\alpha_2 + J_3r_0) \frac{d\alpha_1}{dt} c\alpha_2 - \\ - J_1\omega_0^2(s\alpha_1)^2s\alpha_2c\alpha_2 - J_3r_0\omega_0s\alpha_1s\alpha_2 - 3(J_3 - J_1)\omega_0^2(c\alpha_1)^2s\alpha_2c\alpha_2 = M_{u2}. \end{aligned} \quad (1.2.5b)$$

Здесь $r_0 = \dot{\alpha}_1s\alpha_2 + \dot{\varphi} - \omega_0s\alpha_1c\alpha_2 = \text{const}$. Переходя в уравнениях (1.2.5) к безразмерным переменным, вводя обозначения

$$\tau = \omega_0 t, \quad p = \frac{r_0}{\omega_0}, \quad J = \frac{J_3}{J_1}$$

и обозначая точкой дифференцирование по τ , получим

$$\ddot{\alpha}_1c\alpha_2 - 2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2s\alpha_2 + (2s\alpha_1c\alpha_2 + pJ)\dot{\alpha}_2 + pJc\alpha_1 + (4 - 3J)s\alpha_1c\alpha_1c\alpha_2 = M_{u1}, \quad (1.2.6a)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1^2 s \alpha_2 c \alpha_2 - [2s \alpha_1 (c \alpha_2)^2 + pJ] \dot{\alpha}_1 c \alpha_2 - (s \alpha_1 c \alpha_2 + pJ) s \alpha_1 s \alpha_2 - \\ - 3(J-1)(c \alpha_1)^2 s \alpha_2 c \alpha_2 = M_{u2}. \quad (1.2.6b)$$

В отсутствие управляющих моментов ($M_u = 0$) уравнения (1.2.6) допускают стационарные решения (регулярные прецессии) $\alpha_1 = \alpha_{10}$, $\alpha_2 = \alpha_{20}$, $\dot{\alpha}_1 = 0$, $\dot{\alpha}_2 = 0$, $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$.

Уравнения стационарных движений

$$c \alpha_{10} [pJ + (4 - 3J) s \alpha_{10} c \alpha_{20}] = 0, \\ s \alpha_{20} [(s \alpha_{10})^2 c \alpha_{20} + pJ s \alpha_{10} + 3(J-1)(c \alpha_{10})^2 c \alpha_{20}] = 0$$

имеют известные решения, которые называют [4, 56] цилиндрической, гиперболоидальной и конической прецессиями:

(1) цилиндрическая прецессия:

$$c \alpha_{10} = 0, \quad s \alpha_{20} = 0, \quad (\alpha_{10} = \pi/2, \quad \alpha_{20} = 0); \quad (1.2.7)$$

ось симметрии перпендикулярна плоскости орбиты (см. рис. 1.4);

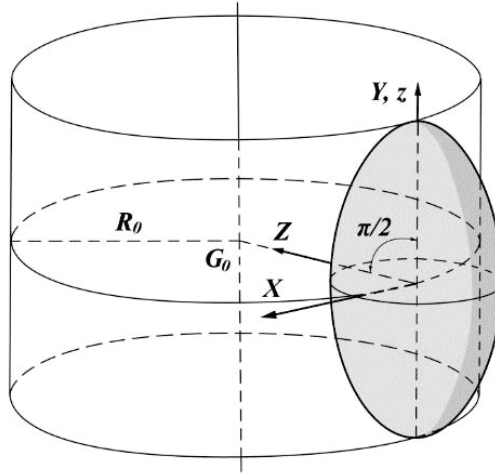


Рис. 1.4

(2) гиперболоидальная прецессия:

$$c \alpha_{10} = 0, \quad (\alpha_{10} = \pi/2), \quad c \alpha_{20} = -pJ; \quad (1.2.8)$$

ось симметрии перпендикулярна радиус-вектору (см. рис. 1.5);

(3) коническая прецессия:

$$s \alpha_{10} = \frac{pJ}{3J-4}, \quad s \alpha_{20} = 0, \quad (\alpha_{20} = 0); \quad (1.2.9)$$

ось симметрии перпендикулярна касательной к орбите (см. рис. 1.6).

Необходимые условия устойчивости этих стационарных движений рассмотрены в [3, 4, 6, 34, 56]. Достаточные условия приведены в [26, 34].

Линеаризованные уравнения управляемого движения (1.2.6), (1.2.4) в отклонениях от стационарного движения (цилиндрической прецессии) (1.2.7) имеют вид

$$\ddot{x}_1 + \kappa_1 \dot{x}_2 - \kappa_2 x_1 = -2usI\sigma\tau, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_1 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_2 = usI\sigma\tau, \quad (1.2.10)$$

где $\kappa_1 = 2 + pJ$; $\kappa_2 = 4 + pJ - 3J$, $\kappa_3 = 1 + pJ$; $p = r_0/\omega_0$, $J = J_3/J_1$; $u = \mu_0 m$, $\mu_0 = \mu_E/R^3$.

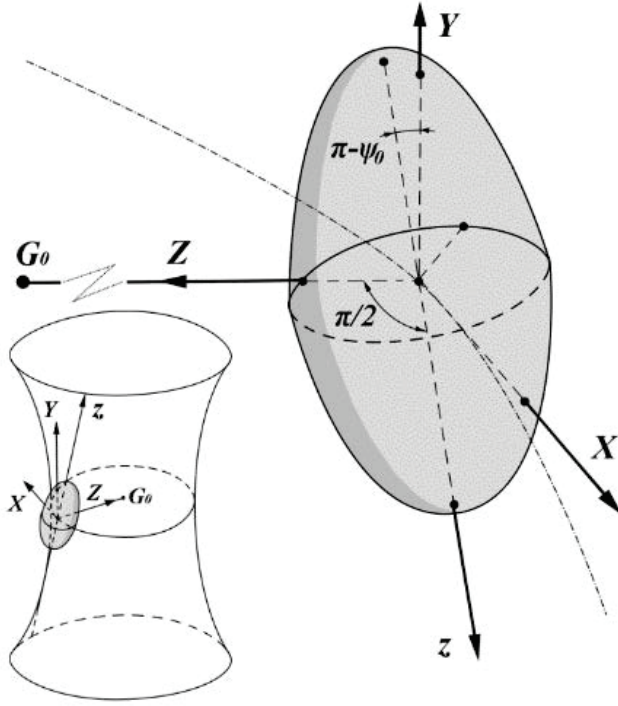


Рис. 1.5

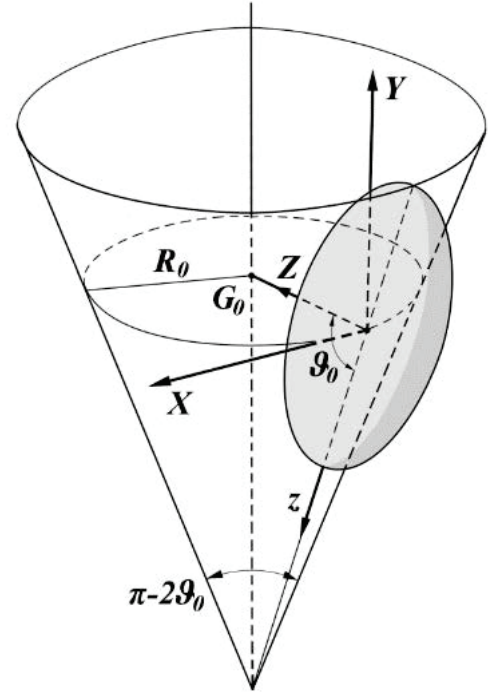


Рис. 1.6

Линеаризованные уравнения движения (1.2.6), (1.2.4) в окрестности гиперболоидальной прецессии (1.2.8) имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + \kappa_4 x_1 &= \beta_1^p u s \tau, \\ \ddot{x}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{x}_1 + s^2 \alpha_{20} x_2 &= (\beta_2^p c \tau - \beta_3^p) u.\end{aligned}\quad (1.2.11)$$

Здесь $\kappa_4 = 3(J - 1)$, $\beta_1^p = -2 \frac{sI}{c\alpha_{20}}$, $\beta_2^p = sI c \alpha_{20}$, $\beta_3^p = cI s \alpha_{20}$.

Линеаризованные уравнения движения (1.2.6), (1.2.4) в окрестности конической прецессии (1.2.9) имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= (\beta_4^p - \beta_5^p s \tau) u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= \beta_6^p u s \tau.\end{aligned}\quad (1.2.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\kappa_5 &= (3b - 2)s\alpha_{10}, \quad \kappa_6 = (4 - 3b)(c\alpha_{10})^2, \quad \kappa_7 = 3(1 - b), \\ \beta_4^p &= cI c \alpha_{10}, \quad \beta_5^p = 2sI s \alpha_{10}, \quad \beta_6^p = sI.\end{aligned}$$

Системы уравнений (1.1.16), (1.2.10)–(1.2.12) служат основой для решений соответствующих задач о стабилизации стационарных движений, изложенных в главе 3. Характерная особенность этих систем состоит в их нестационарности по управлению, так как коэффициенты при управляющих воздействиях являются периодическими функциями времени. Методы исследования таких систем представлены в главе 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.

4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел// Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — 7, № 7. — С. 511–520.
7. Каленова В. И., Морозов В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. Каленова В. И., Морозов В. М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. — 2012. — 76, № 4. — С. 576–588.
9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ./ — 1960. — 36, № 5. — С. 890–901.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
14. Лурье А. А. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. Морозов В. М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — 5, № 5. — С. 727–732.
16. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — 7, № 3. — С. 395–401.
17. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 1–83.
19. Морозов В. М., Каленова В. И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.
20. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — 59, № 5. — С. 393–407.
21. Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — 85, № 4. — С. 436–453.
22. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — 60, № 3. — С. 246–253.
23. Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С. Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
25. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 296–306.
28. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978.
29. Сарычев В. А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 1985.
31. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — 41, № 1. — С. 69–79.
32. Хентов А. А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.

33. Хентов А. А. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — 6, № 5. — С. 793–795.
34. Черноуцко Ф. Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 155–157.
35. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. — 2018. — 62. — P. 142–151.
36. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
37. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — 9. — 132623–132630.
39. Antipov K. A., Tikhonov A. A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation// Geomagnetism and Aeronomy. — 2013. — 53, № 2. — P. 271–281.
40. Antipov K. A., Tikhonov A. A. On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — 33. — P. 92–99.
41. Bin Zhou Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// Automatica. — 2015. — 60. — P. 145–154.
42. Brewer J. W. Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// IEEE Trans. Circ. Syst. — 1978. — CAS-25, № 9. — P. 772–781.
43. Chang A. An algebraic characterization of controllability// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — AC-10, № 1. — P. 112–113.
44. Cubas J., de Ruiter A. Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// Acta Astronaut. — 2020. — 169. — P. 108–123.
45. Cubas J., Farrahi A., Pindado S. Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// J. Guid. Control Dynam. — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
46. Frik M. A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// AIAA J. — 1970. — 8, № 10. — P. 1780–1785.
47. Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M. Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// Asian J. Control. — 2017. — 19, № 6. — P. 2028–2041.
48. Giri D. K. and Sinha M. Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// J. Guid. Control Dynam. — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
49. Giri D. K., Sinha M. Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// J. Inst. Eng. India. Ser. C. — 2016. — 97. — P. 279–290.
50. Hautus M. L. J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — 72. — P. 443–448.
51. Huang X., Yan Y. Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2017. — 40, № 12. — P. 1–8.
52. Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// Acta Astronaut. — 2017. — 132. — P. 103–110.
53. Kalenova V. I., Morozov V. M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// Aerospace. Sci. Technol. — 2020. — 106. — 106105.
54. Kalman R. E. Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. Laub A. J., Arnold W. F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// IEEE Trans. Automat. Control. — 1984. — 29, № 2. — P. 163–165.
56. Likins P. W. Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// J. Astronaut. Sci. — 1965. — 12, № 1. — P. 18–24.
57. Morozov V. M., Kalenova V. I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 020003.
58. Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E. Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2016. — 39. — P. 437–449.

59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// *Appl. Math. Model.* — 2017. — 46. — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// *Acta Astronaut.* — 2018. — 144. — P. 171–180.
61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// *Progr. Aerospace Sci.* — 2019. — 109. — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// *Acta Astronaut.* — 2015. — 110. — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// *Acta Astronaut.* — 2015. — 116. — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// *J. Guid. Control Dynam.* — 2001. — 24, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27. — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// *J. Guid. Control Dynam.* — 1990. — 13, № 3. — P. 506–514.
67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic fiend measurements// *J. Guid. Control Dynam.* — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2000. — 76, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// *J. Guid. Control Dynam.* — 2012. — 35, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// *Control Eng. Pract.* — 2005. — 13. — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// *Aerospace Sci. Technol.* — 2018. — 76. — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1925. — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// *IEEE Trans. Control Syst. Techn.* — 2018. — 27, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* — 2016. — 52, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// *Aerospace Sci. Techn.* — 2017. — 60. — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: mihailrak@mail.ru



КРИТЕРИИ ПРЯМОЛИНЕЙНОСТИ КРИВОЙ

© 2023 г. И. В. ПОЛИКАНОВА

Аннотация. Установлены следующие критерии прямолинейности кривой:

1. Кривая в аффинном n -мерном пространстве прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда имеет со стягиваемой ею дугой общую точку, отличную от их общих концов.
2. Кривая в евклидовом 3-мерном пространстве прямолинейна тогда и только тогда, когда всякие две её ориентированные дуги подобны.
3. Спряmlяемая кривая в евклидовом n -мерном пространстве прямолинейна тогда и только тогда, когда всякие две её ориентированные дуги подобны.

Ключевые слова: критерии прямолинейности кривой, кривая с подобными дугами, прямая линия, фрактальная кривая, кривая с аффинно эквивалентными дугами.

CRITERIA FOR THE STRAIGHTNESS OF A CURVE

© 2023 I. V. POLIKANOVA

ABSTRACT. The following three criteria for the straightness of the a are proved:

1. A curve in an affine n -dimensional space is rectilinear if and only if each of its chords has a common point with the arc contracted by it, which is different from their common ends.
2. A curve in a Euclidean 3-dimensional space is rectilinear if and only if any two of its oriented arcs are similar.
3. A rectifiable curve in a Euclidean n -dimensional space is rectilinear if and only if any two of its oriented arcs are similar.

Keywords and phrases: criterion for the straightness of a curve, curve with similar arcs, straight line, fractal curve, curve with affine equivalent arcs.

AMS Subject Classification: 53A04, 54A05

1. Введение. При том, что на свойствах прямой основана вся планиметрия со стереометрией, критериев прямолинейности кривой не так уж и много. И, хотя многие утверждения о геометрических местах точек, представляющих собой прямую, можно переформулировать в виде критериев, следует подчеркнуть, что они относятся к множеству точек, находящихся во взаимном отношении к другим основным объектам — прямым и плоскостям, подчиняющимся системе аксиом. Чаще всего свойства прямой, некоторые из которых могут служить её критериями, обнаруживаются при разработке новых разделов математики. Так, в аналитической геометрии весьма эффективен критерий прямой как алгебраической линии 1-го порядка на плоскости, получивший обобщение в n -мерном аффинном пространстве A^n через представление кривой в виде трансверсального пересечения $n - 1$ гиперплоскостей с соответствующим аналитическим заданием. Математический анализ выявил, что прямая на плоскости является графиком линейной функции. Дифференциальная геометрия описывает прямую как кривую нулевой кривизны во всех точках и геодезическую в евклидовом пространстве, вариационное исчисление — как экстремаль функционала длины при натуральной параметризации в евклидовом пространстве.

Указанные критерии прямолинейности кривой предполагают либо гладкость линии, либо её спрямляемость, а хотелось бы получить характеристику, определяемую исключительно топологическими свойствами кривой, как одномерного связного многообразия в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. Поиску таких критериев и посвящена данная статья. *Прямолинейность кривой* означает, что она является прямой или её связной частью.

Активное развитие сравнительно новой ветви геометрии — фрактальной, изучающей объекты в евклидовом пространстве, конструктивные части которых подобны между собой, подвигло нас заняться исследованием вопроса о виде кривых, *обладающих свойством подобия дуг*, иначе, *кривых с подобными дугами*. Кривая (синоним «линия») обладает «свойством подобия дуг», если для любых двух ориентированных дуг кривой существует преобразование подобия пространства, отображающее одну дугу на другую с сохранением ориентации, т.е. начало дуги отображается в начало другой дуги, а конец — в конец.

Гипотеза. Единственными линиями в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, обладающими свойством подобия дуг, являются прямые.

В классе спрямляемых кривых данный факт тривиален и составляет содержание теоремы 7. Для неспрямляемых кривых в $\mathbb{E}^n$ гипотеза пока не доказана. Так что ещё остаётся возможность отыскать альтернативу прямой в классе фрактальных кривых, которые, как правило, неспрямляемы (фрактальная кривая «канторова лестница» является спрямляемой кривой длины 2) и имеют дробную размерность [2] (у прямой размерность равна 1). В отличие от прямой, у которой все сегменты подобны между собой, у фрактальных кривых подобны отдельные конструктивные части, хотя и в бесконечном количестве, но не всякие две связные части. Стоит также отметить, что связные части прямой не подобны самой прямой, тогда как у многих фракталов (например, кривая Коха) целое подобно своим конструктивным частям. Впрочем, прямолинейный отрезок подобен своим дугам. Однако существование кривых с подобными дугами, отличных от прямой, представляется нам маловероятным: попытка построить фрактальную кривую в $\mathbb{E}^3$, обладающую свойством подобия дуг, (в процессе доказательства теоремы 8) не увенчалась успехом.

Главный результат. В $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$ единственными линиями, обладающими свойством подобия дуг, являются прямые или их связные части.

Методы обоснования — топологические и стереометрические. Основные инструменты:

1. критерий прямолинейности (теорема 6): *кривая в $\mathbb{A}^n$ прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда имеет пересечение с кривой в своей внутренней точке*,
2. теоремы 2–4 о разбиении дуги на конгруэнтные части,
3. теоремы синусов и косинусов для трёхгранных углов.

Обозначения. Точки кривой обозначаются заглавными буквами латинского алфавита; далее: AB — ориентированная дуга с началом A и концом B (точками A и B в случае незамкнутой кривой определена однозначно); иногда удобно обозначать дугу AB , содержащую точки $K, \dots, L$, через $A(K \dots L)B$, если точки записаны в естественном порядке следования на кривой:

$$A - K - \dots - L - B;$$

тем же способом обозначается и прямая, проходящая через точки A и B , что всякий раз оговаривается; $[AB]$ — прямолинейный отрезок с концами A, B ; (AB) — луч с вершиной A , проходящий через точку B ; $|AB|$ — длина отрезка $[AB]$; (ABC) — плоскость, проходящая через неколлинеарные точки A, B, C .

Подобием с коэффициентом $k > 0$ называется преобразование f пространства $\mathbb{E}^n$ такое, что $|f(A)f(B)| = k \cdot |AB|$ для любой пары точек A и B . Подобие с коэффициентом $k = 1$ называется *движением*. Подобия и движения являются гомеоморфизмами пространства $\mathbb{E}^n$ на себя. В дальнейшем преобразование подобия пространства будем называть кратко подобием. Множество F называется *конгруэнтным* множеству G , если F является образом G при некотором движении, обозначим $F \cong G$. Конгруэнтность множеств является отношением эквивалентности. Поэтому допустима запись $F \cong G \cong H$. Конгруэнтные отрезки, углы, треугольники будем обозначать более привычным нам знаком равенства и называть равными.

2. Теоремы о разбиении дуги на конгруэнтные части. В данном разделе с помощью теоремы 1 о компактных множествах устанавливается единственность разбиения дуги на n конгруэнтных частей при условии, что такое разбиение существует (теорема 2). Далеко не всякая дуга допускает разбиение на конгруэнтные части. Однако, если такое разбиение существует, то и любая подобная ей дуга разбивается на такое же количество конгруэнтных дуг (теорема 3). Данные результаты установлены автором ранее [3] в связи с исследуемым вопросом.

Условимся обозначать строгое и нестрогое включения соответственно $\subset$ и $\subseteq$.

Теорема 1. *Никакое множество в $\mathbb{E}^n$ не конгруэнтно собственному компактному подмножеству.*

Доказательство. Предположим противное: существуют в $\mathbb{E}^n$ множества X , Y такие, что X — компактно, $X \subset Y$ и $Y = f(X)$ при некотором движении f . Выберем произвольно точку $y \in Y \setminus X$. В силу компактности X нижняя грань расстояний $r = \inf_{x \in X} |xy|$ положительна. Множество Y — компактно, будучи образом компактного множества X при непрерывном отображении, каким является движение f . Поэтому из всякого его покрытия открытыми шарами с радиусами $r/2$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть n — минимальное число шаров с радиусами $r/2$, достаточное для покрытия множества Y и $\Omega = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ — одно из таких покрытий:

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Так как $X \subset Y$, то данное семейство шаров будет являться покрытием и для X . Существует шар $B_j \in \Omega$, содержащий точку y и, значит, целиком содержащийся в открытом шаре с центром y радиуса r . Ввиду определения числа r шар B_j не имеет общих точек с множеством X . Поэтому, удалив его (и другие, не пересекающиеся с X шары) из семейства Ω , получим покрытие множества X шарами (при соответствующей перенумерации) $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$:

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_i,$$

где $m < n$. Тогда $Y = f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^m f(B_i)$. При движении открытые шары отображаются в открытые шары того же радиуса. Поэтому последнее соотношение означает, что множество Y покрывается семейством открытых шаров $\{f(B_1), f(B_2), \dots, f(B_m)\}$ с радиусами $r/2$, причём в количестве меньшем, чем n . Полученное противоречие доказывает ложность допущения. $\square$

В дальнейшем под *кривой* понимаем одномерное связное многообразие, вложенное в аффинное пространство, *дуга* кривой — образ числового промежутка $[a, b]$ при его вложении в кривую, *хорда* — произвольный отрезок с концами, принадлежащими кривой, возможно, пересекающий кривую в нескольких точках.

Пусть гомеоморфизм $\varphi: [a, b] \rightarrow \gamma$ задаёт дугу AB на кривой γ . Всякий набор чисел $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ таких, что $a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < b$, определяет $n - 1$ внутренних точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ на γ и однозначно определяет n дуг $\check{a}_i = A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($A_0 = A$, $A_n = B$), получающих естественный порядок на γ и обладающих тем свойством, что $\check{a}_i \cap \check{a}_{i+1} = A_i$, $\check{a}_i \cap \check{a}_j = \emptyset$ при $|i - j| > 1$. В этом случае будем говорить о *разбиении дуги AB точками $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ на части или дуги* и записывать $AB = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$.

Предложение 1. *Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ — два набора внутренних точек дуги с концами $A_0 = B_0$ и $A_n = B_n$, разбивающих её на n частей, и существует номер i , для которого $A_i \neq B_i$. Тогда найдутся номера $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $A_{i-1}A_i \subset B_{j-1}B_j$.*

Доказательство. Пусть наборы чисел $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ числового промежутка $[a, b]$ определяют разбиения $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ дуги AB на n частей. Полагаем: $a = t_0 = s_0$ и $b = t_n = s_n$. Докажем индукцией по числу внутренних точек, что найдутся номера $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $[t_{i-1}, t_i] \subset [s_{j-1}, s_j]$.

$n - 1 = 1$. Тогда $t_1 \neq s_1$. Значит, либо $t_1 < s_1$, либо $t_1 > s_1$. В первом случае $[t_0, t_1] \subset [s_0, s_1]$. Во втором случае $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$. Утверждение доказано.

Пусть утверждение справедливо для числа точек $k < n - 1$ при $n > 2$. Докажем утверждение для двух наборов, состоящих из $n - 1$ внутренних точек $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$. Если $t_1 < s_1$, то $[t_0, t_1] \subset [s_0, s_1]$. Если $t_1 = s_1$, то для промежутка $[t_1, b]$ и двух наборов внутренних точек $t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_2, \dots, s_{n-1}$ согласно индукционному предположению найдутся номера $i, j \in \{2, \dots, n\}$ такие, что $[t_{i-1}, t_i] \subset [s_{j-1}, s_j]$. Утверждение доказано. Пусть теперь $t_1 > s_1$. Рассмотрим на промежутке $[s_1, b]$ два набора внутренних точек: $t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_2, \dots, s_{n-1}$. Если для всех $i \in \{2, \dots, n\}$ справедливы равенства $t_i = s_i$, то $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$, и утверждение доказано. Если же существует номер $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, для которого $t_i \neq s_i$, то по индукционному предположению найдутся номера $i, j \in \{2, \dots, n - 1\}$ такие, что либо $[t_i, t_{i+1}] \subset [s_j, s_{j+1}]$, либо $[s_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$. Так как $t_1 \in [s_1, t_2]$, то последнее включение влечёт: $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$. Доказано.

Утверждение для дуг следует из доказанного выше ввиду инъективности вложения числового отрезка $[a, b]$ в линию. $\square$

Замечание 1. Так как оба набора точек в предложении 1 равноправны, то при тех же условиях найдутся номера $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $B_{k-1}B_k \subset A_{l-1}A_l$.

Будем говорить, что дуга AB разбивается точками $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ на n конгруэнтных частей (дуг), если её разбиение $AB = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$ этими точками на части обладает свойством: $\check{a}_i \cong \check{a}_j$ для всех $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 2. Если дуга допускает разбиение на n конгруэнтных частей, то такое разбиение единственно.

Доказательство. Допустим существование двух различных разбиений дуги AB линии γ на n конгруэнтных частей: $\gamma = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n = \check{b}_1 \cup \check{b}_2 \cup \dots \cup \check{b}_n$. Это означает, что определяющие их наборы внутренних точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ линии γ не совпадают. По предположению 1 найдутся номера i, j, k, l такие, что $\check{a}_i \subset \check{b}_j$, $\check{b}_k \subset \check{a}_l$. Так как $\check{a}_i \cong \check{a}_l$ и $\check{b}_j \cong \check{b}_k$, то существуют движения f и g такие, что $\check{a}_l = f(\check{a}_i)$ и $\check{b}_j = g(\check{b}_k)$. Тогда справедливо:

$$\check{a}_i \subset \check{b}_j = g(\check{b}_k) \subset g(\check{a}_l) = g(f(\check{a}_i)) = (g \circ f)(\check{a}_i).$$

Получили: $\check{a}_i \subset (g \circ f)(\check{a}_i)$, что противоречит теореме 1. Значит, $A_i = B_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Очевидно, что хорды, стягивающие конгруэнтные дуги, равны. Предложение 1 и теорема 2 остаются верными, если концы дуги AB совпадают.

Теорема 3. Если дуга γ разбивается на n конгруэнтных частей: $\gamma = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$ и f — подобие, то дуга $f(\gamma)$ также разбивается на n конгруэнтных частей:

$$f(\gamma) = f(\check{a}_1) \cup f(\check{a}_2) \cup \dots \cup f(\check{a}_n).$$

Доказательство. Дуги $\check{b}_i = f(\check{a}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задают разбиение дуги $f(\gamma)$. Так как $\check{a}_i = g_i(\check{a}_1)$ при некоторых движениях g_i , то

$$\check{b}_i = f(g_i(\check{a}_1)) = f(g_i(f^{-1}(\check{b}_1))) = f \circ g_i \circ f^{-1}(\check{b}_1).$$

Остаётся заметить, что композиция подобий $f \circ g_i \circ f^{-1}$ есть подобие с коэффициентом 1, т.е. движение. Поэтому $\check{b}_i \cong \check{b}_1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, и $f(\gamma) = \check{b}_1 \cup \check{b}_2 \cup \dots \cup \check{b}_n$ является разбиением дуги $f(\gamma)$ на конгруэнтные дуги. $\square$

Для наших целей предпочтительнее иная формулировка теоремы 3:

Точки разбиения дуги на конгруэнтные части при подобном преобразовании отображаются в точки разбиения её образа на конгруэнтные части.

Теорема 4. Дуга, допускающая разбиение на n конгруэнтных дуг, каждая из которых разбивается на m конгруэнтных дуг, разбивается на nm конгруэнтных дуг.

Доказательство. Пусть $\gamma = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$, где $\check{a}_i = f_i(\check{a}_1)$ при некоторых движениях f_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $\check{a}_i = \check{a}_{i1} \cup \check{a}_{i2} \cup \dots \cup \check{a}_{im}$, где $\check{a}_{ij} \cong \check{a}_{i1}$ при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда набор дуг $(\check{a}_{ij})$ является разбиением дуги γ на nm конгруэнтных частей. Действительно, по

теореме 3 набор дуг $(f_i(\check{a}_{1j}))$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ определяет разбиение дуги $\check{a}_i$ на m конгруэнтных частей. По теореме 2 о единственности разбиения дуги на определённое число конгруэнтных частей $f_i(\check{a}_{1j}) = \check{a}_{ij}$. Значит, $\check{a}_{11} \cong \check{a}_{1j} \cong \check{a}_{ij}$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Если дуга разбивается на nm конгруэнтных частей, то отсюда не следует, что она разбивается на n конгруэнтных частей. Например, если в синусоиде $y = \sin x$, $x \in [0, 4\pi]$, дугу, определённую на $[3\pi, 4\pi]$, заменить на симметричную ей относительно оси Ox , то получим кривую, допускающую разбиение на 4 конгруэнтные дуги, но не на 2 конгруэнтные части.

3. Некоторые критерии прямолинейности кривой. В данном разделе доказывается критерий выпуклости замкнутого множества в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ (теорема 5), использующийся при выводе критериев прямолинейности кривой в аффинном (теорема 6) и евклидовом (теорема 7) пространствах.

Теорема 5. *Для выпуклости замкнутого множества в $\mathbb{A}^n$ необходимо и достаточно, чтобы всякий отрезок с концами, принадлежащими этому множеству, содержал по крайней мере ещё одну точку этого множества.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность условия. Допустим противное: замкнутое множество Ω в $\mathbb{A}^n$, обладающее указанным в теореме свойством, невыпукло. Тогда существует отрезок $[XY]$ с концами в Ω , некоторая точка которого Z не принадлежит множеству Ω . Пусть ϕ — гомеоморфизм числовой прямой $\mathbb{R}$ на прямую $l \subset \mathbb{A}^n$, проходящую через X, Y , определяемый формулой $\phi(\lambda) = \lambda Y + (1 - \lambda)X$. Так как Ω — замкнутое множество в $\mathbb{A}^n$, то $l \setminus \Omega$ — открытое множество в индуцированной топологии на l , а его прообраз при гомеоморфизме ϕ есть открытое множество в $\mathbb{R}$, содержащее число $t = \phi^{-1}(Z)$. Пусть τ — его связная компонента, содержащая t . Известно, что связные компоненты открытого множества в $\mathbb{R}$ представляют собой интервалы (подмножества $\mathbb{R}$ вида (a, b) , возможно $a = -\infty$, $b = +\infty$), концы которых принадлежат его замкнутому дополнению [1, теорема 21, с. 135]. Поскольку $Z \in [XY]$, то $t \in (0, 1)$. Поэтому τ — открытый интервал $(t_1, t_2) \subset (0, 1)$ с концами в $\phi^{-1}(\Omega) \cap [0, 1]$. Тогда прямолинейный отрезок с концами в точках $\phi(t_1) \in \Omega$, $\phi(t_2) \in \Omega$ не содержит других точек множества Ω , что противоречит определению множества Ω . Сделанное допущение ложно, и Ω — выпуклое множество. $\square$

Замечание 4. Теорема 5 обобщает аналогичное утверждение, относящееся к замкнутым множествам в рефлексивных банаховых пространствах [6]. Для незамкнутых множеств утверждение неверно. Например, множество рациональных чисел числового отрезка обладает свойством, что между любыми его двумя рациональными числами содержится рациональное число, однако оно невыпукло.

Теорема 6. *Кривая в $\mathbb{A}^n$ прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда пересекает стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке.*

Доказательство. Если кривая прямолинейна, то всякая её хорда совпадает со стягиваемой ею дугой, и их пересечение содержит внутренние точки хорды. Наоборот, всякая дуга кривой, обладающей указанным в теореме свойством, по теореме 5 есть выпуклое множество, а следовательно, является прямолинейным отрезком. Кривая, окрестность каждой точки которой прямолинейна, сама прямолинейна. $\square$

Далее будем рассматривать кривые в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$.

Предложение 2. *Если кривая обладает свойством подобия дуг, то дуги её, стягиваемые равными хордами, конгруэнтны.*

Доказательство. Пусть дуги $\check{a}_1$ и $\check{a}_2$ кривой, обладающей свойством подобия дуг, стягиваются равными хордами. Существует подобие f с коэффициентом k , отображающее дугу $\check{a}_1$ на $\check{a}_2$. При этом концы A_1, B_1 дуги $\check{a}_1$ отображаются в концы A_2, B_2 дуги $\check{a}_2$. Значит,

$$|A_2 B_2| = k \cdot |A_1 B_1|.$$

Поскольку $|A_2B_2| = |A_1B_1|$, то $k = 1$, подобие f является движением, и $\check{a}_1 \cong \check{a}_2$. $\square$

Предложение 3. *Кривая, обладающая свойством подобия дуг, незамкнута.*

Доказательство. Допустим противное: линия γ , обладающая свойством подобия дуг, замкнута, её можно рассматривать как дугу AD , у которой точки A и D совпадают. Возьмём произвольно на ней точки B, C так, что $A - B - C - D$. Тогда, поскольку дуги AB и BD стягиваются одной хордой, по предложению 2 справедливо: $AB \cong BD$. Следовательно, существует точка C' такая, что $A - C' - B$ и $AC' \cong CD$. Поскольку дуги AC и CD стягиваются одной хордой, то $AC \cong CD$. Так как конгруэнтность транзитивна, то $AC' \cong AC$. Пришли к противоречию с теоремой 2. Допущение ложно. $\square$

Точку B назовём *серединой дуги* AC , если дуги AB и BC конгруэнтны.

Предложение 4. *Если кривая обладает свойством подобия дуг, то при любом натуральном числе $m > 1$ всякая её дуга AC допускает разбиение на 2^m конгруэнтных дуг ранга m . Если a — длина хорды $[AC]$ и $\angle ABC = \alpha$, где B — середина дуги AC , то длина каждой из хорд, стягивающей дугу ранга m , равна*

$$\frac{a}{2^m \sin^m \frac{\alpha}{2}}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть B — точка пересечения дуги AC кривой γ , обладающей свойством подобия дуг, с гиперплоскостью, проходящей через середину отрезка $[AC]$ перпендикулярно ему. Тогда $|AB| = |BC|$ и по предложению 2 справедливо: $AB \cong BC$. Это означает, что B — середина дуги AC . Из равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ найдём:

$$|AB| = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

(Если $B \in [AC]$, то $\alpha = \pi$, и формула остаётся верной). Деля тем же способом каждую из дуг ранга $m - 1$ пополам и применяя теорему 4 и математическую индукцию, придём к требуемому утверждению. $\square$

Из предложения 4 и теоремы 2 следует, что всякая дуга AC кривой, обладающей свойством подобия дуг, имеет единственную середину. При $\alpha < \pi/3$ дробь (1) при $m \rightarrow \infty$ стремится к ∞ , что противоречит ограниченности и компактности дуги AC . Тем самым доказано следующее предложение.

Предложение 5. *Если B — середина дуги AC кривой, обладающей свойством подобия дуг, то $\angle ABC \geq \pi/3$.*

Теорема 7. *Спрямяемая кривая в $\mathbb{E}^n$ прямолинейна тогда и только тогда, когда обладает свойством подобия дуг.*

Доказательство. Если кривая в $\mathbb{E}^n$ прямолинейна, то всякие две её дуги, представляющие собой прямолинейные отрезки, очевидно, подобны. Пусть, наоборот, спрямяемая кривая γ в $\mathbb{E}^n$ обладает свойством подобия дуг. Пусть B — середина её произвольной дуги AC . Всякая дуга спрямяемой кривой сама спрямяема, причём конгруэнтные спрямяемые дуги имеют равные длины. Обозначим общее значение длин конгруэнтных дуг AB и BC за l . Тогда длина дуги AC равна $2l$. Так как дуги AC и AB подобны, а отношение длин подобных дуг равно коэффициенту подобия k , то, следовательно, $k = 2$. С другой стороны, из рассмотрения равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ с углом $\angle ABC = \alpha$ видно, что коэффициент подобия дуг AC и AB равен

$$\frac{|AC|}{|AB|} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \Rightarrow \alpha = \pi.$$

Значит, B — середина хорды $[AC]$. Таким образом, всякая хорда кривой γ пересекает стягиваемую ею дугу в своей середине. По теореме 6 кривая γ прямолинейна. $\square$

Предложение 6. Если какая-либо хорда кривой, обладающей свойством подобия дуг, пересекает стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке, то кривая прямолинейна.

Доказательство. Пусть хорда $[AB]$ кривой γ , обладающей свойством подобия дуг, пересекает стягиваемую ею дугу AB в своей внутренней точке C . Так как дуга AB подобна всякой дуге $MN \subset \gamma$, а подобие сохраняет коллинеарность точек и простое отношение трёх точек, то хорда $[MN]$ пересекает дугу MN также в своей внутренней точке. Согласно теореме 6 кривая γ прямолинейна. $\square$

4. Кривые с подобными дугами в $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$.

Теорема 8. Кривая в $\mathbb{E}^3$ прямолинейна тогда и только тогда, когда обладает свойством подобия дуг.

Доказательство. Если кривая в $\mathbb{E}^3$ прямолинейна, то всякие две её дуги, представляющие собой прямолинейные отрезки, очевидно, подобны. Остаётся доказать, что кривая γ в $\mathbb{E}^3$, обладающая свойством подобия дуг, прямолинейна. Ввиду предложения 6 достаточно убедиться, что существует хорда, пересекающая стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке. Допустим, что это не так, т.е. никакая хорда кривой γ не имеет со стягиваемой ею дугой общих точек, кроме концов.

Пусть AC — произвольная дуга кривой γ , B — её середина, K, M — середины дуг AB и BC соответственно, $\angle ABC = \alpha$. По теореме 4 точки K, B, M разбивают дугу AC на конгруэнтные части. Тогда: $|AK| = |KB| = |BM| = |MC|$, $|AB| = |BC|$. Ввиду допущения, $B \notin [AC]$. Поэтому $0 < \alpha < \pi$.

Случай I. Точки K, M лежат в плоскости (ABC) .

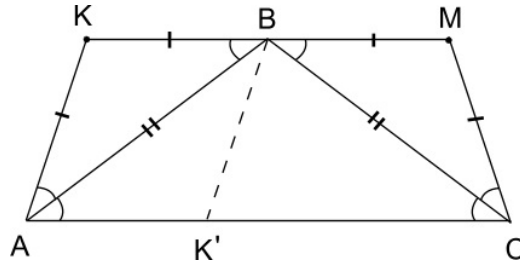


Рис. 1. Случай I.

Поскольку дуга $A(K)B$ подобна дуге $A(B)C$, то по теореме 3 точка K соответствует при этом подобии точке B . Поэтому треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AKB$ подобны и

$$\angle BAC = \angle BCA = \angle KAB = \angle KBA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Если бы точка K располагалась по ту же сторону прямой AB , что и точка C , то она принадлежала бы лучу $[AC)$ (на рис. 1 она помечена со штрихом). Причём, так как по предположению 5 справедливо неравенство $\alpha \geq \pi/3$, то

$$\angle KBA \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \leq \angle CBA.$$

Значит, точка K либо совпадает с C , либо является внутренней точкой хорды $[AC]$. Но с точкой C она не может совпадать, так как иначе кривая γ имела бы точку самопересечения $C = K$ в противоречии с нашим определением кривой как одномерного многообразия. Также точка K не может быть внутренней точкой хорды $[AC]$ ввиду исходной посылки. Следовательно, точка K расположена по другую сторону прямой AB , чем точка C . Поэтому углы $\angle BAC$ и $\angle KBA$ — равные накрест лежащие при прямых BK, AC и секущей AB . Отсюда вытекает параллельность прямых: $BK \parallel AC$. Аналогично убеждаемся, что $BM \parallel AC$ (рис. 1). Значит, хорда $[KM]$ пересекает дугу KM в точке B — середине $[KM]$, что противоречит исходному допущению. Данный случай невозможен.

Случай II. Точки K, M не лежат в плоскости (ABC) .

Пусть Q, P — середины хорд $[AC]$ и $[MK]$ соответственно. По свойствам кривой γ существует подобие f , отображающее дугу $A(KBM)C$ в дугу $C(MBK)A$. По предложению 2 оно является движением. По теореме 3

$$A \rightarrow C, \quad K \rightarrow M, \quad B \rightarrow B, \quad M \rightarrow K, \quad C \rightarrow A.$$

По свойствам подобия $[AC] \rightarrow [CA]$ и $[KM] \rightarrow [MK]$, откуда $Q \rightarrow Q, P \rightarrow P$. Здесь и в дальнейшем стрелкой $\rightarrow$ обозначаем, во что отображаются точки, отрезки, дуги и прочее при рассматриваемом в данный момент отображении. Таким образом, B, P, Q — неподвижные точки движения f , причём B не совпадает с Q . Множество неподвижных точек нетождественного движения пространства $\mathbb{E}^3$ есть либо плоскость, либо прямая, либо точка, либо пустое множество, в нашем случае — 2 варианта:

II-1 плоскость σ , проходящая через прямую BQ (и точку P), и тогда движение f представляет собой симметрию относительно плоскости σ ;

II-2 прямая BQ , и тогда f является поворотом вокруг BQ на угол $\angle AQC = \pi$, т.е. симметрией относительно оси BQ .

II-1. f — симметрия относительно плоскости σ , содержащей точки B, Q, P . По определению симметрии относительно плоскости, учитывая, что $A \rightarrow C, M \rightarrow K$, можем записать: $[AC] \perp \sigma$ и $[MK] \perp \sigma$. Следовательно, $[AC] \parallel [MK]$. Поэтому $P \notin BQ$, иначе точки K, M лежали бы в плоскости (ABC) , что не соответствует рассматриваемому случаю. Значит, $\sigma = (BPQ)$. Обозначим: $AB = b, \angle ABC = \alpha \geq \pi/3$. Точки A и K лежат по одну сторону плоскости σ , так как иначе дуга AK пересекала бы σ в некоторой своей внутренней точке, являющейся и точкой пересечения симметричной ей дуги CM с σ , и эта точка была бы точкой самопересечения кривой γ , что противоречило бы определению кривой как одномерного многообразия. То же самое можно сказать и про точки C и M (рис. II-1).

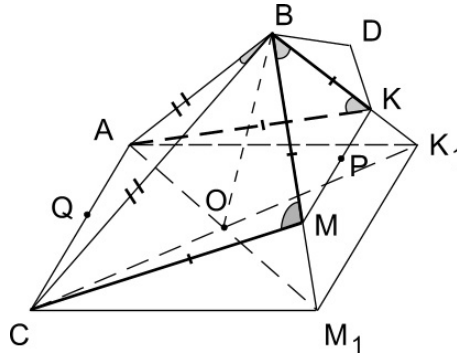


Рис. 2. Случай II-1.

Отложим на лучах $[BK]$ и $[BM]$ от вершины B такие равные отрезки, что

$$|AB| = |BC| = |BK_1| = |BM_1| = b. \quad (2)$$

Так как $[BK] \rightarrow [BM]$ при движении f , то $K_1 \rightarrow M_1$. Пары точек A и C, K и M, K_1 и M_1 симметричны относительно плоскости σ . Поэтому отрезки $[AC], [KM], [K_1M_1]$ параллельны. Так как дуги $A(K)B, K(B)M, B(M)C$ подобны дуге $A(B)C$ (при различных преобразованиях подобия), то по теореме 3

$$\angle ABC = \angle AKB = \angle KBM = \angle BMC = \alpha. \quad (3)$$

Треугольники $\triangle AKB, \triangle KBM, \triangle BMC$ — равнобедренные, с равными боковыми сторонами. Ввиду (3) они равны. Значит, $|MK| = |AB|$ и

$$\angle CAB = \angle ABK = \angle BKM = \angle CBM = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Из (2), (3) видно, что

$$\triangle ABC = \triangle K_1BM_1 \Rightarrow |AC| = |K_1M_1|.$$

Таким образом, четырёхугольник AK_1M_1C — параллелограмм (противоположные стороны $[AC]$ и $[K_1M_1]$ равны и параллельны). Пусть O — ортогональная проекция точки B на плоскость параллелограмма AK_1M_1C . Ввиду (2) боковые рёбра пирамиды BAK_1M_1C равны и проектируются в равные отрезки:

$$|AO| = |CO| = |K_1O| = |M_1O|.$$

Значит, вокруг параллелограмма AK_1M_1C можно описать окружность, поэтому он является прямоугольником, а O — точка пересечения его диагоналей.

Пусть D — середина дуги BK , U — середина дуги BM .

Так как дуги $A(KD)B$ и $M(BD)K$ подобны (а по предложению 2 и конгруэнтны), то по теореме 3

$$A \rightarrow M, \quad K \rightarrow B, \quad D \rightarrow D, \quad B \rightarrow K \Rightarrow (AKB) \rightarrow (MBK), \quad (KDB) \rightarrow (BDK).$$

Поэтому двугранные углы между парами плоскостей (AKB) и (KDB) , (MBK) и (BDK) равны. Из подобия дуг $A(KD)B$ и $A(BM)C$ ввиду конгруэнтностей

$$AK \cong KB, \quad AB \cong BC, \quad KD \cong DB, \quad BM \cong MC,$$

опираясь на теорему 3, выводим:

$$A \rightarrow A, \quad K \rightarrow B, \quad D \rightarrow M, \quad B \rightarrow C \Rightarrow (AKB) \rightarrow (ABC), \quad (KDB) \rightarrow (BMC).$$

Поэтому двугранные углы между парами плоскостей (AKB) и (KDB) , (ABC) и (BMC) равны. Поскольку в пирамиде BAK_1M_1C двугранные углы при боковых рёбрах равны, то двугранный угол между (ABC) и (BMC) равен двугранному углу между (ABK) и (KBM) . Итак, угол между плоскостями (AKB) и (KDB) равен углу между плоскостями (AKB) и (KBM) . Это означает, что либо $D \in (KBM)$, и тогда $U \in (KBM)$, и мы находимся в ситуации случая I при рассмотрении дуги $K(DBU)M$, приводящей к противоречию, либо плоскости (ABK) , (KDB) и (KBM) , пересекающиеся по прямой, содержащей ребро $[BK]$, образуют друг с другом равные тупые углы, составляющие в сумме 2π . Значит, каждый из них равен $2\pi/3$. Получили, что каждая пара плоскостей образует друг с другом пару углов, равных $2\pi/3$ и $\pi/3$. Известно, что сумма двугранных углов выпуклого n -гранного угла больше $(n-2)\pi$. Поэтому сумма четырёх равных двугранных углов четырёхгранного угла с вершиной B в пирамиде BAK_1CM_1 больше 2π . Следовательно, каждый из этих двугранных углов больше $\pi/2$ и равен $2\pi/3$. Покажем, что это невозможно, применив теорему косинусов к трёхгранному углу с вершиной B в пирамиде $BACM_1$. Для этого найдём плоские углы при его вершине B . Из (3) и (4) имеем:

$$\angle ABC = \alpha, \quad \angle M_1BC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Угол $\angle ABM_1$ найдём по теореме косинусов для треугольника $\triangle ABM_1$, предварительно выразив его сторону $|AM_1|$ по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACM_1 :

$$|AM_1|^2 = |AC|^2 + |CM_1|^2.$$

Стороны $|AC|$ и $|CM_1|$ выразим из равнобедренных треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle CBM_1$ соответственно, принимая во внимание (3), (4):

$$|CM_1| = 2|BC| \sin \left(\frac{1}{2} \angle CBM_1 \right) = 2b \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right),$$

$$|AC| = 2|BC| \sin \left(\frac{1}{2} \angle ABC \right) = 2b \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2},$$

запишем:

$$|AM_1|^2 = 4b^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right) + 4b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4b^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 2b^2 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Тогда теорема косинусов для $\triangle ABM_1$ запишется так:

$$|AM_1|^2 = |AB|^2 + |BM_1|^2 - 2|AB| \cdot |BM_1| \cdot \cos(\angle ABM_1)$$

или

$$2b^2 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 2b^2 - 2b^2 \cdot \cos(\angle ABM_1).$$

Отсюда находим

$$\cos(\angle ABM_1) = \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

Запишем теорему косинусов для трёхгранного угла с вершиной B в пирамиде $BACM_1$:

$$\cos(\angle ABM_1) = \cos(\angle ABC) \cdot \cos(\angle M_1BC) + \sin(\angle ABC) \cdot \sin(\angle M_1BC) \cdot \cos \beta,$$

где за β обозначена величина двугранного угла при ребре $[BC]$. Подставляя значения косинусов и синусов углов, получим равенство:

$$\sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

Преобразуем правую часть равенства, применив формулы приведения:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha &= \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = -\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = \\ &= -\sin \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = -\sin^3 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тогда формула (5) примет вид

$$\sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = -\sin^3 \frac{\alpha}{2} \iff \sin^3 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Так как $\sin(\alpha/2) \neq 0$, то можно поделить обе части равенства на $\sin(\alpha/2)$. Тогда

$$1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1 - \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi.$$

Это противоречит допущению, что $B \notin [AC]$.

II-2. f — симметрия относительно оси BQ . Обозначим, как и прежде,

$$AB = b, \quad \angle ABC = \alpha \geq \pi/3.$$

Отложим на лучах $[BK]$ и $[BM]$ от вершины B равные отрезки такие, что выполнены соотношения (2). Так как $[BK] \rightarrow [BM]$ при осевой симметрии f , то $K_1 \rightarrow M_1$. Кроме того, $A \rightarrow C$. По определению осевой симметрии ось BQ перпендикулярна отрезкам $[K_1M_1]$ и $[AC]$ и делит их пополам. Рассматривая подобие дуг $A(K)B$, $K(B)M$, $B(M)C$ и $A(B)C$ (при различных преобразованиях подобия) так же, как в случае II-1, убеждаемся в равенстве равнобедренных треугольников $\triangle АКВ$, $\triangle KBM$, $\triangle BMC$ и справедливости (3) и (4). В силу (2) и (3) $\triangle ABC = \triangle K_1BM_1$, а значит, $|AC| = |K_1M_1|$ и равны высоты в этих треугольниках, опущенные из вершины B и лежащие на оси симметрии BQ , а, стало быть, и равные $[BQ]$ — медиане в $\triangle ABC$. Таким образом, равные отрезки $[K_1M_1]$ и $[AC]$ пересекаются в точке Q и делятся ею пополам. Поэтому четырёхугольник AK_1CM_1 является прямоугольником, расположенным в плоскости, перпендикулярной прямой BQ .

Рассмотрим пирамиду BAK_1CM_1 (рис. 3). Пусть V , D , U , W — середины дуг AK , KB , BM , MC соответственно. По теореме 4 точки V , K , D , B , U , M , W разбивают дугу AC на 8 конгруэнтных дуг. Тогда

$$|AV| = |VK| = |KD| = |DB| = |BU| = |UM| = |MW| = |WC|.$$

Применяя рассуждения пункта II-1 к подобным дугам $A(KD)B$ и $M(BD)K$, $A(KD)B$ и $A(BM)C$, приходим к равенству углов между парами плоскостей (AKB) и (KDB) , (ABC) и (BMC) . При осевой симметрии f выполняется: $(ABC) \rightarrow (CBA)$, $(BMC) \rightarrow (BKA)$. Поэтому углы между плоскостями (ABC) и (BMC) равны углам между плоскостями (ABC) и (BKA) . В то же время, в трёхгранном угле с вершиной B в пирамиде BAK_1Q против равных плоских углов

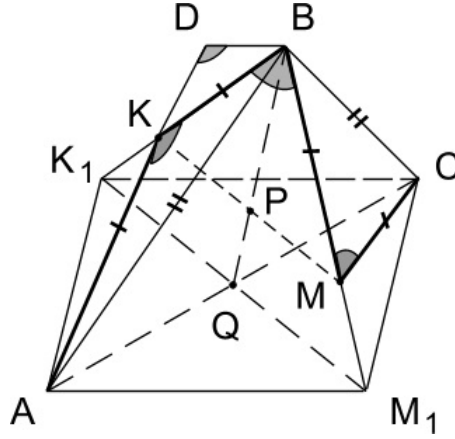


Рис. 3. Случай II-2.

$\angle ABQ$ и $\angle K_1BQ$ лежат равные двугранные углы, что следует из теоремы синусов для трёхгранного угла. Поэтому углы между плоскостями (ABK) и (KDB) равны углам между плоскостями (ABK) и (KBM) . Это означает, что либо $D \in (KBM)$, и тогда по определению осевой симметрии $U \in (KBM)$, и мы находимся в ситуации случая I при рассмотрении дуги $K(DBU)M$, приводящей к противоречию, либо плоскости (ABK) , (KDB) и (KBM) , пересекающиеся по прямой, содержащей ребро $[BK]$, образуют друг с другом равные тупые углы, составляющие в сумме 2π . Значит, каждая из рассмотренных выше пар плоскостей образует друг с другом пару углов в $2\pi/3$ и $\pi/3$. Применим теорему косинусов к трёхгранному углу с вершиной B в пирамиде $BAQK_1$.

$$\cos(\angle ABQ) = \cos(\angle ABK_1) \cdot \cos(\angle QBK_1) + \sin(\angle ABK_1) \cdot \sin(\angle QBK_1) \cdot \cos \beta,$$

где за β обозначена величина двугранного угла при ребре $[BK_1]$, равная, как установлено выше, $2\pi/3$ или $\pi/3$. Подставляя значения косинусов и синусов углов, получим равенство:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\pm \frac{1}{2} \right)$$

или

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

При $\beta = 2\pi/3$ имеем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \quad \text{или} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi,$$

что противоречит допущению, что $B \notin [AC]$.

При $\beta = \pi/3$ имеем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi \quad \text{или} \quad \alpha = 2 \arcsin \frac{2}{3}.$$

Противоречие на этом этапе не достигается. Значит, треугольники $\triangle АКВ$ и $\triangle СМВ$ составляют с треугольником $\triangle АВС$ острые углы, равные $\pi/3$, и расположены по разные стороны от него. У нас появляется шанс построить фрактальную кривую, разбив ломаную, полученную на предыдущем шаге (исходная ломаная — ABC), на пары последовательных сторон и заменив каждую из этих пар на уменьшенную копию четырёхзвенной ломаной, подобной $AKBMC$, изображённой на рис. 3 с последующим повторением этой процедуры. Покажем, что данное построение не приводит к успеху. Заметим, что угол между треугольниками, имеющими общее ребро, это угол между определяемыми ими полуплоскостями с общей граничной прямой, содержащей общее ребро, он изменяется в пределах от 0 до π , тогда как угол между плоскостями принято считать изменяющимся от 0 до $\pi/2$. Иными словами, угол между полуплоскостями и угол между плоскостями это не одно и то же. Этот нюанс следует учесть при рассмотрении следующей конструкции.

Рассмотрим развёртку на плоскость ломаной $AVKDBUMWC$, вершины которой осуществляют разбиение дуги AC кривой γ на 8 равных дуг (рис. 44).

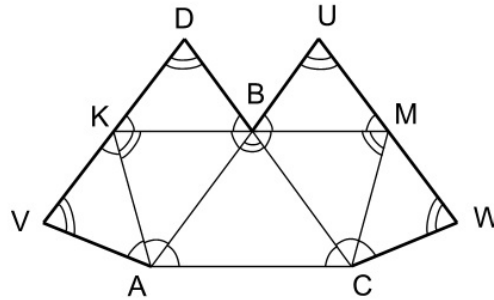


Рис. 4. Развёртка ломаной $AVKDBUMWC$.

Здесь ломаная $AKBMC$ такая же, как на рис. 1, с углом $\angle ABC = 2 \arcsin(2/3)$, а ломаные $AVKDB$ и $BUMWC$ подобны $AKBMC$ с коэффициентом подобия $1/\sin(\alpha/2) = 3/4$. Повернём треугольники 1-го ранга $\triangle AKB$ и $\triangle BMC$ вокруг отрезков $[AB]$ и $[BC]$ соответственно на угол $2\pi/3$ так, чтобы они лежали по разные стороны плоскости (ABC) (как на рис. 3). Так как дуги AB и BC подобны дуге AC , то после этого, чтобы все вершины ломаной встали на свои места на γ , надо будет поворачивать боковые треугольники на угол $2\pi/3$ вокруг их общих сторон с треугольниками 1-го ранга. Попробуем выяснить, в каком направлении надо повернуть треугольники 2-го ранга $\triangle KDB$ и $\triangle MUB$, прилегающие к вершине B . Учитывая, что двугранный угол при ребре $[K_1B]$ в пирамиде BAK_1Q равен $\pi/3$, замечаем, что поворот треугольника $\triangle KDB$ вокруг $[KB]$ на угол $2\pi/3$ в одном направлении поместит его в плоскость (KBM) . А этот случай был отвергнут ранее, как невозможный. Поворот в другом направлении (складывание «гармошкой») приведёт к тому, что двугранный угол, образованный треугольниками $\triangle KDB$ и $\triangle KBM$ будет равен $2\pi/3$. С другой стороны, так как дуга $A(KBM)C$ подобна дуге $K(DBU)M$, то по теоремам 2, 3 при этом отображении

$$\begin{aligned} A \rightarrow K, \quad K \rightarrow D, \quad B \rightarrow B, \quad M \rightarrow U, \quad C \rightarrow M \Rightarrow \\ \Rightarrow \triangle ABC \rightarrow \triangle KBM, \quad \triangle AKB \rightarrow \triangle KDB, \quad \triangle BMC \rightarrow \triangle BUM. \end{aligned}$$

Поэтому треугольники $\triangle KDB$ и $\triangle BUM$ должны составлять с треугольником $\triangle KBM$ углы, равные $\pi/3$. Опять получили противоречие.

Итак, во всех рассмотренных случаях предположение, что никакая хорда кривой γ не пересекает стягиваемую ею хорду в своей внутренней точке, приводит к противоречию. На основании предложения 6 заключаем, что кривая γ прямолинейна. $\square$

Рассуждения, относящиеся к случаю I, применённые к кривой в $\mathbb{E}^2$, приводят к утверждению:

Предложение 7. *Кривая в $\mathbb{E}^2$ прямолинейна тогда и только тогда, когда обладает свойством подобия дуг.*

5. Заключение. Подводя итоги, можно сказать, что проблема определения кривых, обладающих свойством подобия дуг в пространствах $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$, полностью решена: все такие кривые прямолинейны. В n -мерном евклидовом пространстве аналогичный результат получен в классе спрямляемых кривых.

Трудности, возникшие при решении данной проблемы, побудили нас обобщить задачу, именно: выявить кривые в аффинном пространстве, всякие две дуги которых аффинно-эквивалентны. Автором доказано [4], что в классе гладких кривых (класс гладкости равен размерности пространства) единственными кривыми с аффинно-эквивалентными дугами являются *эники* разных степеней, т.е. кривые, задаваемые в некоторой аффинной системе координат параметризацией

$$\vec{r} = (t, t^2, \dots, t^k, 0, \dots, 0), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R},$$

и называемые в евклидовом пространстве *кривыми моментав*. Здесь верхние индексы означают степени. Поскольку подобия являются аффинными преобразованиями, то линии с подобными дугами естественно оказываются эниками, и нетрудно обосновать их линейность. Однако жёсткое условие гладкости сводит на нет ценность такого следствия ввиду тривиальности вывода прямолинейности кривой с подобными дугами в классе спрямляемых кривых. Условие гладкости диктуется применяемыми методами исследования. В случае аффинной плоскости гладкость кривой априори не предполагается, но она устанавливается в ходе исследования [5]. Доказано, что единственными кривыми с аффинно-эквивалентными дугами в $\mathbb{A}^2$ являются прямые и параболы. Поскольку последние свойством подобия дуг не обладают, то им обладают только прямые и их связные части. Однако приведённое выше непосредственное доказательство этого факта (случай I теоремы 8) гораздо проще.

Надеемся, что проведённое исследование негладких кривых с подобными дугами в $\mathbb{E}^3$ прольёт свет как на пути решения проблемы кривых с подобными дугами в $\mathbb{E}^n$, так и на решение проблемы кривых с аффинно-эквивалентными дугами в классе негладких кривых хотя бы в $\mathbb{A}^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — СПб: Лань, 2010.
2. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. — РХД: Ижевск, 2001.
3. Поликанова И. В. О разбиении линии на конгруэнтные части// Тр. Всеросс. молодежн. шк.-семина «Анализ, геометрия и топология». Ч. 1 (Барнаул, 2-4 октября 2013). — Барнаул, 2013. — С. 143–148.
4. Поликанова И. В. О линиях с аффинно-эквивалентными дугами в n -мерном аффинном пространстве// Сиб. мат. ж. — 2022. — 63, № 1. — С. 180–196.
5. Поликанова И. В. О плоских линиях с аффинно-эквивалентными дугами// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — № 15. — С. 882–889.
6. Стрекаловский А. С. Введение в выпуклый анализ. — Иркутск, 2009.

Поликанова Ирина Викторовна

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул

E-mail: Anirix1@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 99–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-99-112

УДК 514.76

О СТРОЕНИИ ОБЪЕКТА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ И ТЕНЗОРА КРУЧЕНИЯ В РАССЛОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ РЕПЕРОВ

© 2023 г. К. В. ПОЛЯКОВА

Аннотация. Проводится исследование аффинных связностей в расслоении линейных реперов над гладким многообразием, опирающееся на структурные уравнения этого расслоения. Получено строение компонент аффинной связности в расслоении реперов над двумерным многообразием с помощью слоевых координат с коэффициентами — функциями базисных координат точки многообразия. Построены выражения для компонент тензора кручения в случае двумерного и трехмерного многообразий с помощью слоевых координат первого порядка и функций от базисных координат. Найдены выражения для объекта плоской связности через координаты абсолютно параллельных векторов и их пфаффовы производные, а также для объекта симметрической плоской связности через координаты абсолютно параллельных ковекторов.

Ключевые слова: расслоение линейных реперов, структурные уравнения, базисные и слоевые координаты, пфаффовы производные, аффинная связность, кручение аффинной связности, абсолютный параллелизм, плоская аффинная связность, симметрическая плоская связность.

ON THE STRUCTURE OF AN AFFINE CONNECTION OBJECT AND THE TORSION TENSOR IN THE BUNDLE OF LINEAR FRAMES

© 2023 K. V. POLYAKOVA

ABSTRACT. In this paper, we study affine connections in the bundle of linear frame over a smooth manifold based on the structural equations of this bundle. The structure of the components of an affine connection in the bundle of frames over a two-dimensional manifold is obtained by using the layer coordinates whose coefficients are functions of the base coordinates of a point of the manifold. We construct expressions for the components of the torsion tensor for two- and three-dimensional manifolds by using the first-order layer coordinates and functions of the base coordinates. Also, we find expressions for the object of flat connection in terms of the coordinates of absolutely parallel vectors and their Pfaffian derivatives and expressions for the object of symmetric flat connection in terms of the coordinates of absolutely parallel covectors.

Keywords and phrases: bundle of linear frames, structural equations, basic and layer coordinates, Pfaffian derivatives, affine connection, torsion of affine connection, absolute parallelism, flat affine connection, symmetric flat connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 58A10

1. Введение. В данной работе реализуется подход, основанный на применении метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [6, 10], обобщающего метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана, с существенным использованием координатного выражения базисных и слоевых форм. Применение метода Картана—Лаптева, оперирующего инвариантными формами и структурными уравнениями, с применением координатного задания векторов и форм дает возможность

уточнить строение объектов расслоений реперов. Особенности геометрического строения пространства расслоения реперов над гладким многообразием исследуются в монографии В. Ф. Кириченко [8], посвященной анализу основных понятий глобальной и локальной дифференциальной геометрии гладкого многообразия, относящихся к фундаментальному понятию связности.

В многочисленных исследованиях используется аффинная связность на гладком многообразии X_m , в касательном расслоении TX_m , а также в расслоении линейных реперов $L(X_m)$ над многообразием X_m . В [24] дана интерпретация классической аффинной связности с помощью аффинной связности Лаптева: при заданном сечении расслоения реперов второго порядка объект аффинной связности Лаптева (с компонентами — функциями на расслоении реперов второго порядка) становится объектом классической аффинной связности. Геометрические интерпретации аффинной связности в касательном пространстве $TL(X_m)$ и в касательном пространстве второго порядка T^2X_m к многообразию X_m построены в [14].

В работе [7] описывается структура любой аффинной связности Γ на TX_m как сумма аффинной связности G' , построенной из инфинитезимальной связности G , и полного поднятия восьми, вообще говоря, различных полей локальных тензоров валентности $(1, 2)$, и выделяется семейство симметричных аффинных связностей на расслоении TX_m , зависящих от одного симметричного тензора валентности $(1, 2)$.

Аффинные связности, порожденные абсолютно параллельными полями векторов и ковекторов, являются плоскими и симметрическими плоскими связностями. В работе [23] в рамках чисто аналитического подхода построены тензоры γ_j^i и γ^i со специальными полями, порождающие тензор деформации γ_{jk}^i , а следовательно, компоненты Γ_{jk}^i объекта плоской и симметрической плоской связностей с помощью операции дифференциального продолжения, состоящей в дифференцировании уравнений внешним образом и последующем разрешении по лемме Картана. При этом однократное продолжение объекта γ_j^i приводит к плоской связности, а двукратное продолжение объекта γ^i — к симметрической плоской связности. Данный аналитический подход имеет известную геометрическую интерпретацию (см. [12, с. 134]), фактически состоящую в рассмотрении абсолютно параллельных полей векторов и ковекторов.

В настоящей работе исследуется строение компонент аффинной связности и ее тензора кручения в расслоении линейных реперов над гладким многообразием. Показано, что компоненты аффинной связности в расслоении реперов над двумерным многообразием выражаются через слоевые координаты, причем коэффициентами выражений являются функции базисных координат точки многообразия, которые фактически и определяют конкретную связность. Строение компонент тензора кручения с помощью слоевых координат первого порядка и функций от базисных координат найдено в случае двумерного и трехмерного многообразий. С помощью координат абсолютно параллельных m векторов (ковекторов) и их пфаффовых производных получены выражения для компонент объекта плоской связности, а с помощью координат абсолютно параллельных m ковекторов (полных дифференциалов m функций) построены выражения для компонент объекта симметрической плоской связности.

Текущая точка x некоторой окрестности m -мерного гладкого многообразия X_m определяется локальными координатами x^i ($i, j, k, \dots = 1, \dots, m$). Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx_j^i, dx_{jk}^i\}$ выражаются по формулам (см. [10])

$$\begin{aligned}\omega^i &= x_j^i dx^j, \\ \omega_j^i &= -x_j^{*k} dx_k^i - x_{jk}^i \omega^k, \\ \omega_{jk}^i &= dx_{jk}^i + x_{jk}^l \omega_l^i - x_{lk}^i \omega_j^l - x_{jl}^i \omega_k^l + (x_{jk}^s x_{sl}^i - x_{jkl}^i) \omega^l.\end{aligned}\tag{1}$$

Слоевые координаты первого порядка x_j^i образуют невырожденную матрицу, $\Delta = \det(x_j^i) \neq 0$. Элементы обратной матрицы обозначим x_j^{*i} , т.е. $x_j^{*i} x_k^j = \delta_k^i$. Слоевые координаты второго и третьего порядков x_{jk}^i, x_{jkl}^i симметричны по нижним индексам. На пересечении двух окрестностей преобразования слоевых координат x_j^i, y_j^i индуцированы преобразования исходных локальных

координат x^i, y^j и имеют вид

$$y_j^i = x_k^i \frac{\partial x^k}{\partial y^j}, \quad x_j^i = y_k^i \frac{\partial y^k}{\partial x^j}.$$

Базисные касательные векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ относительно натурального (голономного) репера $\{\partial_j = \partial/\partial x^j\}$ имеют вид $\varepsilon_i = \dot{x}_i^j \partial_j$, они сопряжены формам кобазиса $\{\omega^i\}$ и удовлетворяют уравнениям (см. [1, с. 56]; [19, с. 20])

$$d\varepsilon_i = \varepsilon_j \omega_i^j + \varepsilon_{ij} \omega^j.$$

Векторы ε_{ij} являются касательными векторами второго порядка, на них натянуто касательное пространство второго порядка $T^2X_m = \text{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в точке M .

Пусть на многообразии X_m задана скалярная функция f , тогда ее дифференциал df определяет на X_m поле ковектора. Если в некоторой окрестности $df = \partial_i f dx^i = f_{,i} \omega^i$, то инвариантные производные $f_{,i} = \dot{x}_i^j \partial_j f$ (см. [11]) являются координатами указанного ковекторного поля и называются пфаффовыми производными функции f по отношению к кореперу $\{\omega^i\}$ (см., например, [6, с. 67]). Аналогично функциям, векторы $\varepsilon_{ij} = \dot{x}_i^k \dot{x}_j^l \partial_{kl} + x_{ij}^k \dot{x}_k^l \partial_l$, являющиеся коэффициентами при базисных формах ω^i , являются пфаффовыми производными векторов ε_i .

2. Структура тензоров валентности 1 и 2 в расслоении линейных реперов. Известно [8, с. 231], что задание векторного поля $A = (a^i(x^j))$ и ковекторного поля $B = (b_i(x^j))$ на гладком многообразии X_m равносильно заданию системы функций $v^i = v^i(x^k, x_s^l)$ и $q_i = q_i(x^k, x_s^l)$ на многообразии $L(X_m)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (см. [1, 21])

$$dv^i + v^j \omega_j^i = v_{,j}^i \omega^j, \quad dq_i - q_j \omega_i^j = q_{i,j} \omega^j. \quad (2)$$

Лемма 1. Для тензоров $v^i = v^i(x^k, x_s^l)$, $q_i = q_i(x^k, x_s^l)$ в расслоении линейных реперов над многообразием X_m справедливо разложение

$$v^i(x^k, x_s^l) = a^j(x^k) \cdot x_j^i, \quad q_i(x^k, x_s^l) = b_j(x^k) \cdot \dot{x}_i^j, \quad (3)$$

причем в новых координатах справедливы равенства

$$a^i = a^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad b_i = b_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.$$

Действительно, учитывая формулы (1) и уравнения (2) для тензоров $v^i = v^i(x^k, x_s^l)$, $q_i = q_i(x^k, x_s^l)$, получим

$$\frac{\partial v^i}{\partial x_k^j} = \delta_j^i v^s \dot{x}_s^k, \quad \frac{\partial q_i}{\partial x_k^j} = q_j \dot{x}_i^k.$$

В частности, для тензора v^i при $i = 1, 2$ имеем уравнения

$$\frac{\partial v^1}{\partial x_i^1} = v^k \dot{x}_k^i, \quad \frac{\partial v^1}{\partial x_i^2} = 0, \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_i^1} = 0, \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_i^2} = v^k \dot{x}_k^i.$$

Тогда получаем разложение (3)₁. Аналогично находится разложение (3)₂. Чтобы на пересечении двух окрестностей было справедливо $\dot{v}^i = v^i$, $\dot{q}_i = q_i$, получаем

$$a^i = a^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad b_i = b_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i},$$

т.е. функции $a^j(x^k)$, $b_j(x^k)$ преобразуются как классические тензоры. Из комбинаций (3) следует, что $v^i = v^i(x^k, x_s^l)$, $q_i = q_i(x^k, x_s^l)$.

Кроме того, из (2) следует, что пфаффовы (обобщенные) производные $v_{,j}^i$, $q_{i,j}$ имеют вид

$$v_{,j}^i = \frac{\partial a^l}{\partial x^k} \dot{x}_j^k x_l^i - v^k x_{kj}^i, \quad q_{i,j} = \frac{\partial b_l}{\partial x^k} \dot{x}_j^k \dot{x}_i^l + q_l x_{ij}^l$$

и зависят не только от координат x^i, x_k^j расслоения реперов первого порядка, но также от слоевых координат второго порядка x_{jk}^i (ср. [8, с. 231]). Компоненты $(v^i, v_{,j}^i)$ на многообразии $L(X_m)$

определяют векторное поле, которое называют естественным лифтом (лифтом Ли) поля (v^i) на X_m (см. [6, с. 75]).

Согласно основной теореме тензорного анализа задание тензорного поля T на гладком многообразии X_m равносильно заданию системы функций на пространстве $L(X_m)$, причем эти функции удовлетворяют уравнениям, аналогичным (2), и в точке $(x, \varepsilon_i) \in L(X_m)$ равны соответствующим компонентам тензора T в точке $x \in X_m$ в репере ε_i (см. [8, с. 233]). В следующих двух леммах найдем явные выражения на компоненты тензоров t_{ij} , t_j^i в расслоении $L(X_2)$.

Лемма 2. Для тензора $t_{ij} = t_{ij}(x^k, x_s^l)$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2 справедливо разложение

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{b(x_1^2)^2 + cx_1^2x_2^2 + d(x_2^2)^2}{\Delta^2}, & t_{12} &= \frac{a}{\Delta} - \frac{bx_1^1x_1^2 + cx_2^1x_1^2 + dx_2^1x_2^2}{\Delta^2}, \\ t_{21} &= -\frac{a}{\Delta} - \frac{bx_1^1x_1^2 + cx_1^1x_2^2 + dx_2^1x_2^2}{\Delta^2}, & t_{22} &= \frac{b(x_1^1)^2 + cx_1^1x_2^1 + d(x_2^1)^2}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

где $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$; $\Delta = \det(x_j^i)$.

Действительно, учитывая дифференциальные уравнения

$$dt_{ij} - t_{kj}\omega_i^k - t_{ik}\omega_j^k = t_{ij,k}\omega^k$$

на тензор $t_{ij} = t_{ij}(x^k, x_s^l)$, получим

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{c_{11}(x^k, x_i^2)}{\Delta^2}, & t_{12} &= \frac{c_{12}(x^k, x_i^2)}{\Delta} - \frac{c_{11}(x^k, x_i^2)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2}, \\ t_{21} &= \frac{c_{21}(x^k, x_i^1)}{\Delta} - \frac{c_{22}(x^k, x_i^1)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1}, & t_{22} &= \frac{c_{22}(x^k, x_i^1)}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{11}(x^k, x_i^2) &= b(x_1^2)^2 + cx_1^2x_2^2 + d(x_2^2)^2, & c_{12}(x^k, x_i^2) &= \frac{ax_2^2 - bx_1^2}{x_2^2}, \\ c_{21}(x^k, x_i^1) &= \frac{-ax_2^1 + bx_1^1}{x_2^1}, & c_{22}(x^k, x_i^1) &= b(x_1^1)^2 + cx_1^1x_2^1 + d(x_2^1)^2. \end{aligned}$$

Для кососимметрического тензора $t_{ij} = t_{ij}(x^k, x_s^l)$, $t_{ij} = -t_{ji}$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2 имеем $t_{12} = a(x^i)/\Delta$.

Лемма 3. Для тензора $t_j^i = t_j^i(x^k, x_s^l)$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2 справедливо разложение

$$\begin{aligned} t_1^1 &= a - \frac{bx_1^1x_1^2 + cx_1^1x_2^2 + dx_2^1x_2^2}{\Delta}, & t_2^1 &= \frac{b(x_1^1)^2 + cx_1^1x_2^1 + d(x_2^1)^2}{\Delta}, \\ t_1^2 &= -\frac{b(x_1^2)^2 + cx_1^2x_2^2 + d(x_2^2)^2}{\Delta}, & t_2^2 &= a + \frac{bx_1^1x_1^2 + cx_2^1x_1^2 + dx_2^1x_2^2}{\Delta}, \end{aligned}$$

причем $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$; $\Delta = \det(x_j^i)$.

Действительно, учитывая уравнения

$$dt_j^i + t_j^k\omega_k^i - t_k^i\omega_j^k = t_{j,k}^i\omega^k$$

для тензора $t_j^i = t_j^i(x^k, x_s^l)$, получим

$$\begin{aligned} t_1^1 &= c_1^1(x^k, x_i^1) - \frac{c_2^1(x^k, x_i^1)}{\Delta} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1}, & t_2^1 &= \frac{c_2^1(x^k, x_i^1)}{\Delta}, \\ t_1^2 &= \frac{c_1^2(x^k, x_i^2)}{\Delta}, & t_2^2 &= c_2^2(x^k, x_i^2) - \frac{c_1^2(x^k, x_i^2)}{\Delta} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1^1(x^k, x_i^1) &= a + b \cdot \frac{x_1^1}{x_2^1}, & c_2^1(x^k, x_i^1) &= b(x_1^1)^2 + cx_1^1x_2^1 + d(x_2^1)^2, \\ c_1^2(x^k, x_i^2) &= -b(x_1^2)^2 - cx_1^2x_2^2 - d(x_2^2)^2, & c_2^2(x^k, x_i^2) &= a + b \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2}. \end{aligned}$$

Для тензора $t_j^i = t_j^i(x^k, x_s^l)$ в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2 имеем $t_1^1 + t_2^2 = 2a - c$, где $a = a(x^i)$, $c = c(x^i)$.

3. Тензор деформации аффинной связности первого порядка. В расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов над многообразием X_m способом Лаптева—Лумисте (см. [6, с. 62]; [2–4, 10, 20]) посредством форм $\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k$ зададим связность Γ_{jk}^i с уравнениями

$$\Delta \Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jk,l}^i \omega^l, \quad (4)$$

где функции $\Gamma_{jk,l}^i$ являются пфаффовыми, или обобщенными частными, производными. В уравнениях (4) рассмотрим действие тензорного дифференциального оператора Δ (см. [1–5, 19])

$$\Delta \Gamma_{jk}^i = d\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^s \omega_s^i - \Gamma_{sk}^i \omega_j^s - \Gamma_{js}^i \omega_k^s$$

и перейдем к натуральному кореперу по формулам (1). Поскольку компоненты Γ_{jk}^i зависят от базисных и слоевых координат $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x^l, x_s^l, x_{sp}^l)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_s^l} dx_s^l + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_{sp}^l} dx_{sp}^l &= -\delta_l^i \delta_j^s \delta_k^p dx_{sp}^1 + \\ &+ \left(\delta_l^i (\Gamma_{jk}^p + x_{jk}^p) x_p^s - (\Gamma_{lk}^i + x_{lk}^i) x_j^s - (\Gamma_{jl}^i + x_{jl}^i) x_k^s \right) dx_s^l + \\ &+ \left((\Gamma_{jk}^p + x_{jk}^p) x_{ps}^i - (\Gamma_{pk}^i + x_{pk}^i) x_{js}^p - (\Gamma_{jp}^i + x_{jp}^i) x_{ks}^p + \Gamma_{jk,s}^i + x_{jks}^i - x_{jk}^p x_{ps}^i \right) x_l^s dx^l. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx_{sp}^l в выражении (5) дает равенства

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_{sp}^l} = -\delta_l^i \delta_j^s \delta_k^p,$$

откуда следует разложение (ср. [16, 17])

$$\Gamma_{jk}^i = -x_{jk}^i + \gamma_{jk}^i \quad (6)$$

связности с помощью слоевых координат второго порядка x_{jk}^i и тензора деформации (генератор [16, 17]) $\gamma^1 = \{\gamma_{jk}^i\}$ аффинной связности Γ_{jk}^i к канонической плоской [9, с. 94] (простейшей [13]) связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$. Тензор деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_q^p)$ зависит только от базисных координат x^l и слоевых координат первого порядка x_q^p . Связность $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ является единственной, не зависящей от слоевых переменных x_s^l . Равенство нулю ковариантных производных координат x_j^i выделяет симметрическую плоскую связность $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$.

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx_s^l дает выражение частных производных тензора деформации

$$\frac{\partial \gamma_{jk}^i}{\partial x_s^l} = \delta_l^i \gamma_{jk}^p x_p^s - \gamma_{lk}^i x_j^s - \gamma_{jl}^i x_k^s. \quad (7)$$

Объекты кручения T_{jk}^i и кривизны R_{jkl}^i аффинной связности выражаются по формулам

$$T_{jk}^i = \Gamma_{[jk]}^i, \quad R_{jkl}^i = \Gamma_{j[k,l]}^i - \Gamma_{j[k}^s \Gamma_{sl]}^i$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\Delta T_{jk}^i = T_{jk,l}^i \omega^l$, $\Delta R_{jkl}^i = R_{jkl,s}^i \omega^s$.

С помощью разложения (6) получим, что кручение и кривизна выражаются через тензор деформации по формулам

$$T_{jk}^i = \gamma_{[jk]}^i, \quad R_{jkl}^i = \frac{\partial \gamma_{j[k}^i x_{l]}^s}{\partial x^s} - \gamma_{j[k}^s \gamma_{sl]}^i. \quad (8)$$

Ковариантные производные базисных векторов ε_i относительно аффинной связности Γ_{jk}^i находим по формуле $\nabla_j \varepsilon_i = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k$. Выражение для дифференциалов векторов

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k \quad (9)$$

преобразуем к виду

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_k (\Delta \Gamma_{ij}^k + \omega_{ij}^k) + \omega^k (\varepsilon_{ijk} + \Gamma_{ij}^l \varepsilon_{lk}). \quad (10)$$

Поскольку компоненты Γ_{jk}^i объекта аффинной связности удовлетворяют уравнениям (4), то уравнения (10) принимают вид $\Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} = \omega^k (\varepsilon_l \Gamma_{ijk}^l + \varepsilon_{ijk} + \Gamma_{ij}^l \varepsilon_{lk})$. Векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ относительно инвариантны, так как неподвижны в совокупности при фиксации точки $M \in X_m$, которую обеспечивают уравнения $\omega^i = 0$. Отметим также, что на векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ натянуто оснащающее подпространство $HT^2 X_m = \text{span}(\tilde{\varepsilon}_{ij})$ пространства $T^2 X_m$ (см. [19, с. 49]).

4. Структура аффинной связности в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2 . Можно записать уравнения (7) для компонент тензора деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_q^p)$ следующим образом (см. [15]):

$$\frac{\partial \gamma_{11}^2}{\partial x_s^1} = -2\gamma_{11}^2 x_1^s, \quad \frac{\partial \gamma_{11}^2}{\partial x_s^2} = (\gamma_{11}^1 - \gamma_{21}^2 - \gamma_{12}^2) x_1^s + \gamma_{11}^2 x_2^s, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \gamma_{22}^1}{\partial x_s^2} = -2\gamma_{22}^1 x_2^s, \quad \frac{\partial \gamma_{22}^1}{\partial x_s^1} = \gamma_{22}^1 x_1^s + (\gamma_{22}^2 - \gamma_{12}^1 - \gamma_{21}^1) x_2^s, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \gamma_{11}^1}{\partial x_s^1} = -\gamma_{11}^1 x_1^s + \gamma_{11}^2 x_2^s, \quad \frac{\partial \gamma_{11}^1}{\partial x_s^2} = -(\gamma_{12}^1 + \gamma_{21}^1) x_1^s, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \gamma_{22}^2}{\partial x_s^2} = -\gamma_{22}^2 x_2^s + \gamma_{22}^1 x_1^s, \quad \frac{\partial \gamma_{22}^2}{\partial x_s^1} = -(\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2) x_2^s, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \gamma_{12}^1}{\partial x_s^2} = -\gamma_{12}^1 x_2^s - \gamma_{22}^1 x_1^s, \quad \frac{\partial \gamma_{12}^1}{\partial x_s^1} = (\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^1) x_2^s, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \gamma_{21}^1}{\partial x_s^1} = -\gamma_{21}^1 x_2^s - \gamma_{22}^1 x_1^s, \quad \frac{\partial \gamma_{21}^1}{\partial x_s^2} = (\gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1) x_2^s, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \gamma_{12}^2}{\partial x_s^1} = -\gamma_{12}^2 x_1^s - \gamma_{11}^2 x_2^s, \quad \frac{\partial \gamma_{12}^2}{\partial x_s^2} = (\gamma_{12}^1 - \gamma_{22}^2) x_1^s, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \gamma_{21}^2}{\partial x_s^1} = -\gamma_{21}^2 x_1^s - \gamma_{11}^2 x_2^s, \quad \frac{\partial \gamma_{21}^2}{\partial x_s^2} = (\gamma_{21}^1 - \gamma_{22}^2) x_1^s. \quad (18)$$

Теорема 1. Компоненты аффинной связности Γ_{jk}^i ($i, j, k, \dots = 1, 2$) в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2 в общем случае имеют вид $\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - x_{jk}^i$, где

$$\begin{aligned} \gamma_{22}^1 &= \frac{1}{\Delta^2} F_{22}^1(x^i, x_s^1), & \gamma_{11}^2 &= \frac{1}{\Delta^2} G_{11}^2(x^i, x_s^2), \\ \gamma_{22}^2 &= \frac{F_{22}^2}{\Delta} + \frac{F_{22}^1}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1}, & \gamma_{11}^1 &= \frac{G_{11}^1}{\Delta} + \frac{G_{11}^2}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2}, \\ \gamma_{12}^1 &= \frac{F_{12}^1}{\Delta} - \frac{F_{22}^1}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1}, & \gamma_{12}^2 &= \frac{G_{12}^2}{\Delta} - \frac{G_{11}^2}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2}, \\ \gamma_{21}^1 &= \frac{F_{21}^1}{\Delta} - \frac{F_{22}^1}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1}, & \gamma_{21}^2 &= \frac{G_{21}^2}{\Delta} - \frac{G_{11}^2}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_{22}^1 &= a(x_1^1)^3 + b(x_1^1)^2 x_2^1 + c x_1^1 (x_2^1)^2 + d(x_2^1)^3, & G_{11}^2 &= a(x_1^2)^3 + b(x_1^2)^2 x_2^2 + c x_1^2 (x_2^2)^2 + d(x_2^2)^3, \\ F_{22}^2 &= -\frac{a(x_1^1)^2 + u x_1^1 x_2^1 + v(x_2^1)^2}{x_2^1}, & G_{11}^1 &= \frac{a(x_1^2)^2 + u x_1^2 x_2^2 + v(x_2^2)^2}{x_2^2}, \\ F_{12}^1 &= \frac{a(x_1^1)^2 + \xi x_1^1 x_2^1 + \eta(x_2^1)^2}{x_2^1}, & G_{21}^2 &= -\frac{a(x_1^2)^2 + \xi x_1^2 x_2^2 + \eta(x_2^2)^2}{x_2^2}, \\ F_{21}^1 &= \frac{a(x_1^1)^2 + \alpha x_1^1 x_2^1 + \beta(x_2^1)^2}{x_2^1}, & G_{12}^2 &= -\frac{a(x_1^2)^2 + \alpha x_1^2 x_2^2 + \beta(x_2^2)^2}{x_2^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

причем $2b = u + \xi + \alpha$, $c = v + \eta + \beta$; $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$, $u = u(x^i)$, $v = v(x^i)$, $\xi = \xi(x^i)$, $\eta = \eta(x^i)$, $\alpha = \alpha(x^i)$, $\beta = \beta(x^i)$.

Доказательство. Из уравнений $(11)_1$ – $(18)_1$ следует общий вид (19) компонент тензора деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_q^p)$. Функции $F = \{F_{22}^1, F_{22}^2, F_{12}^1, F_{21}^1\} = \{F_{22}^1(x^i, x_s^1), F_{22}^2(x^i, x_s^1), F_{12}^1(x^i, x_s^1), F_{21}^1(x^i, x_s^1)\}$ и функции $G = \{G_{11}^2, G_{11}^1, G_{12}^2, G_{21}^2\} = \{G_{11}^2(x^i, x_s^2), G_{11}^1(x^i, x_s^2), G_{12}^2(x^i, x_s^2), G_{21}^2(x^i, x_s^2)\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x_1^2 \frac{\partial G_{11}^2}{\partial x_1^1} + x_2^2 \frac{\partial G_{11}^2}{\partial x_2^2} &= 3G_{11}^2, & x_1^1 \frac{\partial F_{22}^1}{\partial x_1^1} + x_2^1 \frac{\partial F_{22}^1}{\partial x_2^2} &= 3F_{22}^1, \\ x_1^2 \frac{\partial G_{11}^1}{\partial x_1^1} + x_2^2 \frac{\partial G_{11}^1}{\partial x_2^2} &= G_{11}^1, & x_1^1 \frac{\partial F_{22}^2}{\partial x_1^1} + x_2^1 \frac{\partial F_{22}^2}{\partial x_2^2} &= F_{22}^2, \\ x_1^1 \frac{\partial F_{12}^1}{\partial x_1^1} + x_2^1 \frac{\partial F_{12}^1}{\partial x_2^2} &= F_{12}^1, & x_1^1 \frac{\partial F_{21}^1}{\partial x_1^1} + x_2^1 \frac{\partial F_{21}^1}{\partial x_2^2} &= F_{21}^1, \\ x_1^2 \frac{\partial G_{12}^2}{\partial x_1^1} + x_2^2 \frac{\partial G_{12}^2}{\partial x_2^2} &= G_{12}^2, & x_1^1 \frac{\partial G_{21}^2}{\partial x_1^1} + x_2^1 \frac{\partial G_{21}^2}{\partial x_2^2} &= G_{21}^2. \end{aligned}$$

Теперь найдем вид функций, входящих в эти выражения. Из уравнений $(11)_2$ и $(12)_2$, $(13)_2$ и $(14)_2$, $(15)_2$ и $(18)_2$ и $(17)_2$ следует

$$\begin{aligned} F_{22}^1 &= a(x_1^1)^3 + b(x_1^1)^2 x_2^1 + c x_1^1 (x_2^1)^2 + d(x_2^1)^3, & G_{11}^2 &= a(x_1^2)^3 + b(x_1^2)^2 x_2^2 + c x_1^2 (x_2^2)^2 + d(x_2^2)^3, \\ F_{22}^2 &= -\frac{w(x_1^1)^2 + u x_1^1 x_2^1 + v(x_2^1)^2}{x_2^1}, & G_{11}^1 &= \frac{w(x_1^2)^2 + u x_1^2 x_2^2 + v(x_2^2)^2}{x_2^2}, \\ F_{12}^1 &= \frac{\zeta(x_1^1)^2 + \xi x_1^1 x_2^1 + \eta(x_2^1)^2}{x_2^1}, & G_{21}^2 &= -\frac{\zeta(x_1^2)^2 + \xi x_1^2 x_2^2 + \eta(x_2^2)^2}{x_2^2}, \\ F_{21}^1 &= \frac{\gamma(x_1^1)^2 + \alpha x_1^1 x_2^1 + \beta(x_2^1)^2}{x_2^1}, & G_{12}^2 &= -\frac{\gamma(x_1^2)^2 + \alpha x_1^2 x_2^2 + \beta(x_2^2)^2}{x_2^2}, \end{aligned}$$

причем $w = \zeta = \gamma = a$, $2b = u + \xi + \alpha$, $c = v + \eta + \beta$.

Из уравнений $(15)_2$ – $(18)_2$ следует

$$\frac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_1^1} = \frac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_1^1}, \quad \frac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_2^1} = \frac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_2^2},$$

откуда имеем

$$F_{12}^1 - F_{21}^1 = a^i(x^j) \cdot x_i^1, \quad G_{12}^2 - G_{21}^2 = a^i(x^j) \cdot x_i^2.$$

□

«Слоевые» составляющие x_i^j/Δ , $-x_{jk}^i$ одинаковы для всех связностей; конкретная связность выделяется выбором «базисных» составляющих $a = a(x^i)$, $b = b(x^i)$, $c = c(x^i)$, $d = d(x^i)$, $u = u(x^i)$, $v = v(x^i)$, $\xi = \xi(x^i)$, $\eta = \eta(x^i)$, $\alpha = \alpha(x^i)$, $\beta = \beta(x^i)$. Таким образом, компоненты Γ_{jk}^i объекта связности, как дифференциально-геометрической структуры расслоения реперов второго порядка, существенно зависят от функций a , d , u , v , ξ , η , α , β , выражающихся через базисные координаты x^j .

Согласно основной теореме тензорного анализа, доказанным леммам и теореме можно заключить, что компоненты Γ_{jk}^i ($i, j, k = 1, \dots, m$) имеют аналогичную структуру и зависят от m^3 функций базисных переменных x^i .

Следствие 1. Равенства $F_{22}^1(x^i, x_s^1) = 0$, $G_{11}^2(x^i, x_s^2) = 0$ выделяют класс аффинных связностей $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = \overset{\circ}{\gamma}_{jk}^i - x_{jk}^i$ ($i, j, k, \dots = 1, 2$) с тензором деформации следующего вида:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{22}^1 = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{12}^1 &= \frac{a^i + \xi^i}{2} \cdot \frac{x_i^1}{\Delta}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{21}^1 = \frac{-a^i + \xi^i}{2} \cdot \frac{x_i^1}{\Delta}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{22}^2 = \overset{\circ}{\gamma}_{12}^1 + \overset{\circ}{\gamma}_{21}^1 = \xi^i \cdot \frac{x_i^1}{\Delta}, \\ \overset{\circ}{\gamma}_{11}^2 = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{12}^2 &= \frac{a^i - \xi^i}{2} \cdot \frac{x_i^2}{\Delta}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{21}^2 = \frac{-a^i - \xi^i}{2} \cdot \frac{x_i^2}{\Delta}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{11}^1 = \overset{\circ}{\gamma}_{12}^2 + \overset{\circ}{\gamma}_{21}^2 = -\xi^i \frac{x_i^2}{\Delta}, \end{aligned}$$

где $\Delta = \det(x_j^i)$; $a^i = a^i(x^j)$, $\xi^i = \xi^i(x^j)$.

Все связности класса $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i$ имеют вид

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^1 &= -x_{22}^1, & \overset{\circ}{\Gamma}_{11}^2 &= -x_{11}^2, \\ \overset{\circ}{\Gamma}_{12}^1 &= \frac{a^i(x^j) + \xi^i(x^j)}{2} \cdot \frac{x_i^1}{\Delta} - x_{12}^1, & \overset{\circ}{\Gamma}_{21}^1 &= \frac{-a^i(x^j) + \xi^i(x^j)}{2} \cdot \frac{x_i^1}{\Delta} - x_{21}^1, & \overset{\circ}{\Gamma}_{22}^2 &= \xi^i(x^j) \cdot \frac{x_i^1}{\Delta} - x_{22}^2, \\ \overset{\circ}{\Gamma}_{12}^2 &= \frac{a^i(x^j) - \xi^i(x^j)}{2} \cdot \frac{x_i^2}{\Delta} - x_{12}^2, & \overset{\circ}{\Gamma}_{21}^2 &= \frac{-a^i(x^j) - \xi^i(x^j)}{2} \cdot \frac{x_i^2}{\Delta} - x_{21}^2, & \overset{\circ}{\Gamma}_{11}^1 &= -\xi^i(x^j) \cdot \frac{x_i^2}{\Delta} - x_{11}^1; \end{aligned}$$

их «слоевые» составляющие x_j^i/Δ , $-x_{jk}^i$ одинаковы для всех связностей этого класса; конкретная связность данного класса выделяется выбором «базисных» составляющих $a^i(x^j)$, $\xi^i(x^j)$.

Следствие 2. Если функции $a^i(x^j)$ равны нулю, то в классе $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i$ выделяется семейство симметричных аффинных связностей, зависящих от функций $\xi^i(x^j)$, с тензором деформации

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{22}^1 = 0, \quad 2\overset{\circ}{\gamma}_{12}^1 &= 2\overset{\circ}{\gamma}_{21}^1 = \overset{\circ}{\gamma}_{22}^2 = \overset{\circ}{\gamma}_{12}^1 + \overset{\circ}{\gamma}_{21}^1 = \xi^i(x^j) \cdot \frac{x_i^1}{\Delta}, \\ \overset{\circ}{\gamma}_{11}^2 = 0, \quad 2\overset{\circ}{\gamma}_{12}^2 &= 2\overset{\circ}{\gamma}_{21}^2 = \overset{\circ}{\gamma}_{11}^1 = \overset{\circ}{\gamma}_{12}^2 + \overset{\circ}{\gamma}_{21}^2 = -\xi^i(x^j) \cdot \frac{x_i^2}{\Delta}. \end{aligned}$$

Кривизна этой связности равна нулю тогда и только тогда, когда функции $\xi^i(x^j)$ равны нулю. Следовательно, единственной плоской связностью этого семейства является каноническая плоская связность с тензором деформации $\gamma_{jk}^i = 0$.

5. Структура тензора кручения аффинной связности в расслоении линейных реперов. Рассматривая разность компонент тензора деформации γ_{12}^1 , γ_{21}^1 и γ_{12}^2 , γ_{21}^2 (19) с учетом (20) или решая дифференциальные уравнения (7) на X_2 , $i, j, k, \dots = 1, 2$, приходим к тому, что две компоненты тензора кручения T_{jk}^i существенно зависят от двух функций a^j с базисными координатами x^k , т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (см. [15]). Тензор кручения T_{jk}^i ($i, j, k, \dots = 1, 2$) аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2 , в общем случае имеет вид

$$T_{12}^i = a^j \cdot \frac{x_j^i}{\Delta},$$

где $\Delta = \det(x_j^i)$, функции $a^j = a^j(x^k)$ образуют относительный вектор веса 1.

Решая дифференциальные уравнения (7) при $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$, можно показать, что девять компонент тензора кручения T_{jk}^i существенно зависят от девяти функций a^j , b^k , c^j базисных координат x^k , т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Тензор кручения T_{jk}^i ($i, j, k, \dots = 1, 2, 3$) аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над трехмерным многообразием X_3 , в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} T_{12}^i &= \frac{1}{\Delta}(a^j x_j^i \cdot b^k x_k^3 + c^j x_j^3), \\ T_{31}^i &= \frac{1}{\Delta}(a^j x_j^i \cdot b^k x_k^2 + c^j x_j^2), \\ T_{23}^i &= \frac{1}{\Delta}(a^j x_j^i \cdot b^k x_k^1 + c^j x_j^1), \end{aligned}$$

где $\Delta = \det(x_j^i)$, $a^j = a^j(x^k)$, $b^k = b^k(x^l)$, $c^j = c^j(x^k)$.

«Слоевые» составляющие x_j^i/Δ кручения T_{jk}^i одинаковы для любой связности; кручение конкретной связности определяется «базисными» составляющими $a^i(x^j)$, $b^i(x^j)$, $c^i(x^j)$.

Известно, что пространства нулевой кривизны характеризуются существованием m независимых полей абсолютно параллельных векторов или ковекторов (см. [12, с. 134]). Рассмотрим в касательном пространстве TX_m новый базис $\{u_i\}$, векторы (векторные поля) которого раскладываются в исходном базисе $\{\varepsilon_i\}$ по формуле $u_i = f_j^i \varepsilon_j$, причем функции $f_j^i = f_j^i(x^k, x_s^l)$ образуют невырожденную матрицу, т.е. $\det(f_j^i) \neq 0$. При дифференцировании векторов u_i получим

$$du_i = (df_j^i + f_i^k \omega_k^j) \varepsilon_j + f_i^j \varepsilon_{jk} \omega^k.$$

Если функции f_j^i удовлетворяют уравнениям

$$df_j^i + f_j^k \omega_k^i = f_{j,k}^i \omega^k, \quad (21)$$

то каждый из векторов u_i относительно инвариантен (неподвижен при фиксации точки), а их смещения определяются уравнениями $du_i = u_{i,k} \omega^k$, где введено обозначение

$$u_{i,k} = f_{i,k}^j \varepsilon_j + f_i^j \varepsilon_{jk}. \quad (22)$$

Таким образом, объект $f = (f_j^i)$, удовлетворяющий уравнениям (21), представляет собой m векторов $(f_1^i, \dots, f_m^i)$, в совокупности образующих невырожденный объект. Из уравнений (21) следует, что

$$df_j^i(\varepsilon_k) = f_{j,l}^i \omega^l(\varepsilon_k) - f_j^l \omega_l^i(\varepsilon_k) = f_{j,k}^i + f_j^l x_{lk}^i.$$

Учитывая равенства

$$\partial_{\varepsilon_k} f_j^i = \varepsilon_k(f_j^i) = df_j^i(\varepsilon_k),$$

получим

$$\partial_{\varepsilon_k} f_j^i = f_{j,k}^i + f_j^l x_{lk}^i. \quad (23)$$

Значит, пфаффовы производные $f' = (f_{j,k}^i)$ имеют вид

$$f_{j,k}^i = \partial_{\varepsilon_k} f_j^i - f_j^l x_{lk}^i. \quad (24)$$

Переходя в уравнениях (21) к натуральному кобазису, находим частные производные

$$\partial_k f_j^i = f_{j,l}^i x_{ls}^s + x_k^l f_{j,l}^i, \quad \partial_k^l f_j^i = \delta_k^i f_j^s x_s^l. \quad (25)$$

Пфаффовы производные $f_{j,k}^i$ объекта f_j^i удовлетворяют сравнениям $\Delta f_{i,k}^j + f_i^l \omega_{lk}^j \equiv 0 \pmod{\omega^j}$.

Для обратного тензора f_j^i ($f_k^i f_j^k = \delta_j^i$) справедливы сравнения $df_j^i - f_k^i \omega_j^k \equiv 0$.

Заменяя в уравнениях (21) слоевые формы ω_k^i на формы связности $\tilde{\omega}_k^i = \omega_k^i - \Gamma_{kl}^i \omega^l$, получим $\nabla f_j^i = \omega^k \nabla_k f_j^i$ (см. [6, с. 65]), где $\nabla f_j^i = df_j^i + f_j^k \tilde{\omega}_k^i$ — ковариантный дифференциал,

$$\nabla_k f_j^i = f_{j,k}^i - f_j^l \Gamma_{lk}^i \quad (26)$$

ковариантные производные невырожденного тензора f_j^i .

Замечание 1. 1. Выражение (26) представляет собой ковариантные производные для m контравариантных (т.е. одноиндексных) тензоров, поэтому оно содержит одно слагаемое с компонентами связности Γ .

2. Если вместо форм связности $\tilde{\omega}_k^i = \omega_k^i - \Gamma_{kl}^i \omega^l$ рассматривать формы связности с плюсом $\tilde{\omega}_k^i = \omega_k^i + \Gamma_{kl}^i \omega^l$, то выражение (26) совпадет с классическим выражением ковариантных производных вектора, где второе слагаемое с плюсом (см., например, [18]). В традиционном задании связности методом Лаптева формы связности задаются в виде разности слоевых форм и линейной комбинации базисных форм (см., например, [10, с. 166]).

Внешний дифференциал от ковариантных дифференциалов ∇f_j^i приведем к виду

$$D(\nabla f_j^i) = \nabla f_j^k \wedge \omega_k^i + \frac{1}{2} f_j^k R_{kls}^i \omega^l \wedge \omega^s. \quad (27)$$

Ковариантные производные $\nabla_k f_j^i$ образуют тензор, его обращение в нуль инвариантно и задает абсолютный параллелизм векторов u_i . Равенство нулю ковариантных производных $\nabla_k f_j^i$ (26) эквивалентно соотношению $f_{i,k}^j = f_i^l \Gamma_{lk}^j$. Учитывая невырожденность коэффициентов f_i^l , из последнего соотношения можно найти выражение объекта связности $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(f, f')$ через тензор $f = (f_j^i)$ и его пфаффовы производные $f' = (f_{j,k}^i)$: $\Gamma_{jk}^i = f_j^l f_{l,k}^i$. При этом векторы u_i переносятся абсолютно параллельно в связности Γ_{jk}^i , значит, связность является плоской, т.е. $R_{kls}^i = 0$. Тогда (27) упрощается и принимает вид $D(\nabla f_j^i) = \nabla f_j^k \wedge \omega_k^i$. Будем обозначать эту плоскую связность $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i$, т.е.

$$\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i = f_{l,k}^i f_j^l, \quad (28)$$

а с учетом (24)

$$\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i = f_j^l \partial_{\varepsilon_k} f_l^i - x_{jk}^i.$$

Учитывая выражение (9) для горизонтальных векторов, из (22) получим

$$u_{i,k} = f_j^j \tilde{\varepsilon}_{jk} + \left(f_{i,k}^j - f_i^l \overset{f}{\Gamma}_{lk}^j \right) \varepsilon_j.$$

Относительно плоской связности $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^l$ (28) пфаффовы производные $u_{i,k}$ векторов u_i нового репера линейно выражаются через горизонтальные векторы $\tilde{\varepsilon}_{jk}$ связности $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^l$, т.е. $u_{i,k} = f_i^j \tilde{\varepsilon}_{jk} \in HT^2 X_m$. При этом $du_i = f_i^j \tilde{\varepsilon}_{jk} \omega^k$, т.е. векторы u_i переносятся параллельно в связности $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i$, если они смещаются в горизонтальном подпространстве $HT^2 X_m$.

Таким образом, невырожденный тензор f_j^i , удовлетворяющий уравнениям (21), порождает объект $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i$ (28) плоской связности.

Обратно, если связность является плоской, то векторы u_i переносятся абсолютно параллельно, ковариантные производные (26) равны нулю, а объект связности выражается по формуле (28), т.е. объект связности порождается невырожденным тензором f_j^i .

Замечание 2. Если $f_j^i = x_j^i$, то, сравнивая (21) с dx_j^i , получим $f_{j,k}^i = -x_{lk}^i x_j^l$. Тогда из (28) следует, что $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$ является объектом канонической плоской связности.

Замечание 3. В [23] эта задача была решена чисто аналитически: набор тензоров f_j^i со специальными полями

$$df_j^i + f_j^k \omega_k^i = f_j^l \Gamma_{lk}^i \omega^k \quad (\det(f_j^i) \neq 0)$$

позволяет построить объект плоской связности Γ_{lk}^i , т.е. аффинная связность, порожденная пфаффовыми производными этого специального невырожденного тензора, является плоской.

Подставляя (28) в (23), получим

$$\partial_{\varepsilon_l} f_j^i = f_j^k (\overset{f}{\Gamma}_{kl}^i + x_{kl}^i). \quad (29)$$

Используя объект деформации $\overset{f}{\gamma}_{kl}^i = \overset{f}{\Gamma}_{kl}^i + x_{kl}^i$ связности $\overset{f}{\Gamma}_{kl}^i$, выражение (29) запишем в виде $\partial_{\varepsilon_l} f_j^i = f_j^k \overset{f}{\gamma}_{kl}^i$, откуда деформация $\overset{f}{\gamma}_{jk}^i$ связности $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i$ выражается по формуле

$$\overset{f}{\gamma}_{jk}^i = \overset{*}{f}_j^l \partial_{\varepsilon_k} f_l^i,$$

или подробно

$$\overset{f}{\gamma}_{jk}^i = \overset{*}{f}_j^s \overset{*}{x}_k^l \partial_l f_s^i. \quad (30)$$

Подставляя (30) в выражения (8) для кручения и кривизны, получим

$$\overset{f}{T}_{jk}^i = \overset{f}{\gamma}_{[jk]}^i = \overset{*}{f}_{[j}^s \overset{*}{x}_{k]}^l \partial_l f_s^i = \overset{*}{f}_{[j}^s \partial_{\varepsilon_{k]} f_s^i, \quad \overset{f}{R}_{jkl}^i = 0.$$

Симметрия и несимметрия объекта связности не связана с симметрией или несимметрией слоевых координат x_{jk}^i .

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *Невырожденный тензор f_j^i , удовлетворяющий уравнениям (21) и определяющий m линейно независимых абсолютно параллельных векторных полей $u_i = f_j^i \varepsilon_j$, порождает тензор деформации $\overset{f}{\gamma}_{jk}^i$ (30) несимметрической плоской связности $\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i = \overset{f}{\gamma}_{jk}^i - x_{jk}^i$ в расслоении $L(X_m)$ с объектом*

$$\overset{f}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i + \overset{*}{f}_j^s \overset{*}{x}_k^l \partial_l f_s^i,$$

имеющим кручение $\overset{f}{T}_{jk}^i = \overset{*}{f}_{[j}^s \overset{*}{x}_{k]}^l \partial_l f_s^i$.

Аналогично можно рассматривать абсолютно параллельные ковекторные поля $\theta^i = f_j^i \omega^j$ для плоской аффинной связности.

Рассмотрим плоскую аффинную связность, заданную не в расслоении линейных реперов $L(X_m)$, а на самом многообразии X_m . При таком рассмотрении компоненты объекта связности зависят от локальных координат x^i , а величины x_k^i, x_{jk}^i — это матрицы частных производных преобразования $x^i = x^i(y^j)$. Возьмем m тензоров $(f_1^i, \dots, f_m^i)$, в совокупности образующих невырожденный объект $f = (f_j^i)$ ($\det(f_j^i) \neq 0$) со следующим законом преобразования при переходе к новым координатам:

$$\bar{f}_j^i = f_j^k \overset{*}{x}_k^i, \quad f_j^i = \bar{f}_j^k x_k^i, \quad (31)$$

при этом $f_j^i = f_j^i(x^k)$. Дифференцируя выражение (31)₂ по x_l^k , получим

$$\partial_k^l f_j^i = \bar{f}_j^s \partial_k^l x_s^i = f_j^t \overset{*}{x}_t^s \delta_s^l \delta_k^i = \delta_k^i f_j^t \overset{*}{x}_t^l,$$

что совпадает с (25)₂. Из (31)₂ выразим $\overset{*}{f}_j^i = x_j^k \overset{*}{f}_k^i$.

Рассмотрим объект (ср. [12, с. 135]) $F_{jk}^i = \overset{*}{f}_j^l \frac{\partial f_l^i}{\partial x^k}$. Преобразуя $\bar{F}_{jk}^i = \overset{*}{f}_j^l \frac{\partial \bar{f}_l^i}{\partial y^k}$, получим закон, аналогичный закону для компонент связности (см. [23]; [22, с. 246]):

$$\bar{F}_{jk}^i = x_j^p x_k^t F_{pt}^s \overset{*}{x}_s^i - x_{jk}^p \overset{*}{x}_p^i,$$

причем $\overset{*}{x}_{st}^i = -\overset{*}{x}_p^i x_{rq}^p \overset{*}{x}_s^r \overset{*}{x}_t^q$ (см., например, [22, с. 154]).

Абсолютно параллельные ковекторные поля $\theta^i = f_j^i \omega^j$ порождают плоскую связность, но не симметрическую. Для задания плоской и симметрической связности рассмотрим формы

$$ds^i = s_{,j}^i \omega^j, \quad (32)$$

где $s^i = s^i(x^j)$ — функции базисных координат x^i , причем $\det(s_{,j}^i) \neq 0$; $s = (s^i) = (s^1, \dots, s^m)$ — набор функций. Выражение на пфаффовы (обобщенные) производные $s_{,j}^i$ имеют вид

$$s_{,j}^i = \overset{*}{x}_j^k \partial_k s^i. \quad (33)$$

Равенство (33) можно записать иначе $s^i_{,j} = \partial_{\varepsilon_j} s^i$, где $\partial_{\varepsilon_j} s^i = \varepsilon_j(s^i) = ds^i(\varepsilon_j)$. Продолжая (32), получим уравнения на производные $s^i_{,j}$

$$ds^i_{,j} - s^i_{,k} \omega^k_j = s^i_{,jk} \omega^k \quad (s^i_{,jk} = s^i_{,kj}). \quad (34)$$

Действуя формами $ds^i = s^i_{,j} \omega^j$ на векторы $u_i = f^j_i \varepsilon_j$, получим $ds^i(u_j) = s^i_{,k} \omega^k(f^l_j \varepsilon_l) = s^i_{,k} f^k_j$. Кобазис $\{ds^i\}$ сопряжен базису $\{u_i\}$, если $s^i_{,k} f^k_j = \delta^i_j$, т.е. $s^i_{,k} = f^k_i$. Тогда из (33) находим

$$s^i_{,j} = x^i_k \frac{\partial x^k}{\partial s^j}. \quad (35)$$

Пусть ковекторы ds^i (32) переносятся абсолютно параллельно. Из уравнений (34) следует, что ковариантные производные объекта $s^i_{,j}$ в связности Γ^i_{jk} имеют вид $\nabla_k s^i_{,j} = s^i_{,jk} + s^i_{,l} \Gamma^l_{jk}$ и обращаются в нуль, если $s^i_{,jk} = -s^i_{,l} \Gamma^l_{jk}$, т.е. $\Gamma^i_{jk} = -s^i_{,l} s^l_{,jk}$. Поскольку ковариантные производные $\nabla_k s^i_{,j}$ равны нулю, а пфаффовы производные $s^l_{,jk}$ симметричны, то кривизна и кручение этой связности равны нулю. Обозначим ее объект Γ^i_{lk} , т.е.

$$\Gamma^i_{lk} = -s^i_{,l} s^l_{,jk}. \quad (36)$$

Из уравнений (34) следует, что $ds^i_{,j}(\varepsilon_k) = s^i_{,jk} - s^i_{,l} \omega^l_{jk}$, т.е. $\partial_{\varepsilon_k} s^i_{,j} = s^i_{,jk} - s^i_{,l} \omega^l_{jk}$. Значит, пфаффовы производные $s^i_{,jk}$ имеют вид

$$s^i_{,jk} = \partial_{\varepsilon_k} s^i_{,j} + s^i_{,l} \omega^l_{jk}. \quad (37)$$

Из соотношений (36), (37) получим, что $s^i_{,l}(\Gamma^i_{lk} + x^l_{jk}) = -\partial_{\varepsilon_k} s^i_{,j}$, откуда для деформации γ^{fs}_{jk} связности Γ^i_{lk} (36) имеем

$$\gamma^{fs}_{jk} = -s^i_{,l} \partial_{\varepsilon_k} s^l_{,j},$$

а с учетом (35) получим симметричную деформацию

$$\gamma^{fs}_{jk} = -x^i_t \frac{\partial x^t}{\partial s^l} x^p_j x^q_k \partial_{pq} s^l.$$

Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 5. Набор m линейно независимых абсолютно параллельных форм $ds^i(x^j)$ (32) порождают тензор деформации $\gamma^{fs}_{jk} = -x^i_t \frac{\partial x^t}{\partial s^l} x^p_j x^q_k \partial_{pq} s^l$ симметрической плоской аффинной связности $\Gamma^i_{jk} = \gamma^{fs}_{jk} - x^i_{jk}$ в расслоении $L(X_m)$ с объектом

$$\Gamma^i_{jk} = -x^i_{jk} - x^i_t \frac{\partial x^t}{\partial s^l} x^p_j x^q_k \partial_{pq} s^l.$$

Если объект аффинной связности строится в результате двукратного вычисления пфаффовых производных объекта s^i , то кривизна и кручение этой связности равны нулю.

Если наборы $\{ds^i\}$, $\{u_i\}$ сопряжены, т.е. $s^i_{,k} = f^i_k$, то $\gamma^i_{jk} = -f^i_l \partial_{\varepsilon_k} f^l_j$. Учитывая $\delta^i_j = f^i_k f^k_j$, получим $\gamma^i_{jk} = f^l_j \partial_{\varepsilon_k} f^i_l$, что совпадает с уравнениями (21). Но там f^i_j не являются производными, а в данном случае $s^i_{,j}$ — это пфаффовы производные.

Замечание 4. Если $s^i = x^i$, то $s^i_{,j} = x^i_{,j}$, а связность $\Gamma^i_{jk} = -x^i_{jk}$ является канонической плоской связностью Γ^i_{jk} (см. [23]).

Обратимся снова к связности, заданной на многообразии X_m , а не в расслоении реперов $L(X_m)$. Рассмотрим формы $ds^i = s^i_{;j} dx^j$, где $s^i = s^i(x^j)$ — функции базисных координат x^j , $s^i_{;j} = \partial_j s^i$, причем $\det(s^i_{;j}) \neq 0$. Поскольку $s = (s^i) = (s^1, \dots, s^m)$ — набор функций, то набор их градиентов $s^i_{;j}$ образует набор ковариантных тензоров, для которых ковариантные производные имеют вид $\nabla_k s^i_{;j} = \partial_k s^i_{;j} - s^i_{;l} \Gamma^l_{jk}$. Обращение их в нуль дает $s^i_{;l} \Gamma^l_{jk} = \partial_k s^i_{;j}$, откуда $\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial s^t} \frac{\partial s^t}{\partial x^j \partial x^k}$. Этот объект удовлетворяет уравнениям для компонент объекта связности; он симметричен и его кривизна равна нулю. Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Объект*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial s^t} \frac{\partial s^t}{\partial x^j \partial x^k},$$

порожденный функциями $s^i = s^i(x^j)$, $\det(\partial_k s^i) \neq 0$, является объектом симметрической плоской аффинной связности на многообразии, т.е. m линейно независимых абсолютно параллельных форм $ds^i = \partial_k s^i dx^k$ порождают объект симметрической и плоской аффинной связности на многообразии X_m .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.
2. Белова О. О. Связности трех типов в расслоении над областью проективного пространства // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2003. — № 34. — С. 21–26.
3. Белова О. О. Тензор кручения подсвязности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2011. — № 42. — С. 7–11.
4. Белова О. О. Индуцирование аналога связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — № 45. — С. 23–29.
5. Белова О. О. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей // Мат. заметки. — 2018. — 104, № 6. — С. 812–822.
6. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1979. — 9. — С. 5–246.
7. Казан Ф. И. Аффинные связности на касательном расслоении // Изв. вузов. Мат. — 1975. — № 2. — С. 31–42.
8. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.
9. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
10. Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1966. — 1. — С. 139–189.
11. Морозов О. И. Метод подвижного корепера в геометрии дифференциальных уравнений / Дисс. на соиск. уч. степ. д-ра физ.-мат. наук — М., 2010.
12. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
13. Полякова К. В. Специальные аффинные связности первого и второго порядков // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — № 46. — С. 114–128.
14. Полякова К. В. Тангенциальнозначные формы 2-го порядка // Мат. заметки. — 2019. — 105, № 1. — С. 84–94.
15. Полякова К. В. О тензоре кручения аффинной связности на двумерном и трехмерном многообразии // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2021. — № 52. — С. 83–96.
16. Рыбников А. К. Об аффинных связностях второго порядка // Мат. заметки. — 1981. — 29, № 2. — С. 279–290.
17. Рыбников А. К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 73–80.
18. Столяров А. В. Дифференциальная геометрия полос // Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1978. — 10. — С. 25–54.
19. Шевченко Ю. И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград, 1998.
20. Шевченко Ю. И. Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 185–193.

21. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. — North-Holland, 1993.
22. *Kolář I., Michor P. W., Slovák J.* Natural Operations in Differential Geometry. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.
23. *Polyakova K. V.* Generators of flat and symmetric flat affine connections// Proc. Int. Conf. “Problems of Modern Topology and Its Applications”. — Tashkent, 2016. — P. 82–83.
24. *Shevchenko Yu., Skrydlova E.* Interpretation of classical affine connection by means Laptev affine connection// Proc. Int. Conf. “Geometry Days in Novosibirsk–2018”. — Novosibirsk: Sobolev Inst. Math., 2018. — P. 28.

Полякова Катерина Валентиновна

Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград

E-mail: polyakova_@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 113–124
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-113-124

УДК 514.764

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ИХ ПОГРУЖЕНИЯ

© 2023 г. А. А. РЫЛОВ

Аннотация. Важным примером структур информационной геометрии является статистическая структура. Это заданная на гладком многообразии M риманова метрика g с вполне симметрическим тензорным полем K типа $(2, 1)$. На многообразии, снабженном статистической структурой (g, K) , инвариантно определяется однопараметрическое семейство α -связностей $\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K$, где D — связность Леви-Чивиты метрики g , α — параметр. В работе охарактеризованы сопряженно симметрические статистические структуры и их частный случай — структуры постоянной α -кривизны. В качестве примера приведено описание структуры с α -связностью постоянной кривизны на двумерной статистической модели Парето. Показано, что двумерная логистическая модель имеет 2-связность постоянной отрицательной кривизны, а двумерная модель Вейбулла—Гнеденко — 1-связность постоянной положительной кривизны. При этом обе модели несут сопряженно симметрические статистические структуры. Для случая многообразия $\widehat{M}$ линейной связности $\widehat{\nabla}$ без кручения, погруженного в риманово многообразие со статистической структурой (g, K) , получен критерий того, что на прообразе индуцируется статистическая структура с подходящей $\widehat{\alpha}$ -связностью $\widehat{\nabla}$.

Ключевые слова: риманова метрика, статистическая структура, α -связность, сопряженно симметрическое статистическое многообразие, статистическая модель, вторая фундаментальная форма, относительно аффинное отображение.

STATISTICAL STRUCTURES ON MANIFOLDS AND THEIR IMMERSIONS

© 2023 А. А. RYLOV

ABSTRACT. An important example of structures of information geometry is a statistical structure. This is a Riemannian metric g on a smooth manifold M with a completely symmetric tensor field K of type $(2, 1)$. On a manifold endowed with the statistical structure (g, K) , a one-parameter family of α -connections $\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K$ is defined invariantly, where D is the Levi-Civita connection of the metric g and α is a parameter. In this paper, we characterize conjugate symmetric statistical structures and their particular case—structures of constant α -curvature. As an example, a description of a structure with α -connection of constant curvature on a two-dimensional statistical Pareto model is given. We prove that the two-dimensional logistic model has a 2-connection of constant negative curvature and the two-dimensional Weibull—Gnedenko model has a 1-connection of constant positive curvature. Both these models possess conjugate symmetric statistical structures. For the case of a manifold $\widehat{M}$ with a torsion-free linear connection $\widehat{\nabla}$ immersed in a Riemannian manifold with statistical structure (g, K) , a criterion is obtained that a statistical structure with an appropriate $\widehat{\alpha}$ -connection $\widehat{\nabla}$ is induced on the preimage.

Keywords and phrases: Riemannian metric, statistical structure, α -connection, conjugate symmetric statistical manifold, statistical model, second fundamental form, relatively affine mapping.

AMS Subject Classification: 53B12, 53C42

1. Введение. В последнее десятилетие широко используются методы информационной геометрии в исследовании различных видов массивов информации (семейств вероятностных распределений, пространств квантовых состояний, нейронных сетей, сложных систем и т. д.) с помощью естественно определяемых на них геометрических структур. В этой области фундаментальная задача состоит в инвариантном описании предлагаемой структуры, а прикладная — в интерпретации по такой структуре получаемой информации. Основы информационно-геометрического подхода неоднократно изложены Амари (см., например, [6]); целый ряд интересных прикладных аспектов этого подхода был освещен еще Арвини и Додсоном в [7], из многочисленных недавних работ выделим обзор Нильсена [15]. Настоящая работа посвящена важному примеру информационно-геометрических структур — статистическим структурам на гладком многообразии. От краткой характеристики свойств структур постоянной α -кривизны и более общих — сопряженно симметрических структур, переходим к описанию двумерных статистических моделей, функции распределений вероятностей которых принадлежат известным семействам: степенным, логистическим и обобщающим экспоненциальные, каждое из них характеризуется параметрами масштаба и формы.

В настоящий момент изучение геометрических свойств статистических многообразий активно развивается в направлении обогащения их геометрии дополнительными структурами и гладкими отображениями. В этом аспекте отметим недавние статьи по статистическим многообразиям, связанные с гиперповерхностями [8], с погружениями в многообразия постоянной кривизны [14], с подмногообразиями в пространствах квазипостоянной кривизны [19], со статистическими субмерсиями [20]. Введение дополнительной структуры на статистическом многообразии приводит к публикациям по аффинным погружениям в комплексные многообразия [13], по голоморфным многообразиям и их CR-подмногообразиям [9], по статистическим многообразиям с почти контактными структурами и их субмерсиям [21]. В заключительном разделе настоящей работы рассмотрен общий случай погружения многообразия линейной связности в статистическое многообразие и выявлен критерий относительно аффинного погружения.

2. Статистическая структура на гладком многообразии. Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$. Все многообразия, тензорные поля и другие объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

Статистической структурой на многообразии M называется пара (g, K) , в которой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, K — тензорное поле типа $(2, 1)$, удовлетворяющее двум условиям:

$$K_X Y = K_Y X, \quad \langle K_X Y, Z \rangle = \langle Y, K_X Z \rangle, \quad (1)$$

где X, Y, Z — векторные поля на многообразии M и оператор K_X , для которого $K_X Y = K(X, Y)$, является дифференцированием тензорной алгебры многообразия (см. также [17]). Многообразие, снабженное статистической структурой, называется *статистическим многообразием* (M, g, K) [12].

Пусть D — связность Леви-Чивиты метрики g . Тогда на многообразии (M, g, K) определяется 1-параметрическое ($\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр) семейство линейных связностей без кручения, называемых α -связностями

$$\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K. \quad (2)$$

Как было показано в [2], на статистическом многообразии всякая α -связность совместима с метрикой g и сопряжена относительно нее с $(-\alpha)$ -связностью. Очевидно, 0-связность ∇^0 совпадает со связностью Леви-Чивиты D .

Введем следующие обозначения: $R_{XY}^\alpha = R^\alpha(X, Y)$ — оператор кривизны связности ∇^α , Ric^α — ее тензор Риччи, $r^{(\alpha)}$ — ассоциированный с ним оператор Риччи, w_g — элемент объема, ассоциированный с метрикой g .

Статистическая структура (g, K) на многообразии M называется *сопряженно симметрической* [11], если оператор кривизны любой α -связности удовлетворяет условию $R_{XY}^\alpha g = 0$. Ранее [3] было показано, что одним из критериев такого многообразия служит совпадение $R^\alpha = R^{-\alpha}$ тензоров кривизны двойственных связностей ∇^α и $\nabla^{-\alpha}$.

Поскольку оператор R_{XY}^α является дифференцированием, то получаем

$$(R_{XY}^\alpha g)(U, V) = -\langle R_{XY}^\alpha U, V \rangle - \langle U, R_{XY}^\alpha V \rangle = -\langle R_{XY}^\alpha U, V \rangle + \langle R_{XY}^{-\alpha} U, V \rangle,$$

откуда

$$(R_{XY}^\alpha g)(U, V) = \langle R_{XY}^{-\alpha} U - R_{XY}^\alpha U, V \rangle. \quad (3)$$

Статистическая структура (g, K) на многообразии M с α -связностью постоянной кривизны $k^{(\alpha)}$ называется *статистической структурой постоянной α -кривизны*. Это означает, что тензор кривизны такой связности удовлетворяет соотношению

$$R^\alpha(X, Y)Z = k^{(\alpha)} \cdot (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y). \quad (4)$$

При $k^{(\alpha)} = 0$ статистическая структура α — плоская, а при $\alpha = 0$ многообразие (M, g, K) постоянной 0-кривизны является пространством постоянной кривизны $k^{(0)}$.

Теорема 1 (см. [4]). *Статистическая структура постоянной α -кривизны является сопряженно симметрической. В частности, α -плоская статистическая структура сопряженно симметрическая.*

Доказательство. Если для произвольно фиксированного значения $\alpha \neq 0$ связность ∇^α статистической структуры имеет постоянную кривизну $k^{(\alpha)}$, то в силу соотношений (3) и (4) находим

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}^{-\alpha} U, V \rangle &= -\langle U, R_{XY}^\alpha V \rangle = \langle U, k^{(\alpha)} \cdot (\langle X, V \rangle Y - \langle Y, V \rangle X) \rangle = \\ &= k^{(\alpha)} \cdot (\langle Y, U \rangle \langle X, V \rangle - \langle X, U \rangle \langle Y, V \rangle) = \\ &= \langle k^{(\alpha)} \cdot (\langle Y, U \rangle X - \langle X, U \rangle Y), V \rangle = \langle R_{XY}^\alpha U, V \rangle. \end{aligned}$$

Значит, тензоры кривизны связностей ∇^α и $\nabla^{-\alpha}$ совпадают: $R^\alpha = R^{-\alpha}$. Следовательно, статистическая структура (g, K) является сопряженно симметрической. В частности, это верно для $k^{(\alpha)} = 0$. $\square$

Обратное утверждение к доказанному в общем случае неверно, следовательно, для получения обращения теоремы 1 необходимы дополнительные требования.

Теорема 2 (см. [5]). *Если сопряженно симметрическая статистическая структура на n -мерном гладком многообразии ($n \geq 3$) имеет α -связность, удовлетворяющую условиям эквивалентности:*

$$R^\alpha(X, Y)Z = \frac{1}{n-1}(\text{Ric}^\alpha(X, Z)Y - \text{Ric}^\alpha(Y, Z)X),$$

и сильной совместимости с метрикой g

$$(\nabla_X^\alpha g)(Y, Z) = (\nabla_Y^\alpha g)(X, Z), \nabla^\alpha w_g = 0,$$

то статистическая структура имеет постоянную α -кривизну

$$k^{(\alpha)} = -\frac{1}{n(n+1)} \text{trace } r^{(\alpha)}.$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы для связности ∇^α ($\alpha \neq 0$) сопряженно симметрической структуры справедливо равенство $R^\alpha = R^{-\alpha}$, т.е.

$$\langle R_{XY}^\alpha U, V \rangle = \langle U, R_{XY}^\alpha V \rangle,$$

причем

$$R_{XY}^\alpha U = \frac{1}{n-1}(\text{Ric}^\alpha(X, U)Y - \text{Ric}^\alpha(Y, U)X).$$

Последовательными преобразованиями и сверткой по аргументам X и U находим

$$\begin{aligned} \langle \langle r^{(\alpha)} X, U \rangle Y - \langle r^{(\alpha)} Y, U \rangle X, V \rangle &= \langle U, \langle r^{(\alpha)} Y, V \rangle X - \langle r^{(\alpha)} X, V \rangle Y \rangle, \\ \langle r^{(\alpha)} X, U \rangle \langle Y, V \rangle - \langle r^{(\alpha)} Y, U \rangle \langle X, V \rangle &= \langle r^{(\alpha)} Y, V \rangle \langle U, X \rangle - \langle r^{(\alpha)} X, V \rangle \langle U, Y \rangle, \\ \langle r^{(\alpha)} Y, V \rangle &= \frac{1}{n} \text{trace } r^{(\alpha)} \cdot \langle Y, V \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку функции $\lambda^{(\alpha)} = \frac{1}{n} \text{trace } r^{(\alpha)}$ являются постоянными на многообразии, то значит,

$$\langle r^{(\alpha)} Y, V \rangle = \lambda^{(\alpha)} \langle Y, V \rangle.$$

Тогда тензор кривизны связности ∇^α примет вид (4):

$$R^{(\alpha)}(X, Y)U = -\frac{\lambda^{(\alpha)}}{n+1} \cdot (\langle Y, U \rangle X - \langle X, U \rangle Y).$$

Таким образом, структура (g, K) на многообразии M является статистической структурой постоянной α -кривизны $k^{(\alpha)} = -\lambda^{(\alpha)}/(n+1)$. $\square$

3. Двумерная статистическая модель постоянной α -кривизны. *Статистической моделью* называется семейство $S = \{P_{\theta^i} \mid i = 1, \dots, n\}$ распределений вероятностей случайной величины, гладко параметризованное n действительными параметрами [6]. Всякое распределение вероятностей P_{θ^i} характеризуется своей плотностью $p = p(x|\theta^i)$ относительно некоторой общей доминирующей меры P на выборочном пространстве X ($x \in X$) или другой функцией от плотности p из 1-параметрического семейства функций

$$l_\alpha(p) = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha} \cdot p^{\frac{1-\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1, \\ \ln p, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что $\alpha \in \mathbb{R}$; и из вида (5) при $\alpha = -1$ получаем плотность вероятности $p(x|\theta^i)$, а при $\alpha = 1$ — функцию правдоподобия $\ln p(x|\theta^i)$.

Предполагается, что при фиксированном наборе $\{\theta^i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ система функций

$$\partial_i \ln p = \frac{\partial}{\partial \theta^i} \ln p$$

линейно независима, моменты случайных величин $\partial_i \ln p$ существуют достаточно высокого порядка, и для всякой функции $f(x|\theta^i)$ частное дифференцирование по параметрам коммутирует с интегрированием по мере P .

Хорошо известно [6], что статистическая модель S несет структуру гладкого n -мерного риманова многообразия, в котором точка P_{θ^i} имеет локальные координаты $\{\theta^i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, а метрика определяется информационной матрицей Фишера с локальными координатами

$$I_{ij}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i l_\alpha(p) \cdot \partial_j l_{-\alpha}(p) \cdot dP, \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Более того, для всякого значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ набор функций

$$\Gamma_{ijk}^\alpha(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i \partial_j l_\alpha(p) \cdot \partial_k l_{-\alpha}(p) \cdot dP, \quad (i, j, k = 1, \dots, n) \quad (7)$$

определяет локальные компоненты оператора ковариантного дифференцирования так называемой α -связности Амари—Ченцова (см., например, [1]). Все такие связности оказываются совместимыми с фишеровской метрикой статистической модели. Используя соотношения (6) и (7), нетрудно показать, что на статистической модели S внутренним образом определяется статистическая структура (I, K) , локальные компоненты которой вполне симметричны и имеют вид

$$I_{ij}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot p \cdot dP, \quad (8)$$

$$K_{ijk}(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot \partial_k \ln p \cdot p \cdot dP. \quad (9)$$

Классическим примером служит семейство одномерных нормальных распределений с плотностью

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где x — действительная случайная величина, а математическое ожидание $\mu = \theta^1$ и стандартное отклонение $\sigma = \theta^2 > 0$ играют роль локальных координат. Такое семейство называется *двумерной нормальной моделью*. В натуральном базисе $(\partial_\mu, \partial_\sigma)$ матрица Фишера метрики нормальной модели имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2/\sigma^2 \end{pmatrix},$$

а ненулевые компоненты тензора кривизны α -связности Амари—Ченцова

$${}^{(\alpha)}R_{1212} = -{}^{(\alpha)}R_{1221} = {}^{(\alpha)}R_{2121} = -{}^{(\alpha)}R_{2112} = \frac{1-\alpha^2}{2\sigma^4}.$$

Таким образом, кривизна этих связностей постоянна и равна $k^{(\alpha)} = (\alpha^2 - 1)/2$. Следовательно, статистическая структура нормальной модели имеет постоянную $(\alpha^2 - 1)/2$ -кривизну и является ± 1 -плоской. Сама нормальная модель — это пространство постоянной отрицательной кривизны $k^{(0)} = -1/2$.

4. Двумерная модель Парето. *Двумерной статистической моделью Парето* назовем гладко параметризованное семейство S распределений действительной случайной величины x , заданной на луче: $x \in [a; +\infty)$, имеющей степенную функцию распределения вида

$$F(x|a, \rho) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\rho,$$

где $a = \theta^1 > 0$ — параметр масштаба, $\rho = \theta^2 > 0$ — параметр формы. Находим функцию плотности распределения Парето, функцию правдоподобия и ее частные производные:

$$p(x|a, \rho) = \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1}, \quad \ln p = \ln \rho + \rho \cdot \ln a - (\rho + 1) \ln x, \\ \partial_a \ln p = \frac{\rho}{a}, \quad \partial_\rho \ln p = \frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x.$$

Для вычисления локальных компонент статистической структуры модели Парето по формулам (8) и (9) воспользуемся четырьмя вспомогательными интегралами:

$$\int_a^{+\infty} x^{-\rho-1} dx = \frac{1}{\rho a^\rho}; \quad \int_a^{+\infty} \ln x \cdot x^{-\rho-1} dx = \frac{1 + \rho \ln a}{\rho^2 a^\rho}; \quad \int_a^{+\infty} \ln^2 x \cdot x^{-\rho-1} dx = \frac{(1 + \rho \ln a)^2 + 1}{\rho^3 a^\rho}; \\ \int_a^{+\infty} \ln^3 x \cdot x^{-\rho-1} dx = \frac{(1 + \rho \ln a)^3 + 3(1 + \rho \ln a) + 2}{\rho^4 a^\rho}.$$

Тогда матрица Фишера метрики модели Парето примет вид

$$I = \begin{pmatrix} (\rho/a)^2 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Восемь видов ковариантных компонент структурного тензора запишутся следующим образом:

$$K_{111} = -\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \cdot \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1} dx = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^3, \\ K_{112} = K_{121} = K_{211} = -\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x\right) \cdot \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1} dx = 0,$$

$$K_{122} = K_{212} = K_{221} = -\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\rho}{a} \left(\frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x \right)^2 \cdot \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1} dx = -\frac{1}{2a\rho},$$

$$K_{222} = -\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left(\frac{1}{\rho} + \ln a - \ln x \right)^3 \cdot \rho \cdot a^\rho x^{-\rho-1} dx = \frac{1}{\rho^3}.$$

Теперь по символам Кристоффеля $({}^{(0)}\Gamma_{jk}^i)$ связности Леви-Чивиты метрики и компонентам тензора K_{jk}^i структуры $(i, j, k = 1, 2)$ последовательно вычисляем локальные компоненты семейства α -связностей Амари—Ченцова модели Парето:

$$\begin{aligned}({}^{(\alpha)}\Gamma_{11}^1 &= {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 + \alpha \cdot K_{11}^1 = -\frac{1}{a} + \alpha \cdot \left(-\frac{\rho}{2a}\right) = -\frac{2 + \alpha \cdot \rho}{2a}, \\({}^{(\alpha)}\Gamma_{11}^2 &= {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 + \alpha \cdot K_{11}^2 = -\frac{\rho^3}{a^2} + \alpha \cdot 0 = -\frac{\rho^3}{a^2}, \\({}^{(\alpha)}\Gamma_{12}^1 &= {}^{(\alpha)}\Gamma_{21}^1 = {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 + \alpha \cdot K_{12}^1 = \frac{1}{\rho} + \alpha \cdot 0 = \frac{1}{\rho}, \\({}^{(\alpha)}\Gamma_{12}^2 &= {}^{(\alpha)}\Gamma_{21}^2 = {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 + \alpha \cdot K_{12}^2 = 0 + \alpha \cdot \left(-\frac{\rho}{2a}\right) = -\frac{\alpha \cdot \rho}{2a}, \\({}^{(\alpha)}\Gamma_{22}^1 &= {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 + \alpha \cdot K_{22}^1 = 0 + \alpha \cdot \left(-\frac{a}{2\rho^3}\right) = -\frac{\alpha \cdot a}{2\rho^3}, \\({}^{(\alpha)}\Gamma_{22}^2 &= {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 + \alpha \cdot K_{22}^2 = -\frac{1}{\rho} + \alpha \cdot \frac{1}{\rho} = -\frac{1 - \alpha}{\rho}.\end{aligned}$$

Теорема 3 (см. [5]). *Двумерная модель Парето S несет статистическую структуру (I, K) постоянной α -кривизны, равной $(-2\alpha - 2)$. При этом риманово многообразие (S, I) является пространством постоянной отрицательной кривизны -2 .*

Доказательство. Покажем, что всякая α -связность Амари—Ченцова модели Парето имеет постоянную кривизну. С помощью смешанных компонент тензора кривизны α -связности вычисляем его ненулевые ковариантные компоненты:

$$\begin{aligned}({}^{(\alpha)}R_{1212} &= -({}^{(\alpha)}R_{1221} = {}^{(\alpha)}R_{2121} = -({}^{(\alpha)}R_{2112} = \\&= {}^{(\alpha)}R_{121}^1 \cdot I_{12} + {}^{(\alpha)}R_{121}^2 \cdot I_{22} = (\alpha + 1) \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{\rho^2} = \frac{\alpha + 1}{a^2}.\end{aligned}$$

Следовательно, кривизна произвольной α -связности модели Парето имеет постоянное значение

$$k^\alpha = -2 \cdot \det I^{-1} \cdot ({}^{(\alpha)}R_{1212} = -2 \cdot a^2 \cdot \frac{\alpha + 1}{a^2} = -2\alpha - 2.$$

В частности, при $\alpha = 0$ получаем скалярную кривизну связности Леви-Чивиты, равную -2 . $\square$

5. Сопряженно симметрическая структура логистической модели. *Двумерной логистической моделью* называют гладко параметризованное семейство S распределений действительной случайной величины x , имеющей логистическую функцию распределения

$$F(x|a, b) = \frac{1}{1 + \exp(-ax - b)},$$

где $a = \theta^1 > 0$ — параметр масштаба, $b = \theta^2$ — параметр сдвига. В работе [10] это семейство названо логистическим параметрическим пространством. Находим функцию плотности логистического распределения, функцию правдоподобия и ее частные производные:

$$\begin{aligned}p(x|a, b) &= \frac{a \cdot \exp(-ax - b)}{(1 + \exp(-ax - b))^2}, \quad \ln p = \ln a - ax - b - 2 \ln(1 + \exp(-ax - b)), \\ \partial_a \ln p &= \frac{1}{a} - x + \frac{2x \cdot \exp(-ax - b)}{1 + \exp(-ax - b)}, \quad \partial_b \ln p = \frac{-1 + \exp(-ax - b)}{1 + \exp(-ax - b)}.\end{aligned}$$

Следуя [4], для вычисления локальных компонент (8) и (9) структуры преобразуем интегралы с помощью подстановки $t = \exp(-ax - b)$ и дальнейшего приведения подобных. Тогда матрица Фишера метрики логистической модели примет вид

$$I = \frac{1}{3a^2} \begin{pmatrix} b^2 + \pi^2/3 + 1 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix};$$

а компоненты структурного тензора запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{111} &= \frac{1}{6a^3}(\pi^2 + 3b^2), & K_{122} &= K_{212} = K_{221} = \frac{1}{6a}, \\ K_{211} &= K_{112} = K_{121} = \frac{-b}{3a^2}, & K_{222} &= 0, \end{aligned}$$

Локальные компоненты семейства α -связностей Амари—Ченцова, вычисленные по формуле (2), имеют сложные аналитические выражения, см. [4], однако при $\alpha = 2$ этот вид упрощается. Приведем ненулевые компоненты 2-связности:

$${}^{(2)}\Gamma_{11}^1 = \frac{2\pi^2 - 3}{(\pi^2 + 3)a}, \quad {}^{(2)}\Gamma_{11}^2 = -\frac{9b}{(\pi^2 + 3)a^2}, \quad {}^{(2)}\Gamma_{12}^2 = {}^{(2)}\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{a},$$

откуда следует, что ненулевые ковариантные компоненты тензора 2-кривизны примут вид

$${}^{(2)}R_{1212} = -{}^{(2)}R_{1221} = {}^{(2)}R_{2121} = -{}^{(2)}R_{2112} = \frac{3}{(\pi^2 + 3)a^2}.$$

Следовательно, кривизна 2-связности имеет постоянное отрицательное значение

$$k^{(2)} = -2 \cdot \frac{27a^2}{\pi^2 + 3} \cdot \frac{3}{a^2(\pi^2 + 3)} = -\frac{162}{(\pi^2 + 3)^2} \approx -0,98.$$

Таким образом, согласно теореме 1 статистическая структура логистической модели является сопряженно симметрической.

6. Статистическая модель Вейбулла—Гнеденко. Двумерной статистической моделью Вейбулла—Гнеденко назовем гладко параметризованное семейство S распределений действительной случайной величины x , заданной на полупрямой: $x \in (0; +\infty)$, имеющей функцию распределения обобщенного экспоненциального вида

$$F(x|\lambda, k) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\},$$

где $\lambda = \theta^1 > 0$ — параметр масштаба, $k = \theta^2 > 0$ — параметр формы. Такие распределения в определенном смысле обобщают нормальные, экспоненциальные и логистические распределения [10]. Находим функцию плотности распределения Вейбулла—Гнеденко, функцию правдоподобия и ее частные производные:

$$\begin{aligned} p(x|\lambda, k) &= \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}, & \ln p &= \ln\left(\frac{k}{\lambda}\right) + (k-1) \cdot \ln\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k, \\ \partial_\lambda \ln p &= -\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}x^k, & \partial_k \ln p &= \frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \cdot \ln\left(\frac{x}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Для вычисления локальных компонент статистической структуры модели по формулам (8) и (9) приведем четыре полезных интеграла ($n \in \mathbb{N}, k > 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx &= \frac{(n-1)!}{k}; & \int_0^{+\infty} \ln x \cdot x^{k-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx &= -\frac{\gamma}{k^2}; \\ \int_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot x^{k-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx &= \frac{\pi^2 + 6\gamma^2}{6k^3}; \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \ln^3 x \cdot x^{k-1} \cdot \exp(-x^k) \cdot dx = -\frac{4\zeta(3) + \gamma\pi^2 + 2\gamma^3}{2k^4};$$

где

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln n \right) \approx 0,5777 \dots, \quad \zeta(3) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \approx 1,202 \dots$$

— константы Эйлера—Маскерони и Апери соответственно.

Тогда матрица Фишера модели и ее детерминант согласно (8) примут вид

$$I = \begin{pmatrix} (k/\lambda)^2 & (\gamma-1)/\lambda \\ (\gamma-1)/\lambda & (n^2 + 6\gamma^2 - 12\gamma + 6)/(6k^2) \end{pmatrix}; \quad \det I = \frac{\pi^2}{6\lambda^2}.$$

Далее по формулам (9) находим восемь видов ковариантных компонент структурного тензора:

$$K_{111} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}} x^k \right)^3 \cdot \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} \exp \left\{ -\left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right\} dx = -\left(\frac{k}{\lambda} \right)^3,$$

$$K_{112} = K_{121} = K_{211} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}} x^k \right)^2 \left(\frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right) \ln \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} \exp \left\{ -\left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right\} dx = \frac{(2-\gamma)k}{\lambda^2},$$

$$K_{122} = K_{212} = K_{221} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}} x^k \right) \left(\frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right) \ln \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right)^2 \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} \exp \left\{ -\left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right\} dx =$$

$$= -\frac{\pi^2 + 6\gamma^2 - 24\gamma + 12}{6\lambda k},$$

$$K_{222} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \left(1 - \left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right) \ln \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right)^3 \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} \exp \left\{ -\left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right\} dx =$$

$$= \frac{\pi^2(2-\gamma) - 4\zeta(3) - 2\gamma^3 + 12\gamma^2 - 12\gamma + 2}{2k^3}.$$

Аналогично случаю логистической модели, компоненты α -связностей Амари—Ченцова модели Вейбулла—Гнеденко имеют сложные аналитические выражения. Выделим случай $\alpha = 1$.

Теорема 4 (см. [18]). *Двумерная статистическая модель Вейбулла—Гнеденко S несет сопряженно симметрическую структуру (I, K) . При этом ее 1-связность имеет постоянную кривизну*

$$k^{(1)} = \frac{12\pi^2\gamma - 144\gamma + 72}{\pi^4} \approx 0,59.$$

Доказательство. Покажем, что всякая 1-связность Амари—Ченцова модели Вейбулла—Гнеденко имеет постоянную кривизну. По формуле (2) вычислим компоненты 1-связности:

$${}^{(1)}\Gamma_{11}^1 = {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 + 1 \cdot K_{11}^1 = -\frac{\pi^2 - 6(\gamma-1)k}{\pi^2\lambda} - k \cdot \frac{\pi^2 + 6(\gamma-1)}{\pi^2\lambda} = -\frac{k+1}{\lambda},$$

$${}^{(1)}\Gamma_{11}^2 = {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 + 1 \cdot K_{11}^2 = -\frac{6k^3}{\pi^2\lambda^2} + \frac{6k^3}{\pi^2\lambda^2} = 0,$$

$${}^{(1)}\Gamma_{12}^1 = {}^{(1)}\Gamma_{21}^1 = {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 + 1 \cdot K_{12}^1 = \frac{\pi^2 + 6(\gamma-1)^2}{\pi^2 k} + \frac{\pi^2 - 6\gamma(\gamma-1)}{\pi^2 k} = \frac{2\pi^2 - 6\gamma + 6}{\pi^2 k},$$

$${}^{(1)}\Gamma_{12}^2 = {}^{(1)}\Gamma_{21}^2 = {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 + 1 \cdot K_{12}^2 = -\frac{6(\gamma-1)k}{\pi^2\lambda} - k \cdot \frac{\pi^2 - 6\gamma}{\pi^2\lambda} = -\frac{(\pi^2 - 6)k}{\pi^2\lambda},$$

$$\begin{aligned}
(1)\Gamma_{22}^1 &= (0)\Gamma_{22}^1 + 1 \cdot K_{22}^1 = \lambda \cdot \frac{(\pi^2 + 6(\gamma - 1)^2)(\gamma - 1)}{\pi^2 k^3} - \\
&- \lambda \cdot \frac{\pi^2(\pi^2 + 12\gamma - 18) - 6(\gamma - 1)(\pi^2\gamma + 12\zeta(3) - 6(\gamma^2 - 1))}{6\pi^2 k^3} = \\
&= -\lambda \cdot \frac{\pi^4 - 12\pi^2 + 6\pi^2\gamma(2 - \gamma) + 72(\gamma - 1)^2 + 72\zeta(3)(\gamma - 1)}{6\pi^2 k^3}, \\
(1)\Gamma_{22}^2 &= (0)\Gamma_{22}^2 + 1 \cdot K_{22}^2 = -\frac{\pi^2 + 6(\gamma - 1)^2}{\pi^2 k} + \frac{\pi^2(5 - 2\gamma) + 6(\gamma^2 - 1) - 12\zeta(3)}{\pi^2 k} = \\
&= \frac{2\pi^2(2 - \gamma) + 12(\gamma - 1) - 12\zeta(3)}{\pi^2 k}.
\end{aligned}$$

Таким образом, ковариантные компоненты тензора 1-кривизны примут вид

$$\begin{aligned}
(1)R_{1212} &= -(1)R_{1221} = (1)R_{2121} = -(1)R_{2112} = (1)R_{121}^1 \cdot I_{12} + (1)R_{121}^2 \cdot I_{22} = \\
&= \frac{-\pi^4 + 6\pi^2(\gamma + 1) - 36(\gamma - 1)}{\pi^4 \lambda} \cdot \frac{\gamma - 1}{\lambda} + \frac{6k^2(6 - \pi^2)}{\pi^4 \lambda^2} \cdot \frac{\pi^2 + 6(\gamma - 1)^2}{6k^2} = \\
&= \frac{-\pi^2\gamma + 12\gamma - 6}{\pi^2 \lambda^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, кривизна 1-связности имеет постоянное значение

$$k^{(1)} = -2 \cdot \det I^{-1} \cdot (1)R_{1212} = -2 \cdot \frac{6\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{-\pi^2\gamma + 12\gamma - 6}{\pi^2 \lambda^2} = \frac{12\pi^2\gamma - 144\gamma + 72}{\pi^4}.$$

Значит, согласно теореме 1 статистическая структура модели Вейбулла–Гнеденко является сопряженно симметрической. $\square$

7. Погружение статистической структуры. Пусть M — гладкое многообразие со статистической структурой (g, K) , $\widehat{M}$ — гладкое многообразие с линейной связностью $\widehat{\nabla}$ без кручения, причем $\dim M = n$, $\dim \widehat{M} = m \leq n$.

Рассмотрим $f: (\Omega \subset \widehat{M}) \rightarrow M$ — гладкое отображение на некоторой области Ω . Обозначим f^*TM — обратный образ касательного расслоения TM , $f_*: \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow \Gamma(f^*TM)$ — отображение в пространство сечений расслоения f^*TM , $\widehat{\nabla}'$ — связность на расслоении $f^*TM \otimes (T\Omega)^*$:

$$(\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \overline{\nabla}_{\widehat{X}} f_* \widehat{Y} - f_* \widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \widehat{Y},$$

где $\widehat{X}, \widehat{Y}$ — векторные поля на области Ω , $f_* \widehat{Y}$ — векторное поле вдоль отображения f , $\overline{\nabla}$ — индуцированная связность на f^*TM . Симметрическую билинейную форму $\widehat{\nabla}' f_*$ называют *второй фундаментальной формой отображения f* [16].

Метрический тензор g порождает на области $\Omega \subset \widehat{M}$ тензорное поле f^*g вдоль отображения по закону: $f^*g(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \langle f_* \widehat{X}, f_* \widehat{Y} \rangle$, где $\widehat{X}, \widehat{Y}$ — векторные поля на области Ω , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — индуцированная метрика на f^*TM . Значит, для индуцированной в расслоении f^*TM связности $\overline{\nabla}$ имеем $(\overline{\nabla}_{\widehat{X}} g)(f_* \widehat{X}, f_* \widehat{Y}) = 0$ или

$$\widehat{X} \langle f_* \widehat{Y}, f_* \widehat{Z} \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\widehat{X}} f_* \widehat{Y}, f_* \widehat{Z} \rangle + \langle f_* \widehat{Y}, \overline{\nabla}_{\widehat{X}} f_* \widehat{Z} \rangle. \quad (10)$$

Теорема 5. Пусть $f: (\Omega \subset \widehat{M}) \rightarrow (M, g)$ — гладкое погружение многообразия с линейной связностью $\widehat{\nabla}$ без кручения в риманово многообразие. Тогда связность $\widehat{\nabla}$ является связностью Леви-Чивиты индуцированной метрики в том и только в том случае, если для второй фундаментальной формы погружения выполнено

$$\langle (\widehat{\nabla}' f_*)(\widehat{X}, \widehat{Y}), f_* \widehat{Z} \rangle = 0, \quad (11)$$

где $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$ — векторные поля на области Ω .

Доказательство. Обозначим через $\hat{g}$ — метрику, индуцированную на области $\Omega \subset \widehat{M}$ тензорным полем f^*g , т.е. $\hat{g}_x = (f^*g)_x$ в любой точке $x \in \Omega$. Находим ковариантную производную индуцированной метрики:

$$(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y}, \widehat{Z}) = \widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g}(\widehat{Y}, \widehat{Z}) - \widehat{g}(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y}, \widehat{Z}) - \widehat{g}(\widehat{Y}, \widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Z}). \quad (12)$$

Выразим каждое слагаемое правой части этого соотношения с учетом того, что

$$\widehat{g}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = f^*g(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \langle \langle f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y} \rangle \rangle.$$

Тогда в расслоении $f^*TM \otimes (T\Omega)^*$ последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g}(\widehat{Y}, \widehat{Z}) &= \widehat{X}\langle \langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z} \rangle \rangle; \\ \widehat{g}(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y}, \widehat{Z}) &= \langle \langle f_*\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y}, f_*\widehat{Z} \rangle \rangle = \langle \langle \overline{\nabla}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z} \rangle \rangle - \langle \langle (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X}, \widehat{Y}), f_*\widehat{Z} \rangle \rangle; \\ \widehat{g}(\widehat{Y}, \widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Z}) &= \langle \langle f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Z} \rangle \rangle = \langle \langle f_*\widehat{Y}, \overline{\nabla}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Z} \rangle \rangle - \langle \langle f_*\widehat{Y}, (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X}, \widehat{Z}) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в (12) в силу соотношения (10) имеем

$$(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y}, \widehat{Z}) = \langle \langle (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X}, \widehat{Y}), f_*\widehat{Z} \rangle \rangle + \langle \langle f_*\widehat{Y}, (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X}, \widehat{Z}) \rangle \rangle. \quad (13)$$

Итак, из условия (11) для второй фундаментальной формы $(\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X}, \widehat{Y})$ погружения следует ковариантное постоянство индуцированной метрики $\widehat{g}$ в связности $\widehat{\nabla}$ (достаточность доказана).

Циклируя (13) по аргументам, запишем еще два равенства:

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_{\widehat{Y}}\widehat{g})(\widehat{Z}, \widehat{X}) &= \langle \langle (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{Y}, \widehat{Z}), f_*\widehat{X} \rangle \rangle + \langle \langle f_*\widehat{Z}, (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{Y}, \widehat{X}) \rangle \rangle; \\ (\widehat{\nabla}_{\widehat{Z}}\widehat{g})(\widehat{X}, \widehat{Y}) &= \langle \langle (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{Z}, \widehat{X}), f_*\widehat{Y} \rangle \rangle + \langle \langle f_*\widehat{X}, (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{Z}, \widehat{Y}) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Вычитая второе соотношение из суммы (13) и первого, получаем

$$\langle \langle (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X}, \widehat{Y}), f_*\widehat{Z} \rangle \rangle = \frac{1}{2}((\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{g})(\widehat{Y}, \widehat{Z}) + (\widehat{\nabla}_{\widehat{Y}}\widehat{g})(\widehat{Z}, \widehat{X}) - (\widehat{\nabla}_{\widehat{Z}}\widehat{g})(\widehat{X}, \widehat{Y})),$$

откуда следует необходимость ковариантного постоянства индуцированной метрики $\widehat{g}$. $\square$

Тензор K статистической структуры порождает на области $\Omega \subset \widehat{M}$ тензорное поле f^*K вдоль отображения по закону

$$f^*K(\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{\theta}) = \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{\theta}),$$

где $\widehat{X}, \widehat{Y}$ — векторные поля, $\widehat{\theta}$ — 1-форма на области Ω . Тогда можно отождествить индуцированный оператор $\overline{K}_{\widehat{X}}$ такой, что $\overline{K}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Y} = \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y})$, с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры на области Ω .

Теорема 6. Пусть $f: (\Omega \subset \widehat{M}) \rightarrow (M, g, K)$ — гладкое погружение многообразия с линейной связностью $\widehat{\nabla}$ без кручения в статистическое многообразие. Тогда для фиксированной α -связности ∇^α на прообразе Ω индуцируется статистическая структура с подходящей $\widehat{\alpha}$ -связностью $\widehat{\nabla}$ в том и только в том случае, если для второй фундаментальной формы погружения выполнено:

$$\langle \langle (\widehat{\nabla}'f_*)(\widehat{X}, \widehat{Y}) + (\widehat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z} \rangle \rangle = 0. \quad (14)$$

Доказательство. В дополнение к метрике $\widehat{g}$, индуцированной на области $\Omega \subset \widehat{M}$ тензорным полем f^*g , обозначим через $\widehat{K}$ — структурный тензор, индуцированный тензорным полем f^*K , т.е. $\widehat{K}_x = (f^*K)_x$ в любой точке $x \in \Omega$. Покажем, что $(\widehat{g}, \widehat{K})$ — индуцированная статистическая структура на прообразе Ω .

В самом деле, для любых векторных полей $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$ на области $\Omega \subset \widehat{M}$ выполняются оба условия (1):

$$\begin{aligned} \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}) &= \overline{K}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Y} = \overline{K}_{\widehat{Y}}f_*\widehat{X} = \widehat{K}(f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{X}); \\ \langle \langle \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Y}), f_*\widehat{Z} \rangle \rangle &= \langle \langle \overline{K}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Y}, f_*\widehat{Z} \rangle \rangle = \langle \langle f_*\widehat{Y}, \overline{K}_{\widehat{X}}f_*\widehat{Z} \rangle \rangle = \langle \langle f_*\widehat{Y}, \widehat{K}(f_*\widehat{X}, f_*\widehat{Z}) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Тогда линейная связность $\widehat{\nabla}$ без кручения на области Ω будет подходящей $\widehat{\alpha}$ -связностью индуцированной статистической структуры $(\widehat{g}, \widehat{K})$ в том и только в том случае, если $f_*\widehat{\nabla} - \widehat{\alpha} \cdot \overline{K}$ является

связностью Леви-Чивиты метрики $\hat{g}$. Введем обозначение $\hat{D} = f_*\hat{\nabla} - \hat{\alpha} \cdot \overline{K}$ и обоснуем критерий ковариантного постоянства индуцированной метрики $\hat{g}$ в этой связности.

Находим ковариантную производную метрики $\hat{g}$:

$$(\hat{D}_{\hat{X}}\hat{g})(\hat{Y}, \hat{Z}) = \hat{X}\langle f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle - \langle \hat{D}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle - \langle f_*\hat{Y}, \hat{D}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle. \quad (15)$$

Исходя из следствия вида второй фундаментальной формы погружения:

$$f_*\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y} = \overline{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y} - (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Y}),$$

выразим второе и третье слагаемые правой части (15):

$$\begin{aligned} \langle \hat{D}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle &= \langle f_*\overline{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle - \hat{\alpha} \cdot \langle \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle = \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle - \langle (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Y}), f_*\hat{Z} \rangle - \hat{\alpha} \cdot \langle \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle; \\ \langle f_*\hat{Y}, \hat{D}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle &= \langle f_*\hat{Y}, f_*\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Z} \rangle - \hat{\alpha} \cdot \langle f_*\hat{Y}, \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle = \\ &= \langle f_*\hat{Y}, \overline{\nabla}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle - \langle f_*\hat{Y}, (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Z}) \rangle - \hat{\alpha} \cdot \langle f_*\hat{Y}, \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle. \end{aligned}$$

С другой стороны, для фиксированной α -связности ∇^α многообразия (M, g, K) связность Леви-Чивиты $D = \nabla^\alpha - \alpha \cdot K$ метрики g индуцирует на обратном образе f^*TM связность $\overline{D} = \overline{\nabla}^\alpha - \alpha \cdot \overline{K}$. В этой связности индуцированная метрика $\hat{g}$ ковариантно постоянна: $(\overline{D}_{\hat{X}}\hat{g})(\hat{Y}, \hat{Z}) = 0$, откуда выводим, что

$$\begin{aligned} \hat{X}\langle f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle &= \langle \hat{D}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle + \langle f_*\hat{Y}, \hat{D}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle = \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\hat{X}}^\alpha f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle - \alpha \cdot \langle \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle + \langle f_*\hat{Y}, \overline{\nabla}_{\hat{X}}^\alpha f_*\hat{Z} \rangle - \alpha \cdot \langle f_*\hat{Y}, \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Если считать, что для подходящей $\hat{\alpha}$ -связности $\hat{\nabla}$ действие индуцированной связности $\overline{\nabla}$ на f^*TM совпадает с действием $\overline{\nabla}^\alpha$, то соотношение (15) последовательно примет вид:

$$\begin{aligned} (\hat{D}_{\hat{X}}\hat{g})(\hat{Y}, \hat{Z}) &= \langle \overline{\nabla}_{\hat{X}}^\alpha f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle - \alpha \cdot \langle \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle + \langle f_*\hat{Y}, \nabla_{\hat{X}}^\alpha f_*\hat{Z} \rangle - \\ &- \alpha \cdot \langle f_*\hat{Y}, \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle - \langle \overline{\nabla}_{\hat{X}}^\alpha f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle + \langle (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Y}), f_*\hat{Z} \rangle + \hat{\alpha} \cdot \langle \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle - \\ &- \langle f_*\hat{Y}, \overline{\nabla}_{\hat{X}}^\alpha f_*\hat{Z} \rangle + \langle f_*\hat{Y}, (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Z}) \rangle + \hat{\alpha} \cdot \langle f_*\hat{Y}, \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle; \\ (\hat{D}_{\hat{X}}\hat{g})(\hat{Y}, \hat{Z}) &= \langle (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Y}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle + \\ &+ \langle f_*\hat{Y}, (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Z}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Z} \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, из условия (16) для второй фундаментальной формы $(\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Y})$ погружения следует ковариантное постоянство индуцированной метрики $\hat{g}$ в связности $f_*\hat{\nabla} - \hat{\alpha} \cdot \overline{K}$ (достаточность доказана).

Циклируя (16) по аргументам, запишем еще два равенства:

$$\begin{aligned} (\hat{D}_{\hat{Y}}\hat{g})(\hat{Z}, \hat{X}) &= \langle (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{Y}, \hat{Z}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\hat{Y}}f_*\hat{Z}, f_*\hat{X} \rangle + \\ &+ \langle f_*\hat{Z}, (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{Y}, \hat{X}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\hat{Y}}f_*\hat{X} \rangle; \\ (\hat{D}_{\hat{Z}}\hat{g})(\hat{X}, \hat{Y}) &= \langle (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{Z}, \hat{X}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\hat{Z}}f_*\hat{X}, f_*\hat{Y} \rangle + \\ &+ \langle f_*\hat{X}, (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{Z}, \hat{Y}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\hat{Z}}f_*\hat{Y} \rangle. \end{aligned}$$

Вычитая второе соотношение из суммы (16) и первого, получаем

$$\langle (\hat{\nabla}'f_*)(\hat{X}, \hat{Y}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \overline{K}_{\hat{X}}f_*\hat{Y}, f_*\hat{Z} \rangle = \frac{1}{2}((\hat{D}_{\hat{X}}\hat{g})(\hat{Y}, \hat{Z}) + (\hat{D}_{\hat{Y}}\hat{g})(\hat{Z}, \hat{X}) - (\hat{D}_{\hat{Z}}\hat{g})(\hat{X}, \hat{Y})),$$

откуда следует необходимость ковариантного постоянства индуцированной метрики $\hat{g}$ в описываемой связности. $\square$

Погружения, удовлетворяющие условию теоремы 5, принадлежат классу относительно аффинных [22]. Тогда из теоремы 6 получаем

Следствие. Гладкое погружение многообразия с линейной связностью $\hat{\nabla}$ без кручения в статистическое многообразие является относительно аффинным в том и только в том случае, когда оно сохраняет «нумерацию параметра» α -связностей: $\alpha = \hat{\alpha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозова Е. А., Ченцов Н. Н. Естественная геометрия семейств вероятностных законов // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1991. — 83. — С. 133–265.
2. Рылов А. А. Связности, совместимые с метрикой, и статистические многообразия // Изв. вузов. Мат. — 1992. — № 12. — С. 47–56.
3. Рылов А. А. Связности, совместимые с метрикой, в теории статистических многообразий // Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 3. — С. 62–64.
4. Рылов А. А. Связности Амари—Ченцова на логистической модели // Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2011. — № 26. — С. 195–206.
5. Рылов А. А. Связности постоянной кривизны на статистической модели Парето // Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2012. — № 30. — С. 155–163.
6. Amari S. Information Geometry and Its Applications. — Springer, 2016.
7. Arwini K., Dodson C. T. J. Information Geometry: Near Randomness and Near Independence. — Springer-Verlag, 2008.
8. Furuhashi H. Hypersurfaces in statistical manifolds // Differ. Geom. Appl. — 2009. — 27, № 3. — P. 420–429.
9. Furuhashi H., Hasegawa I. Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds // in: Geometry of Cauchy–Riemann Submanifolds. — Singapore: Springer, 2016. — P. 179–215.
10. Ivanova R. A geometric observation on four statistical parameter spaces // Tensor, N.S. — 2010. — 72. — P. 188–195.
11. Lauritzen S. Conjugate connections in statistical theory // in: Geometrization of Statistical Theory (Dodson C. T. J., ed.). — Lancaster, 1987. — P. 33–51.
12. Lauritzen S. Statistical manifolds // in: Differential Geometry in Statistical Inference. — Hayward, California: Inst. of Math. Statistics, 1987. — P. 163–216.
13. Matsuzoe H. Complex statistical manifolds and complex affine immersions // in: Current Developments in Differential Geometry and Its Related Fields. — Singapore: World Scientific, 2016. — P. 183–199.
14. Min C. R., Choe S. O., An Y. H. Statistical immersions between statistical manifolds of constant curvature // Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom. — 2014. — 3, № 2. — P. 66–75.
15. Nielsen F. An elementary introduction to information geometry // Entropy. — 2020. — 22. — 1100.
16. Nore T. Second fundamental form of a map // Ann. Mat. Pura Appl. IV. Ser. — 1987. — 146. — P. 281–310.
17. Opozda B. Bochner’s technique for statistical structures // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2015. — 48. — P. 357–395.
18. Rylov A. Constant curvature connections on statistical models // in: Information Geometry and Its Applications. — Cham: Springer, 2018. — P. 349–361.
19. Siddiqui A. N., Shahid M. H., Lee J. W. On Ricci curvature of submanifolds in statistical manifolds of constant (quasi-constant) curvature // AIMS Mathematics. — 2020. — 5, № 4. — P. 3495–3509.
20. Siddiqui A. N., Chen B.-Y., Siddiqui M. D. Chen inequalities for statistical submersions between statistical manifolds // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2021. — 18, № 4. — 2150049.
21. Takano K. Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions // J. Geom. — 2006. — 85. — P. 171–187.
22. Yano K., Ishihara S. Harmonic and relatively affine mappings // J. Differ. Geom. — 1975. — 10. — P. 501–509.

Рылов Александр Аркадьевич

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: alexander_rylov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 125–144
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-125-144

УДК 519.2:531/534

СПОНТАННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ.

I. ФРАКТАЛЬНАЯ ПЫЛЬ

© 2023 г. В. В. УЧАЙКИН

Аннотация. Обзор посвящен описанию статистических свойств множества случайно распределенных в пространстве изолированных точек, являющихся узлами одной (или семейства независимых) реализации марковской цепи. Целью анализа этой модели является изучение условий возникновения кластеров в множестве этих узлов и описание их характеристик. В данной (первой) части обзора вводятся основные понятия статистики точечных распределений: производящие функционалы, многочастичные плотности, факториальные моменты, марковские цепи, корреляционные функции. Часть заканчивается описанием одномерных самоподобных (в статистическом смысле) множеств, генерируемых дробно-пуассоновским случайным процессом, и демонстрацией явления кластеризации.

Ключевые слова: точечные множества, моменты, производящие функционалы, многочастичные функции, марковские цепи, фракталы, пуассоновский процесс.

SPONTANEOUS CLUSTERING IN MARKOV CHAINS.

I. FRACTAL DUST

© 2023 V. V. UCHAIKIN

ABSTRACT. The review is devoted to the description of the statistical properties of a set of isolated points randomly distributed in space, which are nodes of one (or a family of independent) realizations of a Markov chain. The purpose of the analysis of this model is to study the conditions for the emergence of clusters in the set of these nodes and to describe their characteristics. This (first) part of the review introduces the basic concepts of statistics of point distributions: generating functionals, many-particle densities, factorial moments, Markov chains, correlation functions. The part ends with a description of one-dimensional self-similar (in the statistical sense) sets generated by a Poisson-fractional random process and a demonstration of the clustering phenomenon.

Keywords and phrases: point sets, moments, generating functionals, multiparticle functions, Markov chains, fractals, Poisson process.

AMS Subject Classification: 65P40

1. Введение. Математическая модель *случайного точечного распределения* (случайного распределения точек в пространстве) лежит в основе статистической механики и других разделов современной теоретической физики. С простейшим вариантом такой модели, называемым физиками *идеальным газом*, а математиками *однородным пуассоновским ансамблем*, знакомятся еще в молекулярно-кинетической теории. Положение каждой материальной точки (молекулы) в этой модели считается не зависящим от расположения остальных точек (молекул) газа. Отклонение от этой схемы становится существенным уже при рассмотрении реальных газов и жидкостей благодаря действию Ван-дер-Ваальсовых сил, порождающих корреляции между молекулами. В обычных условиях они являются короткодействующими, однако в состоянии турбулентности и при

фазовых переходах радиус корреляций резко возрастает [18]. Далекие корреляции наблюдаются в твердых телах с кристаллической или поликристаллической структурой, в пористых структурах, перколяционных системах, фракталах [12]. Наконец, самоподобные корреляции степенного типа наблюдаются в астрофизических исследованиях межзвездной среды и астрономических исследованиях крупномасштабной структуры Вселенной [1].

Естественно, можно построить различные модели коррелированного распределения точек в пространстве. Существует два распространенных подхода к построению таких моделей. Оба они базируются на понятии случайной величины. Если число координат, описывающих состояние системы, фиксировано (как, например, в динамике классической системы с заданным числом степеней свободы), то их можно считать случайными величинами, заданными на декартовом произведении пространств, и оперировать совместным распределением их вероятностей (иными словами, перейти к модели случайных векторов) [3]. Другой подход используют, когда число степеней свободы не фиксировано (как, например, в квантовой теории поля). Он основан на использовании понятия целочисленной случайной меры, и, несмотря на несколько более абстрактный характер, удобнее в приложениях и даже обладает большей наглядностью [6, 11].

Что касается мотивации построения каких-либо моделей реальных процессов, то можно с уверенностью назвать, как минимум, две ситуации, в которых обращение к моделированию может оказать решающее влияние на ход исследования. В первом случае принципиальные аспекты физики явления ясны, но существует много второстепенных процессов, в той или иной степени могущих повлиять на результат, и моделирование, учитывающее эти поправки, поможет оценить роль каждого из них и сосредоточиться на уточнении результата путем выделения наиболее значимой из них. В другом случае, экспериментальные данные не складываются еще в общую картину, идет процесс накопления их из разных источников. И в этом случае модель, возможно и не вполне адекватная, становится своего рода ориентиром, инструментом для сопоставления эмпирических выводов, неким прообразом будущей теории, ее феноменологическим зародышем.

2. Основные определения.

2.1. *Случайные точечные распределения.* Конечное множество различающихся точек

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

принадлежащих борелевскому подмножеству в $\mathbb{R}^d$, называется *точечным распределением*. Каждое точечное распределение порождает целозначную функцию области A

$$N(A; x_1, \dots, x_k) \equiv N(A) = \sum_{i=1}^k 1(x_i; A).$$

Здесь и далее $1(x; A)$ — индикаторная функция множества A :

$$1(x; A) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между точечными распределениями и функциями $N(A)$. Далее мы будем использовать функцию $N(A)$ для обозначения точечных распределений и употреблять слово *частицы* для их случайных реализаций (то есть называть $N(A)$ числом частиц в области A).

Рассмотрим статистический ансамбль точечных распределений. Он может быть задан набором функций $P(A_1, \dots, A_k; n_1, \dots, n_k)$, определенных для любого целого k , любого множества целых чисел $n_1, \dots, n_k$ и любого множества областей $A_1, \dots, A_k$, так что

$$P(A_1, \dots, A_k; n_1, \dots, n_k) = P\{N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k\}.$$

Эти функции должны быть неотрицательными, самосогласованными, и отвечать некоторым другим требованиям [6, 11]. Пара семейств функций $\{N\}$ и $\{P\}$ образует *вероятностную меру*.

2.2. *Производящие функционалы.* Математическое описание вероятностных свойств случайного точечного распределения удобнее осуществлять с использованием *производящего функционала* (ПФ):

$$\Phi(u(\cdot)) = \mathbb{E} \exp \left\{ \sum_i \ln u(X_i) \right\} = \mathbb{E} \exp \left\{ \int N(dx) \ln u(x) \right\}, \quad (1)$$

где $\mathbb{E}$ — символ математического ожидания, $u(x)$ — некоторая измеримая функция, $\mathbb{R}^d$, $|u(x)| \leq 1$. Детальное описание такого подхода может быть найдено в [6]. Приведем основные свойства ПФ.

1. ПФ $\Phi(u(\cdot))$ существует для всех измеримых $u(x)$ с $|u(x)| \leq 1$. Он принимает значения на простых функциях

$$0 \leq u(x) = \sum_{m=1}^M c_m 1(x; A_m) \leq 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

определяет однозначным образом распределение вероятностей случайной меры $N(\cdot)$.

2. Если $|u(x)| \leq 1$, тогда $|\Phi(u(\cdot))| \leq 1$; если $0 \leq u(x) \leq 1$, тогда $0 \leq \Phi(u(\cdot)) \leq 1$. Далее,

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \Phi(\theta^{1(\cdot; A)}) = \mathbb{P}\{N(A) = 0\},$$

$$\lim_{\theta \uparrow 1} \Phi(\theta^{1(\cdot; A)}) = \mathbb{P}\{N(A) < \infty\}.$$

3. Пусть случайные меры $N_1, N_2, \dots, N_k$ независимы и $N = N_1 + \dots + N_k$. Тогда соответствующие ПФ $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ и Φ связаны друг с другом соотношением

$$\Phi(u(\cdot)) = \Phi_1(u(\cdot)) \dots \Phi_k(u(\cdot)) = \prod_{i=1}^k \Phi_i(u(\cdot)). \quad (2)$$

2.3. *Факториальные моменты.* Важными характеристиками целозначных случайных мер являются их *факториальные моменты* $\varphi^{[n]}(A_1, \dots, A_n)$. Первый факториальный момент определяется как математическое ожидание $N(A)$:

$$\varphi^{[1]}(A) = \mathbb{E}N(A).$$

Второй факториальный момент

$$\varphi^{[2]}(A_1, A_2) = \mathbb{E}[N(A_1)N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)].$$

Третий факториальный момент

$$\begin{aligned} \varphi^{[3]}(A_1, A_2, A_3) = \mathbb{E}[N(A_1)N(A_2)N(A_3) - N(A_1)N(A_2 \cap A_3) - \\ - N(A_2)N(A_1 \cap A_3) - N(A_3)N(A_1 \cap A_2) + 2N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]. \end{aligned}$$

Пусть $C_1, \dots, C_m$ — непересекающиеся области $\mathbb{R}^d$ и каждая из A_i совпадает с любой из C_j , встречающейся среди $A_1, \dots, A_n$ n_j раз. Тогда

$$\varphi^{[n]}(A_1, \dots, A_n) = \mathbb{E}[N^{[n_1]}(C_1) \dots N^{[n_m]}(C_m)], \quad (3)$$

где

$$N^{[n]}(C) \equiv N(C)[N(C) - 1] \dots [N(C) - n + 1]$$

и $\mathbb{E}N^{[n]}(C)$ — n -й факториальный момент случайного целого числа $N(C)$. Расширение этого понятия на произвольные множества $A_1, \dots, A_n$ дано в [6].

Следующее свойство связывает факториальные моменты с ПФ.

Пусть случайная целозначная мера $N(A)$ обладает факториальными моментами

$$\varphi^{[1]}(A), \dots, \varphi^{[m]}(A_1, \dots, A_m).$$

Тогда ПФ $\Phi(u(\cdot))$ может быть представлен в виде

$$\Phi(u(\cdot)) = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int \dots \int \bar{u}(x_1) \dots \bar{u}(x_k) \varphi^{[k]}(dx_1, \dots, dx_k) + R_m, \quad (4)$$

где $\bar{u}(x) = 1 - u(x)$ и R_m — остаточный член (см. [6]).

Полагая

$$u(x) = u1(x; A),$$

мы сводим производящий функционал $\Phi(u(\cdot))$ точечного распределения в $\mathbb{R}^d$ к производящей функции $\varphi(u)$ одной случайной величины.

Следуя традиции, сложившейся в теоретической физике, мы перейдем от мер множеств к их плотностям (в предположении, что они, конечно, существуют) с помощью соотношений

$$\varphi^{[k]}(dx_1, \dots, dx_k) = f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

Как следует из (4), плотности факториальных моментов $f^{[k]}(x_1, \dots, x_k)$ могут быть выражены через функциональные производные от ПФ:

$$f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\delta \Phi(u(\cdot))}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_k)} \Big|_{u=1}. \quad (5)$$

Каждая из них инвариантна относительно перестановок своих аргументов.

Заметим, что согласно (3), в случае непересекающихся элементов $dx_1, \dots, dx_k$ произведение $f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$ дает среднее число наборов случайных точек (частиц) данного случайного точечного распределения, таких, что одна из них оказывается в dx_1 , другая попадает в dx_2 и так далее, а $f^{[1]}(x) \equiv f(x)$ — средняя плотность (*концентрация*) частиц в точке x .

2.4. Однородный пуассоновский ансамбль. В качестве примера рассмотрим однородный пуассоновский ансамбль. Пусть $u(x)$ — простая функция

$$u(x) = \sum_{m=1}^M u_m 1(x; A_m).$$

Подставляя её в (1) и учитывая, что

$$\ln \sum_{m=1}^M u_m 1(x; A_m) = \sum_{m=1}^M \ln u_m 1(x; A_m)$$

и

$$\int N(dx) 1(x; A_m) = N(A_m),$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi(u(\cdot)) &= \mathbb{E} \exp \left\{ \sum_{m=1}^M \ln u_m N(A_m) \right\} = \mathbb{E} \prod_{m=1}^M u_m^{N(A_m)} = \prod_{m=1}^M \mathbb{E} u_m^{N(A_m)} = \\ &= \prod_{m=1}^M \exp \{ (u_m - 1) \mathbb{E} N(A_m) \} = \exp \left\{ \sum_{m=1}^M (u_m - 1) \mathbb{E} N(A_m) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int [u(x) - 1] f(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Многократное дифференцирование функционала (6) по $u(x)$ дает

$$f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) = f(x_1) \dots f(x_k).$$

Таким образом, для пуассоновского ансамбля факториальные моменты высших порядков факторизуются, и это их свойство может быть использовано для описания корреляций в других ансамблях в терминах разностей

$$\xi_k(x_1, \dots, x_k) = f^{[k]}(x_1, \dots, x_k) - f(x_1) \dots f(x_k).$$

Для $k = 2$ эта функция отражает простейший тип корреляций, а именно *парные корреляции*. Для $k = 3$ возможны два типа корреляций: когда две частицы коррелированы, а третья независима, и когда все три частицы коррелированы. Соответствующие члены в $\xi_3(x_1, x_2, x_3)$ записываются в виде $f(x_i)\theta_2(x_j, x_k)$ и $\theta_3(x_1, x_2, x_3)$ соответственно.

Чтобы проанализировать возможные типы в общем случае, необходимо рассмотреть все способы разбиения множества $\{x_1, \dots, x_k\}$ на непересекающиеся подмножества, содержащие по меньшей мере одну частицу. Интерпретируя каждое подмножество или группу (*кластер*) как набор взаимно коррелированных частиц, статистически независимых от частиц других подмножеств, мы получим следующее представление для плотностей факториальных моментов, которое известно как *групповое разложение*:

$$\begin{aligned} f^{[2]}(x_1, x_2) &= f(x_1)f(x_2) + \theta_2(x_1, x_2), \\ f^{[3]}(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1)f(x_2)f(x_3) + f(x_1)\theta_2(x_2, x_3) + \\ &+ f(x_2)\theta_2(x_1, x_3) + f(x_3)\theta_2(x_1, x_2) + \theta_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

и так далее. Функции $\theta_n(x_1, \dots, x_k)$, называемые *неприводимыми n -частичными корреляционными функциями*, интерпретируются как характеристики *n -частичных кластеров*. Явное их представление зависит от выбранной модели динамической системы (классической, квантовой, стохастической, [10]). Наш обзор посвящен кластерам узлов в марковской модели, точнее, кластерам, образуемым множеством узлов ансамбля марковских цепей.

3. Марковские цепи.

3.1. Функциональное уравнение. Пусть в $\mathbb{R}^d$ имеется случайное распределение $N_0(A)$ частиц с известным ПФ, и

$$\Phi_0(u(\cdot)) = \mathbb{E} \exp \left\{ \int N_0(dx) \ln u(x) \right\}, \quad (7)$$

и пусть каждая из них X_i порождает в следующем поколении свое распределение потомков $N(X_i \rightarrow A)$. Тогда совокупное распределение всех частиц нового поколения $N(A)$ может быть представлено в виде суммы

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\nu} N(X_i \rightarrow A), \quad (8)$$

где ν — число всех начальных частиц (то есть частиц нулевого поколения), а слагаемые с разными первыми аргументами $X_i = x_i$ статистически независимы. Именно это обстоятельство и является определяющим свойством *ветвящегося процесса*.

Вычислим ПФ этого распределения по формуле полного математического ожидания. Согласно (2)

$$\Phi(u(\cdot)|X_1, \dots, X_\nu) = \prod_{i=1}^{\nu} G(X_i \rightarrow u(\cdot)), \quad (9)$$

где $G(X_i \rightarrow u(\cdot))$ — ПФ распределения $N(X_i \rightarrow A)$, включающего точку X_i . Вычисляя теперь математическое ожидание (9) с учётом (1) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(u(\cdot)) &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{\nu} G(X_i \rightarrow u(\cdot)) = \mathbb{E} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \ln G(X_i \rightarrow u(\cdot)) \right\} = \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ \int N_0(dx) \ln G(x \rightarrow u(\cdot)) \right\} = \Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot))). \end{aligned}$$

При заданном $\Phi_0(u(\cdot))$ функциональное соотношение

$$\Phi(u(\cdot)) = \Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot))) \quad (10)$$

содержит полную информацию о случайном распределении первичных частиц в пространстве и отражает взаимную независимость семейств частиц-потомков. Чтобы найти статистические свойства всех точек, нужна информация, касающаяся развития семейств, то есть конкретный вид ПФ $G(x \rightarrow u(\cdot))$.

Для замыкания уравнения (10) воспользуемся моделью *марковского процесса*, согласно которой каждая частица X_i порождает ν_i частиц следующего поколения, распределённых с ПФ $K(X_i \rightarrow u(\cdot))$ и этот процесс повторяется с тем же ПФ $K(x \rightarrow u(\cdot))$. Искомое случайное точечное

распределение состоит из частиц всех поколений, включая начальные частицы. Определенный таким образом случайный процесс является *марковским ветвящимся процессом* с дискретным временем (роль которого играет номер поколения).

Кластер, состоящий из частиц всех поколений, восходящих к одной начальной частице, будем называть *каскадом*. Полное распределение каскада, порожденного частицей X_i , представляется в виде, подобном (8)

$$N(X_i \rightarrow A) = 1(X_i; A) + \sum_{k=1}^{\nu_i} N(X_{ik} \rightarrow A),$$

где $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}, \dots, X_{i\nu_i}\}$ — случайное распределение с ПФ $K(X_i \rightarrow u(\cdot))$. ПФ каскада $N(X_i \rightarrow A)$ связано с ПФ распределения прямых потомков функциональным соотношением

$$G(x \rightarrow u(\cdot)) = u(x)K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot))). \quad (11)$$

Вместе с известными ПФ Φ_0 и K соотношения (10) и (11) дают полное описание статистических свойств рассматриваемых точечных распределений.

Во избежание недоразумений, сравним уравнение (11) с уравнением (6) главы XII монографии Севастьянова. В наших обозначениях, его уравнение примет вид:

$$F(x \rightarrow u(\cdot); t+1) = K(x \rightarrow F(\cdot \rightarrow u(\cdot); t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad F(x \rightarrow u(\cdot); 0) = u(x).$$

Наблюдаемое различие в этих уравнениях объясняется тем, что в нашем уравнении G есть ПФ суммарного распределения частиц всех поколений каскада, образованного одной первичной частицей каскадом по его завершении, тогда как в уравнении Севастьянова F есть ПФ случайного распределения частиц $t+1$ -го (в левой части) и t -го (в правой) поколений. При этом происходит разбиение кластеров на подкластеры, отнесенные разным поколениям, что изменяет результирующую картину. Уравнение (11) в этом смысле является более подходящим для кластерного анализа, так как номер поколения каскада обычно не играет самостоятельной роли в описании физических процессов.

3.2. Пространственно однородные распределения. Предположим теперь, что *затравочные частицы распределены согласно однородному пуассоновскому ансамблю со средней плотностью $\rho_0 = \text{const}$* . Тогда уравнение (10) принимает вид (6):

$$\Phi(u(\cdot)) = \exp \left\{ \rho_0 \int [G(x \rightarrow u(\cdot)) - 1] dx \right\}. \quad (12)$$

Заметим, что если затравочные частицы не производят потомков, то

$$K(x \rightarrow u(\cdot)) = 1$$

и, согласно уравнению (11),

$$G(x \rightarrow u(\cdot)) = u(x).$$

В этом случае мы получаем простой однородный пуассоновский ансамбль независимых частиц.

Используя (5), можно найти из (12) связь между неприводимыми корреляционными функциями θ_k и плотностями факториальных моментов

$$g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k) = \frac{\delta^k G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_k)} \Big|_{u=1} : \\ \theta_k(x_1, \dots, x_k) = \rho_0 \int g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k) dx. \quad (13)$$

Если процесс развития семейств пространственно однороден, тогда функции $g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k)$ зависят только от разностей $x_1 - x, \dots, x_k - x$, так что

$$g^{[k]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_k) \equiv g^{[k]}(x_1 - x, \dots, x_k - x), \\ f = \rho_0 \int g^{[1]}(x) dx = \text{const}, \quad (14)$$

$$\theta_2(x_{21}) = \rho_0 \int g^{[2]}(x', x_{21} + x') dx', \quad x_{21} = x_2 - x_1,$$

$$\theta_3(x_{21}, x_{31}) = \rho_0 \int g^{[3]}(x', x_{21} + x', x_{31} + x') dx'$$

и так далее.

3.3. *Плотности случайного распределения.* Знание первой плотности (концентрации)

$$f(x) = \mathbf{E}N(dx)/dx$$

случайного точечного распределения является необходимым и достаточным условием для вычисления математического ожидания аддитивных функций $H(X_1, X_2, X_3, \dots) = \sum h(X_i)$:

$$J \equiv \mathbf{E}H(X_1, X_2, X_3, \dots) = \int h(x)f(x)dx.$$

Чтобы получить соответствующие соотношения, необходимо взять функциональную производную от (10) и (11) и затем положить $u(x) = 1$. Выполняя эту процедуру в соответствии с правилами функционального дифференцирования, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi(u(\cdot))}{\delta u(x)} &= \frac{\delta\Phi_0(F(u(\cdot)|\cdot))}{\delta u(x)}, \\ \frac{\delta\Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta u(x)} &= \int \frac{\delta\Phi_0(G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x)} dx'. \end{aligned} \quad (15)$$

При $u \rightarrow 1$, $G(\cdot \rightarrow u(\cdot)) \rightarrow 1$, и согласно (4), это уравнение принимает вид

$$f(x) = \int dx' f_0(x') g(x' \rightarrow x). \quad (16)$$

Физический смысл его становится ясным, если принять во внимание, что

$$g(x' \rightarrow x) \equiv g^{[1]}(x' \rightarrow x)$$

является плотностью узлов в точке x подкаскада с началом в точке x' , тогда как $f_0(x')$ — концентрация начальных узлов.

Дифференцируя подобным же образом второе соотношение (11)

$$\frac{\delta G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} = \delta(x - x_1) K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot))) + u(x) \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta u(x_1)}$$

и следуя уравнению (15), получим

$$\frac{\delta G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} = \delta(x - x_1) K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot))) + u(x) \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} dx'. \quad (17)$$

Полагая здесь $u(x) = 1$, приходим к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$g(x \rightarrow x_1) = \delta(x - x_1) + \int k(x \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_1) dx'. \quad (18)$$

с ядром

$$k(x \rightarrow x') \equiv \left. \frac{\delta K(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x')} \right|_{u=1}.$$

Решение уравнения (18) дает усредненную по ансамблю плотность распределения (по переменной x_1) узлов кластера марковской цепи, состоящего из всех потомков частицы x , ядро уравнения показывает вклад в эту плотность её прямых потомков, а сингулярный член правой части даёт вклад родительской частицы. среднюю пространственную плотность прямых потомков частицы x .

Предполагая, что ряд Неймана для интегрального уравнения (18) сходится (скажем, выполняется условие $\int k(x' \rightarrow x) dx = c < 1$), мы можем записать его решение в виде

$$g(x' \rightarrow x) = \delta(x - x') + \sum_{i=1}^{\infty} k^{(i)}(x' \rightarrow x), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} k^{(1)}(x' \rightarrow x) &= k(x' \rightarrow x), \\ k^{(i)}(x' \rightarrow x) &= \int k^{(i-1)}(x' \rightarrow x'') k(x'' \rightarrow x) dx''. \end{aligned}$$

В уравнении (19) удобно избавиться от δ -сингулярности, введя функцию

$$g'(x' \rightarrow x) = g(x' \rightarrow x) - \delta(x - x') = \sum_{i=1}^{\infty} k^{(i)}(x \rightarrow x'),$$

в свою очередь удовлетворяющую уравнению

$$g'(x \rightarrow x') = \int dx'' k(x \rightarrow x'') g'(x'' \rightarrow x') + k(x \rightarrow x'). \quad (20)$$

Если ядро $k(x \rightarrow x'')$ является инвариантом относительно трансляций

$$k(x \rightarrow x'') = k(x'' - x),$$

то

$$\int g(x' \rightarrow x) dx = \frac{1}{1 - \int k(x) dx} \equiv \frac{1}{1 - c}. \quad (21)$$

Таким образом, полная средняя плотность (16) с $f_0(x) = \text{const}$ будет конечной, только если выполнено условие

$$c \equiv \int k(x) dx < 1.$$

Коэффициент c имеет смысл вероятности выживания частицы, продолжающей формирование кластера при переходе в следующее поколение. При заданном распределении начальных частиц (частиц нулевого поколения) $f_0(x)$ уравнение для суммарной концентрации узлов всех поколений имеет вид

$$f(x) = f_0(x) + c \int f(x') p(x' \rightarrow x) dx',$$

где $p(x' \rightarrow x)$ — переходная плотность вероятности, $\int p(x' \rightarrow x) dx = 1$.

3.4. Уравнение Орнштейна—Цернике. Важнейшую роль в кластеризации точечных распределений играют уже упоминавшиеся выше корреляционные функции различных порядков. Здесь мы рассмотрим специфические связи между ними, имеющие место в рассматриваемой модели марковских цепей. Начнем с двухточечной корреляционной функции

$$\theta_2(x_1, x_2) = \rho_0 \int g^{[2]}(x \rightarrow x_1, x_2) dx. \quad (22)$$

Дифференцируя (17) ещё раз, получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 G(x \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_2) \delta u(x_1)} &= \delta(x_1 - x) \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_2)} dx' + \\ &+ \delta(x_2 - x) \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} dx' + \\ &+ u(x) \left\{ \iint \frac{\delta^2 K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot)) \delta G(x'' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1)} \frac{\delta G(x'' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_2)} dx' dx'' + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{\delta K(x \rightarrow G(\cdot \rightarrow u(\cdot)))}{\delta G(x' \rightarrow u(\cdot))} \frac{\delta^2 G(x' \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)} dx' \right\}. \end{aligned}$$

Полагая $u(x) = 1$, приходим к интегральному уравнению для плотности второго факториального момента в случае единственного каскада:

$$g^{[2]}(x \rightarrow x_1, x_2) = \delta(x_1 - x) \int k(x \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_2) dx' + \delta(x_2 - x) \int k(x \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_1) dx' +$$

$$+ \int dx' \int dx'' k^{[2]}(x \rightarrow x', x'') g(x' \rightarrow x_1) g(x'' \rightarrow x_2) + \int dx' k(x \rightarrow x') g^{[2]}(x' \rightarrow x_1, x_2).$$

Его решение имеет вид:

$$g^{[2]}(x \rightarrow x_1, x_2) = g(x \rightarrow x_1) \int k(x_1 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_2) dx' + g(x \rightarrow x_2) \int k(x_2 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_1) dx' + \\ + \int dx' g(x \rightarrow x') \int dx'' \int dx''' k^{[2]}(x' \rightarrow x'', x''') g(x'' \rightarrow x_1) g(x''' \rightarrow x_2). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и принимая во внимание (14), приходим к выражению

$$\theta_2(x_1, x_2) = \rho \left\{ \int k(x_1 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_2) dx' + \right. \\ \left. + \int k(x_2 \rightarrow x') g(x' \rightarrow x_1) dx' + \int dx' \int dx'' \bar{k}^{[2]}(x', x'') g(x' \rightarrow x_1) g(x_2 \rightarrow x'') \right\},$$

где

$$\bar{k}^{[2]}(x', x'') = \int k^{[2]}(x \rightarrow x', x'') dx.$$

Используя уравнения (18), (19) с обозначением

$$g'(x' \rightarrow x) = \sum_{i=1}^{\infty} k^{(i)}(x' \rightarrow x),$$

можно переписать результат в виде

$$\theta_2(x_1, x_2) = \rho \left\{ g'(x_1 \rightarrow x_2) + g'(x_2 \rightarrow x_1) + \int dx' \int dx'' \bar{k}^{[2]}(x', x'') g(x' \rightarrow x_1) g(x_2 \rightarrow x'') \right\}.$$

Множественно беря функциональные производные от обеих частей уравнения (11), переписанного в виде

$$G(x \rightarrow u(\cdot)) = u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n k^{[n]}(x \rightarrow x_1, \dots, x_n) \times \\ \times [u(x) \bar{G}(x_1 \rightarrow u(\cdot)) \dots \bar{G}(x_n \rightarrow u(\cdot))],$$

получим следующую систему уравнений для плотностей факториальных моментов произвольного порядка:

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} \int d1' k(x \rightarrow 1') g^{[n]}(1' \rightarrow 1, \dots, n) + h_n(x \rightarrow 1, \dots, n), \quad (24)$$

где

$$h_1(x \rightarrow 1) = \delta(x, 1)$$

и

$$h_n(x \rightarrow 1, \dots, n) = n \delta(x, 1) \int d1' k(x \rightarrow 1') g^{[n-1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n) + \\ + \sum_{m=2}^n \frac{1}{m!} \int d1' \dots \int dm' k^{[m]}(x \rightarrow 1', \dots, m') \sum_{n_1 \dots n_m \geq 1} \left\{ \binom{n}{n_1 \dots n_m} \delta_{N_m, n} g^{[n_1]}(1' \rightarrow 1, \dots, n_1) \dots \right. \\ \dots g^{[n_m]}(m' \rightarrow N_{m-1} + 1, \dots, n) + n \delta(x, 1) \binom{n-1}{n_1 \dots n_m} \delta_{N_m, n-1} g^{[n_1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n_1 + 1) \dots \\ \left. \dots g^{[n_m]}(m' \rightarrow N_{m-2} + 2, \dots, n) \right\}, \quad N_m = n_1 + \dots + n_m, \quad n > 1.$$

Здесь мы использовали обозначения $1, 2, \dots$ и $1', 2', \dots$ для $x_1, x_2, \dots$ и $x'_1, x'_2, \dots$ соответственно, и $\delta(x, 1)$ для $\delta(x - x_1)$. Напомним также, что $\stackrel{s}{=}$ означает симметризацию правой части:

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{s}{=} g(x_1, \dots, x_n)$$

означает

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum'_{i_1 \dots i_n} g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}),$$

где штрих указывает на то, что слагаемые с двумя или более совпадающими индексами опущены.

Поскольку $g^{[1]}(x \rightarrow 1) \equiv g(x \rightarrow 1)$ подчиняется уравнению

$$g(x \rightarrow 1) = \int d1' k(x \rightarrow 1') g(1' \rightarrow 1) + \delta(x, 1), \quad (25)$$

она может быть использована в качестве функции Грина для всех остальных уравнений (24) и мы можем получить их решения в рекуррентном виде:

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} \int dx' g(x \rightarrow x') h_n(x' \rightarrow 1, \dots, n).$$

В случае отсутствия ветвления все $k^{[m]}$, $m \geq 2$, равны нулю и получается простой результат для функций θ_n . Подставляя функцию

$$h_n(x \rightarrow 1, \dots, n) = n\delta(x, 1) \int d1' k(x \rightarrow 1') g^{[n-1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n)$$

в уравнение (24), получим

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} n g(x \rightarrow 1) \int d1' k(1 \rightarrow 1') g^{[n-1]}(1' \rightarrow 2, \dots, n), \quad n \geq 2.$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что системе уравнений удовлетворяют решения

$$g^{[n]}(x \rightarrow 1, \dots, n) \stackrel{s}{=} n! g(x \rightarrow 1) g'(1 \rightarrow 2) \dots g'(n-1 \rightarrow n),$$

где

$$g'(x \rightarrow x') = \int dx'' k(x \rightarrow x'') g(x'' \rightarrow x')$$

подчиняется уравнению

$$g'(x \rightarrow x') = \int dx'' k(x \rightarrow x'') g'(x'' \rightarrow x') + k(x \rightarrow x'),$$

вытекающему из (25). Таким образом, в соответствии с (13), учитывая (21), получаем

$$\theta_k(x_1, \dots, x_k) \stackrel{s}{=} \rho k! g'(1 \rightarrow 2) \dots g'(k-1 \rightarrow n),$$

где

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-c} = \text{const.}$$

4. Фракталы.

4.1. Самоподобие множеств. Концепция подобия, проявляющаяся в степенных функциях и устойчивых законах, является не просто некоторым частным их свойством, оно отражает важнейшее свойство многих наблюдаемых в природе структур и построенных на их основе моделей. Применительно к геометрическим структурам самоподобие (в узком смысле) означает инвариантность структуры относительно масштабного преобразования координат: $x \mapsto ax$, $a > 0$. Масштабно инвариантными являются точка, прямая, плоскость, пространство: как не изменяй масштаб, точка остается точкой, а прямая (бесконечная прямая) — прямой.

Важную роль в анализе самоподобных структур играет понятие *размерности*. Термин «размерность» употребляется в различных смыслах: размерность физической величины, размерность фазового пространства и т. п. Даже в чисто *геометрическом* аспекте существует несколько определений размерности, соответствующих разным понятиям. Наиболее известное определение размерности — минимальное число независимых координат, необходимых для однозначного определения положения точки. Так определенная размерность является целым числом, равным 3 для пространства, 2 — для поверхности, 1 — для линии. При другом (*топологическом*) определении

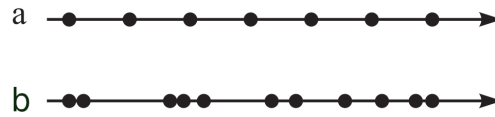


Рис. 1. Одномерная решетка (a) и одномерный газ (b).

размерность множества также полагается целым числом, на единицу большим размерности разреза, разделяющего его на две несвязанные части (примеры: разрезать трехмерное множество можно двумерной поверхностью, поверхность — одномерной линией).

Размерность самоподобия D определяется формулой

$$D = \frac{\ln N}{\ln n}, \quad (26)$$

где N — число одинаковых частей, на которые можно разрезать самоподобный объект на подобные ему части с линейными размерами в n раз меньшие исходных. Легко видеть, что определенная формулой (26) размерность, будучи примененной к отрезку, квадрату и кубу, дает соответственно значения 1, 2 и 3, согласующиеся с другими определениями. В отличие от них, однако, определение (26) может привести и к дробному значению.

Самоподобные множества с нецелой размерностью называют *фракталами*. Термин «фрактал» был введен в обиход Бенуа Мандельбротом, американским математиком польского происхождения (см. его работы [15, 16]). Именно геометрический аспект фрактальной концепции способствовал быстрому и широкому распространению фрактальных моделей в самых разных науках — физике, химии, материаловедении, биологии, физиологии, геологии, экологии, экономике, лингвистике, космологии [4, 7–9]. Несомненно также, что немалую роль в этом процессе сыграл и сам автор — блестящий популяризатор современного типа, умеющий «показать товар лицом» и в два счета убедить собеседника, что это — именно то, что ему нужно для достижения успеха. Успех самого Б. Мандельброта, вероятно, самого популярного в настоящее время математика в нематематической среде, является лучшим свидетельством тому, что он знает, о чем говорит.

4.2. Фрактальная пыль. Обычно присутствующая во фракталоподобных системах переменность (изменчивость от одного экземпляра к другому при сохранении общего мотива) дает основание рассматривать *стохастические (случайные)* фракталы. Введение стохастики существенно обогащает фрактальную концепцию и расширяет сферу ее применений. Стохастический фрактал не воспроизводим: он понимается как бесконечное множество реализаций с заданной на нем вероятностной мерой (*статистический ансамбль Гиббса*). Соотношение подобия понимается теперь в смысле математического ожидания (среднего по ансамблю), а свойство самоподобия распространяется и на вероятностные характеристики стохастического фрактала. Будучи стохастическим в одном масштабе, в силу самоподобия фрактал должен быть стохастическим и во всех других масштабах. Другими словами, увеличение размеров наблюдаемой части рассматриваемого стохастического фрактала не сопровождается уменьшением статистических флуктуаций. *Статистика фракталов — негауссова статистика, в ее основе лежат устойчивые распределения, отличные от нормального.*

Центральной моделью теоретической физики является материальная точка — объект столь малых размеров, что для указания его положения в пространстве достаточно дать координаты одной геометрической точки. Разумеется, все зависит от рассматриваемой задачи: описывая Вселенную, мы можем считать такими точками целые галактики, в солнечной системе мы считаем точками планеты, в сосуде с газом — атомы или молекулы, изучая атом, мы считаем точками электроны и ядро.

Будем, для краткости, называть материальные точки *атомами*. Разместив атомы на прямой на равном расстоянии друг от друга, получим одномерную модель кристаллической решетки, а разбросав их случайно, получим модель одномерного газа. Здесь, однако, следует кое-что уточнить, и в первую очередь — понятие «случайно».

Пусть атомы расположены в точках $x_1, x_2, x_3, \dots$ и расстояния между соседями разные и колеблются (не в смысле зависимости от времени — картина статичная, а в смысле их значений для разных промежутков) в широких пределах (Рис. 1). Можно ли сказать о том, что они распределены случайно? Нет, каким бы причудливым это распределение нам ни казалось. Для того, чтобы говорить о случайном распределении атомов на прямой, надо задать или хотя бы мысленно (как это делал Гиббс) представить статистический ансамбль, т. е. множество разных распределений атомов на прямой с заданными вероятностями появления каждого конкретного распределения. С этой точки зрения детерминированная среда — это ансамбль, все члены которого одинаковы. Поэтому, если мы имеем всего одно наблюдаемое распределение, нам не дано узнать, принадлежит оно статистическому или детерминированному ансамблю. Однако, если мы имеем возможность повторять эксперимент и наблюдать результат снова и снова, то уже при малом числе наблюдений можно установить факт случайности, а при большом — построить некоторую модель статистического ансамбля.

Предположим, что такая возможность есть, и что, наблюдая некоторый промежуток $(0, x]$ оси, мы установили, что число атомов на нем $N(x)$ распределено по закону Пуассона со средним значением $\langle N(x) \rangle$. Если теперь, разбивая $(0, x]$ на отрезки Δx_i различной длины, мы будем получать тот же результат и для этих отрезков, т. е. увидим, что независимо от чисел атомов на других отрезках $N(\Delta x_i)$ распределено по закону Пуассона со средним значением $\langle N(\Delta x_i) \rangle = \langle N(x) \rangle \Delta x_i / x$, пропорциональным Δx_i , то можно сказать, что мы имеем дело с *однородным пуассоновским ансамблем*, описывающим, например, одномерный идеальный газ.

Моделировать, т. е. получать конкретные реализации такого распределения, чрезвычайно просто. Поместив первый атом, например, в начале координат, случайное расстояние до первого соседа справа (или слева) можно выбрать из экспоненциального распределения с плотностью $\psi_1(x) = \mu e^{-\mu x}$ и затем повторять эту процедуру в выбранном направлении. Ситуация такова, как если бы какая-то реальная частица двигалась вдоль оси x , испытывая столкновения в отдельных точках однородной среды, сопровождающиеся появлением в них атомов (ионов).

Заметим, что несмотря на очевидную связь между этими событиями, порождаемыми одной траекторией, случайные числа атомов в непересекающихся интервалах оказываются строго независимыми и образуют пуассоновский ансамбль, для которого среднее и дисперсия случайного числа $N(x)$ имеют вид:

$$\langle N(x) \rangle = \mu x, \quad \langle N^2(x) \rangle - \langle N(x) \rangle^2 = \mu x,$$

где $\mu = \text{const}$ — линейная плотность атомов. Это связано с особым свойством распределения $\psi_1(x) = \mu e^{-\mu x}$, удовлетворяющего уравнению

$$d\psi_1/dx = -\mu\psi_1;$$

отношение $d\psi_1/\psi_1$ не зависит от x . В тех случаях, когда x имеет смысл времени, эта независимость пуассоновского процесса трактуется как *отсутствие памяти*.

Сохранив теперь тот же алгоритм блуждания для построения случайного распределения атомов на прямой, возьмем вместо $\psi_1(x)$ другое распределение $\psi(x)$, не являющееся экспоненциальным. Пользуясь элементарными средствами теории вероятностей, можно найти распределение случайного числа атомов на отрезке $[0, x]$ при условии, что первый из них находится в точке 0, среднее значение и дисперсию. Если при этом дисперсия распределения $\psi(x)$ расстояния между соседними атомами конечна, то для толстых слоев мы по-прежнему получим $\langle N(x) \rangle \propto x$, и $\sigma_{N(x)}^2 \propto x$, т. е. относительные флуктуации $\delta_{N(x)} = \sigma_{N(x)} / \langle N(x) \rangle$ числа атомов в слое толщиной x будут убывать как $x^{-1/2}$. Отличие от пуассоновского ансамбля лишь в том, что теперь это наблюдается в асимптотическом режиме (не при любых x , как выше, а только при больших).

В случае бесконечной дисперсии $\psi(x)$ общие (т. е. не зависящие в асимптотике от конкретной формы $\psi(x)$) результаты могут быть получены лишь для распределений с хвостами степенного типа $\psi(x) \propto x^{-\nu-1}$, $0 < \nu \leq 1$, $x \rightarrow \infty$. Расчеты показывают, что в асимптотике больших толщин x среднее число атомов в слое растет пропорционально x^ν (т. е. медленнее, чем в пуассоновском случае) и *относительные флуктуации асимптотически конечны*, т. е. с ростом x не исчезают,

как в пуассоновском случае, а стремятся к отличной от нуля постоянной. Такое поведение тесно связано с иерархической структурой корреляций, обусловленных ее кластерным характером, порождаемым дробно-дифференциальным оператором. С увеличением x растет не только число кластеров, но и их массивность (число их конституентов), соответственно увеличиваются флуктуации суммарной массивности, чем и обеспечивается асимптотическая тенденция постоянства относительных флуктуаций.

Если принять во внимание только первый факт, то можно было бы подумать, что речь просто идет о среде с переменной концентрацией атомов

$$f(x) = d\langle N(x) \rangle / dx \propto x^{-\nu-1},$$

убывающей с ростом x по степенному закону. Как это не удивительно, но это не так. Легко сообразить, что процесс блуждания, генерирующий распределение атомов, инвариантен относительно направления движения гипотетической «частицы», рассказывающей атомы, слева направо или справа налево, расстояния между соседями в любом случае распределены по одному и тому же закону. Это значит, что убывание $f(x)$ должно наблюдаться в обе стороны от выбранной точки, положение которой мы выберем за начало координат. Но этот атом ничем не отличается от других, следовательно, плотность атомов должна убывать в обе стороны относительно любого из них. Парадоксальность ситуации очевидна: если относительно, скажем, точки x_1 , плотность атомов убывает в обе стороны, то относительно $x_2 > x_1$ она должна быть асимметричной: убывать направо и возрастать при перемещении точки наблюдения от x_2 до x_1 налево, а уж затем перейти в режим убывания, но с более высокого начального значения. Этого, однако, не происходит: все атомы рассматриваемой структуры равноправны. Мы имеем дело с *фрактальной пылью*.

4.3. *Генератор фрактальной пыли.* Назовем фрактальную пыль, для которой условия

$$\langle N_\nu(x) \rangle = \mu_\nu x^\nu, \quad f_\nu(x) = \mu_\nu \nu x^{\nu-1}, \quad 0 < \nu \leq 1 \quad (27)$$

выполняются не только в асимптотике больших толщин, но и при любых x , *совершенной фрактальной пылью*, а плотность $\psi_\nu(x)$ — ее *генератором*. Генератор пыли связан с ее плотностью $f_\nu(x)$ уравнением восстановления

$$f_\nu(x) = \psi_\nu(x) + \int_0^x f_\nu(x-x')\psi_\nu(x')dx'. \quad (28)$$

Поставим задачу найти генератор фрактальной пыли по заданным условиям (27).

Применим к уравнению восстановления преобразование Лапласа:

$$\hat{f}_\nu(\lambda) = [1 + \hat{f}_\nu(\lambda)]\hat{\psi}_\nu(\lambda). \quad (29)$$

Случаю $\nu = 1$ (равномерному в среднем распределению атомов на оси, $f_1(x) = \mu_1$) соответствует

$$\psi_1(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}$$

и, следовательно,

$$\hat{\psi}_1(\lambda) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda}.$$

Действительно, подставив это выражение в уравнение (28) и разрешив его относительно $\hat{f}_1(\lambda)$, получим

$$\hat{f}_1(\lambda) = \frac{\hat{\psi}_1(\lambda)}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda)} = \frac{\mu_1}{\lambda},$$

откуда и следует

$$f_1(x) = \mu_1.$$

Поставим теперь вопрос иначе: какой должна быть плотность $\psi_\nu(x)$, чтобы генерируемая ею стохастическая пыль имела фрактальную размерность $\nu < 1$, то есть чтобы выполнялись соотношения (27). Учитывая, что

$$\hat{f}_\nu(\lambda) = \mu_\nu \nu \Gamma(\nu) \lambda^{-\nu},$$

из уравнения (29) находим

$$\widehat{\psi}_\nu(\lambda) = \frac{\widehat{f}_\nu(\lambda)}{1 + \widehat{f}_\nu(\lambda)} = \frac{\mu}{\mu + \lambda^\nu}, \quad \mu = \mu_\nu \nu \Gamma(\nu).$$

При выполнении обратного преобразования Лапласа

$$\psi_\nu(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\psi}_\nu(\lambda)\}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu}{\mu + \lambda^\nu}\right\}(x) = \mu \mathcal{L}^{-1}\left\{\lambda^{-\nu} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}}\right\}(x)$$

разложим сумму геометрической прогрессии в ряд,

$$\lambda^{-\nu} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{-\gamma}, \quad \gamma = j\nu + \nu,$$

и воспользуемся соотношением

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{-\gamma}\}(x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}.$$

В результате получим

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\mu x^\nu)^j}{\Gamma(\nu j + \nu)}.$$

Учитывая представление двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера в виде ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)},$$

перепишем генератор фрактальной пыли в виде:

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-\mu x^\nu).$$

Напомним, что $\psi_\nu(x)$ — плотность вероятности для случайного расстояния X между соседними атомами фрактальной пыли, запишем вероятность того, что X превысит заданное значение x :

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} \psi_\nu(x) dx = E_\nu(-\mu x^\nu).$$

Здесь E_ν — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера. При $\nu = 1$ она превращается в обычную экспоненту,

$$E_1(-\mu x) = e^{-\mu x},$$

и мы имеем дело с обычным пуассоновским процессом. При $\nu < 1$ мы имеем пуассоновский процесс дробного порядка (*дробный пуассоновский процесс*) [5, 13, 14, 22, 23].

График случайной функции $N(x)$ имеет форму лестницы, все ступеньки которой имеют одинаковую высоту, но разную длину. Подниматься по такой лестнице не очень удобно. Особенно это становится неудобным, когда длины ступенек имеют большой разброс: длина ступеньки может оказаться очень большой, и бегущий уже думает, что миновал лестницу вообще, и тут под ноги ему попадает вновь ступенька, да и не одна... Оттого-то и называют ее дьявольской.

То же самое свойство фрактальной пыли проявляется в следующем эксперименте. Возьмем интервал длиной L с числом атомов N , разобьем его на n ячеек и, подсчитав число атомов в каждой из них, представим результат в виде гистограмм. При $\nu = 1$ вид гистограммы будет зависеть от числа атомов $N(L)$ в интервале L и числа ячеек. Если среднее число атомов в ячейке $N(L)/n$ достаточно велико (скажем, больше трех — четырех десятков), то заполнены будут все ячейки и приблизительно одинаковым числом атомов. При фрактальном же распределении ($\nu < 1$) часть ячеек, как правило, будет оставаться пустой (Рис. 2). Явление это носит название *перемежаемости*. Конечно, и в регулярном случае (при $\nu = 1$) столбики гистограммы не будут иметь одинаковую высоту, но с увеличением N или увеличением длины отрезка L при фиксированном числе ячеек и эта разница будет уменьшаться. Во фрактальном же случае ($\nu < 1$) увеличение N (достигаемое увеличением μ_ν) или L не приводит к качественному изменению

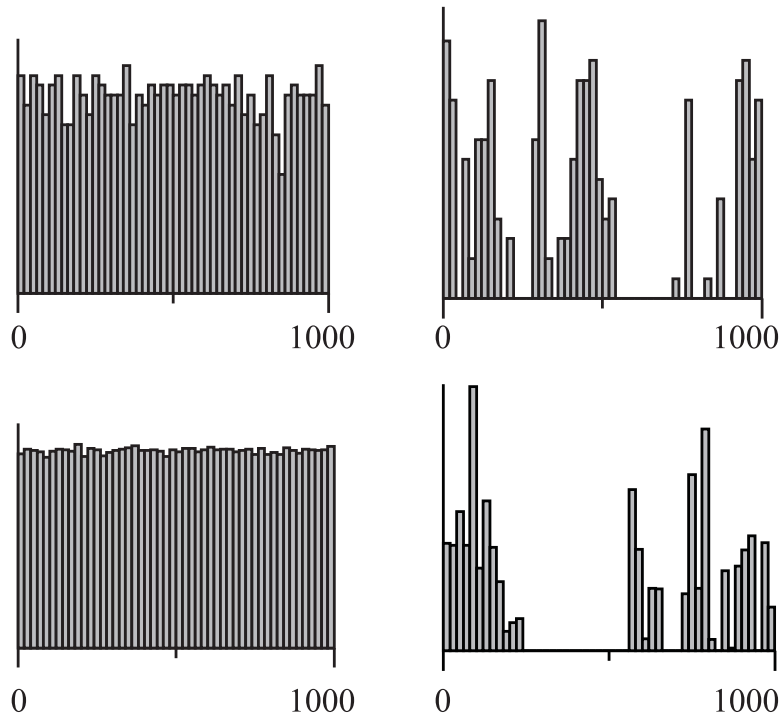


Рис. 2. Изменение в 100 раз сглаживает гистограмму в случае $\nu = 1$ (слева) и не сглаживает ее в случае $\nu < 1$ ($\nu = 1/2$) (справа) [20]. В последнем случае мы видим кластеризацию узлов марковской цепи, являющихся одновременно и координатами случайных точек.

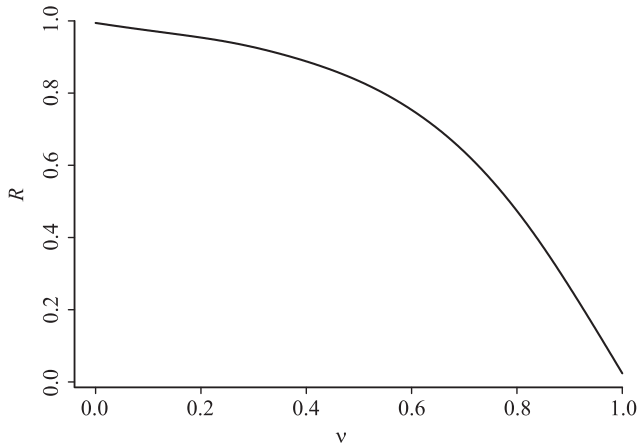


Рис. 3. Коэффициент перемежаемости как функция ν [20].

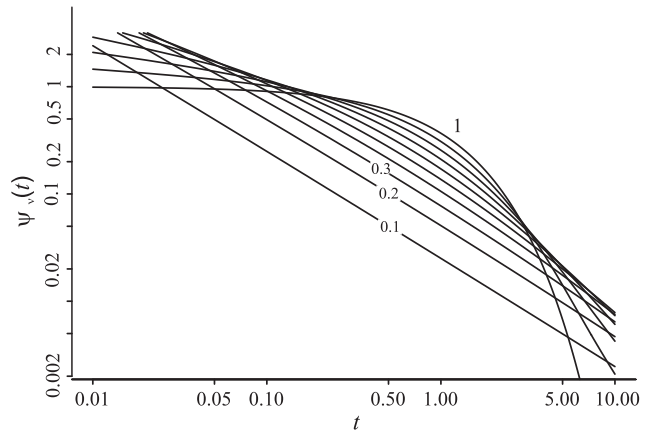


Рис. 4. Плотности $\psi_\nu(x)$, $\nu = 0,1(0,1)1$.

картины: по-прежнему видны пустоты и сгущения (кластеры) (Рис. 2). Можно сказать, что на самоподобные структуры, коими являются фракталы, философский закон о переходе количества в качество не распространяется.

На рис. 3 показана зависимость *коэффициента перемежаемости* (средней доли пустых ячеек при $\mu \rightarrow \infty$)

$$R(\nu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \langle n_0/n \rangle.$$

Переписав (29) в виде

$$[\lambda^\nu + \mu] \hat{\psi}_\nu(\lambda) = \mu$$

и выполнив обратное преобразование, приходим к *дробно-дифференциальному уравнению*

$${}_0D_x^\nu \psi_\nu(x) + \mu \psi_\nu(x) = \mu \delta(x).$$

При $\nu < 1$ решение этого уравнения выражается через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-\mu x^\nu), \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Существует еще одно представление этой плотности [5],

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-t} \phi_\nu(\mu x/t) dt, \quad \phi_\nu(\xi) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi[\xi^\nu + \xi^{-\nu} + 2\cos(\nu\pi)]},$$

позволяющее увидеть степенной характер поведения плотности при $\alpha \neq 1$ на больших и малых временах (рис. 4):

$$\psi_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{\mu^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}, & x \rightarrow 0; \\ \frac{\nu \mu^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} x^{-\nu-1}, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь распределение $p_n(x) = P(N(x) = n)$ для случайного числа атомов фрактальной пыли, разделенных случайными интервалами ξ_j на отрезке длиной x . Согласно теории восстановления

$$p_n(x) \equiv P(N(x) = n) = P\left(\sum_{j=1}^n \xi_j > x\right) - P\left(\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j > x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и следующая система интегральных уравнений для $p_n(x)$ имеет место:

$$p_n(x) = \delta_{n0} \int_x^\infty \psi_\nu(\tau) d\tau + [1 - \delta_{n0}] \int_0^x \psi_\nu(x - \tau) p_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

После преобразования Лапласа:

$$\lambda^\nu \widehat{p}_n(\lambda) = -\mu \widehat{p}_n(\lambda) + \mu \widehat{p}_{n-1}(\lambda) + \lambda^{\nu-1} \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \widehat{p}_{-1} = 0.$$

Обратное преобразование приводит к системе уравнений для фрактального распределения:

$${}_0D_x^\nu p_n(x) = \mu[p_{n-1}(x) - p_n(x)] + \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \delta_{n0}, \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (30)$$

При $\nu \rightarrow 1$ она превращается в систему для регулярного случая:

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \mu[p_{n-1}(x) - p_n(x)] + \delta(x) \delta_{n0}.$$

Здесь использовано предельное (в смысле обобщенных функций) соотношение

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} = \delta(x).$$

Уравнения (30) и описывают статистические свойства дьявольской лестницы. При $\nu = 1$ длины разных ступенек, хоть и имеют разброс, но разброс этот не критический: нет ни очень коротких ступенек (точнее, они маловероятны), ни очень длинных, и можно как-то приноровиться. Дьявольский характер лестницы проявляется лишь при $\nu < 1$: у плотности распределения длины ступеньки появляется особенность в нуле, порождая сгущения ступенек (кластеры), и тяжелый степенной хвост, ответственный за появление длинных полок, усыпляющих бдительность бегущего. Но плотность распределения длины ступеньки удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое при $\nu < 1$ становится дробным. Таким образом, *дьявольский характер лестницы возникает одновременно с дробным характером дифференциального уравнения.*

4.4. *Предельное дробно-пуассоновское распределение.* Пусть случайная величина N с целочисленными значениями n распределена по дробно-пуассоновскому закону порядка ν с математическим ожиданием $EN = \bar{n}$. Введем случайную величину $Z(\nu) = N/\bar{n}$ и квазинепрерывную переменную $z = n/\bar{n}$. Плотность вероятности Z , зависящую от параметра $\bar{n}$, обозначим через $f_\nu(z; \bar{n})$

$$f(z; \bar{n}) = \bar{n} \frac{\bar{n}^z}{\Gamma(\bar{n}z + 1)} e^{-\bar{n}} \sim \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(z-1)^2}{2/\bar{n}} \right\}.$$

Наблюдаем очевидный результат: с ростом $\bar{n}$ плотность приближается к нормальной с математическим ожиданием 1 и убывающей дисперсией и в пределе превращается в вырожденное распределение:

$$\lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} f(z; \bar{n}) = \delta(z-1).$$

Однако, как показано в [19], это справедливо лишь при $\nu = 1$, то есть в случае истинного пуассоновского распределения. В случае дробного порядка характеристическая (по Лапласу) функция $\chi(\lambda)$ скейлинговой переменной Z выражается через функцию Миттаг-Леффлера E_ν :

$$\chi(\lambda) = \mathbb{E} e^{-\lambda Z} = E_\nu(\bar{n}\Gamma(\nu+1)(e^{-\lambda/\bar{n}} - 1)).$$

При больших $\bar{n}$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda Z} \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda z} f_\nu(z) dz \sim E_\nu(-\lambda'),$$

где E_ν — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера, а $\lambda' = \lambda\Gamma(\nu+1)$.

Сравнение этого выражения с формулой (6.9.8) из [21, с. 187]

$$\begin{aligned} E_\nu(-\lambda') &= \nu^{-1} \int_0^\infty \exp(-\lambda' x) g_+^{(\nu)}(x^{-1/\nu}) x^{-1-1/\nu} dx \times \\ &\times \int_0^\infty e^{-\lambda z} \left\{ \frac{[\Gamma(\nu+1)]^{1/\nu}}{\nu} g_+^{(\nu)} \left(\left(\frac{z}{\Gamma(\nu+1)} \right)^{-1/\nu} \right) z^{-1-1/\nu} \right\} dz \end{aligned}$$

показывает, что при $\nu \neq 1$ случайная величина $Z(\nu)$ имеет невырожденное распределение

$$f_\nu(z) = \left\{ \frac{[\Gamma(\nu+1)]^{1/\nu}}{\nu} g_+^{(\nu)} \left(\left(\frac{z}{\Gamma(\nu+1)} \right)^{-1/\nu} \right) z^{-1-1/\nu} \right\}$$

с моментами

$$\langle Z^k \rangle = \frac{[\Gamma(1+\nu)]^k \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k\nu)}.$$

В этих формулах

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} g_+^{(\nu)}(z) dz = e^{-\lambda^\nu}.$$

Используя разложение этой плотности в степенной ряд, получим

$$f_\nu(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(1-(k+1)\nu) [\Gamma(\nu+1)]^{k+1}}. \quad (31)$$

При $z \rightarrow 0$

$$f_\nu(z) \rightarrow f_\nu(0) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} = \frac{\sin(\nu\pi)}{\nu\pi}.$$

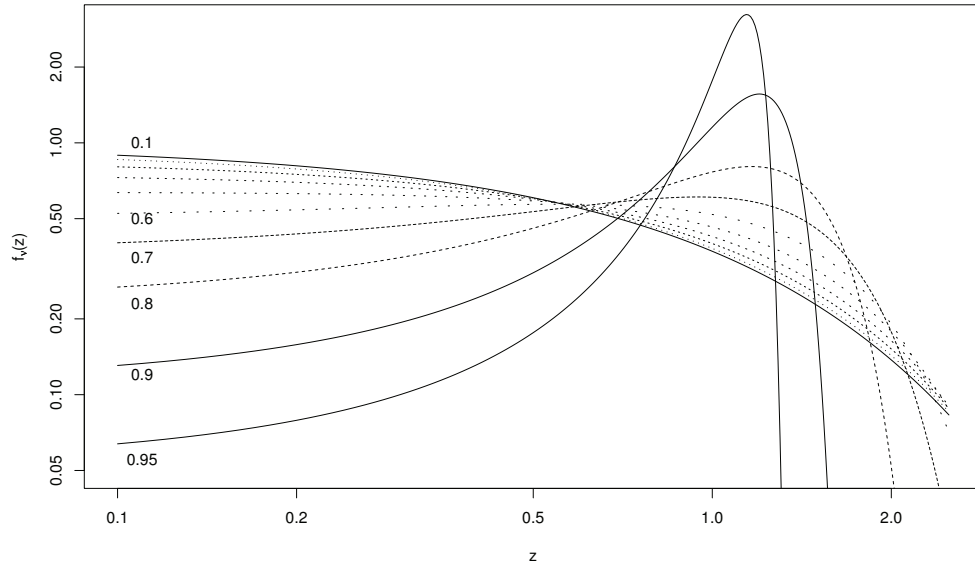
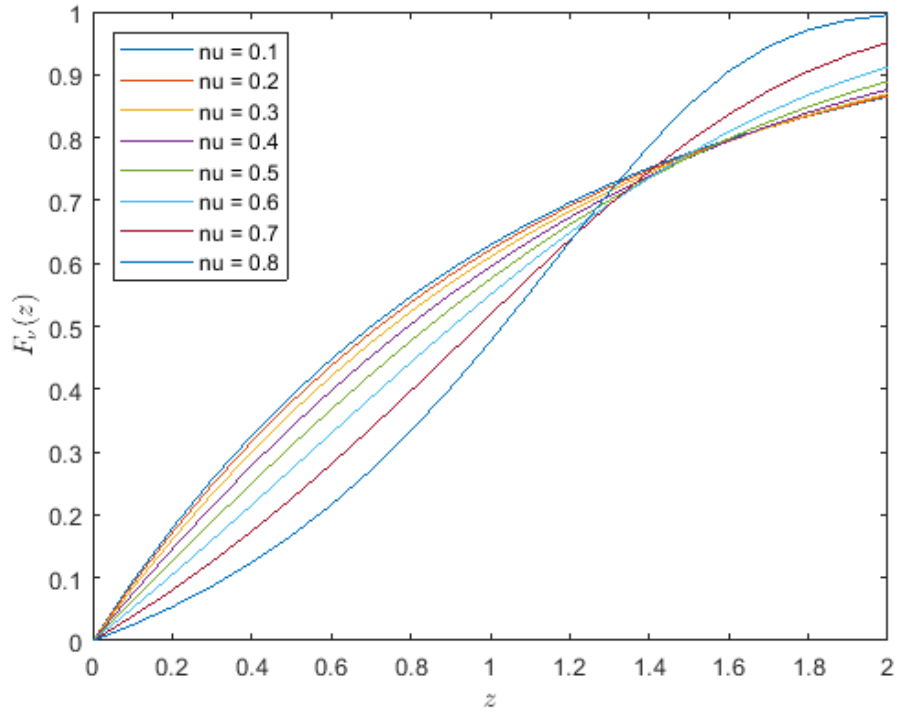


Рис. 5. Предельные дробно-пуассоновские плотности (31).

Рис. 6. Предельные функции дробно-пуассоновского распределения $F_\nu(z)$ (32).

Заметим, что $\langle Z^0 \rangle = 1$, $\langle Z^1 \rangle = 1$ и $\langle Z^2 \rangle = 2\nu B(\nu, 1 + \nu)$, так что относительные флуктуации в предельном распределении

$$\delta_\nu \equiv \sigma_{N(t)} / \langle N \rangle = \sqrt{2\nu B(\nu, 1 + \nu) - 1} = \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ \sqrt{\pi/2} - 1, & \nu = 1/2, \\ 0, & \nu = 1. \end{cases}$$

В частном случае $\nu = 1/2$, записывается в виде полунормального распределения $f_\nu(z)$:

$$f_{1/2}(z) = \frac{2}{\pi} e^{-z^2/\pi}, \quad z \geq 0.$$

Графики плотностей разных порядков и соответствующих функций распределения вероятностей

$$F_\nu(z) = \int_0^z f_\nu(x) dx \quad (32)$$

изображены на рис. 5 и 6.

В довершение раздела мы приведем теорему о моделировании случайной величины с дробно-устойчивым распределением.

Теорема 1. Пусть $Z(\nu)$, $\nu \in (0, 1]$, случайная величина, распределенная по дробно-пуассоновскому закону, а $S_+(\nu)$ — субординатор порядка ν . Тогда

$$Z(\nu) \stackrel{d}{=} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{[S_+(\nu)]^\nu}.$$

Доказательство. Доказательство несложно: запишем выражение для дополнительной функции распределения

$$\bar{F}_\nu(z) = \int_z^\infty f_\nu(\zeta) d\zeta = \frac{[\Gamma(\nu + 1)]^{1/\nu}}{\nu} \int_z^\infty g_+^{(\nu)} \left(\left(\frac{\zeta}{\Gamma(\nu + 1)} \right)^{-1/\nu} \right) \zeta^{-1-1/\nu} d\zeta,$$

выполним замену переменной

$$t = \left(\frac{\Gamma(\nu + 1)}{\zeta} \right)^{1/\nu}, \quad dt = [\Gamma(\nu + 1)]^{1/\nu} (-1/\nu) \zeta^{-1-1/\nu} d\zeta,$$

и, сравнив полученную вероятность с формулой

$$\int_0^{[\Gamma(\nu+1)/z]^{1/\nu}} g_+^{(\nu)}(t) dt = \mathbf{P} \left([S_+(\nu)]^\nu < \frac{\Gamma(\nu + 1)}{z} \right),$$

приходим к утверждению теоремы. $\square$

Вторая часть обзора будет посвящена мезофракталам — точечным распределениям гибридного типа, в разных масштабах обладающим свойствами как фрактального, так и однородного распределений. Эффективность мезофрактальной модели будет продемонстрирована применением ее к статистическому описанию распределения галактик во Вселенной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышев Ю. В., Теерикорпи П. Фрактальная структура Вселенной. — Нижний Архыз: САО РАН, 2005.
2. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972.
3. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969.
4. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.
5. Ретин О. Н., Саичев А. И. Дробный закон Пуассона // Изв. вузов. Радиофизика. — 2000. — 43, № 9. — С. 823–826.
6. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
7. Пьетронеро Л. (ред.) Фракталы в физике. — М.: Мир, 1988.
8. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991.
9. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Москва–Ижевск: РХД, 2001.
10. Balescu R. Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics. — New York–London–Sydney–Toronto: Wiley, 1975.

11. *Harris T. E.* The Theory of Branching Processes. — Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.
12. *Isichenko M. B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media// *Rev. Mod. Phys.* — 1992. — 64. — P. 961–1043.
13. *Jumarie G.* Fractional master equation: non-standard analysis and Liouville–Riemann derivative// *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2001. — 12. — P. 2577–2587.
14. *Laskin N.* Fractional Poisson processes// *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* — 2003. — 8. — P. 201–213.
15. *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. — San Francisco: W. H. Freeman, 1977.
16. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. — New York: W. H. Freeman, 1983.
17. *Stell G.* Statistical Mechanics Applied to Random-Media Problems// *AMS Lect. Appl. Math.* — 1991. — 27. — P. 109–137.
18. *Takayasu H.* Stable distribution and Lévy process in fractal turbulence// *Progr. Theor. Phys.* — 1984. — 72. — P. 471–478.
19. *Uchaikin V. V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. 1. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
20. *Uchaikin V., Cahoy D., Sibatov R.* Fractional processes: From Poisson to branching one// *Int. J. Bifurcation Chaos.* — 2008. — 18, № 09. — P. 2717–2725.
21. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications. — Netherlands, Utrecht: VSP, 1999.
22. *Wang Xiao-Tian, Wen Zhi-Xiong* Poisson fractional processes// *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2003. — 18, № 1. — P. 169–177.
23. *Wang Xiao-Tian, Wen Zhi-Xiong, Zhang Shi-Ying* Poisson fractional processes, II// *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2006. — 28, № 1. — P. 143–147.

Учайкин Владимир Васильевич
 Ульяновский государственный университет
 E-mail: vuchaikin@gmail.com

CONTENTS

Vadim Fedorovich Kirichenko (<i>obituary</i>)	3
Differential geometry of $(n - m)m$ -dimensional complexes in n -dimensional projective space (<i>O. O. Belova</i>)	17
Infinite products of binomials with increasing degree (<i>V. M. Burlakov</i>)	28
On a generalization of the quaternion algebra (<i>I. M. Burlakov</i>)	33
On estimating the number of elementary transformations (<i>N. P. Gushel</i>)	38
Secular condition for the McKean system (<i>S. A. Dukhnovskii</i>)	44
Features of the problem on synchronization of two van der Pol–Duffing oscillators in the case of a direct connection and the presence of symmetry (<i>D. A. Kulikov</i>)	49
On infinite products of Euler type (<i>E. V. Lukyanova, M. P. Burlakov</i>)	61
Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. I (<i>V. M. Morozov, V. I. Kalenova</i>)	71
Criteria for the straightness of a curve (<i>I. V. Polikanova</i>)	86
On the structure of an affine connection object and the torsion tensor in the bundle of linear frames (<i>K. V. Polyakova</i>)	99
Statistical structures on manifolds and their immersions (<i>A. A. Rylov</i>)	113
Spontaneous clustering in Markov chains. I. Fractal dust (<i>V. V. Uchaikin</i>)	125

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович