

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 237



Москва 2024

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 237 (2024)

Дата публикации 15 июля 2024 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. С. Бондарев,

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

Н. И. Гусева

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 237

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXV».

ВОРОНЕЖ, 26–30 АПРЕЛЯ 2024 г.

Часть 3



Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

О разрешимости вариационного параболического уравнения с нелокальным по времени условием на решение (<i>А. С. Бондарев, А. А. Петрова, О. М. Пировских</i>)	3
Задача Коши с параметром, возмущенная линейным функционалом (<i>Л. Р. Д. Дрегля Сидоров, Н. А. Сидоров</i>)	10
Локальные бифуркации в одной из версий модели мультипликатор-акселератор (<i>А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, Д. Г. Фролов</i>)	18
Преобразование непрерывного нечеткого сигнала линейной динамической системой (<i>В. Л. Хацкевич</i>)	34
Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией. II. Системы пятого порядка (<i>М. В. Шамолин</i>)	49
Обучение нейронной сети для гиперболического уравнения при помощи квазиклассического функционала (<i>С. Г. Шорохов</i>)	76



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 3–9
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-3-9

УДК 517.954

О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

© 2024 г. А. С. БОНДАРЕВ, А. А. ПЕТРОВА, О. М. ПИРОВСКИХ

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается параболическая задача с весовым интегральным условием по времени специального вида. Получены условия, при которых решение задачи обладает большей гладкостью, чем слабое решение, существование и единственность которого были доказаны ранее.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нелокальное по времени условие, гладкая разрешимость, обобщенная разрешимость.

ON THE SOLVABILITY OF A VARIATIONAL PARABOLIC EQUATION WITH A NONLOCAL-IN-TIME CONDITION ON THE SOLUTION

© 2024 А. S. BONDAREV, A. A. PETROVA, O. M. PIROVSKIKH

ABSTRACT. In a separable Hilbert space, a parabolic equation with a special time-weighted integral condition is considered. Conditions are obtained under which the solution to the problem is more smooth than a weak solution, the existence and uniqueness of which was proved earlier.

Keywords and phrases: parabolic equation, nonlocal-in-time condition, smooth solvability, generalized solvability.

AMS Subject Classification: 58D25, 35Kxx

1. Постановка задачи. Пусть задана тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V , а пространство H отождествляется со своим двойственным H' . Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \rightarrow V'$, для которого $a(u, v) = (Au, v)$ ((z, v) — значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$). Для $z \in H$ выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением в H (см. [7, с. 58]). Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V \rightarrow V'} \leq \mu$.

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим параболическую задачу

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int_0^T p(t) u'(t) dt = \bar{u}. \quad (2)$$

В (2) на $[0, T]$ заданы функция $t \rightarrow f(t) \in V'$ и функция $t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^1$, а также элемент $\bar{u}$. Производные функций в настоящей работе понимаются в обобщенном смысле.

Отметим, что вопросы разрешимости абстрактного параболического уравнения с переменным оператором $A(t)$ и периодическим по времени условием на решение рассматривались в [2]. В [8, 9] изучались гладкая и обобщенная разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным по времени условием на решение. В [12] для абстрактных дифференциальных уравнений с нелокальным по времени условием на решение наиболее общего вида получен критерий единственности в терминах собственных значений.

Приведем теорему о слабой разрешимости задачи (2).

Теорема 1 (см. [3]). *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1) и вложение $V \subset H$ компактно. Пусть также $f \in L_2(0, T; H)$, а функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной на $[0, T]$, невозрастающей и принимает положительные значения на $[0, T]$. Предположим, что $\bar{u} \in V$. Тогда существует единственная функция $u(t)$, $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$, удовлетворяющая в (2) уравнению почти всюду на $[0, T]$ и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2 \right) dt \leq C \left(\|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right).$$

2. Гладкая разрешимость. Для получения более гладких, чем в [3], решений сделаем дополнительные предположения об исходных данных задачи (2).

Определим множество $D(A) = \{u \in V : Au \in H\}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть функция $f \in L_1(0, T; H) \cap L_2(0, T; V')$ такова, что её обобщённая производная f' принадлежит классу $L_2(0, T; V')$ и $Af \in L_1(0, T; H)$. Предположим, что $f(0) \in H$ и $\bar{u} \in D(A)$, т.е. $A\bar{u} \in H$. Тогда задача (2) имеет единственное решение $u(t)$, удовлетворяющее условиям $u' \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u'' \in L_2(0, T; V')$. Кроме того, справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2 \right) dt \leq \\ \leq K \left\{ \|A\bar{u}\|_H^2 + \left(\int_0^T \|Af(t)\|_H dt \right)^2 + \int_0^T \left(\|f(t)\|_{V'}^2 + \|f'(t)\|_{V'}^2 \right) dt + \|f(0)\|_H^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Заметим, что из условия $f' \in L_2(0, T; V')$ следует, что $f \in C([0, T], V')$, поэтому выражение $f(0) \in V'$ имеет смысл и предположение $f(0) \in H$ корректно. Отметим также, что в силу теоремы 1 о слабой разрешимости задачи (2) гладкое решение $u(t)$, если оно существует, будет единственным.

В [10] показано, что если элемент $u_0 \in V$ удовлетворяет условию $Au_0 \in H$, то в условиях данной теоремы функция

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds \quad (4)$$

является в пространстве V' решением задачи Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0,$$

удовлетворяющим указанной в теореме 2 гладкости. Выясним, при каком $u_0 \in D(A)$ функция $u(t)$, построенная по формуле (4), будет удовлетворять интегральному условию в (2).

На множестве $D(A)$ определим норму $\|v\|_{D(A)} = \|Av\|_H$, с которой $D(A)$ будет являться банаховым пространством. Рассмотрим оператор

$$B = A \int_0^T p(t) e^{-At} dt = - \int_0^T p(t) \frac{d}{dt} (e^{-At}) dt = p(0) \left(\left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right) + \frac{1}{p(0)} \int_0^T p'(t) e^{-At} dt \right). \quad (5)$$

Покажем обратимость оператора $B : D(A) \rightarrow D(A)$. Используя [(2.6)] [3], для $v \in V$ имеем

$$\left\| \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} v \right\|_{D(A)} = \left\| \frac{p(T)}{p(0)} A e^{-AT} v \right\|_H \leq \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\lambda T} \|Av\|_H = \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\lambda T} \|v\|_{D(A)},$$

где $\lambda = \alpha/\beta^2$ и β таково, что $\|u\|_H \leq \beta \|u\|_V$ для всех $u \in V$. Так как функция $p(t)$ является невозрастающей, то существует оператор

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} : D(A) \rightarrow D(A),$$

для которого справедлива оценка

$$\left\| \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} \right\|_{D(A) \rightarrow D(A)} \leq \frac{p(0)}{p(0) - p(T) e^{-\lambda T}}. \quad (6)$$

Теперь оператор B можно представить в виде

$$B = p(0) \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right) \left[I + \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} \int_0^T p'(t) e^{-At} dt \right]. \quad (7)$$

Проведем следующую оценку. Для произвольного $v \in D(A)$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T p'(t) e^{-At} v dt \right\|_{D(A)} &\leq \int_0^T \|p'(t) A e^{-At} v\|_H dt \leq \int_0^T |p'(t)| e^{-\lambda t} \|Av\|_H dt \leq \\ &\leq \left(p(0) - p(T) e^{-\lambda T} - \lambda \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \right) \|v\|_{D(A)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует оценка

$$\left\| \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} \int_0^T p'(t) e^{-At} dt \right\|_{D(A) \rightarrow D(A)} \leq 1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T) e^{-\lambda T}} \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt < 1. \quad (9)$$

Из (7) и (9) следует, что оператор B обратим в пространстве $D(A)$ и

$$B^{-1} = \frac{1}{p(0)} \left[I + \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} \int_0^T p'(t) e^{-At} dt \right]^{-1} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1}.$$

Тогда из (5), (6) и (8) получим оценку

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\|_{D(A) \rightarrow D(A)} &\leq \frac{1}{p(0)} \cdot \frac{p(0)}{p(0) - p(T) e^{-\lambda T}} \cdot \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T) e^{-\lambda T}} \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \right) \right\}^{-1} = \\ &= \left(\lambda \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \right)^{-1} = M_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим теперь элемент

$$u_0 = -B^{-1} \left(\bar{u} - \int_0^T p(t)f(t)dt \right). \quad (11)$$

Продифференцировав (4), получим $u'(t) = -Ae^{-At}u_0 + f(t)$. Умножим последнее равенство на $p(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T :

$$\int_0^T p(t)u'(t)dt = -A \int_0^T p(t)e^{-At}u_0dt + \int_0^T p(t)f(t)dt. \quad (12)$$

Заметим, что

$$-A \int_0^T p(t)e^{-At}u_0dt = -Bu_0 = \bar{u} - \int_0^T p(t)f(t)dt. \quad (13)$$

Складывая (12) и (13), получим

$$\int_0^T p(t)u'(t)dt = \bar{u}.$$

Для $u(t)$ в [10] установлена оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u'(t)\|_{V'}^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2 \right) dt &\leq \\ &\leq C \left\{ \|Au_0\|_H^2 + \int_0^T \left(\|f(t)\|_{V'}^2 + \|f'(t)\|_{V'}^2 \right) dt + \|f(0)\|_H^2 \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, для получения (3) осталось оценить $\|Au_0\|_H^2$. Из (11) с учётом (10) получаем

$$\begin{aligned} \|Au_0\|_H^2 = \|u_0\|_{D(A)}^2 &= \left\| B^{-1} \left(\bar{u} - \int_0^T p(t)f(t)dt \right) \right\|_{D(A)}^2 \leq M_1^2 \left\| \bar{u} - \int_0^T p(t)f(t)dt \right\|_{D(A)}^2 = \\ &= M_1^2 \left\| A\bar{u} - A \int_0^T p(t)f(t)dt \right\|_H^2 \leq M_1^2 \left(\|A\bar{u}\|_H^2 + p^2(0) \left(\int_0^T \|Af(t)\|_H dt \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя оценку (15) в (14), получим оценку (3). $\square$

Решение задачи (2), удовлетворяющее указанной в теореме 2 гладкости, будем называть *гладким*, а условия теоремы 2 — условиями гладкой разрешимости.

3. Обобщенная разрешимость. Пусть определённая ранее полуторалинейная форма $a(u, v)$ является симметричной, т.е. $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ для всех $u, v \in V$, где черта обозначает переход к сопряжённому числу. Оператор A , порождённый формой $a(u, v)$, будем рассматривать как оператор в пространстве H . Тогда оператор $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ является самосопряжённым и положительно определённым. Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V \mid (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Из (1) для всех $u \in V$ следует оценка

$$\alpha^{1/2} \|u\|_V \leq \|u\|_{V(A)} \leq \mu^{1/2} \|u\|_V, \quad (16)$$

которая означает эквивалентность норм в пространствах V и $V(A)$.

Отметим (см., например, [1, 4]), что для оператора A существует самосопряжённый и положительно определённый оператор $A^{1/2}$ с областью определения $D(A^{1/2}) = V$, для которого

$$\|v\|_{V(A)} = \|A^{1/2}v\|_H, \quad v \in V. \quad (17)$$

Вернёмся к задаче (2). Покажем, что при условии симметричности формы, а также при некоторых дополнительных условиях на элемент $\bar{u}$ и функцию $f(t)$ решение задачи (2) имеет бóльшую гладкость, чем в теореме 1.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть форма $a(u, v)$ симметрична. Предположим также, что в (2) функция f принадлежит классу $L_1(0, T; V) \cap L_2(0, T; H)$. Тогда существует единственная функция $u(t)$, $u \in C([0, T], V)$, $u', Au \in L_2(0, T; H)$, удовлетворяющая в (2) уравнению почти всюду на $[0, T]$ и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V^2 + \int_0^T (\|u'(t)\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2) dt \leq \\ \leq K \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \left(\int_0^T \|f(t)\|_V dt \right)^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в сделанных предположениях задача (2) имеет единственное слабое решение. Следовательно, более гладкое решение, если оно существует, будет также единственным.

Как было отмечено в [3], в H оператор A определяет полугруппу e^{-At} . Кроме того (см. [5]), если $u_0 \in D(A^{1/2}) = V$ и $f \in L_2(0, T; H)$, то функция

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds \quad (19)$$

является в пространстве H решением задачи Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0. \quad (20)$$

Заметим (см., например, [6, 11]), что для такого решения $u(t)$ выполняется следующая гладкость: $u \in C([0, T], V)$ и $u', Au \in L_2(0, T; H)$. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V^2 + \int_0^T (\|u'(t)\|_V^2 + \|Au(t)\|_H^2) dt \leq C \left(\|u_0\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right). \quad (21)$$

Выясним теперь, при каком $u_0 \in V$ функция $u(t)$, построенная по формуле (21), будет удовлетворять интегральному условию в (2). Будем действовать по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 2.

Рассмотрим оператор $B : V \rightarrow V$, определённый равенством (5). Покажем обратимость этого оператора в пространстве $V(A)$. Для $v \in V$ с учётом (17) получаем

$$\left\| \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} v \right\|_{V(A)} = \left\| A^{1/2} \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} v \right\|_H \leq \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\lambda T} \|A^{1/2} v\|_H = \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\lambda T} \|v\|_{V(A)}.$$

Так как функция $p(t)$ является невозрастающей, то существует оператор

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} : V \rightarrow V,$$

причем

$$\left\| \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} \right\|_{V(A) \rightarrow V(A)} \leq \frac{p(0)}{p(0) - p(T)e^{-\lambda T}}. \quad (22)$$

Теперь оператор B можем представить в виде (7).

Проведём следующую оценку. Для произвольного $v \in V$ с учётом (17) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T p'(t) e^{-At} v dt \right\|_{V(A)} &= \left\| A^{1/2} \int_0^T p'(t) e^{-At} v dt \right\|_H \leq \int_0^T \|p'(t) e^{-At} A^{1/2} v\|_H dt \leq \\ &\leq \int_0^T |p'(t)| e^{-\lambda t} \|A^{1/2} v\|_H dt = \left(p(0) - p(T) e^{-\lambda T} - \lambda \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \right) \|A^{1/2} v\|_H = \\ &= \left(p(0) - p(T) e^{-\lambda T} - \lambda \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \right) \|v\|_{V(A)}, \end{aligned}$$

так что из (22) получаем

$$\left\| \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} \int_0^T p'(t) e^{-At} dt \right\|_{V(A) \rightarrow V(A)} \leq 1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T) e^{-\lambda T}} \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt < 1. \quad (23)$$

Таким образом, из (7), (22) и (23) следует, что оператор B в пространстве $V(A)$ обратим и

$$B^{-1} = \frac{1}{p(0)} \left[I + \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1} \int_0^T p'(t) e^{-At} dt \right]^{-1} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \right)^{-1},$$

а также справедлива оценка

$$\|B^{-1}\|_{V(A) \rightarrow V(A)} \leq M_1,$$

где M_1 определено в (10).

Рассмотрим теперь элемент

$$u_0 = -B^{-1} \left(\bar{u} - \int_0^T p(t) f(t) dt \right). \quad (24)$$

Заметим, что $u_0 \in V$ в силу условий теоремы. Тогда функция $u(t)$, построенная по формуле (19), где элемент u_0 определен в (24), будет решением задачи (20), удовлетворяющим указанным в теореме условиям гладкости. Выполнение интегрального условия в (2) для данной функции $u(t)$ доказывается так же, как в теореме 2.

Таким образом, данная функция является решением задачи (2), удовлетворяющим указанным в теореме условиям гладкости. Напомним, что такое решение называется *обобщённым*. Условия теоремы 3 будем называть условиями обобщенной разрешимости задачи (2).

Заметим, что для полученного обобщённого решения выполняется оценка (21). Таким образом, для получения оценки (18) следует оценить $\|u_0\|_V^2$.

Из (24), с учетом (16), следует, что

$$\begin{aligned} \|u_0\|_V^2 &= \left\| B^{-1} \left(\bar{u} - \int_0^T p(t) f(t) dt \right) \right\|_V^2 \leq \\ &\leq \alpha^{-1} M_1^2 \mu \left\| \bar{u} - \int_0^T p(t) f(t) dt \right\|_V^2 \leq 2\alpha^{-1} M_1^2 \mu \left(\|\bar{u}\|_V^2 + \left\| \int_0^T p(t) f(t) dt \right\|_V^2 \right) \leq \\ &\leq 2\alpha^{-1} M_1^2 \mu \left(\|\bar{u}\|_V^2 + p^2(0) \left(\int_0^T \|f(t)\|_V dt \right)^2 \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Теперь из (25) следует оценка

$$\|u_0\|_V^2 \leq K \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \left(\int_0^T \|f(t)\|_V dt \right)^2 \right\},$$

подставляя которую в (21), получим (18). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
2. *Бондарев А. С.* Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 4. — С. 78–88.
3. *Бондарев А. С., Петрова А. А., Пировских О. М.* Слабая разрешимость вариационного параболического уравнения с нелокальным по времени условием на решение // Совр. мат. Фундам. напр. — 2024. — 70, № 4.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
6. *Ладыженская О. А.* О решении нестационарных операторных уравнений // Мат. сб. — 1956. — 39, № 4. — С. 491–524.
7. *Обэн Ж. П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
8. *Петрова А. А.* Гладкая разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение // Мат. Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна» (Воронеж, 25–31 января 2016 г.). — Воронеж: УНаучная книга, 2016. — С. 320–323.
9. *Петрова А. А.* Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным условием // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 4. — С. 160–174.
10. *Смагин В. В.* О гладкой разрешимости вариационных задач параболического типа // Тр. мат. ф-та (нов. серия). Воронеж. гос. ун-т. — 1998. — № 3. — С. 67–72.
11. *Соболевский П. Е.* Обобщённые решения дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. — 1958. — 122, № 6. — С. 994–996.
12. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — 67, № 2. — С. 133–166.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Бондарев Андрей Сергеевич (Bondarev Andrey Sergeevich)

Воронежский государственный университет

(Voronezh State University, Voronezh, Russia)

E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Петрова Анастасия Александровна (Petrova Anastasiya Aleksandrovna)

Воронежский государственный университет

(Voronezh State University, Voronezh, Russia)

E-mail: rezolwenta@mail.ru

Пировских Олег Михайлович (Pirovskikh Oleg Mikhailovich)

Воронежский государственный университет

(Voronezh State University, Voronezh, Russia)

E-mail: pirovskiholeg@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 10–17
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-10-17

УДК 517.988.67

ЗАДАЧА КОШИ С ПАРАМЕТРОМ, ВОЗМУЩЕННАЯ ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

© 2024 г. Л. Р. Д. ДРЕГЛЯ СИДОРОВ, Н. А. СИДОРОВ

Аннотация. Рассматривается задача Коши с параметром, возмущенная линейным функционалом. При любом значении параметра задача имеет тривиальное решение. Получены необходимые и достаточные условия на значения параметра, в окрестности которых существуют нетривиальные решения в классе вещественных непрерывных функций. Указан способ построения таких решений.

Ключевые слова: линейный функционал, точка бифуркации, задача Коши, диаграмма Ньютона, интеграл Стильтьеса.

THE CAUCHY PROBLEM WITH A PARAMETER PERTURBED BY A LINEAR FUNCTIONAL

© 2024 L. R. D. DREGLEA SIDOROV, N. A. SIDOROV

ABSTRACT. In this paper, we consider a Cauchy problem with a parameter perturbed by a linear functional. For any value of the parameter, the problem has a trivial solution. We obtain necessary and sufficient conditions for values of the parameter such that in their neighborhoods nontrivial solutions in the class of real continuous functions exist. A method of constructing such solutions is proposed.

Keywords and phrases: linear functional, bifurcation point, Cauchy problem, Newton diagram, Stieltjes integral.

AMS Subject Classification: 47J15

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \lambda)}{dt} = a(t, \lambda)x_\alpha(\lambda) + \sum_{i=l}^{\infty} a_i(t, \lambda)x^i(t, \lambda), & t \in [0, T], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad l \geq 2 \\ x(t, \lambda)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ряд $\sum_{i=l}^{\infty} a_i x^i$ сходится равномерно в окрестности нуля, коэффициенты $a(t, \lambda)$, $a_i(t, \lambda)$ — непрерывные по t и достаточно гладкие по λ . Линейный функционал $x_\alpha(\lambda)$, называемый в приложениях *нагрузкой*, определяется интегралами Стильтьеса:

$$x_\alpha(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} x(t, \lambda) d\alpha_i(t), \quad [a_i, b_i] \subset (0, T]. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00161).

Поэтому нагрузка может иметь локальные и интегральные слагаемые. Отметим, что задача Коши (1) при любом λ имеет тривиальное решение $x(t, \lambda) = 0$, $x_\alpha(\lambda) = 0$.

Задача (1) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$x(t, \lambda) = \int_0^t a(t, \lambda) dt x_\alpha(\lambda) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_0^t a_i(t, \lambda) x^i(t, \lambda) dt. \quad (3)$$

Определение 1. Точка λ_0 называется точкой бифуркации уравнения (1), если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует непрерывная функция $x(t, \lambda)$ и число λ , удовлетворяющие интегральному уравнению (3), $0 < \|x\| < \varepsilon$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|x\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t, \lambda)|$.

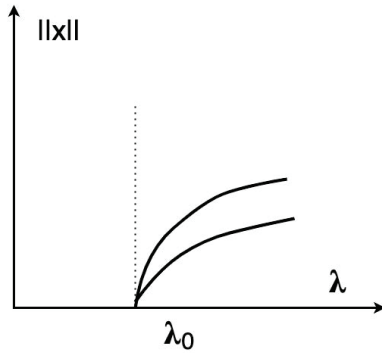


Рис. 1. Точка бифуркации

В разных полуокрестностях точки бифуркации может существовать разное число нетривиальных вещественных решений $x(t, \lambda)$ (см. рис. 1).

В данной работе найдены условия, при которых точка λ_0 является точкой бифуркации, т.е. в её окрестности существует нетривиальное решение. Для других классов нелинейных уравнений подобная задача рассматривалась нами ранее в [6, 7] путём построения и исследования уравнения относительно линейного функционала и параметра, называемого уравнением разветвления. Аналогичная техника применена здесь. Таким образом, настоящая работа продолжает исследования [6, 7].

2. Построение уравнения разветвления, необходимое условие бифуркации. Построим решение интегрального уравнения (3) при $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho_1$, $|x_\alpha| \leq \rho_2$ методом неопределённых коэффициентов в виде ряда

$$x(t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, \lambda) x_\alpha(\lambda)^n, \quad (4)$$

коэффициенты которого строятся рекуррентно:

$$k_1(t, \lambda) = \int_0^t a(\tau, \lambda) d\tau, \quad k_2(t, \lambda) = \dots = k_{l-1}(t, \lambda) = 0, \quad k_l(t, \lambda) = \int_0^t a_l(\tau, \lambda) k_1^l(\tau, \lambda) d\tau, \quad \dots$$

Мы строим малое решение $x(t, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, поэтому и $x_\alpha \rightarrow 0$. Ряд (4) сходится равномерно при достаточно малом ρ_2 . Применяя к нему линейный функционал x_α , получим искомое уравнение разветвления:

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n(\lambda) x_\alpha^n = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты L_n определены следующим образом:

$$L_1(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} k_1(t, \lambda) d\alpha_i(t) - 1, \quad L_2 = \dots = L_{l-1} = 0, \quad L_l(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} k_l(t, \lambda) d\alpha_i(t), \quad \dots$$

Точка λ_0 будет точкой бифуркации задачи Коши (1) в том и только в том случае, когда λ_0 — точка бифуркации уравнения разветвления (5). Если $L_1(\lambda_0) \neq 0$, то на основании теоремы о неявной функции уравнение разветвления в окрестности λ_0 не имеет малых нетривиальных решений. Формула (4) устанавливает биекцию между малыми решениями исходной задачи Коши и уравнения разветвления. Поэтому справедливы следующие утверждения.

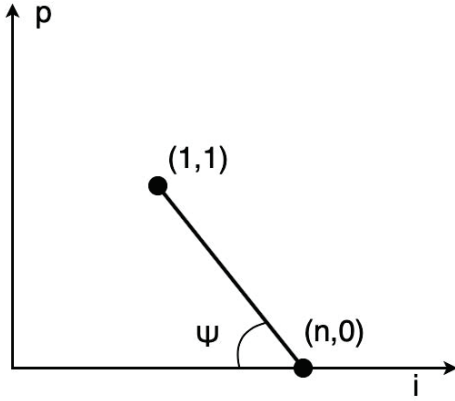


Рис. 2. Диаграмма Ньютона: случай 1

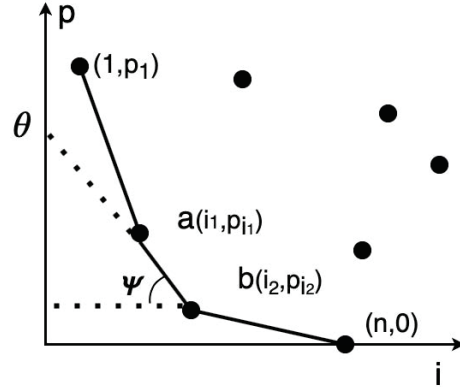


Рис. 3. Диаграмма Ньютона: случай 2

Следствие 1 (необходимое условие бифуркации). Для того чтобы λ_0 могла быть точкой бифуркации задачи Коши (1), необходимо выполнение равенства $L_1(\lambda_0) = 0$.

Следствие 2 (c -параметрическая бифуркация). Если в уравнении разветвления (5) все $L_i(\lambda_0) = 0$, то λ_0 будет точкой бифуркации. Более того, задача Коши (1) при λ_0 имеет c -параметрическое нетривиальное решение $x(t, c)$, зависящее от малого параметра c .

Следствию 2 отвечает на рис. 1 вертикальная ветвь, выходящая из точки λ_0 .

3. Достаточные условия бифуркации и построение асимптотики решения в окрестности точки бифуркации. Введем следующее условие: точка λ_0 является нулем коэффициентов $L_i(\lambda)$ уравнения разветвления (5) кратностей p_i соответственно, причем $p_i \geq 1$, где $i = 1, \dots, n-1$, а $p_n = 0$, так как $L_n(\lambda_0) \neq 0$.

Построим диаграмму Ньютона (см. рис. 2). Рассмотрим множество точек

$$(1, p_1), \quad (2, p_2), \quad \dots \quad (n-1, p_{n-1}), \quad (n, 0). \quad (6)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $p_1 = 1$, $p_i \geq 1$, $i = 2, \dots, n-1$, $p_n = 0$. Тогда диаграмма Ньютона множества точек (6) состоит из единственного отрезка (см. рис. 2), соединяющего точки $(1, 1)$ и $(n, 0)$ на плоскости (i, p) , ψ — угол наклона этого отрезка к отрицательному направлению оси абсцисс, $\tan \psi = 1/(n-1)$. На основании формулы Тейлора при $\mu = \lambda - \lambda_0 \rightarrow 0$ справедливы асимптотики

$$L_i(\lambda_0 + \mu) \sim \frac{1}{p_i!} L_i^{(p_i)}(\lambda_0) \mu^{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому решение уравнения разветвления (5) следует искать в форме

$$x_\alpha = (c_0 + o(|\mu|)) |\mu|^{1/(n-1)}, \quad c_0 \neq 0. \quad (7)$$

Главный член c_0 удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{sgn} \mu L_1^{(1)}(\lambda_0) + L_n(\lambda_0) c^{n-1} = 0,$$

зависящему от знака $\mu = \lambda - \lambda_0$. Значит,

$$c_0 = \left(-\operatorname{sgn}(\mu) \frac{L_1'(\lambda_0)}{L_n(\lambda_0)} \right)^{1/(n-1)}$$

тоже зависит от знака μ . Таким образом,

- (а) при четных n существует ровно одно вещественное решение уравнения разветвления (5), определенное в окрестности точки λ_0 ;

- (b) при нечетных n существует ровно два малых вещественных решения уравнения разветвления (5), определенных в полукрестности точки λ_0 , где

$$\operatorname{sgn}(\mu)L_n(\lambda_0)L_1^{(1)}(\lambda_0) < 0.$$

Ряд (4) устанавливает биекцию между малыми решениями задачи Коши (1) и решением уравнения разветвления (5). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned} L_1(\lambda_0) = 0, \quad L_1^{(1)}(\lambda_0) \neq 0, \quad L_n(\lambda_0) \neq 0, \\ p_1 = 1, \quad p_i \geq 1, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad p_n = 0. \end{aligned}$$

Тогда

- (a) при четном n число λ_0 будет точкой бифуркации задачи Коши (1), причем в окрестности λ_0 существует ровно одно малое вещественное нетривиальное решение с асимптотикой

$$x(t, \lambda) \sim \int_0^t a(\tau, \lambda_0) d\tau \left(-\operatorname{sgn}(\lambda - \lambda_0) \frac{L_1^{(1)}(\lambda - \lambda_0)}{L_n(\lambda_0)} \right)^{1/(n-1)} |\lambda - \lambda_0|^{1/(n-1)};$$

- (b) при нечетном n существует ровно два малых вещественных решения, определенных в полукрестности точки λ_0 , где $\operatorname{sgn} |L_n(\lambda_0)L_1^{(1)}(\lambda_0)| < 0$,

$$x_{1,2}(\tau, \lambda) \sim \pm \int_0^t a(\tau, \lambda_0) d\tau \left| \frac{L_1^{(1)}(\lambda_0)}{L_n(\lambda_0)} (\lambda - \lambda_0) \right|^{1/(n-1)}.$$

Случай 2: $p_1 \geq 2, p_i \geq 1, i = 2, \dots, n-1, p_n = 0$. В этом случае диаграмма Ньютона может иметь несколько граней (см. рис. 3). Для каждой грани легко сформулировать свои достаточные условия существования точек бифуркации задачи Коши (1) с указанием асимптотики решений.

Возьмем грань (a, b) диаграммы с концами в точках $(i_1, p_{i_1}), (i_2, p_{i_2})$. Выберем рациональное число

$$\frac{r}{s} = \frac{p_{i_1} - p_{i_2}}{i_2 - i_1}.$$

Число $r/s = \operatorname{tg} \psi$ (см. рис. 3) удовлетворяет равенству

$$i_1 \frac{r}{s} + p_{i_1} = i_2 \frac{r}{s} + p_{i_2} = \theta.$$

Здесь θ — ордината точки пересечения прямой, проходящей через грань (a, b) с осью ординат p , ψ — угол, образованный пересечением этой прямой с отрицательным направлением оси абсцисс i . Если точка (i, p) не лежит на указанной прямой, то выполнится неравенство

$$i \frac{r}{s} + p > \theta.$$

Положим в уравнении разветвления $\lambda = \lambda_0 + \mu$ и будем искать его решение в виде

$$x_\alpha = c(\mu)|\mu|^{r/s}, \quad c(0) \neq 0.$$

Тогда функция $c(\mu)$ должна определяться из уравнения

$$|\mu|^\theta \sum_{i(r/s)+p_i=\theta} (\operatorname{sgn} \mu)^{p_i} \frac{L_i^{(p_i)}(\lambda_0)}{p_i!} c(\mu)^i + r(c(\mu), \mu) = 0.$$

Отметим, что ввиду свойства ?? при любом $c(\mu)$ получим в пределе

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} |\mu|^{-\theta} r(c(\mu), \mu) = 0.$$

В силу этого предела $c(0)$ должно удовлетворять равенству

$$P_{\pm}(c) := \sum_{i(r/s)+p_i=\theta} \operatorname{sgn}(\mu)^{p_i} \frac{L_i^{(p_i)}(\lambda_0)}{p_i!} c^i = 0.$$

Если хотя бы одно из чисел p_i нечетное, то для определения $c(0)$ получим два разных полинома $P_{\pm}(c)$. Полиномы $P_{\pm}(c)$ отвечают соответственно положительным и отрицательным μ , т.е. разным полукрестностям точки бифуркации λ_0 . Таким образом, в общем случае для вычисления $c(0)$ получим два разных уравнения.

Пусть существует простой вещественный корень $c_{\star} \neq 0$ хотя бы у одного из полиномов $P_{\pm}(c)$. Тогда на основании теоремы о неявной функции уравнение разветвления имеет вещественное решение с асимптотикой

$$x_{\alpha} \sim c_{\star} |\mu|^{r/s},$$

определенное в соответствующей полукрестности точки λ_0 . В этом случае λ_0 — точка бифуркации уравнения (1), и справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть диаграмма Ньютона отвечает случаю 2 (см. рис. fig3) и $c_{\star}$ — ненулевой простой вещественный корень хотя бы одного из полиномов $P_{\pm}(c)$. Тогда λ_0 — точка бифуркации, и хотя бы в одной полукрестности точки λ_0 существует в пространстве $C[0, T]$ вещественное решение задачи Коши с асимптотикой

$$x(t, \lambda) \sim c_{\star} |\lambda - \lambda_0|^{r/s} \int_0^t a_1(\tau, \lambda) d\tau.$$

4. О бифуркации решений задачи Коши (8) с параметром, возмущенной линейными функционалами. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \lambda)}{dt} = \sum_{k=1}^n a_k(t, \lambda) x_{\alpha_k}(\lambda) + \sum_{i=l}^{\infty} A_i(t, \lambda) x^i(t, \lambda), \\ x(t, \lambda)|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $a_k(t, \lambda)$, $A_i(t, \lambda)$ — функции, непрерывные по t и достаточно гладкие по λ при $t \in [0, T]$, $\lambda \in I \subset \mathbb{R}^m$. Линейные функционалы определяются интегралами Стильтьеса:

$$x_{\alpha_k}(\lambda) = \int_{a_k}^{b_k} x(t, \lambda) d\alpha_k(t), \quad [a_k, b_k] \subset (0, T]. \quad (9)$$

Отметим, что в уравнении (8) количество линейных функционалов x_{α_k} , $k = 1, \dots, n$, нельзя уменьшить, если функции $a_1(t, \lambda), \dots, a_n(t, \lambda)$ не являются линейно зависимыми. Поэтому задача (1) является частным случаем задачи Коши (8).

Фиксируем в множестве I точку λ_0 . При

$$\|\lambda - \lambda_0\|_{\mathbb{R}^m} \leq \rho_1, \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_{\alpha_k}|^2} \leq \rho_2,$$

где положительные числа ρ_1 , ρ_2 достаточно малы, решение задачи Коши (8) представим однозначно в виде равномерно сходящегося ряда

$$x(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(t, \lambda, x_{\alpha_1}(\lambda), \dots, x_{\alpha_n}(\lambda)). \quad (10)$$

Непрерывные функции K_j суть j -степенные формы компонент вектора $\bar{x}_\alpha = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})^T$. В частности,

$$K_1(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = \sum_{k=1}^n \int_0^t a_k(t, \lambda) dt x_{\alpha_k}$$

— линейная форма компонент вектора $\bar{x}_\alpha$:

$$K_j(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = 0, \quad j = 2, \dots, l-1,$$

$$K_l(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = \int_0^t A_l(t, \lambda) \left(K_1(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \right)^l dt$$

— l -степенная форма компонент вектора $\bar{x}_\alpha$ и т. д.

Применяя к обеим частям ряда (10) последовательно линейные функционалы x_{α_i} , $i = 1, \dots, n$, получим систему из n уравнений разветвления:

$$\bar{L}_1(\lambda; \bar{x}_\alpha) + \sum_{n=l}^{\infty} \bar{L}_n(\lambda; \bar{x}_\alpha) = 0. \quad (11)$$

Здесь компоненты первого вектора

$$\bar{L}_1(\lambda; \bar{x}_\alpha) = \left[-\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_{\alpha_k}(\lambda) + \int_{a_i}^{b_i} \sum_{k=1}^n \int_0^t a_k(\tau, \lambda) d\tau dt x_{\alpha_k}(\lambda) \right]_{i,k=1}^n$$

суть линейные формы компонент вектора x_α из $\mathbb{R}^n$. В системе (11) компоненты векторов $\bar{L}_n(\lambda; \bar{x}_\alpha)$ — n -степенные формы $\bar{x}_\alpha$ тоже зависят от λ .

Введем матрицу

$$B(\lambda) = \left[-\delta_{ik} + \int_{a_i}^{b_i} \int_0^t a_k(\tau, \lambda) d\tau dt \right]_{i,k=1}^n$$

На основании теоремы о неявных функциях точка бифуркации λ_0 должна удовлетворять условию $\det B(\lambda_0) = 0$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы точка λ_0 могла быть точкой бифуркации задачи Коши (8), необходимо выполнение равенства $\det B(\lambda_0) = 0$.

При получении достаточных условий бифуркации решений задачи Коши (8) в точке λ_0 сначала рассмотрим случай скалярного параметра λ .

Теорема 4. Пусть в системе (11) выполнены условия $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\det B(\lambda_0 + \mu) \sim c\mu^p$ при $\mu \rightarrow 0$, $c \neq 0$. Если при этом p нечетно, то λ — точка бифуркации задачи Коши (8).

Доказательство. Рассмотрим векторное поле

$$\bar{\Phi}_\mu(\bar{x}_\alpha) = \left\{ \bar{L}_1(\lambda_0 + \mu, \bar{x}_\alpha) + \sum_{i=l}^{\infty} \bar{L}_i(\lambda_0 + \mu, \bar{x}_\alpha) \right\},$$

соответствующее системе (11) на сфере

$$S = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_{\alpha_i}^2 = \rho \right\}.$$

Вместо сферы S можем брать произвольную достаточно гладкую замкнутую поверхность в $\mathbb{R}^n$, содержащую нуль.

Далее, ρ и μ положительные и достаточно малы: $0 < \rho < \varepsilon$, $|\mu| < \delta$. Положим $\mu = (2t - 1)\delta_1$, где $\delta_1 \in (0, \delta)$, $t \in [0, 1]$. Введем непрерывное отображение

$$\Phi : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(\bar{x}_\alpha, t) = \bar{L}_1(\lambda_0 + (2t - 1)\delta_1, \bar{x}_\alpha) + \sum_{i=2}^{\infty} \bar{L}_i(\lambda_0 + (2t - 1)\delta_1, \bar{x}_\alpha).$$

Предположим, что $\Phi(\bar{x}_\alpha, t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$, $\bar{x}_\alpha \in S$. Таким образом, мы допустили, что λ_0 не является точкой бифуркации. Тогда определено вращение $\mathfrak{I}(\Phi(\bar{x}_\alpha, t), S)$. При этом по определению $\Phi(\bar{x}_\alpha, t)$ непрерывно, а вращение — целое число. Следовательно,

$$\mathfrak{I}(\Phi(\bar{x}_\alpha, 0), S) = \mathfrak{I}(\Phi(\bar{x}_\alpha, 1), S).$$

Но тогда $\operatorname{sgn}(-1)^p = \operatorname{sgn}(+1)^p$, где p — нечетное. Следовательно, сделанное выше предположение не верно, и найдутся вектор $\bar{x}_\alpha^*$ в S и точка t^* в интервале $[0, 1]$, удовлетворяющие системе $\Phi(\bar{x}_\alpha, t) = 0$. Теорема 4 доказана. $\square$

Если $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ в задаче Коши (8), то справедливо следующее усиление теоремы 4.

Теорема 5. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n$ в системе (11) и пусть векторы $\bar{\lambda}_0, \bar{a}$ в $\mathbb{R}^n$ выбраны так, что

$$\det B(\bar{\lambda}_0 + \bar{a}\mu) \sim c\mu^p \quad \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad c \neq 0.$$

Если p нечетно, то $\bar{\lambda}_0$ — точка бифуркации задачи Коши (8).

Доказательство очевидное и повторяет этапы доказательства теоремы 4.

5. Заключение. Теоремы 4, 5 являются топологическими теоремами существования. Они не дают алгоритмов построения нетривиальных решений. Нетривиальных вещественных решений в окрестности точки бифуркации задачи (8) может быть несколько. Более того, могут существовать ветви, зависящие от свободных параметров. В случае одного уравнения разветвления это показано в теоремах 1, 2. Используя многогранник Ньютона и приемы степенной геометрии (см. [1]), можно строить асимптотики решений при $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Униформизация ветвей решений системы (11) может быть явной и неявной (см. [5]), когда за параметр униформизации выбирается один из линейных функционалов x_{α_i} , $i = 1, \dots, n$. Система разветвлений (11) с векторным параметром λ может иметь кривые и поверхности бифуркации. Тогда задача построения приближенных методов и анализ существенно усложняется (см. монографию [9]) и требуют отдельного рассмотрения. Обзор результатов в теории бифуркации операторов Фредгольма приведен в статье [8], при этом особое внимание уделяется взаимосвязи теории бифуркации, алгебраической геометрии и теории Галуа. Подробно вопросы теории ветвления и бифуркаций, теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, теории устойчивости и теории некорректных задач рассмотрены в монографии [4]. Приведен обзор результатов теории ветвления с помощью геометрических методов (показатель Кронекера—Пуанкаре, степенная геометрия, диаграммы Ньютона), алгебраических методов (цепочки Жордана), вариационных методов (условные точки экстремума для непрерывных функций и показатель Морса—Конли), а также теоретико-групповых свойств и проективно-итерационных методов и теории сплетаемых уравнений разветвления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — Наука, 1998.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
3. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 2003.
5. Сидоров Н. А. Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами // Мат. сб. — 1995. — 185. — С. 129–141.
6. Сидоров Н. А., Дрегла Сидоров Л. Р. Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2023. — 43. — С. 78–90.

7. Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л. Р. Д. Задача Коши с параметром, возмущенная линейным функционалом// Мат. 6 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2024) (16–20 сентября 2024 г., Иркутск,). — Иркутск, 2024. — С. 26–28.
8. Gomez J. L., Sampedro J. C. Bifurcation theory for Fredholm operators// J. Differ. Equations. — 2024. — 404. — P. 182–250.
9. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Springer, 2002.
10. Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A. Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models. — Singapore: World Scientific Series, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00161).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Дрегля Сидоров Лев Раян Денисович (Dreglea Sidorov Lev Ryan Denisovich)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: lev-raian.dreglia-sidorov@math.msu.ru

Сидоров Николай Александрович (Sidorov Nikolai Aleksandrovich)
Иркутский государственный университет, Иркутск
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia
E-mail: sidorovisu@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 18–33
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-18-33

УДК 517.929

ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ В ОДНОЙ ИЗ ВЕРСИЙ МОДЕЛИ МУЛЬТИПЛИКАТОР-АКСЕЛЕРАТОР

© 2024 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ

Аннотация. Рассматривается известная математическая модель макроэкономики «мультипликатор-акселератор» в нелинейной постановке и с учетом пространственных факторов. Изучаются два варианта соответствующей краевой задачи. В первом из них, когда пространственная диссипация существенна уже в линейной постановке, краевая задача имеет предельные циклы, которые возникают результате бифуркаций Андронова–Хопфа. Второй вариант краевой задачи возникает, когда диссипацией в линейной постановке пренебрегают. В таком слабодиссипативном варианте у краевой задачи существует счетный набор циклов и торов конечной размерности. Все такие инвариантные многообразия неустойчивы. Анализ задачи основан на методах теории бесконечномерных динамических систем.

Ключевые слова: мультипликатор-акселератор, нелинейная краевая задача, инвариантное многообразие, бифуркация, устойчивость, нормальная форма.

LOCAL BIFURCATIONS IN ONE VERSION OF THE MULTIPLIER-ACCELERATOR MODEL

© 2024 А. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV

ABSTRACT. The well-known mathematical model of macroeconomics “multiplier-accelerator” is considered in a nonlinear version with spatial factors. We study two versions of the corresponding boundary-value problem. In the first version, where the spatial dissipation is significant in the linear statement, the boundary-value problem has limit cycles that arise as a result of Andronov–Hopf bifurcations. The second version of the boundary-value problem arises when dissipation in the linear formulation is neglected. In this weakly dissipative version, the boundary-value problem has a countable set of finite-dimensional cycles and tori. All such invariant manifolds are unstable. The analysis of the problem is based on methods of the theory of infinite-dimensional dynamic systems.

Keywords and phrases: multiplier-accelerator, nonlinear boundary value problem, invariant manifold, bifurcation, stability, normal form.

AMS Subject Classification: 35L10, 35L30, 37N40

1. Введение. Можно назвать достаточно много математических моделей, используемых в макроэкономике: спрос-предложение, модель Солоу, модель Кейнса и т. д. Модель «мультипликатор-акселератор» (см., например, [19, 20]) является одной из популярных по причине ее простоты и возможности объяснить в ее рамках цикличность рыночной экономики, опираясь на теорию динамических систем.

Приведем эту математическую модель в одном из возможных вариантов:

$$Y_{\tau} = I - aY, \quad I_{\tau} = bY_{\tau} - cI + F(Y). \quad (1)$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Здесь $Y = Y(\tau)$ — национальный доход или его отклонение от некой средней величины, $I = I(\tau)$ — индуцированные инвестиции, τ — время, а коэффициенты a , b , c — положительные постоянные, характеризующие скорость (интенсивность) процессов экономической динамики. В системе (1) через $F(Y)$ обозначен нелинейный член, который будет выбран позднее. Отметим, что вариант такого выбора не единствен (см. [19, 20]).

Для изучения системы дифференциальных уравнений (1), как правило, характерно ее преобразование к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $Y(\tau)$ (или пропорциональной ей функции). Для этого следует исключить $I(\tau)$. Дифференцируя первое уравнение системы (1) по τ , получим равенство

$$Y_{\tau\tau} = I_{\tau} - aY_{\tau}.$$

На втором шаге, используя второе уравнение системы (1) и исключая I_{τ} , получим

$$Y_{\tau\tau} = bY_{\tau} - cI + F(Y) - aY_{\tau}.$$

Осталось исключить I с помощью первого уравнения системы дифференциальных уравнений (1). В результате получаем следующее дифференциальное уравнение

$$Y_{\tau\tau} + (a + c - b)Y_{\tau} + acY = F(Y). \quad (2)$$

В [19] предложено выбирать в качестве $F(Y)$ нелинейную функцию $-g(Y_{\tau})^3$. В результате преобразований получаем уравнение (2), которое известно под названием «уравнение Релея». Продолжим его преобразования следующим образом: уравнение (2) продифференцируем по τ , введем обозначения $b - c - a = 2\alpha$, $ac = \omega^2$, считая при этом $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и, наконец, положим $Y_{\tau} = (\alpha^{1/2}/g^{1/2})v$. В результате получим уравнение

$$v_{\tau\tau} - 2\alpha v_{\tau} + \omega^2 v = -\alpha(v^3)_{\tau}. \quad (3)$$

Если при этом считать, что $\alpha \ll 1$ (α — малый положительный параметр), то, используя методику монографии [10], можно показать, что дифференциальное уравнение (3) и, следовательно, система дифференциальных уравнений (1) имеет притягивающий предельный цикл. При этом для решений уравнения (3), порождающих такой предельный цикл, справедлива асимптотическая формула

$$v(\tau) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\omega\tau + \varphi) + O(\alpha),$$

где φ — произвольная действительная постоянная.

В [19] было отмечено, что экономические модели традиционно не учитывают пространственные факторы. Это допустимо, но учет пространственной распределенности экономических показателей возможен. Зависимость основных показателей экономики от пространственных переменных может привести к более точному учету специфики экономических процессов. В [19] были предложены некоторые варианты, которые возможны при составлении математических моделей. Опираясь на эту идею монографии [19], в данной работе рассмотрим следующий распределенный вариант математической модели мультипликатор-акселератор:

$$Y_{\tau} = I - aY + d_1 Y_{yy}, \quad I_{\tau} = bY_{\tau} - cI - gY_{\tau} \int_0^l Y_{\tau}^2 dy + d_2 Y_{yy}. \quad (4)$$

Здесь $Y = Y(\tau, y)$, $I = I(\tau, y)$, т.е. национальный доход и инвестиции зависят не только от τ (эволюционной переменной), но и от пространственной переменной $y \in [0, l]$, $l > 0$.

В системе интегро-дифференциальных уравнений с частными производными (4) d_1 , d_2 — неотрицательные постоянные. Далее будем считать, что $d_2 > 0$, а $d_1 \geq 0$. Вариант с $d_1 = 0$ в [19] рассматривается как основной.

Как и в случае «точечной» модели (1) аналогичными преобразованиями систему дифференциальных уравнений (4) можно и целесообразно свести к одному дифференциальному уравнению для $Y(\tau)$:

$$Y_{\tau\tau} - \alpha Y_{\tau} - d_1 Y_{\tau yy} + \omega^2 Y - d_3 Y_{yy} = -gY_{\tau} \int_0^l Y_{\tau}^2 dy,$$

где $\alpha = (b - a - c)/2$, $\omega^2 = ac$, $d_3 = d_2 + cd_1$. Если теперь положить

$$y = \frac{xl}{\pi}, \quad \tau = \gamma_1 t, \quad Y = \gamma_0 w, \quad \gamma_1 = \frac{l}{\pi} \left(\frac{1}{d_3} \right)^{1/2}, \quad \gamma_0 = l \left(\frac{1}{d_3} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{g} \right)^{1/2},$$

то последнее уравнение в нормированном виде приобретает следующий вид:

$$w_{tt} - 2\beta w_t - 2\delta^2 w_{txx} + \sigma^2 w - w_{xx} = -w_t \int_0^\pi w_t^2 dx,$$

где теперь

$$\beta = \gamma_1 \alpha, \quad \sigma^2 = \omega^2 l \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{1}{d_3}, \quad \delta^2 = \frac{d_1 \pi}{2l\sqrt{d_3}}.$$

Последний шаг в преобразовании последнего уравнения состоит в том, что его продифференцируем по t и положим $w_t = u$. В результате получим следующее уравнение:

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = - \left(u \int_0^\pi u^2 dx \right)_t. \quad (5)$$

Интегро-дифференциальное уравнение с частными производными (5) следует дополнить краевыми условиями. В качестве таких условий рассмотрим однородные краевые условия Неймана (условия «непроницаемости», если следовать терминологии, используемой в физике и химии). Итак, далее будем считать, что

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (6)$$

Возможна и экономическая интерпретация краевых условий (6). Национальный доход Y_t (в нормированном виде $w_t = u$) на границе экономического региона не изменяется, т.е. отток и приток капитала на границе остается без изменений и регламентируется не экономическими процессами, протекающими в экономическом субъекте, а административно. Во всяком случае краевые условия (6) достаточно часто используются при анализе распределенных математических моделей макроэкономики (см. [19, 20], а также цитированные в них работы).

Для приложений к макроэкономике при анализе краевой задачи (5), (6) особый интерес представляют следующие вопросы:

- (i) существование и свойства периодических или почти периодических по эволюционной переменной (т.е. по t) решений изучаемой краевой задачи;
- (ii) анализ устойчивости решений краевой задачи (5), (6) в смысле определений качественной теории дифференциальных уравнений и в том числе уравнений с частными производными (или функционально-дифференциальных уравнений);
- (iii) получение точных или асимптотических формул для интересующих нас решений.

Подчеркнем, что наличие экономических циклов характерно для рыночной экономики на всех этапах ее функционирования. Этот феномен рыночной (капиталистической) экономики отмечали в XIX в. известные экономисты А. Смит, Д. Рикардо, К. Маркс. В XX в. этому явлению было уделено еще большее внимание.

В заключение этого раздела напомним, что модель мультипликатор-акселератор в преобразованном виде похожа на другую модель макроэкономики — модель Гудвина (см., например, [9]).

2. Общие свойства краевой задачи и ее линеаризованного варианта. Сначала рассмотрим линеаризованный вариант краевой задачи (5), (6), т.е. задачу

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad (7)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (8)$$

Дополним краевую задачу (7), (8) начальными условиями

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x). \quad (9)$$

При анализе краевых задач (5), (6) и (7), (8) следует различать два варианта при выборе δ :

- 1) $\delta \neq 0$; 2) $\delta = 0$.

Пусть краевая задача (7), (8) и начально-краевая задача (7), (8), (9) рассматривается при $\delta \neq 0$ ($\delta^2 > 0$). Нетрудно показать, что линейная начально-краевая задача может быть проинтегрирована в явном виде на основе использования метода Фурье, а ее решения записано в следующем виде:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n \exp(\lambda_{n,1}t) + d_n \exp(\lambda_{n,2}t) \right) h_n(x), \quad (10)$$

где $h_0 = h_0(x) = 1/\sqrt{\pi}$, $h_k(x) = \sqrt{2/\pi} \cos kx$, $k = 1, 2, \dots$. Подчеркнем, что семейство функций $\{h_n(x)\}$ на $[0, \pi]$ образует полную ортонормированную систему функций. В частности, $(h_n(x), h_m(x)) = \delta_{n,m}$ — символ Кронекера, где

$$(f, g) = \int_0^{\pi} f(x) g(x) dx$$

— скалярное произведение в пространстве $\mathbb{L}_2(0, \pi)$.

Пусть

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) h_n(x) dx, \quad b_n = \int_0^{\pi} g(x) h_n(x) dx.$$

Тогда c_n, d_n могут быть найдены как решения следующей системы из двух уравнений:

$$c_n + d_n = a_n, \quad \lambda_{n,1}c_n + \lambda_{n,2}d_n = b_n. \quad (11)$$

При этом, очевидно, что $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}$ являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2p_n\lambda + q_n = 0, \quad (12)$$

где $p_n = \delta^2 n^2 - \beta$, $q_n = \sigma^2 + n^2$. При этом $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2} = -p_n \mp \sqrt{p_n^2 - q_n}$ и, как нетрудно убедиться, если $n \geq n_0$ (достаточно велико), то эти корни действительны и при этом

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1} &= n^2 \mu_{n,1}, \quad \mu_{n,1} = -\delta^2 + \frac{\beta}{n^2} - \sqrt{\left(\delta^2 - \frac{\beta}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{n^2}\right)}, \\ \lambda_{n,2} &= \mu_{n,2}, \quad \mu_{n,2} = -\frac{1 + \frac{\sigma^2}{n^2}}{\delta^2 - \frac{\beta}{n^2} + \sqrt{\left(\delta^2 - \frac{\beta}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{n^2}\right)}}. \end{aligned}$$

Из последних формул вытекает, в частности, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,1} = -2\delta^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,2} = -\frac{1}{2\delta^2},$$

а также

$$\left| \frac{\lambda_{n,1}}{n^2} \right| \leq K_1, \quad |\lambda_{n,2}| \leq K_2,$$

где K_1, K_2 — некоторые положительные постоянные.

Нетрудно найти c_n, d_n как решения системы алгебраических уравнений (11):

$$c_n = \frac{a_n \lambda_{n,2} - b_n}{\lambda_{n,2} - \lambda_{n,1}}, \quad d_n = \frac{b_n - \lambda_{n,1} a_n}{\lambda_{n,2} - \lambda_{n,1}}.$$

Далее, получаем неравенства

$$|c_n| \leq \frac{K_3}{n^2} (|a_n| + |b_n|), \quad |d_n| \leq K_4 \left(|a_n| + \frac{|b_n|}{n^2} \right),$$

где K_3 и K_4 — некоторые положительные постоянные. При выводе последних двух неравенств используется явный вид корней квадратного уравнения (12).

Лемма 1. Пусть $\delta \neq 0$, $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$, $g(x) \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$. Тогда при $x \in [0, \pi]$ и $t \in (0, T)$ (T — положительная постоянная) решение краевой задачи (7), (8) обладает следующими свойствами:

- (i) при любом $t_0 \in (0, T)$ решение $u(t_0, x)$ как функция переменного x принадлежит $\mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$;
- (ii) при всех $t = t_0 \in (0, T)$ справедливо включение $u_{txx} \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$;
- (iii) производные по t любого порядка функции $u(t, x)$ при $t \in (0, T)$ непрерывны по совокупности переменных, если $x \in [0, \pi]$, а t принадлежит указанному ранее диапазону.

Доказательство леммы 1 достаточно стандартно и сводится к анализу функционального ряда (10). При этом анализе следует учесть, что из условий леммы вытекает справедливость следующих утверждений: сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

при достаточно больших n справедливо включение $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2} \in \mathbb{R}$ и, наконец, имеют место предельные равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,1} = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,2} = -\frac{1}{2\delta^2}.$$

Аналогичные построения можно найти во многих монографиях (см., например, [11]). $\square$

Свойства линейной краевой задачи (7), (8), а также результаты работ [12, 14] позволяют утверждать, что нелинейная начально-краевая задача (5), (6) локально корректно разрешима, если $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$ и $g(x) \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$.

Замечание 1. Напомним, что $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$, если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: $f(x), f'(x), f''(x) \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$. В силу теорем вложения $f(x), f'(x)$ непрерывны, а также $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

Далее будет использовано обозначение $\mathbb{W}_{2,0}^1[0, \pi]$. При этом $g(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^1[0, \pi]$, если $g(x) \in \mathbb{W}_2^1[0, \pi]$ и, кроме того, $g(x)$ получаем как предел достаточно гладких функций, удовлетворяющих равенствам $g'(0) = g'(\pi) = 0$, по норме пространства Соболева $\mathbb{W}_2^1[0, \pi]$.

Рассмотрим второй вариант выбора δ ($\delta = 0$). В этом случае уравнение (7) будет уравнением второго порядка, но гиперболического типа. Более того, оно по свойствам близко уже к уравнению колебания струны и поэтому для уравнения (7), начально-краевой задачи (7), (8), (9) справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$, а $g(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^1[0, \pi]$. Тогда начально-краевая задача имеет решение, которое может быть найдено методом Фурье. Отметим, что в нашем случае его можно записать в виде суммы (10), в которой

$$\lambda_{n,1} = \beta - \sqrt{\beta^2 - \sigma_n^2}, \quad \lambda_{n,2} = \beta + \sqrt{\beta^2 - \sigma_n^2}, \quad \sigma_n^2 = \sigma^2 + n^2.$$

Из результатов работы [14] в случае выбора $f(x), g(x)$ с указанными ранее свойствами вытекает утверждение о корректной разрешимости начально-краевой задачи (7), (8), (9) и при $\delta = 0$.

Приступим к вопросу об устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной краевой задачи (5), (6). Из предшествующих построений, и, в частности, полноты системы $\{h_n(x)\}$ вытекает, что неравенство $\operatorname{Re} \lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$, где $\gamma_0 = \operatorname{const} > 0$, является достаточным условием асимптотической устойчивости состояния равновесия изучаемой краевой задачи (5), (6) как при $\delta \neq 0$, так и при $\delta = 0$. Соответствующее неравенство для $\operatorname{Re} \lambda_k$ будет выполнено, если $\beta < 0$. При $\beta > 0$ нулевое решение краевой задачи (5), (6) неустойчиво. Наконец, при $\beta = 0$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия.

Так, при $\beta = 0$, $\delta \neq 0$ спектр устойчивости (совокупность корней характеристического уравнения (12)) содержит пару простых собственных значений $\pm i\sigma$, и этим собственным значениям отвечает собственный элемент $h_0 = h_0(x) = 1/\sqrt{\pi}$, в то время как остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Несколько иная ситуация реализуется при $\delta = 0$. Если же и $\beta = 0$, то спектр устойчивости лежит целиком на мнимой оси: $\lambda_{n,1;n,2} = \pm i\sigma_n$, $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n^2}$. В таком случае реализуется

критический случай бесконечной размерности. За это отвечает лишь один параметр β . Если же $\beta > 0$, то все корни характеристического уравнения (12) расположены в правой полуплоскости комплексной плоскости. Подчеркнем еще раз, что варианты, когда $\delta \neq 0$ и $\delta = 0$ различны во многих аспектах. В частности, они приводят к различным бифуркационным задачам.

3. Первая бифуркационная задача. В этом разделе рассмотрим вариант, когда $\delta \neq 0$. Пусть $\beta = \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда

$$\lambda_{1,2}(0, \varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon), \quad \text{где } \tau(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \sigma(\varepsilon) = \sqrt{\sigma^2 - \varepsilon^2},$$

т.е.

$$\tau(0) = 0, \quad \tau'_0 = \left. \frac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} > 0, \quad \sigma(0) = \sigma.$$

При этом остальные собственные значения операторного пучка (корни характеристического уравнения (12)) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(k, \varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, выполнены условия первой части теоремы Андронова—Хопфа (см. [1, 18]). Вторая часть этой теоремы предполагает учет при анализе краевой задачи (5), (6) влияния нелинейных слагаемых.

Из результатов работ [5, 15, 16] вытекает, что у краевой задачи (5), (6) при $\beta = \varepsilon$ существует двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$. При этом оно будет локальным аттрактором для решений краевой задачи (5), (6) из достаточно малой окрестности нулевого решения (окрестность в данном случае — это шар некоторого достаточно малого радиуса с центром в нуле фазового пространства решений исследуемой краевой задачи). Решения краевой задачи (5), (6), принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, могут быть найдены после анализа нормальной формы (см. [1, 2]). В комплексной форме записи она имеет следующий вид

$$z' = \varphi(z, \bar{z}, \varepsilon).$$

Здесь $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — «медленное» время. В общем случае вместо последнего дифференциального уравнения можно рассматривать его «укороченный» вариант:

$$z' = \psi(z, \bar{z}), \quad \psi(z, \bar{z}) = \varphi(z, \bar{z}, 0). \quad (13)$$

В свою очередь, решения краевой задачи (5), (6) при $\beta = \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\delta \neq 0$, принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, будем искать в виде суммы

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(t, x, z, \bar{z}) + \varepsilon u_2(t, x, z, \bar{z}) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2), \quad (14)$$

где

$$u_1(t, x, z, \bar{z}) = u_1(t, z, \bar{z}) = z \exp(i\sigma t) h_0 + \bar{z} \exp(-i\sigma t) h_0,$$

а $u_2 = u_2(t, x, z, \bar{z})$, $u_3 = u_3(t, x, z, \bar{z})$ — функции, принадлежащие классу W , содержащих такие функции $w(t, x, z, \bar{z})$, которые достаточно гладко зависят от t , x , z , $\bar{z}$, имеют по переменной t период $2\pi/\sigma$ и, наконец,

$$M_{\pm}(w) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \int_0^\pi w(t, x, z, \bar{z}) \exp(\mp i\sigma t) h_0(x) dx dt = 0.$$

Функции u_2 , u_3 находим после подстановки суммы (14) в краевую задачу (5), (6) ($\beta = \varepsilon \ll 1$) и выделения слагаемых при степенях ε , $\varepsilon^{3/2}$ (и, в принципе, далее при ε^2 , $\varepsilon^{5/2}$, ...). В результате получаем две следующие краевые задачи:

$$u_{2tt} - 2\delta^2 u_{2txx} + \sigma^2 u_2 - u_{2xx} = 0, \quad (15)$$

$$u_{2x}|_{x=0} = u_{2x}|_{x=\pi} = 0, \quad (16)$$

а также

$$u_{3tt} - 2\delta^2 u_{3txx} + \sigma^2 u_3 - u_{3xx} = \Phi_3, \quad (17)$$

$$u_{3x}|_{x=0} = u_{3x}|_{x=\pi} = 0, \quad (18)$$

где

$$\Phi_3 = -2i\sigma(z' \exp(i\sigma t) - z' \exp(-i\sigma t))h_0(x) + 2i\sigma(z \exp(i\sigma t) - \bar{z} \exp(i\sigma t))h_0(x) - \left[u_1(t, x, z, \bar{z}) \int_0^\pi u_1^2(t, x, z, \bar{z}) dx \right]_t.$$

Если при анализе краевой задачи (15), (16) учесть, что мы ищем функцию $u_2 \in W$, то, очевидно, $u_2 = 0$.

Из условий разрешимости в классе $(2\pi/\sigma)$ -периодических по t функций линейной неоднородной краевой задачи (17), (18) вытекает, что в нашем случае нормальная форма (13) приобретает следующий вид:

$$z' = z - \frac{3}{2}z^2\bar{z}. \quad (19)$$

Наконец, соответствующее решение линейной краевой задачи (17), (18) имеет следующий вид:

$$u_3(t, x, z, \bar{z}) = u_3(t, z, \bar{z}) = \left(\eta_3 z^3 \exp(3i\sigma t) + \bar{\eta}_3 \bar{z}^3 \exp(-3i\sigma t) \right) h_0(x),$$

где $\eta_3 = 3\sqrt{\pi}i/(8\sigma)$.

Замечание 2. Напомним известное условие, с помощью которого получена нормальная форма, называемое «условием разрешимости». У неоднородной краевой задачи

$$w_{tt} - \delta^2 w_{txx} + \sigma^2 w - w_{xxx} = G(t, x), \\ w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = 0,$$

в которой функция $G(t, x)$ по переменной t имеет период $2\pi/\sigma$, существует решение в классе $(2\pi/\sigma)$ -периодических по t функций, если

$$\frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \int_0^\pi G(t, x) \exp(\pm i\sigma t) h_0(x) dx dt = 0.$$

Несложно проверить, что нормальная форма (19) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия

$$S(\varphi) : z(s) = \rho_* \exp(i\varphi), \quad \rho_* = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Из результатов работ [5, 18] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Существует такая положительная постоянная ε_0 , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\beta = \varepsilon$ нелинейная краевая задача (5), (6) имеет притягивающий предельный цикл $C_0(\varepsilon)$, порожденный семейством периодических решений*

$$u(t, x, \varepsilon, \varphi) = \varepsilon^{1/2} \rho_* \left(\exp(i\sigma t + i\varphi) + \exp(-i\sigma t - i\varphi) \right) h_0(x) + \\ + \varepsilon^{3/2} \frac{3i\sqrt{\pi}}{8\sigma} \rho_*^3 \left(\exp(3i\sigma t + 3i\varphi) + \exp(-3i\sigma t - 3i\varphi) \right) h_0(x) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Замечание 3. Подчеркнем, что цикл, полученный в рамках теоремы 1, не зависит от x , т.е. получили пространственно однородное решение. Действительно, рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} - 2\varepsilon \dot{y} + \sigma^2 y = -\pi(y^3)_t,$$

которое можно рассматривать как одну из версий уравнения Ван дер Поля (см. также уравнение (3)). Последнее уравнение имеет единственный предельный цикл в малой окрестности нулевого состояния равновесия. Стандартные построения показывают, что этот цикл порожден решениями вида

$$y(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\exp(i\sigma t + i\varphi_0) + \exp(-i\sigma t - i\varphi_0) \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Естественно, что такие решения вспомогательного уравнения удовлетворяют и краевой задаче (5), (6) при согласованном выборе параметров. Вместе с тем для краевой задачи (5), (6) бифурцирующий цикл единствен.

Рассмотрим также вспомогательную краевую задачу

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = - \left(u \int_0^\pi u^2 dx \right)_t, \quad (20)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad M_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u dx = 0. \quad (21)$$

Очевидно, что любое ее решение удовлетворяет краевой задаче (5), (6). Тем не менее краевая задача (20), (21) представляет самостоятельный интерес для анализа локальных бифуркаций.

Ясно, что у краевой задачи (20), (21) имеется состояние равновесия $u = 0$. Для анализа его устойчивости в линейном приближении необходимо рассмотреть линеаризованный вариант краевой задачи (20), (21):

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad (22)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad M_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u dx = 0. \quad (23)$$

Анализ устойчивости решений краевой задачи (22), (23) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2p_n \lambda + q_n = 0,$$

где теперь $n = 1, 2, 3$. Поэтому в отличие от краевой задачи (5), (6) у задачи (20), (21) случай, близкий к критическому, возникает при $\beta = \delta^2(1 + \varepsilon)$. При таком выборе β последнее характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_1(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon), \quad \bar{\lambda}_1(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) - i\sigma(\varepsilon),$$

отвечающие собственному элементу $h_1(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x$. Здесь

$$\tau(\varepsilon) = \delta^2 \varepsilon \quad (\tau(0) = 0), \quad \sigma(\varepsilon) = \sqrt{\sigma^2 + 1 - (\varepsilon \delta^2)^2}, \quad \sigma_1 = \sigma(0) = \sqrt{\sigma^2 + 1} \neq 0.$$

При рассмотрении вспомогательной краевой задачи (20), (21) также возникает задача о локальных бифуркациях в окрестности нулевого состояния равновесия. Повторив построения аналогичные тем, которые были использованы при анализе краевой задачи (5), (6) (см. теорему 1) получаем аналогичное утверждение.

Теорема 2. *Существует такая положительная постоянная ε_1 , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и $\beta = \delta^2(1 + \varepsilon)$ краевая задача (20), (21) имеет предельный цикл $C_1(\varepsilon)$, сформированный однопараметрическим семейством t периодических решений*

$$u(t, x, \varepsilon, \varphi_1) = \varepsilon^{1/2} \delta \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\exp(i\sigma_1 t + i\varphi_1) + \exp(-i\sigma_1 t - i\varphi_1) \right] h_1(x) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varphi_1 \in \mathbb{R}.$$

Цикл $C_1(\varepsilon)$ является локальным аттрактором вспомогательной краевой задачи (20), (21) и $h_1(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x$.

Вместе с тем этот цикл будет предельным циклом и краевой задачи (5), (6), так как решения $u(t, x, \varepsilon, \varphi_1)$, очевидно, удовлетворяют не только краевой задаче (20), (21), но и задаче (5), (6). Но как цикл краевой задачи (5), (6) он неустойчив (седловой).

Действительно, при $\beta = \delta^2(1 + \varepsilon)$ характеристическое уравнение (12) имеет корни в правой полуплоскости комплексной плоскости, так как при $n = 0$ справедливо неравенство

$$p_0(\varepsilon) = -2\delta^2(1 + \varepsilon) < 0.$$

Тем самым спектр устойчивости у краевой задачи (5), (6) для нулевого решения содержит корни в правой полуплоскости. При этом у цикла $C_1(\varepsilon)$ как цикла краевой задачи (5), (6) по крайней

мере один мультипликатор будет по модулю больше 1. Последнее проверяется методом теории возмущений, если учесть, что $\varepsilon \rightarrow 0$, а цикл зависит от ε . Аналогичное утверждение имеет место, если

$$\beta = \delta^2 m^2 (1 + \varepsilon), \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

При таком выборе β справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Существует такая положительная постоянная ε_m , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ и соответствующем выборе β краевая задача (5), (6) имеет предельный цикл $C_m(\varepsilon)$, порожденный параметрическим семейством решений*

$$u(t, x, \varphi_m) = \varepsilon^{1/2} \delta m \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\exp(i\sigma_m t + i\varphi_m) + \exp(-i\sigma_m t - i\varphi_m) \right) h_m(x) + o(\varepsilon^{1/2}), \quad \varphi_m \in \mathbb{R}.$$

где $\sigma_m = \sqrt{\sigma^2 + m^2}$. Этот цикл краевой задачи (5), (6) неустойчив.

Доказательство теоремы 3 основано на анализе вспомогательной краевой задачи следующего вида:

$$u_{tt} - 2\delta^2 m^2 (1 + \varepsilon) u_t - \delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = -m \left(u \int_0^{\pi/m} u^2 dx \right)_t, \quad (24)$$

$$u_x(t, 0) = u_x\left(t, \frac{\pi}{m}\right) = 0, \quad \int_0^{\pi/m} u(t, x) dx = 0. \quad (25)$$

Для краевой задачи (24), (25) можно с небольшими изменениями повторить построения, обосновывающие теоремы 1 и 2. При этом решения краевой задачи (24), (25) удовлетворяют и задаче (5), (6) в случае, если в ней $\beta = \delta^2 m^2 (1 + \varepsilon)$. Отметим особо, что линейная краевая задача

$$u_{tt} - 2m^2 \delta^2 (1 + \varepsilon) u_t - \delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad (26)$$

$$u_x(t, 0) = u_x\left(t, \frac{\pi}{m}\right) = 0, \quad \int_0^{\pi/m} u(t, x) dx = 0 \quad (27)$$

аналогична краевой задаче (22), (23). При $\varepsilon = 0$ краевая задача (26), (27) имеет периодическое решение

$$u_m(t, x) = \exp(i\sigma_m t) h_m(x),$$

где $h_m(x) = \sqrt{2/\pi} \cos mx$, $\sigma_m = \sqrt{m^2 + \sigma^2}$. Как и в теореме 1 бифуркационный анализ краевой задачи (24), (25) может быть сведен к изучению нормальной формы. В данном случае сумма (14) имеет следующий вид:

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_m(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

4. Вторая бифуркационная задача. В данном разделе рассмотрим краевую задачу (5), (6) при $\delta = 0$, $\beta = \varepsilon$, считая как и ранее, что $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Итак, анализу подлежит следующая краевая задача:

$$u_{tt} - 2\varepsilon u_t + \sigma^2 u - u_{xx} = \left(-u \int_0^{\pi} u^2 dx \right)_t, \quad (28)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (29)$$

Линеаризованный вариант краевой задачи (28), (29) при $\varepsilon = 0$

$$u_{tt} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \quad (30)$$

имеет счетный набор t -периодических решений $\exp(i\sigma_n t) h_n(x)$, где $n = 0, 1, 2$. Напомним, что $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n^2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а $h_m(x) = \sqrt{2/\pi} \cos mx$, $m = 1, 2, \dots$, $h_0(x) = h_0 = 1/\sqrt{\pi}$.

Решения нелинейной краевой задачи (28), (29) можно и удобно искать в следующем виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(t, x, y, \bar{y}) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, y, \bar{y}) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (31)$$

где $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $y_j = y_j(s)$, $s = \varepsilon t$, $j = 0, 1, 2, \dots$. При этом будем считать, что $y = y(s)$ при каждом s , когда эта бесконечномерная вектор-функция определена, и принадлежит пространству l_2^2 , т.е. сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 |y_k|^2$. Через $|y_k|$ обозначен модуль комплекснозначной функции $y_k(s)$.

Первый член суммы (31) имеет вид

$$u_1(t, x, y, \bar{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k + \bar{y}_k \bar{q}_k) h_k(x), \quad (32)$$

где $q_k = q_k(t) = \exp(i\sigma_k t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

В силу предположения $y \in l_2^2$ функция $u_1(t, x, y, \bar{y})$ при всех допустимых $y(s)$ и s как функция t , x принадлежит пространству функций, имеющих вторые производные, принадлежащие $\mathbb{L}_2(D_T)$, где $(D_T) = ((t, x) : t \in [0, T], x \in [0, \pi])$. Подчеркнем, что при всех рассматриваемых s и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, функция $u_1(t, x, y, \bar{y})$ удовлетворяет однородной краевой задаче (30) «приблизительно» (с точностью до $O(\varepsilon)$).

Будем считать априори, что функцию $u_3(t, x, y, \bar{y})$ следует искать в виде ряда, т.е.

$$u_3(t, x, y, \bar{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t, y, \bar{y}) h_k(x), \quad (33)$$

где $v_k(t, y, \bar{y})$ — почти периодические функции по t со счетным базисом частот $\sigma_0, \sigma_1, \dots$.

Подстановка суммы (31) в нелинейную краевую задачу (28), (29) с последующим выделением слагаемых пропорциональных $\varepsilon^{3/2}$ приводит к неоднородной краевой задаче для функции $u_3(t, x, y, \bar{y})$:

$$u_{3tt} + \sigma^2 u_3 - u_{3xx} = F_3(t, x, y, \bar{y}), \quad (34)$$

$$u_{3x}(t, 0, y, \bar{y}) = u_{3x}(t, \pi, y, \bar{y}) = 0. \quad (35)$$

В уравнении (34)

$$F_3(t, x, y, \bar{y}) = F_{3,1}(t, x, y, \bar{y}) + F_{3,2}(t, x, y, \bar{y}) + F_{3,3}(t, x, y, \bar{y}),$$

$$F_{3,1}(t, x, y, \bar{y}) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (y'_k q_k - \bar{y}'_k \bar{q}_k) i \sigma_k h_k(x),$$

$$F_{3,2}(t, x, y, \bar{y}) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k - \bar{y}_k \bar{q}_k) i \sigma_k h_k(x),$$

$$F_{3,3}(t, x, y, \bar{y}) = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k + \bar{y}_k \bar{q}_k) h_k \Phi \right)_t = - \left(\Phi \sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k + \bar{y}_k \bar{q}_k) h_k(x) \right)_t,$$

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (y_n q_n + \bar{y}_n \bar{q}_n)^2$$

(см. равенство Парсеваля).

Из равенства (33) вытекает возможность записать краевую задачу (34), (35) в виде бесконечной (счетной) системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v_{mtt} + \sigma_m^2 v_m = \Phi_m(t, y, \bar{y}), \quad (36)$$

где $m = 0, 1, \dots$, $\Phi_m(t, y, \bar{y}) = \Phi_{m,1} + \Phi_{m,2} + \Phi_{m,3}$,

$$\Phi_{m,1} = -2(y'_m q_m - \bar{y}'_m \bar{q}_m) i \sigma_m,$$

$$\Phi_{m,2} = 2(y_m q_m - \bar{y}_m \bar{q}_m) i \sigma_m,$$

$$\Phi_{m,3} = - \left[(y_m q_m + \bar{y}_m \bar{q}_m)^2 \Phi \right]_t,$$

а Φ была определена ранее. Наконец, $y'_j = y'_j(s)$.

Из условий разрешимости каждого из дифференциальных уравнений счетной системы (36) в классе почти периодических функций со счетным базисом частот $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ ($\sigma_k = \sqrt{\sigma^2 + k^2}$) вытекает, что функции $y_m(s)$ — решения еще одной, новой системы обыкновенных уравнений для комплекснозначных функций $y_m(s)$:

$$y'_m = y_m \left(1 - \frac{1}{2} y_m \bar{y}_m - \sum_{k=0}^{\infty} y_k \bar{y}_k \right), \quad (37)$$

где штрихом обозначена производная по переменной s . В системе (37) положим

$$y_m(s) = \sqrt{2} \rho_m^{1/2}(s) \exp(i\varphi_m(s)), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

где замена (38) осуществляет переход от алгебраической формы записи для комплекснозначных функций $y_m(s)$ к обобщенной тригонометрической, где $\rho_m(s) \geq 0$, $\varphi_m(s) \in \mathbb{R}$ при всех допустимых s . В результате замены (38) система комплексных уравнений (37) окажется переписанной в следующем виде:

$$\rho'_m = 2\rho_m(1 - \rho_m - 2W(\rho)), \quad (39)$$

$$\varphi'_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

где $\rho_m = \rho_m(s)$, $W(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k$. Очевидно (см. (40)), что при всех рассматриваемых m справедливо тождество $\varphi_m(s) = \varphi_{m,0}$, где $\varphi_{m,0}$ — произвольная действительная постоянная. Поэтому для дальнейших этапов изучения нормальной формы (37) определяющую роль играет система дифференциальных уравнений для $\rho_m(s)$, т.е. система (39).

Напомним, что пространство l_1^m состоит из таких последовательностей комплексных чисел $\{c_k\}$, что сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k^m |c_k|$. В частности, пространство l_1 состоит из последовательностей $\{c_k\}$ с конечной нормой $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$.

В нашем случае $\{\rho_k\} \in K_+(q)$, где $K_+(q)$ — конус, состоящий из таких последовательностей ρ_k , что при всех допустимых s

$$(1) \{\rho_k\} \in l_1^4, \text{ т.е. } \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \rho_k < \infty; \quad (2) \rho_k(s) \geq 0.$$

Дополнительно отметим, что справедливо неравенство

$$W_2(\rho) \leq W^2(\rho), \quad W_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2(s), \quad W(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(s).$$

5. Анализ нормальной формы. В данном разделе будем рассматривать вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (39). Для решений этой системы справедливости утверждения.

Лемма 3. Множество $\rho_k = 0$, где k — некоторое выбранное целое неотрицательное число, инвариантно для ее решений.

Действительно, из условия $\rho_k(0) = 0$ вытекает $\rho_k(s) \equiv 0$ при всех тех s , когда решение y системы (39) существует.

Лемма 4. Система дифференциальных уравнений (39) диссипативна в норме банахова пространства l_1 .

Доказательство. Достаточно показать, что с течением времени s все решения системы (39) попадут в шар $Q(r_0)$ с центром в нуле пространства l_1 . В нашем случае $r_0 = 1/2 + \nu_0$, где ν_0 — положительная постоянная. Сложим все уравнения системы дифференциальных уравнений (39). В результате получим, что

$$W' = 2(W - 2W^2 - W_2),$$

где $W_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2$. Очевидно, что $W - 2W^2 - W_2 \leq W - 2W^2$. Поэтому справедливо неравенство

$$W' \leq 2W(1 - 2W). \quad (41)$$

Пусть $W(s)$ — какое-либо решение дифференциального неравенства (41) и при некоторых s справедливо неравенство $W(s) \geq 1/2 + \nu_0$. При таких s справедливо неравенство $W'(s) \leq 0$ и функция $W(s)$ убывает до тех пор, пока $W(s)$ не станет меньше $1/2 + \nu_0$. Более строгое доказательство основано на использовании неравенства Гронуолла и свойствах дифференциальных неравенств (см., например, главу 3 из монографии Ф. Хартмана [13]). $\square$

Перейдем теперь к анализу вопроса о нахождении и анализе устойчивости ненулевых состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (39). Состояния равновесия следует искать как неотрицательные решения бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\rho_m(1 - \rho_m - 2W(\rho)) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Решения системы алгебраических уравнений (42) будем обозначать $\eta = \{\eta_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Подчеркнем, что бесконечная последовательность $\eta \in l_1^4$ или, по крайней мере, должна принадлежать l_1 для того, чтобы была определена сумма $W(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_j$.

Ясно, что система уравнений (42) имеет нулевое решение $S_0 : \eta = \{0\}$ (все компоненты равны нулю). Иными словами, S_0 — это нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39). Можно показать, что состояние равновесия S_0 неустойчиво. Действительно, пусть $\rho(0) = \xi$, где $\xi = \{\xi_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Пусть при этом $\xi_j = 0$, если $j \geq n$, т.е. все координаты начального условия у системы дифференциальных уравнений (39) равны нулю, начиная с некоторого номера n . Тогда для такого решения $\rho(s) = \{\rho_j(s)\}$ выполнены равенства $\rho_j(s) \equiv 0$, если $j = n, n+1, \dots$.

Оставшиеся n компонент бесконечномерного вектора $\rho(s) = \{\rho_j(s)\}$, т.е. $\rho_0(s), \rho_1(s), \dots, \rho_{n-1}(s)$ удовлетворяют конечномерной системе дифференциальных уравнений

$$\rho'_k = 2\rho_k(1 - \rho_k - 2W_n(\rho)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $W_n(\rho) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j$. В свою очередь, нулевое решение последней конечномерной системы дифференциальных уравнений неустойчиво. Это вытекает из теоремы об устойчивости по первому (линейному) приближению. Подчеркнем, что соответствующая линеаризованная в нуле система дифференциальных уравнений имеет вид $\rho'_k = 2\rho_k$.

Перейдем теперь к вопросу о существовании и устойчивости ненулевых состояний равновесия изучаемой системы дифференциальных уравнений (39). Обозначим через $S_p(k_1, \dots, k_p)$ решение системы (39), у которого p компонент с номерами $k_1, \dots, k_p$ положительны, а оставшиеся компоненты равны нулю. Наконец, через S_{∞} обозначим такое решение алгебраической системы (39), у которого число положительных компонент счетно или даже все компоненты положительны. Например, $S_1(j_1)$ — состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39) (решение системы алгебраических уравнений (39)) с одной положительной компонентой, т.е. $\eta_{j_1} > 0$, $\eta_k = 0$, $k \neq j_1$. При этом справедливо равенство

$$1 - \eta_{j_1} - 2\eta_{j_1} = 0,$$

т.е. $\eta_{j_1} = 1/3$.

Пусть теперь $S_2(j_1, j_2)$ — состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39), у которого $\eta_{j_1} > 0$, $\eta_{j_2} > 0$, а остальные компоненты равны нулю. Из системы алгебраических уравнений (39) вытекает, что компоненты η_{j_1}, η_{j_2} следует находить как решение системы

$$1 - \eta_{j_1} - 2(\eta_{j_1} + \eta_{j_2}) = 0, \quad 1 - \eta_{j_2} - 2(\eta_{j_1} + \eta_{j_2}) = 0,$$

но тогда $\eta_{j_1} = \eta_{j_2} = 1/5$.

Лемма 5. Пусть некоторое состояние равновесия системы (39) имеет две положительные компоненты η_{j_1}, η_{j_2} . Тогда $\eta_{j_1} = \eta_{j_2}$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим два равенства с номерами j_1, j_2 , т.е.

$$1 - \eta_{j_1} - 2W(\eta) = 0, \quad 1 - \eta_{j_2} - 2W(\eta) = 0.$$

Отсюда легко вытекает равенство $\eta_{j_1} = \eta_{j_2}$. $\square$

Из леммы 5 вытекает справедливость следующих утверждений:

1. Пусть $S_p(k_1, \dots, k_p)$ — одно из состояний равновесия, у которого компоненты с номерами $k_1, \dots, k_p$ положительны, а остальные равны нулю. Тогда $\eta_{k_j} = \xi_p = 1/(2p+1)$, $j = 1, \dots, p$.
2. Состояний равновесия с бесконечным числом положительных компонент у системы дифференциальных уравнений не может быть. Такое состояние равновесия не может быть элементом пространства последовательностей l_1 и, тем более, l_1^4 .

Лемма 6. Пусть $S_p = S_p(k_1, \dots, k_p)$ — состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39). Тогда это состояние равновесия неустойчиво как решение системы (39).

Доказательство. Вместе с системой дифференциальных уравнений (39) рассмотрим ее конечно-мерную подсистему

$$\rho'_{k_j} = 2\rho_{k_j}(1 - \rho_{k_j} - 2W_{p+1}(\rho)), \quad (43)$$

где $j = 1, \dots, p, p+1$, $W_{p+1}(\rho) = \sum_{j=1}^{p+1} \rho_{k_j}$. Первые p компонент системы (43) имеют такие же номера, как и компоненты системы дифференциальных уравнений (39), у которых ненулевые постоянные $1/(2p+1)$ определяют состояние равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ системы (39), т.е.

$$\rho_{k_j} = \eta_{k_j} = \frac{1}{2p+1}, \quad \rho_n = 0, \text{ если } n \neq k_j.$$

Состояние равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ порождает ненулевое состояние равновесия и системы дифференциальных уравнений (43) $\tilde{S}_p : \rho_{k_j} = 1/(2p+1)$, если $j = 1, \dots, p$, и $\rho_{k_{p+1}} = 0$. Если теперь показать, что состояние равновесия $\tilde{S}_p$ будет неустойчиво как решение системы (43), то, очевидно, состояние равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ будет также неустойчиво, так как любое решение системы (43) порождает решение и основной системы дифференциальных уравнений (39), если положить $\rho_n = 0$ при $n \neq k_1, \dots, k_p, k_{p+1}$.

Итак, осталось показать что состояние равновесия $\tilde{S}_p$ как состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (43) неустойчиво.

Пусть A — матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (43), вычисленная в точке с координатами $\tilde{S}_p$: $\rho_{k_1} = \dots = \rho_{k_p} = 1/(2p+1)$, $\rho_{k_{p+1}} = 0$. Стандартные вычисления приводят к равенствам

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= -\frac{4}{2p+1}, & \text{если } j \neq n, j = 1, \dots, p, n = 1, \dots, p+1, \\ a_{j,j} &= -\frac{6}{2p+1}, & \text{если } j = 1, \dots, p, \\ a_{p+1,k} &= 0, & \text{если } k = 1, \dots, p, \\ a_{p+1,p+1} &= \frac{2}{2p+1} > 0. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно заметить, что собственное число λ_{p+1} матрицы A положительно ($\lambda_{p+1} = 2/(2p+1)$), а остальные собственные значения A лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, p$. Тем не менее, из теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по линейному приближению вытекает, что $\tilde{S}_p$ неустойчиво в рамках вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (43). $\square$

Предшествующие построения, а также результаты и методика работ [3,4,6,7] позволяют сделать следующий вывод.

Теорема 4. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_p = \varepsilon(p, k_1, \dots, k_p)$, что при всех $\varepsilon = (0, \varepsilon_p)$ каждому состоянию равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ системы дифференциальных уравнений (39) соответствует седловой (неустойчивый) инвариантный тор $T_p(\varepsilon)$ краевой задачи (28), (29), причем $\dim T_p(\varepsilon) = p$. Для формирующих его решений справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{2p+1} \sum_{j=1}^p \cos(\sigma_{k_j} t + \alpha_{k_j}) h_{k_j}(x) + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (44)$$

Здесь, как уже отмечалось, $\sigma_{k_j} = \sqrt{\sigma^2 + k_j^2}$,

$$h_{k_j}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k_j x, & \text{если } k_j \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k_j x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & \text{если } k_j = 0. \end{cases}$$

Наконец, α_{k_j} — произвольные действительные числа.

6. Некоторые комментарии к теореме 4. Рассмотрим краевую задачу (28), (29). У нее может существовать асимптотически большое число инвариантных торов. Выберем какое-либо натуральное число n_* и будем считать, что $k_1, \dots, k_p$, $p \leq n_*$. Тогда согласно теореме 4 при $\varepsilon < \varepsilon_{n_*}$ может существовать тор $T_p(\varepsilon) = T_p(\varepsilon, k_1, \dots, k_p)$, размерность которого равна p . При этом набор $k_1, \dots, k_p$ из различных неотрицательных индексов $k_1, \dots, k_p$ произволен, если, конечно, $k_j \leq n_*$. Поэтому может существовать $2^{n_*+1} - 1$ торов, размерность которых — любое натуральное число, не превосходящее $n_* + 1$ и не равное нулю (если все компоненты состояния равновесия системы (39) равны нулю, то вместо тора получаем нулевое состояние равновесия краевой задачи (28), (29). При вычислении числа инвариантных торов циклы интерпретируются как торы, размерность которых равна 1. Подчеркнем, что все найденные инвариантные торы неустойчивы; более того, неустойчиво нулевое состояние равновесия. Отметим также, что набор чисел $\{\sigma_m\}$, где $\sigma_m = \sqrt{\sigma^2 + m^2}$ в ситуации общего положения, — это набор несоизмеримых рациональных чисел. Поэтому при $p \geq 2$ торы $T_p(\varepsilon)$ эргодичны.

7. Заключение. В работе рассмотрена краевая задача (5), (6), описывающая макроэкономическую динамику на основе использования известной модели мультипликатор-акселератор, но с существенным дополнением. Краевая задача (5), (6), по крайней мере, на феноменологическом уровне, учитывает «пространственные факторы», т.е. «распределенность» в пространстве экономических показателей. Были рассмотрены два варианта такой постановки.

Первый из них предполагает, что d_1, d_2 в исходной модели (4) положительны ($\delta \neq 0$ в краевой задаче (5), (6)). В таком случае краевая задача может иметь экономические циклы. Один из них может быть однородным, т.е. не зависящим от пространственной переменной. Возможны и пространственно неоднородные циклы; в таком случае ($d_1, d_2 > 0$) устойчивым может быть только пространственно однородный цикл. Таким образом, задача не очень сильно отличается от варианта, когда пространственными эффектами пренебрегают. Вместе с тем, даже в этом случае могут существовать пространственно неоднородные циклы. Эти циклы неустойчивы и тем самым каждый из них, как правило, не может быть реализован в ходе экономической практики. С другой стороны, их наличие означает усложнение экономической динамики. В частности, можно заметить, что учет пространственных факторов позволяет выявить то обстоятельство, что пространственная распределенность влияет на экономические процессы.

Второй вариант возникает, если в исходной системе (4) $d_1 = 0$. Подчеркнем еще раз, что именно этот вариант уравнения (5) в монографии [19] рассмотрен как основной. Такой вариант приводит к существенному изменению характера поведения решений изучаемой краевой задачи, если они принадлежат некоторой окрестности состояния равновесия. В окрестности нулевого состояния равновесия вместо одного цикла возникает достаточно большое число инвариантных торов различной размерности. Все эти торы неустойчивы; более того, неустойчиво и состояние равновесия. Наконец, данная краевая задача диссипативна в «слабой» топологии. Совокупность этих факторов означает, что поведение решений краевой задачи (5), (6) при $\delta = 0$ в окрестности состояния равновесия следует интерпретировать как «хаотическое», так как решения не могут

приближаться ни к одному «гладкому» инвариантному многообразию: циклу или тору. Если и существует какой-либо аттрактор, то такое инвариантное множество скорее всего будет иметь более сложную структуру по сравнению с уже указанными.

В [8] рассматривалась краевая задача, аналогичная задаче (5), (6). В ней нелинейное слагаемое из правой части уравнения (5) было заменено на следующее:

$$-u \left(\int_0^{\pi} u^2 dx \right)_t,$$

а также предполагалось, что β и δ^2 пропорциональны малому параметру ε , т.е. $\beta = \beta_0 \varepsilon$, $\delta^2 = \delta_0^2 \varepsilon$. В этой статье было показано, что в изучаемой краевой задаче возможна реализация известного сценария Ландау—Хопфа перехода к турбулентности. Такой переход реализуется, если $\delta_0^2 \rightarrow 0$. В целом можно отметить, что учет пространственных факторов достаточно радикально меняет ситуацию, если, конечно, выбрать за основу макроэкономическую модель мультипликатор-акселератор.

Добавим, что в [17] было показано, что учет пространственных факторов существенен и в иной модели макроэкономики — модели Кейнса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
3. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Дифф. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 584–601.
4. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса отображений: сохранение тора при возмущениях// Дифф. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
5. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
6. Куликов А. Н. Инвариантные торы слабо диссипативного варианта уравнения Гинзбурга—Ландау// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 66–75.
7. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга—Ландау// Автомат. телемех. — 2021. — 2. — С. 94–110.
8. Куликов А. Н., Куликов Д. А. О возможности реализации сценария Ландау—Хопфа перехода к турбулентности в обобщенной модели «мультипликатор-акселератор»// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 203. — С. 39–49.
9. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Математическое моделирование стационарных экономических процессов. — М., 2011.
10. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1968.
11. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.
12. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
13. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
14. Якубов С. Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — 23. — С. 37–60.
15. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds// J. Differ. Equations. — 1967. — 3. — P. 546–570.
16. Kulikov A. N. Inertial invariant manifolds of a nonlinear semigroup of operators in a Hilbert space// J. Math. Sci. — 2024. — 283, № 3. — P. 402–411.
17. Kulikov A. N., Kulikov D. A., Radin M. A. Analysis of Keynes' mathematical model—effect of spatial factors// Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 6. — P. 1345–1357.
18. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.

19. *Puu T.* Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. — New York: Springer-Verlag, 2000.
20. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич (Kulikov Anatolii Nikolaevich)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(Yaroslavl State University named after P. G. Demidov, Yaroslavl, Russia)
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич (Kulikov Dmitrii Anatolievich)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(Yaroslavl State University named after P. G. Demidov, Yaroslavl, Russia)
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич (Frolov Dmitrii Gennadievich)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(Yaroslavl State University named after P. G. Demidov, Yaroslavl, Russia)
E-mail: supfro@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 34–48
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-34-48

УДК 517.977

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО НЕЧЕТКОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

© 2024 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Разработано применение метода функции Грина при решении задачи об ограниченных решениях линейного дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначной правой частью. Выделен класс уравнений, обладающих положительными коэффициентами и неотрицательной функцией Грина, для которых установлены результаты о существовании и гладкости нечеткого ограниченного на всей оси решения. Показано, что в случае правой части треугольного вида, такого же вида будет и решение. Рассмотрены примеры радиотехнических цепей с нечеткими входными сигналами.

Ключевые слова: нечеткозначные функции, нечеткие динамические системы с постоянным коэффициентом, метод функции Грина.

CONVERTING A CONTINUOUS FUZZY SIGNAL BY A LINEAR DYNAMIC SYSTEM

© 2024 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. In this paper, we apply the method of Green's function to the search for bounded solutions of a high-order linear differential equation with constant coefficients and a fuzzy right-hand side. A class of equations with positive coefficients and a nonnegative Green's function is distinguished, for which the results on the existence and smoothness of a fuzzy solution bounded on the whole axis are established. We prove that in the case where the right-hand side has a triangular form, the solution has the same form. Examples of radio engineering circuits with fuzzy input signals are considered.

Keywords and phrases: fuzzy-valued functions, fuzzy dynamical systems with a constant coefficient, Green's function method.

AMS Subject Classification: 93C42

1. Введение. Основы теории нечетких дифференциальных уравнений заложены в [19, 24, 26] и получили дальнейшее развитие в [12, 13, 22, 23]. Различные приложения отражены в [4, 6]. Из последних работ отметим [14, 15, 17, 28].

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций. В настоящей работе применяется «классическое» определение производной по Хукухаре (см. [24]) и связанной с ним производной по Сеиккала (см. [26]).

В разделе 3 данной работы рассматриваются «нечеткие» динамические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначными правыми частями. Такие системы встречаются в теории автоматического регулирования, в задачах обработки сигналов (в радиотехнике) и других приложениях.

В данной работе задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой сводится к изучению задачи об ограниченных решениях для линейного дифференциального уравнения высокого порядка с нечеткозначной неоднородностью в правой части.

Обычно (см. [21]) при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают систему уравнений для соответствующих α -индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных α -индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры (см. [10, 21]), это не всегда так. Отметим, что в [10] развит так называемый «операторный метод», когда дифференциальные уравнения для α -индексов сводятся к интегральным уравнениям, которые затем решаются.

В последние годы широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка получил метод нечеткого преобразования Лапласа (см. [9, 16, 25]). Однако он не представляет возможности предварительно определить, будут ли полученные функции гладкими и, соответственно, решениями.

В отличие от известных подходов, предлагаемый в данной работе опирается на развитие метода функции Грина, широко распространенного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3, гл. II], [5, гл. 1, 2], на случай нечетких дифференциальных уравнений.

Метод функций Грина полезен тем, что он дает формулы для α -индексов нечетких решений. Это позволяет привести условия, при которых производные α -индексов определяют производную нечеткозначного решения по Сеиккала. В данной работе — это условие на положительность коэффициентов динамической системы, неотрицательность соответствующей функции Грина, а также дифференцируемость по Сеиккала входного нечеткого сигнала. Эти условия естественны для ряда прикладных задач. В частности, положительность коэффициентов является необходимым условием устойчивости соответствующего характеристического многочлена, соответствующего линейной динамической системе. Условия неотрицательности функции Грина широко известны (см., например, [5]). Они изучены в связи с различными прикладными задачами.

Уточним, что в данной статье введено и исследовано понятие ультраслабого нечеткого решения как нечеткозначной функции, α -индексы которой удовлетворяют уравнениям для α -индексов, вытекающих из заданного нечеткого дифференциального уравнения. Отметим установленный в данной работе факт, состоящий в том, что j -кратная дифференцируемость по Сеиккала нечеткозначной неоднородности влечет j -кратную дифференцируемость ультраслабого нечеткозначного решения по Сеиккала.

Добавим, что рядом авторов в последнее время исследованы нечеткие дифференциальные уравнения с обобщенными (по Беду—Гелу) производными (см. [9, 10, 13, 16, 21, 25]). Разработанный в настоящей статье подход допускает применение и к этому случаю.

В качестве приложений в разделе 4 настоящей работы рассмотрены модели радиотехнических цепей с нечеткими входными сигналами. Введены и исследованы слабые и сильно-слабые решения соответствующих динамических систем, как решения интегральных и, соответственно, интегро-дифференциальных нечетких уравнений, отвечающих рассматриваемым нечетким дифференциальным уравнениям.

Данная статья является продолжением и развитием работы автора [8], в которой рассмотрена взаимосвязь числовых характеристик нечетких ограниченных сигналов на входе и выходе линейной динамической системы. А именно, исследована взаимосвязь средних, а также ковариационных функций входного и выходного нечетких сигналов.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции. Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [1, гл. 5], [7, гл. 2, 3]). Множество таких нечетких чисел обозначим J .

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы α -уровня (α -уровни) нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$z_{\alpha} = \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad z_0 = \text{cl}\{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α -интервала через z_{α}^{-} , а правую — через z_{α}^{+} . Таким образом, $z_{\alpha} = [z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$. Выражения z_{α}^{-} и z_{α}^{+} называют, соответственно, левым и правым α -индексами (индексами) нечеткого числа.

Обычно предполагается выполнение следующих условий на индексы нечеткого числа:

- (i) $z^{-}(\alpha) \leq z^{+}(\alpha)$ для всех $\alpha \in [0, 1]$;
- (ii) функция $z^{-}(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0;
- (iii) функция $z^{+}(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций на промежутке $[0, 1]$, для которых выполняются условия (i)–(iii), задают нечеткое число, α -интервал которого имеет вид $[z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами $z^{-}(\alpha)$, $z^{+}(\alpha)$ и $u^{-}(\alpha)$, $u^{+}(\alpha)$ понимается нечеткое число с интервалами α -уровня $[z^{-}(\alpha) + u^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha) + u^{+}(\alpha)]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α -уровня $[cz^{-}(\alpha), cz^{+}(\alpha)]$, а умножение на отрицательное число c — интервалами α -уровня $[cz^{+}(\alpha), cz^{-}(\alpha)]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов при всех $\alpha \in [0, 1]$.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояние Хаусдорфа между множествами α -уровня нечетких чисел. Именно, для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α -уровнями z_{α} и u_{α} задают метрику (см. [20])

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z^{-}(\alpha) - u^{-}(\alpha)|, |z^{+}(\alpha) - u^{+}(\alpha)|\}. \quad (1)$$

Здесь $[z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$ и $[u^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)]$ — интервалы α -уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ соответственно.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = 0$ в силу (1) эквивалентно определению равенства нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, данному выше.

Фиксируем промежуток T числовой оси. Отображение $\tilde{z} : T \rightarrow J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ при всех $t \in T$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x, t)$. При фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ рассмотрим α -интервал $z_{\alpha}(t) = \{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) \geq \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = \text{cl}\{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) > 0\}$. Обозначим через $z_{\alpha}^{-}(t) = z^{-}(t, \alpha)$ и $z_{\alpha}^{+}(t) = z^{+}(t, \alpha)$ левую и правую границы α -интервала соответственно. Таким образом, $z_{\alpha}(t) = [z_{\alpha}^{-}(t), z_{\alpha}^{+}(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde{z}(t)$ по t будем понимать по метрике (1), а ограниченность — в следующем смысле: найдется такая постоянная $C > 0$, что при всех $t \in T$ выполнено неравенство

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z_{\alpha}^{-}(t)|, |z_{\alpha}^{+}(t)|\} \leq C.$$

Здесь $\tilde{0}$ — нечеткое число, у которого α -индексы $0_{\alpha}^{\pm} = 0$ при всех $\alpha \in [0, 1]$.

Замечание 1. Индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $z_{\alpha}^{+}(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0, 1]$. Если $\tilde{z}(t)$ ограничена при $t \in T$, то это влечет ограниченность $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по $t \in T$ при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Интегралом по промежутку T от непрерывного нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ называют такое нечеткое число $\tilde{g}$, что его интервалы α -уровня при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид $g_{\alpha} = \int_T z_{\alpha}(t) dt$ (см. [19]). Интеграл обозначают $\int_T \tilde{z}(t) dt$.

По существу, это интеграл Аумана (см. [11]) от многозначного отображения $z_{\alpha}(t)$. Фактически имеет место интервальное представление (см. [27])

$$\left(\int_T \tilde{z}(t) dt \right)_{\alpha} = \left[\int_T z_{\alpha}^{-}(t) dt, \int_T z_{\alpha}^{+}(t) dt \right].$$

Перейдем к рассмотрению производных от нечеткозначных функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение

разности Хукухары (см. [18]). Именно, для множеств A, B множество C называют разностью Хукухары, если $A = B + C$, и обозначают $A \ominus B$.

Функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют H -дифференцируемой (или дифференцируемой по Хукухаре) в точке $t \in T$ (см. [24]), если для всех достаточно малых $h > 0$ существуют такие разности Хукухары $\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)$ и элемент $\tilde{z}'(t) \in J$, что

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = 0,$$

где расстояние ρ определяется формулой (1). В этом случае элемент $\tilde{z}'(t)$ называют H -производной в точке t .

Нечеткозначную функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют S -дифференцируемой (или дифференцируемой по Сеиккала) в точке $t \in T$ (см. [26]), если ее α -индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_\alpha^-)'(t)$ и $(z_\alpha^+)'(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ образуют нечеткое число с α -интервалом $[\tilde{z}'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.

Утверждение 1 (см. [23]). Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ H -дифференцируема в точке $t \in T$. Тогда она S -дифференцируема в точке $t \in T$.

Например, нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ вида $\tilde{z}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ — скалярная дифференцируемая функция, а $\tilde{r} \in J$ — заданное нечеткое число, будет H -дифференцируемой (а значит, и S -дифференцируемой) в точке t при условии $g'(t) \geq 0$ (см. [12]).

Замечание 2. По определению нечеткая S -производная является аддитивной и положительно однородной. Иными словами, для нечеткозначных S -дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем

$$(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t) + \tilde{w}'(t), \quad (c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$$

для любой вещественной постоянной $c \geq 0$.

Вторая производная по Сеиккала $\tilde{z}''(t)$ в точке $t \in T$ определяется как S -производная от первой производной, т.е. как нечеткое число $\tilde{z}''(t)$, имеющее левый α -индекс $(z_\alpha^-)''(t)$ и правый α -индекс $(z_\alpha^+)''(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Аналогично определяются последующие S -производные.

3. Преобразование непрерывного нечеткого сигнала линейной динамической системой. Устройство называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются нечеткие сигналы $\tilde{f}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается «нечетким» дифференциальным уравнением

$$a_n \tilde{z}^{(n)}(t) + a_{n-1} \tilde{z}^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{f}(t), \quad t \in T. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты $a_i, i = 0, \dots, n$, — вещественные числа, $\tilde{f}(t)$ — входная нечеткозначная функция, производные от нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ понимаются как S -производные.

Ниже в качестве промежутка T рассматривается $T = (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим задачу об ограниченных решениях для скалярного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при $t \in (-\infty, \infty)$

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \quad (3)$$

Функцию $G(t)$ называют функцией Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3), если она удовлетворяет следующим условиям (см., например, [3, гл. II, § 4], [5, гл. 1, § 4]):

- (i) $G(t)$ непрерывно дифференцируема $n - 2$ раз при всех t , а производные порядков n и $(n - 1)$ непрерывно дифференцируемы при всех t , кроме $t = 0$, причем

$$G^{(n-1)}(+0) + G^{(n-1)}(-0) = 1;$$

- (ii) во всех точках, кроме $t = 0$, функция $G(t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (3) (при $f(t) \equiv 0$);

(iii) функция Грина и ее производные подчинены оценке

$$|G^{(i)}(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где M и γ — некоторые положительные постоянные.

Утверждение 2 (см. [3, гл. II]). Пусть множество корней характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

не содержит точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей числовой оси функции $f(t)$ уравнение (3) имеет ограниченное на всей числовой оси решение, причем единственное. Оно дается формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s) ds, \quad (4)$$

где $G(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3).

Подчеркнем, что сходимость несобственного интеграла (4) и соответствующих интегралов для производных обеспечивается экспоненциальными оценками на функцию Грина и ее производные, а также непрерывностью и ограниченностью функции $f(t)$ на всей числовой оси.

Отметим, что общий вид функции Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3) известен (см., например, [5, гл. 1, § 8]).

Утверждение 3 (см. [3, гл. сII]). Пусть в условиях утверждения 2 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуполоскости ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом решение (4) приобретает вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)f(s) ds. \quad (5)$$

Обратимся к случаю входных и выходных нечетких сигналов. В некоторых случаях, используя представление (4), удастся выписать α -индексы нечеткого сигнала на выходе динамической системы (2) в явном виде.

Сильным решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть n раз непрерывно S -дифференцируемую нечеткозначную функцию, удовлетворяющую (2) на соответствующем промежутке.

Лемма 1. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны: $a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$. Если нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ есть сильное решение уравнения (2) на промежутке T , то его α -индексы $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in T$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$a_n (z_{\alpha}^{-})^{(n)}(t) + a_{n-1} (z_{\alpha}^{-})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 (z_{\alpha}^{-})'(t) + a_0 z_{\alpha}^{-}(t) = f_{\alpha}^{-}(t), \quad (6)$$

$$a_n (z_{\alpha}^{+})^{(n)}(t) + a_{n-1} (z_{\alpha}^{+})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 (z_{\alpha}^{+})'(t) + a_0 z_{\alpha}^{+}(t) = f_{\alpha}^{+}(t). \quad (7)$$

Доказательство. Действительно, подставим сильное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения в (2). Поскольку равенство нечетких чисел означает равенство всех соответствующих α -индексов, то, согласно правилам интервальной арифметики, с учетом положительности коэффициентов a_i и в силу определения нечеткой производной по Сеиккала, а также замечания 2 получим, что уравнение (2) влечет при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$ выполнение равенств (6), (7). $\square$

Лемма 2. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны: $a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$, а множество корней характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

не содержат точек мнимой оси. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$, стоящая в правой части уравнения (2), непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда при всех $\alpha \in [0, 1]$ существуют, причем единственные, ограниченные на всей числовой оси решения каждого из уравнений (6), (7), и они могут быть представлены в виде

$$z_{\alpha}^{-}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{-}(s)ds, \quad z_{\alpha}^{+}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{+}(s)ds. \quad (8)$$

Доказательство. Действительно, по условию и согласно замечанию 1, при всех $\alpha \in [0, 1]$ функции $f_{\alpha}^{\pm}(t)$ непрерывны и ограничены на всей числовой оси. Тогда в силу утверждения 2 при всех $\alpha \in [0, 1]$ решения уравнений (6), (7) существуют, единственны, и выполнены равенства (8). $\square$

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и, кроме того, функция Грина G задачи (3) неотрицательна. Тогда выражения (8) при всех $t \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям (i)–(iii) раздела 2 на индексы нечетких чисел.

Доказательство представлено в приложении.

Подчеркнем значимость леммы 3. Как показывают примеры (см. [10, 21]), решения систем для α -индексов линейных нечетких дифференциальных уравнений не всегда являются α -индексами некоторой нечеткозначной функции.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда нечеткозначная функция, порождаемая при всех $t \in (-\infty, \infty)$ α -индексами (8), характеризуется представлением

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds. \quad (9)$$

Доказательство. Действительно, согласно леммам 1–3 и определению интеграла от нечеткозначной функции при всех $\alpha \in [0, 1]$ имеют место соотношения для α -индексов

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds \right)_{\alpha}^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{\pm}(s)ds,$$

которые в силу (8) влекут представление (9). $\square$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$, определенная формулой (9), непрерывна и ограничена по t на всей числовой оси.

Доказательство представлено в приложении.

Непрерывную нечеткозначную функцию $\tilde{z}(t)$ назовем ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2), если ее α -индексы $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ непрерывно дифференцируемы n раз по t и удовлетворяют уравнениям (6) и (7) на соответствующем промежутке времени.

Таким образом, в условиях теоремы 1 нечеткозначная функция (9) есть ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение нечеткого уравнения (2).

Теорема 3. В условиях теоремы 1 ультраслабое решение нечеткого дифференциального уравнения (2), ограниченное на всей числовой оси существует и единственно.

Доказательство. Существование следует из теорем 1, 2. Покажем единственность. Предположим противное. Пусть $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ — два различных ультраслабых решения уравнения (2), ограниченных на всей числовой оси. Тогда индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $w_{\alpha}^{-}(t)$ являются ограниченными решениями уравнения (6). Поэтому в силу утверждения 2 заключаем, что $z_{\alpha}^{-}(t) = w_{\alpha}^{-}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Аналогично, $z_{\alpha}^{+}(t) = w_{\alpha}^{+}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Но тогда, согласно признаку равенства нечетких чисел, $\tilde{z}(t) = \tilde{w}(t)$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$; противоречие. $\square$

Слабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть нечеткозначную функцию, удовлетворяющую соответствующему (2) интегро-дифференциальному или интегральному нечеткому уравнению. Ниже мы уточним это понятие в разделе 4 на примерах.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение (9) нечеткого дифференциального уравнения (2) существует, единственно и имеет следующий вид:

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)\tilde{f}(s)ds. \quad (10)$$

Утверждение вытекает из теоремы 1 с учетом утверждения 3.

Ниже мы используем следующее представление для ограниченного решения скалярного дифференциального уравнения (3), полученное из (5) заменой $t-s=\sigma$:

$$x(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma. \quad (11)$$

Выясним условия, при которых ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемо по t .

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дифференцируема при всех $t \in (-\infty, \infty)$ по Сеиккала, причем S -производная $\tilde{f}'(t)$ непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемым при $t \in (-\infty, \infty)$, причем выполнено равенство

$$\tilde{z}'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)\tilde{f}'_t(t-\sigma)d\sigma. \quad (12)$$

Доказательство. Действительно, согласно (6), (7) и в силу (11) для α -индексов ультраслабого решения $\tilde{z}(t)$ нечетко-дифференциального уравнения (2) можем записать

$$z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)f_{\alpha}^{\pm}(t-\sigma)d\sigma. \quad (13)$$

Аналогично лемме 3, они порождают нечеткозначную функцию

$$\tilde{z}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)\tilde{f}(t-\sigma)d\sigma. \quad (14)$$

По условию α -индексы $f_{\alpha}^{\pm}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ дифференцируемы по $t \in (-\infty, \infty)$, причем производные $(f_{\alpha}^{\pm})'_t(t)$ являются непрерывными и ограниченными на всей числовой оси скалярными функциями. Тогда вследствие (13) для производных α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по t имеем

$$(z_{\alpha}^{\pm})'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)(f_{\alpha}^{\pm})'_t(t-\sigma)d\sigma. \quad (15)$$

Здесь мы учли возможность дифференцирования по параметру под знаком абсолютно сходящегося интеграла.

В силу неотрицательности функции Грина (аналогично доказательству леммы 3) при каждом t выражения (15) являются α -индексами S -производной $\tilde{z}'(t)$. Поэтому из (14), (15) с учетом теоремы 1 следует (12).

Тогда в силу теоремы 3 о единственности ультраслабого ограниченного на всей числовой оси решения уравнения (2) и согласно (10), (14) получим, что

$$\left(\int_{-\infty}^t G(t-s) \tilde{f}(s) ds \right)'_t = \left(\int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}(t-\sigma) d\sigma \right)'_t = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}'_t(t-\sigma) d\sigma.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Следствие 1. В условиях теоремы 5 нечеткая производная (12) непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. $\square$

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дважды S -дифференцируема, причем первая и вторая S -производные $\tilde{f}'_t(t)$ и $\tilde{f}''_t(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (14), является дважды S -дифференцируемым при $t \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Действительно, при всех $\alpha \in [0, 1]$ для α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ в соответствии с равенством (15) можно записать

$$(z_{\alpha}^{\pm})''(t) = \left(\int_0^{\infty} G(\sigma) (f_{\alpha}^{\pm})'_t(t-\sigma) d\sigma \right)' = \int_0^{\infty} G(\sigma) (f_{\alpha}^{\pm})''_t(t-\sigma) d\sigma.$$

Отсюда на основании неотрицательности функции Грина выводим, что при всех $t \in (-\infty, \infty)$ интегралы в правой части порождают нечеткое число $\tilde{z}''(t)$ — вторую S -производную $\tilde{z}(t)$. $\square$

Следствие 2. В условиях теоремы 6 производные $\tilde{z}'(t)$ и $\tilde{z}''(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 4 нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ непрерывно S -дифференцируема j раз, $j > 2$, причем все производные до порядка j ограничены на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (14) нечеткого дифференциального уравнения (2) является нечеткозначной функцией, непрерывно S -дифференцируемой j раз.

Замечание 3. Согласно утверждению 2 для производных α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$, определяемых формулами (8), справедливы представления

$$(z_{\alpha}^{\pm})^{(j)}_t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t^{(j)}(t-s) f_{\alpha}^{\pm}(s) ds, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Однако, как показывают приведенные ниже примеры 1, 2, производные $G_t^{(j)}(t-s)$ функции Грина не сохраняют знак, так что для доказательства S -дифференцируемости нечеткозначного решения более удобным оказалось представление (13).

4. Примеры радиотехнических цепей с нечеткозначными входными сигналами. В настоящем разделе рассмотрены приложения результатов раздела 3 к простейшим радиотехническим цепям (см., например, [2]) в случае нечетких входных сигналов.

Пример 1. На вход RC-фильтра, т. е. динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}'(t) + \beta \tilde{z}(t) = \tilde{y}(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0, \quad (16)$$

поступает нечеткий непрерывный и ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$.

Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$. Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного уравнения $x' + \beta x = y(t)$ при $\beta > 0$ представима формулой

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При этом $G_1(t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Утверждение 4. Пусть коэффициент β нечеткого дифференциального уравнения (16) положителен, а правая часть $\tilde{y}(t)$ — непрерывная, ограниченная при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначная функция. Тогда нечеткий непрерывный и ограниченный на всей числовой оси ультраслабый сигнал на выходе динамической системы (16) имеет вид

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \tilde{y}(s) ds. \quad (17)$$

Утверждение вытекает из теоремы 4.

Покажем, что ультраслабое решение является слабым, а именно, удовлетворяет при $t > 0$ приведенному ниже нечеткому интегральному уравнению.

Утверждение 5. В условиях утверждения 4 ультраслабое ограниченное решение (17) при всех $t > 0$ удовлетворяет следующему нечеткому интегральному уравнению:

$$\tilde{z}(t) + \beta \int_0^t \tilde{z}(s) ds = \tilde{z}(0) + \int_0^t \tilde{y}(s) ds. \quad (18)$$

Здесь нечеткое число $\tilde{z}(0)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ характеризуется α -индексами

$$z_{\alpha}^{\pm}(0) = \int_{-\infty}^0 e^{\beta(s)} y_{\alpha}^{\pm}(s) ds. \quad (19)$$

Доказательство. Действительно, по условию для α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ нечеткого решения $\tilde{z}(t)$, определяемого (17) при всех $\alpha \in [0, 1]$, выполнены равенства

$$(z_{\alpha}^{\pm})'(t) + \beta z_{\alpha}^{\pm}(t) = y_{\alpha}^{\pm}(t). \quad (20)$$

Согласно утверждению 3 для непрерывных ограниченных на всей числовой оси решений уравнений (20) имеем

$$z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} y_{\alpha}^{\pm}(s) ds. \quad (21)$$

Подставим решения (21) в (20) и проинтегрируем полученные тождества от 0 до t :

$$z_{\alpha}^{\pm}(t) + \beta \int_0^t z_{\alpha}^{\pm}(s) ds = z_{\alpha}^{\pm}(0) + \int_0^t y_{\alpha}^{\pm}(s) ds, \quad (22)$$

где $z_{\alpha}^{\pm}(0)$ определяются формулами (19).

Из (22) по определению сложения нечетких чисел в интервальной форме (с учетом positivity $\beta > 0$) и в силу определения интеграла от нечеткозначной функции [27], а также равенства нечетких чисел в интервальной форме получим (18). $\square$

Отметим, что изначально уравнение RC-фильтра выписывается как интегральное уравнение [2]. Уравнение вида (16) получается последующим дифференцированием.

Ниже приведено утверждение, обеспечивающее S -дифференцируемость нечеткозначного решения уравнения (16), вытекающее из теоремы 6.

Утверждение 6. Пусть выполнены условия утверждения 4 и дополнительно нечеткозначная правая часть уравнения (16) $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при всех $t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (17) непрерывно S -дифференцируемо при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (16) при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, в условиях утверждения 6 формула (17) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (16).

Пример 2. На вход последовательного колебательного контура, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2 \tilde{z}''(t) + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{y}(t), \quad a_2 = L \geq 0, \quad a_1 = R > 0, \quad a_0 = \frac{1}{RC} > 0, \quad (23)$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$. Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$.

Теорема 7. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (23) удовлетворяют условиям $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$) и $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$. Пусть входной сигнал $\tilde{y}(t)$ является непрерывной ограниченной при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначной функцией. Тогда для нечеткого ультраслабого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы (23) справедливо представление

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G_2(t-s) \tilde{y}(s) ds. \quad (24)$$

Здесь $G_2(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях для скалярного дифференциального уравнения

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

с непрерывной и ограниченной на всей числовой оси вещественнозначной функцией $f(t)$, имеющая вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где λ_1, λ_2 — вещественные, различные и отрицательные корни характеристического уравнения $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$).

Доказательство. Действительно, заметим, что $G_2(t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда в соответствии с теоремой 4 для нечеткозначного сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе справедливо равенство (24). При этом выражение (24) является ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (23). $\square$

Покажем, что (24) является слабым решением, а именно, решением указанного ниже нечеткого интегрального уравнения.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда при всех $t \geq 0$ нечеткозначная функция (24) является решением следующего нечеткого интегрального уравнения:

$$a_2 \tilde{z}(t) + a_1 \int_0^t \tilde{z}(s) ds + a_0 \int_0^t \int_0^\tau \tilde{z}(s) ds d\tau = \int_0^t \int_0^\tau \tilde{y}(s) ds d\tau + a_2 \tilde{z}(0) + t(a_2 \tilde{w}(0) + a_1 \tilde{z}(0)). \quad (25)$$

Здесь нечеткие числа $\tilde{z}(0)$ и $\tilde{w}(0)$ определяются равенствами

$$\tilde{z}(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s} \right) \tilde{y}(s) ds, \quad (26)$$

$$\tilde{w}(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \right) \tilde{y}(s) ds, \quad (27)$$

а $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ — корни характеристического уравнения $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$.

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы дифференциальные уравнения для α -индексов $z_\alpha^\pm(t)$ ультраслабого решения $\tilde{z}(t)$ уравнения (23) при всех $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид

$$a_2 (z_\alpha^\pm)''(t) + a_1 (z_\alpha^\pm)'(t) + a_0 z_\alpha^\pm(t) = y_\alpha^\pm(t). \quad (28)$$

Согласно утверждению 3 непрерывные ограниченные на всей числовой оси решения скалярных дифференциальных уравнений (28) при всех $\alpha \in [0, 1]$ даются формулами

$$z_\alpha^\pm(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)} \right) y_\alpha^\pm(s) ds. \quad (29)$$

Подставляя их в уравнения (28) и интегрируя обе части полученных тождеств от 0 до τ , получим равенства

$$a_2 (z_\alpha^\pm)'(\tau) + a_1 z_\alpha^\pm(\tau) + a_0 \int_0^\tau z_\alpha^\pm(s) ds = \int_0^\tau \tilde{y}(s) ds + a_2 w_\alpha^\pm(0) + a_1 z_\alpha^\pm(0). \quad (30)$$

Здесь числа $z_\alpha^\pm(0)$ имеют вид

$$z_\alpha^\pm(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s} \right) y_\alpha^\pm(s) ds, \quad (31)$$

а $w_\alpha^\pm(0)$, равные $(z_\alpha^\pm)'(0)$, даются формулами

$$w_\alpha^\pm(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \right) y_\alpha^\pm(s) ds. \quad (32)$$

Теперь проинтегрируем обе части равенств (30) от 0 до t . Тогда получим

$$\begin{aligned} a_2 z_\alpha^\pm(t) + a_1 \int_0^t z_\alpha^\pm(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^\tau z_\alpha^\pm(s) ds d\tau = \\ = \int_0^t \int_0^\tau y_\alpha^\pm(s) ds d\tau + a_2 z_\alpha^\pm(0) + t (a_2 w_\alpha^\pm(0) + a_1 z_\alpha^\pm(0)). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая положительность коэффициентов $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$), правила арифметических действий с нечеткими числами в интервальной форме и условие равенства нечетких чисел, а также используя свойства интегралов от нечеткозначных функций, получим (25). При этом согласно (31), (32) нечеткие числа $\tilde{z}(0)$ и $\tilde{w}(0)$ определяются формулами (26), (27). $\square$

В силу теоремы 8 нечеткозначную функцию (24) естественно назвать слабым решением нечеткого дифференциального уравнения (23). Решения нечеткого интегрального уравнения типа (25) рассматривались, например, в [10].

Замечание 4. Выражения (26), (27) представляют собой нечеткие числа. В условиях теоремы 8 это можно показать аналогично лемме 3 с учетом представлений (31), (32) и неотрицательности функций $G_2(-s) \geq 0$ и $G'_2(-s) \geq 0$ при всех $s \in (-\infty, 0)$, участвующих в соответствующих подынтегральных выражениях в (31), (32).

Выясним, когда ультраслабое ограниченное решение (24) нечеткого дифференциального уравнения (23) является S -дифференцируемой нечеткозначной функцией.

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при всех $t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения (23), определяемое формулой (24), S -дифференцируемо при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет при всех $t \in (0, \infty)$ следующему нечеткому интегро-дифференциальному уравнению:

$$a_2(\tilde{z})'(t) + a_1\tilde{z}(t) + a_0 \int_0^t \tilde{z}(s)ds = \int_0^t \tilde{y}(s)ds + a_2\tilde{w}(0) + a_1\tilde{z}(0),$$

где $\tilde{z}(0)$ и $\tilde{w}(0)$ определены формулами (26), (27).

Утверждение вытекает из теорем 5, 8 с учетом соотношений (30).

Такое решение естественно назвать сильно-слабым решением уравнения (23).

Отметим, что первоначально уравнение последовательного колебательного контура записывается именно как интегро-дифференциальное уравнение (см. [2]). Уравнение (23) получается последующим дифференцированием.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно правая часть уравнения (23) $\tilde{y}(s)$ дважды непрерывно S -дифференцируема, причем S -производные $\tilde{y}'(t)$ и $\tilde{y}''(t)$ ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (24), также дважды непрерывно S -дифференцируемо и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (23).

Утверждение вытекает из теоремы 6 согласно (28) и в силу признака равенства нечетких чисел, заданных в интервальной форме.

Таким образом, в условиях теоремы 10 формула (24) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (23).

5. Приложения.

Доказательство леммы 3. Покажем, что для выражений $z_\alpha^\pm(t)$, определяемых формулами (8), выполнены условия (i)–(iii) раздела 2 на индексы нечетких чисел.

Фиксируем $t \in (-\infty, \infty)$ по предположению $f_\alpha^-(s) \leq f_\alpha^+(s)$ при всех $s \in (-\infty, \infty)$. Тогда в силу неотрицательности функции Грина

$$G(t-s)f_\alpha^-(s) \leq G(t-s)f_\alpha^+(s).$$

Поэтому на основании (8) и в силу монотонности интеграла получим, что $z_\alpha^-(t) \leq z_\alpha^+(t)$. Таким образом, при всех $t \in (-\infty, \infty)$ для $\tilde{z}(t)$ выполнено условие (i) раздела 2 для нечетких чисел.

Фиксируем произвольное $t \in (-\infty, \infty)$ и покажем, что функция $z_\alpha^-(t)$ не убывает по α . Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ и $\alpha_1 < \alpha_2$. По условию при всех $s \in (-\infty, \infty)$ выполнено условие $f_{\alpha_1}^-(s) \leq f_{\alpha_2}^-(s)$. Тогда в силу неотрицательности функции Грина имеем

$$G(t-s)f_{\alpha_1}^-(s) \leq G(t-s)f_{\alpha_2}^-(s).$$

Следовательно, в силу свойства монотонности интеграла $z_{\alpha_1}^-(t) \leq z_{\alpha_2}^-(t)$, т.е. функция $z_\alpha^-(t)$ монотонно не убывает по α . Аналогично доказывается, что функция $z_\alpha^+(t)$ монотонно не возрастает по α .

Согласно предположению функция $\tilde{f}(t)$ ограничена по t при $t \in (-\infty, \infty)$ в метрике (1). Это означает, что найдется такая постоянная $C > 0$, что $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при любых $t \in (-\infty, \infty)$. Следовательно,

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |f_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq C.$$

Тогда, согласно (8), при фиксированном t и всех $\alpha \in [0, 1]$ имеем

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds,$$

а это гарантирует при каждом $t \in (-\infty, \infty)$ ограниченность по $\alpha \in [0, 1]$ индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$.

Непрерывность слева функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при фиксированном t по $\alpha \in (0, 1]$ вытекает из следующего соображения. Фиксируем $\alpha_0 \in [0, 1]$ и рассмотрим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} f_{\alpha}^{\pm}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha_0}^{\pm}(s) ds = z_{\alpha_0}^{\pm}(t).$$

Здесь мы воспользовались представлением (8), возможностью предельного перехода под знаком абсолютно сходящегося несобственного интеграла и непрерывностью слева α -индексов $f_{\alpha}^{\pm}(s)$ нечеткозначной функции $\tilde{f}(s)$ по $\alpha \in (0, 1]$ при произвольном $s \in (-\infty, \infty)$. Аналогично проверяется непрерывность справа функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по α при $\alpha = 0$.

Таким образом, для α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ выполнены все условия раздела 2 на нечеткие числа. $\square$

Доказательство теоремы 2. Фиксируем вещественные числа t_1, t_2 . Тогда

$$G(t_1 - s) - G(t_2 - s) = G'_t(\tau - s)(t_1 - t_2), \quad \tau \in ((1 - \theta)t_1 + \theta t_2), \quad \theta \in (0, 1).$$

Согласно (8)

$$z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (G(t_1 - s) - G(t_2 - s)) f_{\alpha}^{\pm}(s) ds.$$

Тогда

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t_1 - s) - G(t_2 - s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds.$$

В силу предыдущего

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau - s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \right) |t_1 - t_2| \leq C |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau - s)| ds,$$

где постоянная $C > 0$ характеризует условие ограниченности: $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Воспользуемся теперь оценками производной функции Грина $|G'_t(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}$ (см. п. (iii) свойств функции Грина в разделе 3). Тогда

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq MC |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\tau-s|} ds = 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|.$$

Отсюда

$$\rho(z_{\alpha}^{\pm}(t_1), z_{\alpha}^{\pm}(t_2)) \leq 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|,$$

что влечет непрерывность нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, определенной формулой (9).

Покажем ограниченность при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, представимой формулой (9). По определению

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |z_{\alpha}^{\pm}(t)|.$$

При этом согласно (8)

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds \right) \rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma}.$$

Здесь мы опять воспользовались экспоненциальной оценкой на функцию Грина. Таким образом,

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma} \leq 2 \frac{MC}{\gamma} \quad \forall t \in (-\infty, \infty). \quad \square$$

6. Заключение. Основные результаты данной работы относятся к «нечетким» динамическим системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами в предположении непрерывности и ограниченности входного нечеткого сигнала (раздел 3). Они опираются на развитие метода функций Грина на случай нечетких дифференциальных уравнений. Важное место в работе уделяется выяснению вопроса о гладкости полученных решений.

Приложения, приведенные в разделе 4 статьи, демонстрируют возможности применения установленных общих положений, к радиотехническим цепям с нечеткими входными сигналами. Они уточняют некоторые результаты раздела 3 на случай динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков.

Подход, представленный в настоящей статье, является альтернативой стандартному подходу к исследованию линейных динамических систем с постоянными коэффициентами, связанному с частотной характеристикой, прямым и обратным преобразованием Фурье, а также преобразованию Лапласа.

Отметим, что развитый подход допускает распространение на случай периодических и почти периодических сигналов, а также может быть полезен при исследовании краевых задач для нечетких дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверкин А. Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1988.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
4. Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А. Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Ч. 1. Позиционное управление // Информ. технол. — 2019. — 25, № 5. — С. 259–270.
5. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970.
6. Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. II // Информ. технол. — 2015. — 21, № 4. — С. 243–250.
7. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
8. Хацкевич В. Л. Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения // Автомат. телемех. — 2023. — 8. — С. 43–60.
9. Ahmad L., Farooq M., Abdullah S. Solving n th order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform/ arXiv: arXiv:1403.0242 [math.GM].
10. Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A. A new method for solving fuzzy linear differential equations // Soft Comput. — 2011. — 92. — P. 181–197.
11. Aumann R. J. Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — 12. — P. 1–12.
12. Bede B., Gal S. G. Almost periodic fuzzy-number-valued functions // Fuzzy Sets Syst. — 2004. — 147, № 3. — P. 385–403.
13. Bede B., Gal S. G. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets Syst. — 2005. — 151, № 3. — P. 581–599.
14. Cao L., Yao D., Li H., Meng W., Lu R. Fuzzy-based dynamic event triggering formation control for nonstrict-feedback nonlinear MASs // Fuzzy Sets Syst. — 2023. — 452. — P. 1–22.

15. *Dai R., Chen M.* On the structural stability for two-point boundary value problems of undamped fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 2023. — 453, № 95–114.
16. *ElJaoui E., Melliani S., Chadli L. S.* Solving second-order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method// Adv. Differ. Equations. — 2015. — 66.
17. *Esmi E., Sanchez D. E., Wasques V. F., de Barros L. C.* Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values// Fuzzy Sets Syst. — 2021. — 419. — P. 122–140.
18. *Hukuhara M.* Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe// Func. Ekvacioj. — 1967. — 11. — P. 205–223.
19. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 301–317.
20. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — 12. — P. 215–229..
21. *Khastan A., Bahrami F., Ivaz K.* New results on multiple solutions for N th order fuzzy differential equations under generalized differentiability// Boundary Value Probl. — 2009. — 7. — P. 1–13.
22. *Liu H. K.* Comparison result of two-point fuzzy boundary value problems// Int. J. Comput. Math. Sci.. — 5, № 1. — P. 463–469.
23. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations// Int. J. Math. Math. Sci. — 1996. — 22, № 2. — P. 271–279.
24. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions// J. Math. Anal. Appl. — 1983. — 91. — P. 552–558.
25. *Salahshour S., Allahviranloo T.* Applications of fuzzy Laplace transforms// Soft Comput. — 2013. — 17. — P. 145–158.
26. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 319–330.
27. *Wu H. C.* The fuzzy Riemann integral and its numerical integration// Fuzzy Sets Syst. — 2000. — 110, № 1. — P. 1–25.
28. *Zhao R., Lu L., Feng G.* Asynchronous fault detection filtering design for continuous-time T-S fuzzy affine dynamic systems in finite-frequency domain// Fuzzy Sets Syst. — 2023. — 452. — P. 168–190.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович (Khatskevich Vladimir L'vovich)

Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия

имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

(Russian Air Force Military Educational and Scientific Center “Air Force Academy

named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin,” Voronezh, Russia)

E-mail: vlkhats@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 49–75
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-49-75

УДК 517.9; 531.01

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ. II. СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к многообразию меньшей размерности. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм. Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 236. — С. 72–88.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

INVARIANTS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC SYSTEMS OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION. II. FIFTH-ORDER SYSTEMS

© 2024 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present new examples of integrable dynamical systems of the fifth order that are homogeneous in part of the variables. In these systems, subsystems on the tangent bundles of lower-dimensional manifolds can be distinguished. In the cases considered, the force field is partitioned into an internal (conservative) part and an external part. The external force introduced by a certain unimodular transformation has alternate dissipation; it is a generalization of fields examined earlier. Complete sets of first integrals and invariant differential forms are presented. The first part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **236** (2024), pp. 72–88.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, first integral with essential singular points, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

2. Инварианты однородных систем пятого порядка	50
2.1. Введение	50
2.2. Некоторые примеры из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой	51
2.3. Системы пятого порядка при отсутствии внешнего силового поля	56
2.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов	63
2.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования	64
2.6. Системы со знакопеременной диссипацией	65
Список литературы	71

2. ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА

2.1. Введение. Как известно (см. [14, 17, 83]), нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [24, 28]).

Как и в разделе 1, наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с двумя степенями свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [26, 46, 52, 55]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в указанных работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на двумерной поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» —

это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — наличие у системы хотя бы одного первого интеграла (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, а внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической пространственной динамики твердого тела (см. также [8]).

В данном разделе 2 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система с двумя степенями свободы на своем четырехмерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

2.2. Некоторые примеры из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. [8]). Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — компоненты его угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2 , Dx_3 лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [8, 19]), при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = \frac{F_x}{m}, \quad (2.2.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_3 v \cos \alpha - \\ - \Omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_1 \Omega_2 - \sigma \dot{\Omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (2.2.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \Omega_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\ - \Omega_2 v \cos \alpha - \sigma \Omega_1 \Omega_3 + \sigma \dot{\Omega}_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.2.1c)$$

$$\dot{\Omega}_1 = 0, \quad (2.2.1d)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_3 = -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \quad (2.2.1e)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 = y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \quad (2.2.1f)$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma > 0$, $v > 0$. Первые три уравнения (2.2.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения (2.2.1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы (2.2.1) шестого порядка является прямое произведение $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}^2 \times \mathfrak{so}(3)$ трехмерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$.

Сразу заметим, что система (2.2.1), в силу имеющейся динамической симметрии $I_2 = I_3$, обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const}. \quad (2.2.2)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \quad (2.2.3)$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const} \quad (2.2.4)$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [44, 45, 59]), то в системе (2.2.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$, $\sigma = DC$. Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (2.2.5)$$

Случай (2.2.5) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы пятого порядка после некоторого преобразования системы шестого порядка (2.2.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{\substack{i,j=0, \\ i \leq j}}^3 \tau_{ij} \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega_i \Omega_j = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \Omega_0 = v. \quad (2.2.6)$$

Введем следующие квазискорости:

$$z_1 = \Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1, \quad z_2 = -\Omega_2 \sin \beta_1 + \Omega_3 \cos \beta_1. \quad (2.2.7)$$

Систему (2.2.1) в случаях (2.2.2), (2.2.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \\ - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \sin \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\ = \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \Omega/v) v^2 - s(\alpha)v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.2.8a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha - \\ - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \cos \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\ = \frac{s(\alpha)v^2 - T_1(\alpha, \beta_1, \Omega/v) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2.2.8b)$$

$$\dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (2.2.8c)$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{v^2}{I_2} z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (2.2.8d)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{I_2} s(\alpha) \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = 0. \quad (2.2.8e)$$

Введя далее новые фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const},$$

приведем систему (2.2.8) к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned}\alpha' = & -Z_2 + \sigma n_1(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \\ & + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \left[y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 \right] - \\ & - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha,\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned}Z_2' = & \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2} [1 - \sigma n_1 Z_2 \sin \alpha] \left[y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 \right] - \\ & - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ & - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 \right] - \\ & - Z_2 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha,\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned}Z_1' = & \frac{1}{I_2 n_1^2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [\sigma n_1 Z_2 \sin \alpha - 1] \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 \right] + \\ & + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ & - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha) \sin \alpha \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 + y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 \right] - \\ & - Z_1 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha,\end{aligned}\quad (2.2.12)$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 \right], \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = & -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \\ & + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \left[y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 \right] + \\ & + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.\end{aligned}\quad (2.2.14)$$

Видно, что в системе пятого порядка (2.2.9)–(2.2.13) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (2.2.10)–(2.2.13), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве. В частности, при выполнении условия (2.2.5) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка также возможен.

Система (2.2.9)–(2.2.13) содержит динамические уравнения движения твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \quad (2.2.15)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha, \quad (2.2.16)$$

$$Z_2' = -Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \quad (2.2.17)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \quad (2.2.18)$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (2.2.19)$$

2.2.1. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [8, 19]) примем динамические функции

s , y_N и z_N в виде

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) = y_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) &= z_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α , β_1). Тогда, благодаря условиям (2.2.4), (2.2.20) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (2.2.9)–(2.2.13)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (2.2.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ \beta_1' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

При этом выберем безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I_2$, $n_1 = n_0$. Итак, система (2.2.21)–(2.2.23) может быть рассмотрена на своем фазовом пятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T\mathbb{S}^2\{Z_1, Z_2, 0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$, т.е. на произведении числового луча на касательное расслоение к двумерной сфере $\mathbb{S}^2\{0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$.

Теорема 2.1. Система (2.2.21)–(2.2.23) обладает четырьмя независимыми первыми интегралами (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. Эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделе 1) необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

2.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости. Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно (см. [8, 19]). Итак, примем зависимость $x = Q + R$, где $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}; \quad (2.2.24)$$

здесь (h_1, h_2, h_3) — некоторые положительные параметры (ср. [8]). Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, имеем

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - \frac{h_1 \Omega_3}{v}, \quad x_{3N} = z_N = Q_3 + \frac{h_1 \Omega_2}{v}.$$

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [8, 19]) допустим равенства

$$Q_2 = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A > 0,$$

а динамические функции s , y_N и z_N примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\Omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 + h \frac{\Omega_2}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). При этом $h_2 = h_3$ в силу динамической симметрии тела.

Благодаря условиям (2.2.4), (2.2.25) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (2.2.9)–(2.2.13)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (2.2.26)$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b H_1 Z_2 \cos^2 \alpha, \quad (2.2.27)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b H_1) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ &\quad - b Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b H_1 Z_2^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= (1 + b H_1) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ &\quad - b Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b H_1 Z_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\beta_1' = (1 + b H_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2.2.29)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - b H_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (2.2.30)$$

безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 выберем следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0.$$

Итак, система (2.2.21)–(2.2.23) может быть рассмотрена на своем фазовом пятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T\mathbb{S}^2 \{Z_1, Z_2, 0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к двумерной сфере $\mathbb{S}^2 \{0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$.

Теорема 2.2. Система (2.2.26)–(2.2.29) обладает четырьмя независимыми первыми интегралами (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. Эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделе 1) необходимо повторить важное замечание. С точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы, хотя рассматриваемые первые интегралы являются действительными функциями.

2.3. Системы пятого порядка при отсутствии внешнего силового поля. Пусть $v, \alpha, \beta, z = (z_1, z_2)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} & \dot{z}_2 & \dot{z}_1 & v\dot{\alpha} & v\dot{\beta} \end{pmatrix}^T = A(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} v^2 & vz_2 & vz_1 & z_2^2 & z_2z_1 & z_1^2 \end{pmatrix}^T, \quad (2.3.1)$$

где $A(\alpha, \beta)$ — матрица размером 5×6 (система, аналогичная (1.3.1)). Выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новые фазовые переменные $Z_k, z_k = Z_kv$, $k = 1, 2$, $Z = (Z_1, Z_2)$, можно переписать систему (2.3.1) в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 & Z_2 & Z_1 & Z_2^2 & Z_2Z_1 & Z_1^2 \end{pmatrix}^T, \quad (2.3.2)$$

$$\begin{pmatrix} Z_2' \\ Z_1' \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \hat{A}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_2^2 \\ Z_2Z_1 \\ Z_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_2\Psi(\alpha, Z) \\ Z_1\Psi(\alpha, Z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

где $A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat{A}(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (2.3.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать четыре оставшихся уравнения в качестве системы (2.3.3) на четырехмерном фазовом многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$.

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (2.3.2), (2.3.3) пятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha), \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \quad (2.3.4)$$

$$\begin{cases} \alpha' = f_2(\alpha)Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha), \\ Z_2' = -f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta' = Z_1f_1(\alpha), \end{cases} \quad (2.3.5)$$

где $DQ(\xi) = d \ln |Q(\xi)|/d\xi$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, $i, j, k = \alpha, \beta$ — некоторые гладкие функции. Будем рассматривать систему (2.3.4), (2.3.5) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Уравнение (2.3.4) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (2.3.5) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырехмерном многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ — касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ (см. также [52, 59, 68]).

Система (2.3.4), (2.3.5) имеет более общий вид, чем система (2.2.15)–(2.2.19), взятая из динамики твердого тела, и при $b = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, а также при

$$f_1(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_2(\alpha) \equiv -1,$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha},$$

они, в частности, совпадают.

Рассмотрим структуру системы (2.3.5). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий с тремя ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении

$TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ (в частности, на расслоении (двумерной) поверхности вращения, плоскости Лобачевского и т. д.):

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1, z_2 в касательном пространстве в виде

$$\dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha), \quad \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha),\tag{2.3.7}$$

получаем следующие соотношения (ср. с (2.3.5)):

$$\begin{aligned}Z_1' &= -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= -f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z);\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

при этом уравнения (2.3.6) почти всюду эквивалентны совокупности (2.3.7), (2.3.8), которая, прежде всего, присутствует в системе (2.3.5). Здесь для полной ясности лучше изменить независимую переменную и вместо (2.3.7) выбрать равенства

$$\alpha' = Z_2 f_2(\alpha), \quad \beta' = Z_1 f_1(\alpha).$$

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (2.3.6).

- (a) Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства; такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (трехмерного) твердого тела (см. также [76, 85]).
- (b) Системы на касательном расслоении более общей двумерной поверхности вращения.
- (c) Системы на касательном расслоении плоскости Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (2.3.4), (2.3.5) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (1.3.5), (1.3.6), они не нарушают консервативности, поскольку система (2.3.4), (2.3.5) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

2.3.1. О количествах «неизвестных» функций и накладываемых на них условий. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении двумерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ функций при $n = 2$, т.е. 6 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ из (2.3.7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь тремя ненулевыми коэффициентами связности ($n(n-1) + 1$ функций при $n = 2$), формирующими уравнения геодезических (2.3.6). Соответствующее количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении, равно двум (т.е. $n(n-1)/2 + 1$ функций при $n = 2$). Таким образом, мы имеем пять функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Найдем количество $B(2)$ накладываемых алгебраических и дифференциальных условий на имеющиеся $A(2) = 5$ функций ($A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ функции при $n = 2$); данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Ясно, что число таких функциональных условий должно быть меньше пяти, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, поскольку чем меньше число $B(2)$, тем больше разность $A(2) - B(2)$ и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(2) = 3$ условия на имеющиеся $A(2) = 5$ функций. Число $B(2)$ состоит из трех слагаемых: $B(2) = B_1(2) + B_2(2) + B_3(2)$. Число $B_1(2)$ равно количеству

условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$. При $n = 2$ мы не намерены накладывать явные алгебраические условия на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, т.е. $B_1(2) = 0$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Введем лишь новое обозначение для универсальности, а именно, $f_1(\alpha) =: f(\alpha)$. Число $B_2(2)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \quad (2.3.9)$$

т.е. $B_2(2) = 1$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$). Число $B_3(2)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) &=: \Gamma_2(\alpha), \\ f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha) \right] + f^2(\alpha) \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

т.е. $B_3(2) = 2$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$). Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned} B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества произвольных функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(2) - B(2) = 2$.

Замечание 2.1. Пусть выполнено условие (2.3.9), при этом реализуется система дифференциальных равенств (2.3.10). Тогда справедливы следующие два тождества (т.е. $n(n-1)/2 + 1$ при $n = 2$):

$$\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha). \quad (2.3.12)$$

Доказательство. В условиях замечания первое равенство из (2.3.10) переписывается в виде

$$f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (2.3.13)$$

Из (2.3.13) вытекает первое тождество (2.3.12). Наконец, из последней строки (2.3.10) также следует второе тождество (2.3.12). $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 2.1. В нашем случае, при $n = 2$, оно носит некоторый формальный (даже тавтологичный) смысл, который будет ясен при увеличении размерности $n \geq 3$ многообразия M^n .

Замечание 2.2. Пусть выполнено условие (2.3.9), при этом реализуются два тождества (2.3.12). Тогда система дифференциальных равенств (2.3.10) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) &=: \Gamma_2(\alpha), \\ f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_2(\alpha) &\equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Фактически уравнения (2.3.14) и (2.3.10) совпадают с точностью до обозначений. Как указано выше, это произошло по причине низкой размерности $n = 2$ многообразия M^n . Таким образом, при выполнении одного условия (2.3.9) пара условий (2.3.10) и пара условий (2.3.14) в указанном смысле эквивалентны.

2.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы пятого порядка достаточно знать, вообще говоря, четыре независимых инварианта.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (2.3.4), (2.3.5) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-либо комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [6, 7]).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (2.3.6), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.15)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (2.3.16)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (2.3.9), (2.3.10) на пять функций: на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (2.3.7) и на три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (2.3.6).

Теорема 2.3. *Если выполнены условия (2.3.9), (2.3.10), то система (2.3.4), (2.3.5), рассмотренная на произведении $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$, обладает полным набором, состоящим из четырех гладких первых интегралов вида*

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_2\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \quad (2.3.17)$$

$$\Phi_1(v; Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = \text{const}, \quad (2.3.18)$$

$$\Phi_2(v; Z_1; \alpha) = v^2Z_1\Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (2.3.19)$$

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = G(\alpha, \beta, C_0, C_1^2, C_2) = C_3 = \text{const}, \quad (2.3.20)$$

где

$$\Delta(\alpha) = A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const},$$

G — некоторая гладкая функция нескольких переменных. Более того, после замены независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (2.3.21)$$

и замены фазовых переменных

$$w_2 = Z_2, \quad w_1 = Z_1, \quad w_1^* = \ln |w_1| \quad (2.3.22)$$

фазовый поток системы (2.3.4), (2.3.5) сохраняет фазовый объем с плотностью

$$\rho(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_2(\alpha)}$$

на произведении $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times TM^2\{w_2, w_1^*; \alpha, \beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая внешняя дифференциальная форма

$$\frac{v^3}{f_2(\alpha)} dv \wedge dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta.$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 2.3, а именно, выполним замены (2.3.21) независимой переменной и (2.3.22) фазовых переменных (переобозначение $Z = (Z_1, Z_2) \rightarrow w = (w_1, w_2)$ в данном случае вводится для универсальности обозначений: см. далее случаи высших размерностей $n \geq 3$). Тогда система (2.3.4), (2.3.5) при выполнении условий (2.3.9), (2.3.10) выглядит следующим образом:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (2.3.23)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= w_2 + b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\Delta(\alpha), \\ w_2' &= -\frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha)e^{2w_1^*} - w_2\Psi_1(\alpha, w), \\ w_1'^* &= \frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha)w_2 - \Psi_1(\alpha, w), \\ \beta' &= e^{w_1^*}\frac{f(\alpha)}{f_2(\alpha)}; \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

при этом в составной системе (2.3.23), (2.3.24) штрихом обозначена также производная по новой независимой переменной τ .

Как было указано выше, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; \alpha, \beta; w)$ дивергенции векторного поля $W_0(v; \alpha, \beta; w)$ системы (2.3.23), (2.3.24) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля $\rho(v; \alpha, \beta; w)W_0(v; \alpha, \beta; w)$ преобразованной системы (т.е. системы (2.3.23), (2.3.24), умноженной на $\rho(v; \alpha, \beta; w)$) после замены $\rho(v; \alpha, \beta; w)d/dt_1 = d/dt_2$ «старой» независимой переменной t_1 при переходе к «новой» независимой переменной t_2 в системе (2.3.23), (2.3.24).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $W_0(v; \alpha, \beta; w)$ системы (2.3.23), (2.3.24) функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил). Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [v^3 W_0(v; \alpha, \beta; w)] &= -4v^3 b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + \\ &\quad + v^3 b(e^{2w_1^*} + 3w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_1^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 \equiv 0, \end{aligned}$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании четырех первых интегралов. Действительно, дифференцирование функции (2.3.17) в силу системы (2.3.4), (2.3.5) при выполнении условий (2.3.9), (2.3.10) дает

$$2bv^2 f_2(\alpha) Z_1^2 \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \equiv 0,$$

поскольку тождество

$$\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) \equiv \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \quad (2.3.25)$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено второе уравнение из (2.3.19).

Дифференцирование функции (2.3.18) в силу системы (2.3.4), (2.3.5) в условиях теоремы дает

$$-\frac{2v^2}{f_2(\alpha)} Z_1^2 Z_2 \left\{ f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_2(\alpha) \right\} \equiv 0.$$

Дифференцирование функции Φ_2 из (2.3.19) в силу системы (2.3.4), (2.3.5) в условиях теоремы дает

$$-v^2 f_2(\alpha) Z_1 Z_2 \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\}.$$

Благодаря второму уравнению из (2.3.19) функция $\Delta(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (2.3.25), что и доказывает наличие первого интеграла (2.3.19).

Далее, рассмотрим три совместных уровня C_0 , C_1^2 и C_2 первых интегралов (2.3.17), (2.3.18) и (2.3.19) соответственно:

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = C_0, \quad \Phi_1(v; Z_2, Z_1) = C_1^2, \quad \Phi_2(v; Z_1; \alpha) = C_2, \quad (2.3.26)$$

не зависящих от переменной β . Получим из системы (2.3.4), (2.3.5) следующее уравнение:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{Z_1 f(\alpha)}{Z_2 f_2(\alpha) + b(Z_1^2 + Z_2^2) \Delta(\alpha) f_2(\alpha)}. \quad (2.3.27)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \left(\Phi_0(v; Z_2; \alpha), \Phi_1(v; Z_2, Z_1), \Phi_2(v; Z_1; \alpha) \right)}{\partial(v; Z_2, Z_1)} \neq 0$$

почти всюду, то по теореме о неявной функции существуют достаточно гладкие функции

$$v = V(\alpha; C_0, C_1^2, C_2), \quad Z_2 = \zeta_2(\alpha; C_0, C_1^2, C_2), \quad Z_1 = \zeta_1(\alpha; C_0, C_1^2, C_2), \quad (2.3.28)$$

дающие тождества при подстановке в равенства (2.3.26), а значит, сотканые из решений рассматриваемой системы. Таким образом, при подстановке функций (2.6.23) в уравнение (2.3.27) имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\zeta_1(\alpha; C_0, C_1^2, C_2) f(\alpha)}{\zeta_2(\alpha; C_0, C_1^2, C_2) f_2(\alpha) + b \left(\zeta_1^2(\alpha; C_0, C_1^2, C_2) + \zeta_2^2(\alpha; C_0, C_1^2, C_2) \right) \Delta(\alpha) f_2(\alpha)},$$

позволяющее найти искомое инвариантное соотношение в квадратурах:

$$\beta - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\zeta_1(a; C_0, C_1^2, C_2) f(a)}{\zeta_2(a; C_0, C_1^2, C_2) f_2(a) + b \left(\zeta_1^2(a; C_0, C_1^2, C_2) + \zeta_2^2(a; C_0, C_1^2, C_2) \right) \Delta(a) f_2(a)} da = C_3 = \text{const},$$

имеющее следующий структурный вид:

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = G(\alpha, \beta, C_0, C_1^2, C_2) = C_3 = \text{const}. \quad (2.3.29)$$

Теорема доказана. $\square$

Заметим также, что равенства (2.3.10) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (2.3.18). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [3, 7, 11, 12]). Поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 2.1. В случае сферических координат (α, β) , когда метрика на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства (задача класса (а)), система пятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0, \quad (2.3.30)$$

и имеющая первые интегралы (2.3.17)–(2.3.20), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \\ \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha, \\ Z_2' &= -Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta' &= Z_1 \frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Пример 2.2. В случае сферических координат (α, β) , но когда метрика на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. также [22, 23], задача класса (а)), система пятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \quad \ddot{\beta} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 0 \quad (2.3.32)$$

и имеющая первые интегралы (2.3.17)–(2.3.20), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \\ \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha, \\ Z_2' &= -Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Пример 2.3. В случае плоскости Лобачевского (с координатами $x = \beta$, $y = \alpha$, задача класса (с)) система пятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) = 0, \quad \ddot{\beta} - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta} = 0 \quad (2.3.34)$$

и имеющая первые интегралы (2.3.17)–(2.3.20), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = b(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{1}{\alpha^2}, \\ \alpha' &= Z_2 \alpha + b(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{1}{\alpha}, \\ Z_2' &= -Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta' &= Z_1 \alpha. \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Пример 2.4. В случае цилиндрических координат объемлющего трехмерного пространства $(\rho, \varphi = \beta, z = \alpha)$, задача класса (b)) двухпараметрическая система, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha} + G_1(\alpha) \dot{\alpha}^2 + G_2(\alpha) \dot{\beta}^2 = 0, \quad \ddot{\beta} + G_3(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta} = 0, \quad (2.3.36)$$

где

$$G_1(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha) \rho''(\alpha)}{1 + \rho^2(\alpha)}, \quad G_2(\alpha) = \frac{\rho(\alpha) \rho'(\alpha)}{1 + \rho^2(\alpha)}, \quad G_3(\alpha) = 2 \frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)},$$

и имеющая первые интегралы (2.3.17)–(2.3.20), примет следующий вид (только здесь штрих в записи « $\rho'(\alpha)$ » обозначает производную по α):

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \tilde{\delta}(\alpha), \\ \alpha' &= Z_2 \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2(\alpha)}} + b(Z_1^2 + Z_2^2) \delta(\alpha), \quad \delta(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)}{\sqrt{\rho^2(\alpha) - 1}}, \\ Z_2' &= -Z_1^2 G(\alpha) - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_2 G(\alpha) - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \quad G(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha) \sqrt{1 + \rho^2(\alpha)} (\rho^2(\alpha) - 1)}, \\ \dot{\beta} &= z_1 \frac{1}{\rho(\alpha) \sqrt{\rho^2(\alpha) - 1}}. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, четырех) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно, не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

2.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов. Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (2.3.4), (2.3.5) при условиях (2.3.9), (2.3.10) (лишь в уравнение на Z'_2) внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_2(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$), при этом пусть, в частности, $f_2(\alpha) \equiv -1$.

Исследуем вопрос устойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы (для этого некоторые коэффициенты необходимо доопределить по непрерывности) по части переменных α, Z_2, Z_1 . Три соответствующих уравнения на α', Z'_2, Z'_1 примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha), \\ Z'_2 &= F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_1 &= -f_1^2(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1Z_2 + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\delta}(\alpha).\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что в действительности имеет место при $b = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность подтвердилась бы наличием в системе четырех гладких (автономных) первых интегралов.

Рассмотрим следующую функцию (Ляпунова) для уравнений (2.4.1):

$$W(Z_2, Z_1; \alpha) = Z_1^2 + Z_2^2 + 2 \int_0^\alpha F(\xi)d\xi, \quad F(0) = 0, \quad \frac{dF(0)}{d\alpha} > 0,\tag{2.4.2}$$

которая в проколотовой окрестности начала координат положительна и равна нулю только в самом начале координат.

Предложение 2.1. *Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ строго одного знака в проколотовой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (2.4.1), — либо притягивающая, либо отталкивающая точка.*

Доказательство. Полная производная функции (2.4.2) в силу уравнений (2.4.1) равна

$$b(Z_1^2 + Z_2^2)^2\tilde{\delta}(\alpha) + b(Z_1^2 + Z_2^2)F(\alpha)\delta(\alpha).\tag{2.4.3}$$

Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно отрицательны в проколотовой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (2.4.1), — притягивающая точка. Если же функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно положительны в проколотовой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (2.4.1), — отталкивающая точка. Два последних утверждения следуют из теорем Ляпунова и Четаева. $\square$

Следствие 2.1. *В условиях предложения 2.1 рассматриваемая система, содержащая уравнения (2.4.1), не может обладать полным набором гладких первых интегралов.*

Следствие 2.2. *В пространственной динамике твердого тела (см. также раздел 2.2) в системах, где присутствуют уравнения вида (2.4.1), функции $\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)$ имеют следующий вид: $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$. Таким образом, величина (2.4.3) переписывается в виде*

$$b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha [Z_1^2 + Z_2^2 + \sin^2 \alpha].$$

Видно, что в данном случае начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (2.4.1), — отталкивающая точка.

Таким образом, добавляя в систему (2.3.4), (2.3.5) при условиях (2.3.10) (лишь в уравнение на Z'_2) внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_2(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$) рассматриваемая система, вообще говоря, перестает быть консервативной.

2.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования. Модифицируем систему (2.3.4), (2.3.5) при наличии двух ключевых параметров $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_2(\alpha)$ в уравнение на Z'_2 системы (2.5.1), (2.5.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Как показано в предыдущем разделе 2.4, консервативность имеет место при дополнительном условии $b = 0$.

Мы расширим введение силового поля, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. Как и выше, выполним вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_2(\alpha)d/d\tau$ и по-прежнему будем обозначать штрихом производную по τ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (2.5.1)$$

$$\alpha' = Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},$$

$$Z'_2 = F(\alpha) - [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \quad (2.5.2)$$

$$Z'_1 = -\left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$

$$\beta' = Z_1\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)};$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Напомним, что система (2.5.1), (2.5.2) фактически является образом следующей системы при замене $d/dt = f_2(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \quad (2.5.3)$$

$$\alpha' = f_2(\alpha)Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)f_2(\alpha),$$

$$Z'_2 = F(\alpha)f_2(\alpha) - f_2(\alpha)[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \quad (2.5.4)$$

$$Z'_1 = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$

$$\beta' = Z_1f_1(\alpha).$$

Также напомним, что выше мы ввели подобное поле (см. раздел 2.4), добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z'_2 системы (2.4.1), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность имеет место при дополнительном условии $b = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля).

Но мы будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbb{R}_+^1\{v\}$ и касательного расслоения $TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ приняла вид (2.5.1), (2.5.2).

Только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого унимодулярного преобразования.

Система (2.5.3), (2.5.4) имеет более общий вид, чем система (2.2.21)–(2.2.23), взятая из динамики твердого тела; в частности, они совпадают при

$$b = -b_1, \quad \mu = 1, \quad \delta(\alpha) = \sin \alpha, \quad F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha),$$

$$f_1(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_2(\alpha) \equiv -1,$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}.$$

Силовое поле в уравнениях на v' , Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α' , а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ , и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [18, 29, 30]).

2.6. Системы со знакопеременной диссипацией.

2.6.1. Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы. Перейдем теперь к интегрированию системы пятого порядка (2.5.1), (2.5.2) при выполнении свойств (2.3.9), (2.3.10), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (2.5.1), (2.5.2) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-либо комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [61–63]).

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2.4 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (2.3.9), (2.3.10) на пять функций: на две функции $f(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и на три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Тогда система (2.5.2) распадается следующим образом (для универсальности переменных, что будет видно в больших размерностях, переобозначим $Z_1 = w_1$, $Z_2 = w_2$):

$$\begin{aligned} \alpha' &= w_2 + b(w_1^2 + w_2^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \\ w_2' &= F(\alpha) - \Gamma_2(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}w_1^2 - w_2\Psi(\alpha, w_1, w_2), \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= \Gamma_2(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}w_1w_2 - w_1\Psi(\alpha, w_1, w_2), \\ \beta' &= w_1\frac{f(\alpha)}{f_2(\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{2.6.3}$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \tag{2.6.4}$$

Условие (2.6.3) назовем «геометрическим», а условие (2.6.4) — «энергетическим». Условие (2.6.3) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_2(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду

относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения. Условие (2.6.4) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [70–72]).

Теорема 2.4. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются условия (2.6.3) и (2.6.4). Тогда система (2.5.1), (2.6.1), (2.6.2) обладает полным набором — четырьмя (одним гладким и тремя, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает четырьмя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2.4 для начала сопоставим системе третьего порядка (2.6.1) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)w_1^2/f_2^2(\alpha) + bw_2(w_1^2 + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_2F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_2 + b(w_1^2 + w_2^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \frac{dw_1}{d\alpha} &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)w_1w_2/f_2^2(\alpha) + bw_1(w_1^2 + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_1F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_2 + b(w_1^2 + w_2^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_2 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_1 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \quad (2.6.6)$$

приводим систему (2.6.5) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 &= \\ &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_2^2(\alpha) + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_2F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 &= \\ &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_2^2(\alpha) + bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_1F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

которая переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_2^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha)u_2^2 - b_1\mu u_2F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{[f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)/f_2^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)/\Delta(\alpha)]\Delta^2(\alpha)u_1u_2 - b_1\mu u_1F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}; \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

напомним, что $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (2.6.8) нам потребуется выполнение геометрического и энергетического условий (2.6.3) и (2.6.4). Действительно, после их выполнения из системы (2.6.8) вытекают следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (2.6.10)$$

Уравнение (2.6.10) имеет вид уравнения Абеля (см. [10, 82]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$ данное уравнение имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (2.6.11)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_2, w_1; \alpha) = G_1 \left(\frac{w_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_1}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{w_2^2 + w_1^2 + b_1 \lambda \mu w_2 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{w_1 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (2.6.12)$$

Система (2.5.1) (после замены $Z \rightarrow w$), (2.6.1), (2.6.2) является динамической системой с переменной диссипацией. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (или в систему (2.3.4), (2.3.5), в которой необходимо перейти к новой независимой переменной по формуле (2.3.21), или в систему (2.3.23), (2.3.24), в которой уже введены фазовые переменные (2.3.22)). Так, система (2.3.4), (2.3.5) при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (2.3.18), (2.3.19).

Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (2.6.1), (2.6.2) при участии уравнения

$$v' = v \Psi(\alpha, w), \quad \Psi(\alpha, w) = -b(w_1^2 + w_2^2) \tilde{\Delta}(\alpha) \quad (2.6.13)$$

при условии (2.6.4) обладает первым интегралом вида

$$\Theta \Big|_{B=0} (B; v; w_2, w_1; \alpha) = v^2(w_1^2 + w_2^2 - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (2.6.14)$$

где

$$\Theta(B; v; w_2, w_1; \alpha) = v^2(w_1^2 + w_2^2 + B \lambda \mu w_2 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha))$$

— семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (2.6.14), (2.3.19) также является первым интегралом системы (2.6.13), (2.6.1), (2.6.2) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta \Big|_{B=b_1} (B; v; w_2, w_1; \alpha) = v^2(w_1^2 + w_2^2 + b_1 \lambda \mu w_2 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const} \quad (2.6.15)$$

и (2.3.19) по отдельности не является первым интегралом системы (2.5.1), (2.6.1), (2.6.2). Однако отношение функций (2.6.15), (2.3.19) является первым интегралом (2.6.12) системы (2.5.1), (2.6.1), (2.6.2) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [65–67]).

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.6.1) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.6.11) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_1 \lambda \mu}{2} \right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2}{4} + \lambda. \quad (2.6.16)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2 + 4\lambda \geq 0, \quad (2.6.17)$$

и фазовое пространство системы (2.6.1) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.6.16). Таким образом, в силу соотношения (2.6.11) первое уравнение системы (2.6.8) при условиях (2.6.3) и (2.6.4) можно переписать в виде

$$\Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (2.6.18)$$

Тогда дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (2.6.1) при $\kappa = -1$ найдется из следующего уравнения Бернулли:

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1\lambda\}\Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)}, \quad (2.6.19)$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\}, \quad u(u_2) = \lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2;$$

при этом постоянная C_1 выбирается из условия (2.6.17).

Замечание 2.3. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть выражения (2.6.11). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_2, w_1; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (2.6.20)$$

Выражение первого интеграла (2.6.20) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы пятого порядка (2.5.1), (2.6.1), (2.6.2) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (2.6.1). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще два (дополнительных) первых интеграла, привязывающих уравнения (2.5.1) и (2.6.2).

Для получения искомого первого интеграла, привязывающего уравнение (2.6.2), общий подход заключается в следующем. Получим из рассматриваемой системы (2.5.1), (2.6.1), (2.6.2) следующее уравнение:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{w_1 f(\alpha)}{w_2 f_2(\alpha) + b(w_1^2 + w_2^2)\delta(\alpha) + b_1\lambda\delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))}. \quad (2.6.21)$$

По причине того, что выше были найдены два функционально независимых первых интеграла (2.6.12), (2.6.20), не зависящих от фазовой переменной β , то, по теореме о неявной функции, поскольку

$$\frac{\partial(\Theta_1(w_2, w_1; \alpha), \Theta_2(w_2, w_1; \alpha))}{\partial(w_2, w_1)} \neq 0 \quad (2.6.22)$$

почти всюду, то в фазовом пространстве существуют достаточно гладкие функции

$$w_2 = W_2(\alpha; C_1, C_2), \quad w_1 = W_1(\alpha; C_1, C_2), \quad (2.6.23)$$

при подстановке в первые интегралы (2.6.12), (2.6.20) дающие тождества, а значит, сотканые из решений рассматриваемой системы.

Таким образом, при подстановке функций (2.6.23) в уравнение (2.6.21) имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\alpha} &= \Xi(\alpha; C_1, C_2) = \\ &= \frac{W_1(\alpha; C_1, C_2)f(\alpha)}{W_2(\alpha; C_1, C_2)f_2(\alpha) + b(W_1^2(\alpha; C_1, C_2) + W_2^2(\alpha; C_1, C_2))\delta(\alpha) + b_1\lambda\delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))}, \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

позволяющее найти искомое инвариантное соотношение в квадратурах:

$$\beta - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Xi(a; C_1, C_2) da = C_3 = \text{const}. \quad (2.6.25)$$

Последнее соотношение имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_3(\alpha, \beta) = G_3(\alpha, \beta, C_1, C_2) = C_3 = \text{const}. \quad (2.6.26)$$

Наконец, нетрудно проверить, что у системы (2.5.1), (2.6.1), (2.6.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (1.5.17)), который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; w_2, w_1; \alpha) = v^2 \left(1 + 2bw_2\Delta(\alpha) - b^2\mu(w_1^2 + w_2^2) \right) = C_0 = \text{const} \quad (2.6.27)$$

и привязывает уравнение (2.5.1).

Продолжим доказательство теоремы 2.4. Составная рассматриваемая система (2.5.1), (2.6.1), (2.6.2) при выполнении свойств (2.6.3), (2.6.4) имеет следующий вид ($w_1^* = \ln |w_1|$):

$$v' = X_v(v; w_2, w_1^*; \alpha) = v\Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1\lambda\Delta^2(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (2.6.28)$$

$$\alpha' = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha) = w_2 + b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)),$$

$$w_2' = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_1^*} - w_2\Psi_1(\alpha, w), \quad (2.6.29)$$

$$w_1'^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 - \Psi_1(\alpha, w),$$

$$\beta' = X_\beta(w_1^*; \alpha) = e^{w_1^*} \frac{f(\alpha)}{f_2(\alpha)}. \quad (2.6.30)$$

В принципе, замена $w_1 \rightarrow w_1^*$ носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_1^* , так и переменную w_1 .

Для составной системы (2.6.28)–(2.6.30) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta) dv \wedge dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения с частными производными:

$$\text{div} [\rho(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta) X(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)] = 0, \quad (2.6.31)$$

где

$$\begin{aligned} X(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta) = \\ = \left\{ X_v(v; w_2, w_1^*; \alpha), X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha), X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha), X_\beta(w_1^*; \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (2.6.32)$$

— векторное поле составной системы (2.6.28)–(2.6.30) в координатах $(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$. Уравнение (2.6.31) переписется в виде

$$\begin{aligned} X_v(v; w_2, w_1^*; \alpha)\rho_v + X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_{w_2} + \\ + X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_{w_1^*} + X_\beta(w_1^*; \alpha)\rho_\beta = -\rho \text{div} X(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

Как было указано выше для систем меньшего порядка, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$ дивергенции векторного поля $X(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$ системы (2.6.28)–(2.6.30) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля $\rho(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)X(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$ преобразованной системы (т.е. системы (2.6.28)–(2.6.30), умноженной на $\rho(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$) после замены $\rho(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)d/dt_1 = d/dt_2$ старой независимой переменной t_1 при переходе к новой независимой переменной t_2 в системе (2.6.28)–(2.6.30).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $X(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$ системы (2.6.28)–(2.6.30) функцию $\rho_2(v) = v^3$ из (1.3.18) (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2) и (2.3.23), (2.3.24)). Имеем:

$$\begin{aligned} \text{div} [v^3 X(v; w_2, w_1^*; \alpha, \beta)] = & -4v^3 b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_1^*} + w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + \\ & + v^3 b(e^{2w_1^*} + 3w_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_1^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 4v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\ & + v^3 b_1 \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)(\mu - 3\Delta^2(\alpha)) - v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - 0 + 0 \equiv v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha). \end{aligned}$$

Тогда преобразованная система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (2.6.33) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v^3 X_v(v; w_2, w_1^*; \alpha), & w_1'^* &= v^3 X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \alpha' &= v^3 X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha), & \beta' &= v^3 X_\beta(w_1^*; \alpha), \\ w_2' &= v^3 X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), & \rho' &= -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho \end{aligned} \quad (2.6.34)$$

(здесь штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной).

У системы, состоящей из первых пяти уравнений системы (2.6.34), уже найдены четыре первых интеграла (2.6.27), (2.6.12), (2.6.20) и (2.6.26) (полный набор). Найдем и дополнительный первый интеграл, привязывающий уравнение (последнее уравнение системы (2.6.34)) на функцию ρ . Действительно, из системы уравнений (2.6.34) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_2 + b(w_1^2 + w_2^2) \Delta(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))}. \quad (2.6.35)$$

Вводя в рассмотрение однородные координаты (2.6.6), имеем:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))} \quad (2.6.36)$$

или

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (2.6.37)$$

Теперь из соотношения (2.6.37) и первого соотношения (2.6.9) вытекает следующее дифференциальное равенство (при $\kappa = -1$):

$$\frac{d\rho}{du_2} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2 + u_1^2}, \quad (2.6.38)$$

а из него — следующая квадратура:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{[b_1 \lambda \mu] du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1 U(C_1, u_2) \quad (2.6.39)$$

(о функциях $u(u_2)$ и $U(C_1, u_2)$ см. (2.6.19)). Становится справедливым следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}.$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} dv \wedge dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta, \quad u_2 = \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (2.6.33) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3], \quad (2.6.40)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]$ — произвольная гладкая функция четырех аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — четыре независимых первых интеграла (2.6.27), (2.6.12), (2.6.20), (2.6.26) соответственно.

В частности, в качестве четырех функционально независимых решений линейного уравнения (2.6.33) в частных производных можно взять следующие функции ($u_k = w_k/\Delta(\alpha)$, $k = 1, 2$, $w_1^* = \ln |w_1|$):

$$\rho_0(v; w_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_0(v; w_2, w_1^*; \alpha), \quad (2.6.41)$$

$$\rho_1(v; w_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_2, w_1^*; \alpha), \quad (2.6.42)$$

$$\rho_2(v; w_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_2, w_1^*; \alpha), \quad (2.6.43)$$

$$\rho_3(v; w_2; \alpha, \beta) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(\alpha, \beta). \quad (2.6.44)$$

Теорема 2.4 доказана. $\square$

Заметим, что все найденные в разделе 2.6.1 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (2.5.1), (2.5.2) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (2.5.3), (2.5.4). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_2(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

В заключение сделаем некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразно. В данном разделе 2 предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем пятого порядка. Эти наборы содержат почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — характеризуют подкачку энергии. Результат исключительно интересен тем, что все это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы.

Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.

17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.

43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
53. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
55. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
56. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
57. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
58. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
60. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
61. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
62. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 215. — С. 81–94.
63. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.

64. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
65. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
66. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
67. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
68. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
69. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
70. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
72. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
73. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
74. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
75. Шамолин М. В. Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
76. Шамолин М. В. Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 514, № 1. — С. 98–106.
77. Шамолин М. В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 512, № 1. — С. 10–17.
78. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
79. Шамолин М. В. Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы// Диффер. уравн. — 2024. — 60, № 3. — С. 322–345.
80. Шамолин М. В. Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2024. — 516, № 1. — С. 65–74.
81. Шамолин М. В. Инварианты систем с малым числом степеней свободы, обладающих диссипацией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 2. — С. 3–15.
82. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. — New York: Chapman and Hall, 2017.
83. Poincaré H. Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
84. Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.

85. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms (*Vasilyev V.*, ed.). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 76–86
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-76-86

УДК 517.972.7, 004.032.26

ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

© 2024 г. С. Г. ШОРОХОВ

Аннотация. Рассматривается задача построения функционала потерь на основе квазиклассического вариационного принципа для обучения нейронной сети, аппроксимирующей решения гиперболического уравнения. При помощи метода симметризирующего оператора В. М. Шалова построен вариационный функционал краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка, содержащий интегралы по области краевой задачи и фрагменту ее границы, зависящие от производных первого порядка неизвестной функции. Показано, что нейронная сеть, аппроксимирующая решение рассматриваемой краевой задачи, может быть обучена с применением построенного вариационного функционала.

Ключевые слова: вариационный принцип, гиперболическое уравнение, нейронная сеть, функционал потерь.

TRAINING A NEURAL NETWORK FOR A HYPERBOLIC EQUATION BY USING A QUASICLASSICAL FUNCTIONAL

© 2024 S. G. SHOROKHOV

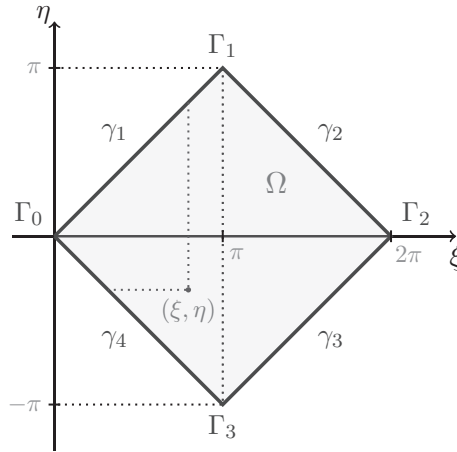
ABSTRACT. We study the problem of constructing a loss functional based on the quasiclassical variational principle for training a neural network, which approximates solutions of a hyperbolic equation. Using the method of symmetrizing operator proposed by V. M. Shalov, for the second-order hyperbolic equation, we construct a variational functional of the boundary-value problem, which involves integrals over the domain of the boundary-value problem and a segment of the boundary, depending on first-order derivatives of the unknown function. We demonstrate that the neural network approximating the solution of the boundary-value problem considered can be trained by using the constructed variational functional.

Keywords and phrases: variational principle, hyperbolic equation, neural network, loss functional.

AMS Subject Classification: 35A15, 68T07

1. Введение. Вариационные принципы для непотенциальных операторов (см. [3]) применяются для решения широкого круга теоретических и прикладных задач, моделируемых уравнениями с частными производными. Современным подходом к решению краевых задач для уравнений с частными производными является аппроксимация решений при помощи искусственных нейронных сетей различной архитектуры (см. [9]). Для обучения нейронных сетей требуются функционалы потерь (ошибки), в качестве которых для нейронных сетей, аппроксимирующих решения дифференциальных уравнений, обычно применяются функционалы невязки (см. [9, 10]), реже

Работа выполнена в рамках проекта № 002092-0-000 Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Рис. 1. Область Ω краевой задачи (1)–(2)

энергетические функционалы (потенциалы; см. [7]). Однако, как отмечалось в [8, 12], для обучения нейронных сетей также могут быть использованы квазиклассические функционалы теории вариационных принципов для непотенциальных операторов (см. [3]).

Квазиклассический функционал краевой задачи для гиперболического уравнения с частными производными был получен В. М. Шаловым (см. [6]), альтернативный квазиклассический функционал краевой задачи для гиперболического уравнения с другим набором граничных условий был построен В. М. Филипповым (см. [2]).

2. Построение вариационной формулировки гиперболического уравнения. Метод построения вариационных формулировок для краевых задач, предложенный В. М. Шаловым (см. [4, 5]), состоит в построении таких двух векторных операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в гильбертовом пространстве H , что оператор $\mathbf{A}$ является $\mathbf{B}$ -симметричным:

$$\langle \mathbf{A}u, \mathbf{B}v \rangle = \langle \mathbf{B}u, \mathbf{A}v \rangle, \quad u \in H, \quad v \in H,$$

и $\mathbf{B}$ -положительным:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}u, \mathbf{B}u \rangle &> 0, \quad u \in H, \quad u \neq 0, \\ \langle \mathbf{A}u_n, \mathbf{B}u_n \rangle &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad u_n \in H \quad \Rightarrow \quad \|u_n\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

причем краевая задача (уравнение с частными производными и граничные условия) должна быть представлена в виде

$$\mathbf{A}u = \mathbf{f},$$

где $\mathbf{f}$ — вектор-функция. Тогда вариационный функционал для рассматриваемой краевой задачи записывается в виде

$$D[u] = \langle \mathbf{A}u, \mathbf{B}u \rangle - 2 \langle \mathbf{f}, \mathbf{B}u \rangle.$$

В. М. Шалов сформулировал и исследовал вариационную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа, заданного в области достаточно общего вида со смешанными граничными условиями, заданными на всей границе, установил существование и единственность решения вариационной и краевой задач (см. [6]).

Рассмотрим область Ω в форме ромба с вершинами в точках $\Gamma_0(0, 0)$, $\Gamma_1(\pi, \pi)$, $\Gamma_2(2\pi, 0)$, $\Gamma_3(\pi, -\pi)$, где отрезок γ_1 соединяет точки $\Gamma_0(0, 0)$ и $\Gamma_1(\pi, \pi)$, отрезок γ_2 соединяет точки $\Gamma_1(\pi, \pi)$ и $\Gamma_2(2\pi, 0)$, отрезок γ_3 соединяет точки $\Gamma_2(2\pi, 0)$ и $\Gamma_3(\pi, -\pi)$, отрезок γ_4 соединяет точки $\Gamma_3(\pi, -\pi)$ и $\Gamma_0(0, 0)$ (см. рис. 1). Область Ω не соответствует ограничениям на область краевой задачи, установленным в [6], однако подход В. М. Шалова к построению вариационного функционала применим и для области Ω на рис. 1.

Рассмотрим построение вариационной формулировки для однородного гиперболического уравнения

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad (\xi, \eta) \in \Omega, \quad (1)$$

в области Ω с граничными условиями

$$u|_{\gamma_1} = \chi_1(\xi), \quad u_\eta|_{\gamma_2} = \varphi_2(\eta), \quad u_\eta|_{\gamma_3} = \varphi_3(\eta), \quad u_\xi|_{\gamma_3} = \psi_3(\xi), \quad u_\xi|_{\gamma_4} = \psi_4(\xi). \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем использование греческих символов в качестве нижнего индекса означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Решение задачи (1)–(2) ищется в классе функций $W_2^1(\Omega)$, при этом предполагается, что функции в правых частях (2) измеримы, т.е. $(\chi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_3, \psi_4) \in L_2(\gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_3 \times \gamma_4)$, и граничные условия (2) совместны.

Компоненты внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе $\partial\Omega$ на различных участках границы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ вычисляются по формулам:

$$\mathbf{n}(\gamma_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1), \quad \mathbf{n}(\gamma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \mathbf{n}(\gamma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \quad \mathbf{n}(\gamma_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1).$$

Следуя [6], построим векторные операторы

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} : W_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega \times \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_3 \times \gamma_4)$$

следующим образом. Первую компоненту векторного оператора $\mathbf{A}$, действующую на Ω , определим формулой

$$(\mathbf{A}u)_1 = u_{\xi\eta}, \quad (\xi, \eta) \in \Omega.$$

Соответствующую первую компоненту вспомогательного (симметризирующего) векторного оператора $\mathbf{B}$ на Ω определим равенством

$$(\mathbf{B}v)_1 = \int_{\xi}^{\gamma_1 \cup \gamma_4} v_\eta(\zeta, \eta) d\zeta + \int_{\eta}^{\gamma_1 \cup \gamma_2} v_\xi(\xi, \tau) d\tau, \quad (\xi, \eta) \in \Omega.$$

Здесь интегрирование по переменной ζ ведется при фиксированном значении η от значения ξ до соответствующего значения на одной из кривых γ_1 или γ_4 (в зависимости от значения η), а интегрирование по переменной τ ведется при фиксированном значении ξ от значения η до соответствующего значения на одной из кривых γ_1 или γ_2 .

Последующие компоненты векторных операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, действующие на участках границы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3, \gamma_4$ соответственно, определим формулами:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}u)_2 &= u, \quad (\mathbf{B}v)_2 = v, & (\xi, \eta) &\in \gamma_1, \\ (\mathbf{A}u)_3 &= u_\eta, \quad (\mathbf{B}v)_3 = -n_1(\gamma_2) \int_{\xi}^{\gamma_1} v_\eta(\zeta, \eta) d\zeta, & (\xi, \eta) &\in \gamma_2, \\ (\mathbf{A}u)_4 &= u_\eta, \quad (\mathbf{B}v)_4 = -n_1(\gamma_3) \int_{\xi}^{\gamma_4} v_\eta(\zeta, \eta) d\zeta, & (\xi, \eta) &\in \gamma_3, \\ (\mathbf{A}u)_5 &= u_\xi, \quad (\mathbf{B}v)_5 = -n_2(\gamma_3) \int_{\eta}^{\gamma_2} v_\xi(\xi, \tau) d\tau, & (\xi, \eta) &\in \gamma_3, \\ (\mathbf{A}u)_6 &= u_\xi, \quad (\mathbf{B}v)_6 = -n_2(\gamma_4) \int_{\eta}^{\gamma_1} v_\xi(\xi, \tau) d\tau, & (\xi, \eta) &\in \gamma_4. \end{aligned}$$

Здесь $n_i(\gamma_j)$ — i -я компонента внешней нормали $\mathbf{n}$ к участку границы γ_j .

Итак, векторный дифференциальный оператор $\mathbf{A}$, векторный интегродифференциальный оператор $\mathbf{B}$ и вектор-функция $\mathbf{f}$ определяются равенствами

$$\mathbf{A}u = \begin{bmatrix} u_{\xi\eta} \\ u \\ u_{\eta} \\ u_{\eta} \\ u_{\xi} \\ u_{\xi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}v = \begin{bmatrix} \int_{\xi}^{\gamma_1 \cup \gamma_4} v_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta + \int_{\eta}^{\gamma_1 \cup \gamma_2} v_{\xi}(\xi, \tau) d\tau \\ v \\ -n_1(\gamma_2) \int_{\xi}^{\gamma_1} v_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta \\ -n_1(\gamma_3) \int_{\xi}^{\gamma_4} v_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta \\ -n_2(\gamma_3) \int_{\eta}^{\gamma_2} v_{\xi}(\xi, \tau) d\tau \\ -n_2(\gamma_4) \int_{\eta}^{\gamma_1} v_{\xi}(\xi, \tau) d\tau \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}.$$

Вектор-функции $\mathbf{A}u$, $\mathbf{B}v$ и $\mathbf{f}$ определены на декартовом произведении $\Omega \times \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_3 \times \gamma_4$.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{A}u$ и $\mathbf{B}v$ вычисляется путем перемножения соответствующих компонент, вычисления интегралов по соответствующим множествам и суммирования получившихся значений по формуле

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}u, \mathbf{B}v \rangle = & \int_{\Omega} (\mathbf{A}u)_1 (\mathbf{B}v)_1 d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} (\mathbf{A}u)_2 (\mathbf{B}v)_2 ds + \int_{\gamma_2} (\mathbf{A}u)_3 (\mathbf{B}v)_3 ds + \\ & + \int_{\gamma_3} (\mathbf{A}u)_4 (\mathbf{B}v)_4 ds + \int_{\gamma_3} (\mathbf{A}u)_5 (\mathbf{B}v)_5 ds + \int_{\gamma_4} (\mathbf{A}u)_6 (\mathbf{B}v)_6 ds. \end{aligned}$$

Вычисление скалярного произведения векторов $\mathbf{A}u$ и $\mathbf{B}v$ при помощи формулы многомерного интегрирования по частям [11] дает равенство

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}u, \mathbf{B}v \rangle = & \int_{\Omega} (u_{\xi} v_{\xi} + u_{\eta} v_{\eta}) d\xi d\eta + \int_{\gamma_2} u_{\eta} \int_{\xi}^{\gamma_1} v_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta n_1(\gamma_2) ds + \\ & + \int_{\gamma_3} \left[u_{\eta} \int_{\xi}^{\gamma_4} v_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta n_1(\gamma_3) + u_{\xi} \int_{\eta}^{\gamma_2} v_{\xi}(\xi, \tau) d\tau n_2(\gamma_3) \right] ds + \int_{\gamma_4} u_{\xi} \int_{\eta}^{\gamma_1} v_{\xi}(\xi, \tau) d\tau n_2(\gamma_4) ds + \\ & + \int_{\gamma_1} uv ds - \int_{\gamma_2} u_{\eta} n_1(\gamma_2) \int_{\xi}^{\gamma_1} v_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds - \int_{\gamma_3} u_{\eta} n_1(\gamma_3) \int_{\xi}^{\gamma_4} v_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds - \\ & - \int_{\gamma_3} u_{\xi} n_2(\gamma_3) \int_{\eta}^{\gamma_2} v_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds - \int_{\gamma_4} u_{\xi} n_2(\gamma_4) \int_{\eta}^{\gamma_1} v_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds, \end{aligned}$$

в котором все криволинейные интегралы, кроме интеграла по γ_1 , сокращаются, и формула для скалярного произведения приобретает следующий простой вид:

$$\langle \mathbf{A}u, \mathbf{B}v \rangle = \int_{\Omega} (u_{\xi} v_{\xi} + u_{\eta} v_{\eta}) d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} uv ds,$$

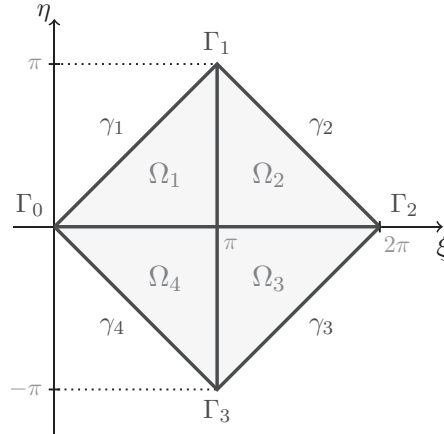


Рис. 2. Подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ области Ω краевой задачи (1)–(2)

из которого вытекает $\mathbf{B}$ -симметричность оператора $\mathbf{A}$. Далее имеем

$$\langle \mathbf{A}u, \mathbf{B}u \rangle = \int_{\Omega} (u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2) d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} u^2 ds,$$

откуда, очевидно, вытекает $\mathbf{B}$ -положительность оператора $\mathbf{A}$.

Теорема 1. *Вариационный функционал В. М. Шалова (см. [6]) для рассматриваемой краевой задачи (1)–(2) имеет вид*

$$\begin{aligned} D[u] = & \int_{\Omega} (u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2) d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} u^2 ds - 2 \int_{\gamma_1} \chi_1 u ds + \\ & + 2 \int_{\gamma_1} \chi_1 u ds + 2 \int_{\gamma_2} \varphi_2 n_1(\gamma_2) \int_{\xi}^{\gamma_1} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds + 2 \int_{\gamma_3} \varphi_3 n_1(\gamma_3) \sin \xi \int_{\xi}^{\gamma_4} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds + \\ & + 2 \int_{\gamma_3} \psi_3 n_2(\gamma_3) \int_{\eta}^{\gamma_2} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds + 2 \int_{\gamma_4} \psi_4 n_2(\gamma_4) \int_{\eta}^{\gamma_1} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds. \quad (3) \end{aligned}$$

При использовании в качестве функционала потерь интегральный функционал обычно оценивается при помощи метода интегрирования Монте-Карло (см. [1]). Функционал (3) содержит четыре повторных интеграла, которые при оценке методом Монте-Карло потребуют значительных вычислительных ресурсов, поэтому желательно построить форму вариационного функционала (3), не содержащую повторных интегралов.

3. Преобразование вариационного функционала. Область краевой задачи Ω можно рассматривать как объединение четырех подобластей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ (см. рис. 2):

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4.$$

Перейдем в криволинейных интегралах по $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ к переменным ξ, η и интегрированию по подобластям $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ с учетом того, что дифференциал длины дуги на $\partial\Omega$ равен $ds = \sqrt{2}d\zeta$ или $ds = \sqrt{2}d\eta$ в зависимости от параметризации кривой.

При вычислении криволинейного интеграла вдоль γ_2 используем параметризацию по переменной η , а именно, $\xi = 2\pi - \eta$, $0 \leq \eta \leq \pi$, $ds = \sqrt{2}d\eta$; тогда

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \varphi_2(\eta) n_1 \int_{\xi}^{\gamma_1} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds &= \int_0^{\pi} \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_2(\eta) \int_{2\pi-\eta}^{\gamma_1} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \\
&= \int_0^{\pi} \varphi_2(\eta) \int_{2\pi-\eta}^{\eta} u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_0^{\pi} \int_{\eta}^{2\pi-\eta} \varphi_2(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi_2(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

При вычислении первого криволинейного интеграла вдоль γ_3 также используем параметризацию по переменной η , а именно, $\xi = \eta + 2\pi$, $-\pi \leq \eta \leq 0$, $ds = \sqrt{2}d\eta$; тогда

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \varphi_3 n_1 \sin \xi \int_{\xi}^{\gamma_4} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds &= \int_{-\pi}^0 \sqrt{2} \varphi_3(\eta) \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta+2\pi}^{\gamma_4} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \\
&= \int_{-\pi}^0 \varphi_3(\eta) \int_{\eta+2\pi}^{-\eta} u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_{-\pi}^0 \int_{-\eta}^{\eta+2\pi} \varphi_3(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \varphi_3(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

При вычислении второго криволинейного интеграла вдоль γ_3 используем параметризацию по другой переменной ξ , а именно, $\eta = \xi - 2\pi$, $\pi \leq \xi \leq 2\pi$, $ds = \sqrt{2}d\xi$; тогда

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \psi_3 n_2 \int_{\eta}^{\gamma_2} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds &= \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2} \psi_3(\xi) \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_{\xi-2\pi}^{\gamma_2} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau d\xi = \\
&= - \int_{\pi}^{2\pi} \psi_3(\xi) \int_{\xi-2\pi}^{2\pi-\xi} u_{\xi}(\xi, \eta) d\eta d\xi = - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\xi-2\pi}^{2\pi-\xi} \psi_3(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\eta d\xi = - \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \psi_3(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

При вычислении криволинейного интеграла вдоль γ_4 также используем параметризацию по переменной ξ , а именно, $\eta = -\xi$, $0 \leq \xi \leq \pi$, $ds = \sqrt{2}d\xi$; тогда

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_4} \psi_4 n_2 \int_{\eta}^{\gamma_1} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds &= \int_0^{\pi} \sqrt{2} \psi_4(\xi) \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_{-\xi}^{\gamma_1} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau d\xi = \\
&= - \int_0^{\pi} \psi_4(\xi) \int_{-\xi}^{\xi} u_{\xi}(\xi, \eta) d\eta d\xi = - \int_0^{\pi} \int_{-\xi}^{\xi} \psi_4(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\eta d\xi = - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \psi_4(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Итак, вычисление повторных интегралов в (3) дает следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \varphi_2(\eta) n_1 \int_{\xi}^{\gamma_1} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds &= - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi_2(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\
\int_{\gamma_3} \varphi_3 n_1 \sin \xi \int_{\xi}^{\gamma_4} u_{\eta}(\zeta, \eta) d\zeta ds &= - \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \varphi_3(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\
\int_{\gamma_3} \psi_3 n_2 \int_{\eta}^{\gamma_2} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds &= - \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \psi_3(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\
\int_{\gamma_4} \psi_4 n_2 \int_{\eta}^{\gamma_1} u_{\xi}(\xi, \tau) d\tau ds &= - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \psi_4(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

С учетом вычисленных повторных интегралов вариационный функционал (3) для краевой задачи (1)–(2) принимает вид

$$D[u] = \int_{\Omega} (u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2) d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} u^2 ds - 2 \int_{\gamma_1} \chi_1 u ds - 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi_2(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\ - 2 \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \varphi_3(\eta) u_{\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \psi_3(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \psi_4(\xi) u_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Для того, чтобы сгруппировать интегралы в полученном выражении, определим вспомогательные функции Φ , Ψ следующими формулами:

$$\Phi(\eta) = \begin{cases} \varphi_2(\eta), & 0 \leq \eta \leq \pi, \\ \varphi_3(\eta), & -\pi \leq \eta < 0, \end{cases}, \quad \Psi(\xi) = \begin{cases} \psi_3(\xi), & \pi \leq \xi \leq 2\pi, \\ \psi_4(\xi), & 0 \leq \xi < \pi, \end{cases}$$

и получим окончательную форму вариационного функционала для рассматриваемой краевой задачи.

Теорема 2. *Вариационный функционал для краевой задачи (1)–(2) может быть записан в следующем компактном виде*

$$D[u] = \int_{\Omega} (u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2 - 2\Phi u_{\eta} - 2\Psi u_{\xi}) d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} (u^2 - 2\chi_1 u) ds. \quad (4)$$

4. Обучение нейронной сети для гиперболического уравнения. Решение $u(\xi, \eta)$ краевой задачи (1)–(2) может быть аппроксимировано искусственной нейронной сетью с выходом $f(\xi, \eta; \theta)$, где ξ, η — входные значения нейронной сети, а θ — вектор параметров (весов и смещений) нейронной сети:

$$u(\xi, \eta) \approx f(\xi, \eta; \theta).$$

При обучении нейронной сети в качестве функционала потерь (ошибки) может быть использован функционал невязки (residual functional)

$$\mathcal{L}_R(f) = \int_{\Omega} f_{\xi\eta}^2 d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} (f - \chi_1)^2 ds + \int_{\gamma_2} (f_{\eta} - \varphi_2)^2 ds + \\ + \int_{\gamma_3} ((f_{\eta} - \varphi_3)^2 + (f_{\xi} - \psi_3)^2) ds + \int_{\gamma_4} (f_{\xi} - \psi_4)^2 ds. \quad (5)$$

При использовании функционала (5) приходится вычислять пять интегралов, входящих в $\mathcal{L}_R(f)$, для чего необходимо строить случайные выборки из пяти различных областей: Ω , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_4 , и вычислять частные производные неизвестной функции f до второго порядка включительно.

Также при обучении нейронной сети в качестве функционала потерь (ошибки) может быть использован функционал на основе построенного ранее квазиклассического функционала (4)

$$\mathcal{L}_Q(f) = \int_{\Omega} (f_{\xi}^2 + f_{\eta}^2 - 2\Phi f_{\eta} - 2\Psi f_{\xi}) d\xi d\eta + \int_{\gamma_1} (f^2 - 2\chi_1 f) ds. \quad (6)$$

При использовании квазиклассического функционала (6) приходится вычислять два интеграла, входящих в $\mathcal{L}_Q(f)$, и, соответственно, строить две случайных выборки: из области Ω и из фрагмента границы γ_1 , и вычислять частные производные неизвестной функции f первого порядка.

Поэтому при использовании квазиклассического функционала (6) возникает экономия требуемых вычислительных ресурсов по сравнению с использованием функционала невязки (5) за счет использования меньшего числа случайных выборок и вычисления частных производных более низкого порядка.

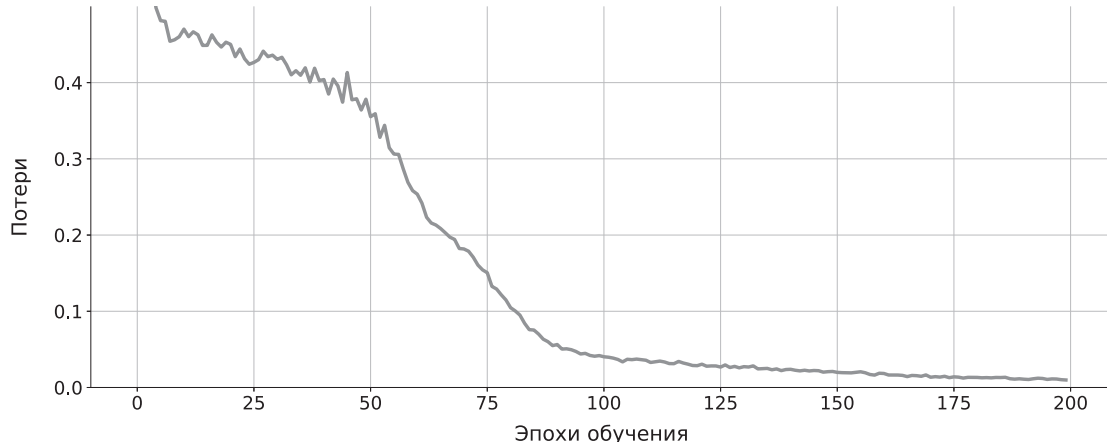


Рис. 3. Кривая обучения нейронной сети при помощи функционала невязки

Проведем вычислительный эксперимент по обучению нейронных сетей для аппроксимации решения гиперболического уравнения (1) с граничными условиями (2) для случая, когда

$$\chi_1(\xi) \equiv 0, \quad \varphi_2(\eta) = -\frac{1}{2} \sin 2\eta, \quad \varphi_3(\eta) = -\frac{1}{2} \sin 2\eta, \quad \psi_3(\xi) = \frac{1}{2} \sin 2\xi, \quad \psi_4(\xi) = \frac{1}{2} \sin 2\xi,$$

и точное решение краевой задачи (1)–(2) равно

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \cos 2\xi + \frac{1}{4} \cos 2\eta.$$

В качестве функционалов потерь в вычислительном эксперименте будем использовать функционал невязки (5) и квазиклассический функционал (6).

Вычислительный эксперимент проводится для указанной ниже архитектуры нейронной сети при следующих значениях гиперпараметров:

- используется нейронная сеть прямого распространения (FF) с плотными (Dense) слоями;
- число скрытых слоев равно 4 с функцией активации $\tanh$ (гиперболический тангенс);
- количество нейронов в скрытых слоях равно 100;
- в выходном слое один нейрон без функции активации;
- производится 200 эпох обучения с 10 шагами стохастического градиентного спуска (SGD) для каждой эпохи;
- используется оптимизатор Adam с начальной скоростью обучения 0,0001;
- при сэмплировании выбирается по 1000 точек из области Ω и по 500 точек для каждого участка границы $\partial\Omega$.

Программный код обучения нейронной сети для краевой задачи (1)–(2) реализован с использованием фреймворка TensorFlow и выполняется на компьютере MacBook Pro с процессором M2Max.

При обучении нейронной сети на функционале невязки (5) в качестве функционала потерь кривая обучения показана на рис. 3, абсолютная ошибка полученной нейросетевой аппроксимации визуализирована на рис. 4. Процесс обучения продолжался 119,5 с, в результате построена модель нейронной сети со следующими показателями качества (среднеквадратической ошибки MSE , средней абсолютной ошибки MAE , коэффициента детерминации R^2):

$$MSE = 0,00966, \quad MAE = 0,07097, \quad R^2 = 83,92\%.$$

При обучении нейронной сети на квазиклассическом функционале (6) в качестве функционала потерь кривая обучения показана на рис. 5, абсолютная ошибка полученной нейросетевой аппроксимации визуализирована на рис. 6. Процесс обучения продолжался 41,6 с, в результате построена модель нейронной сети со следующими показателями качества:

$$MSE = 0,00001, \quad MAE = 0,00215, \quad R^2 = 99,97\%.$$

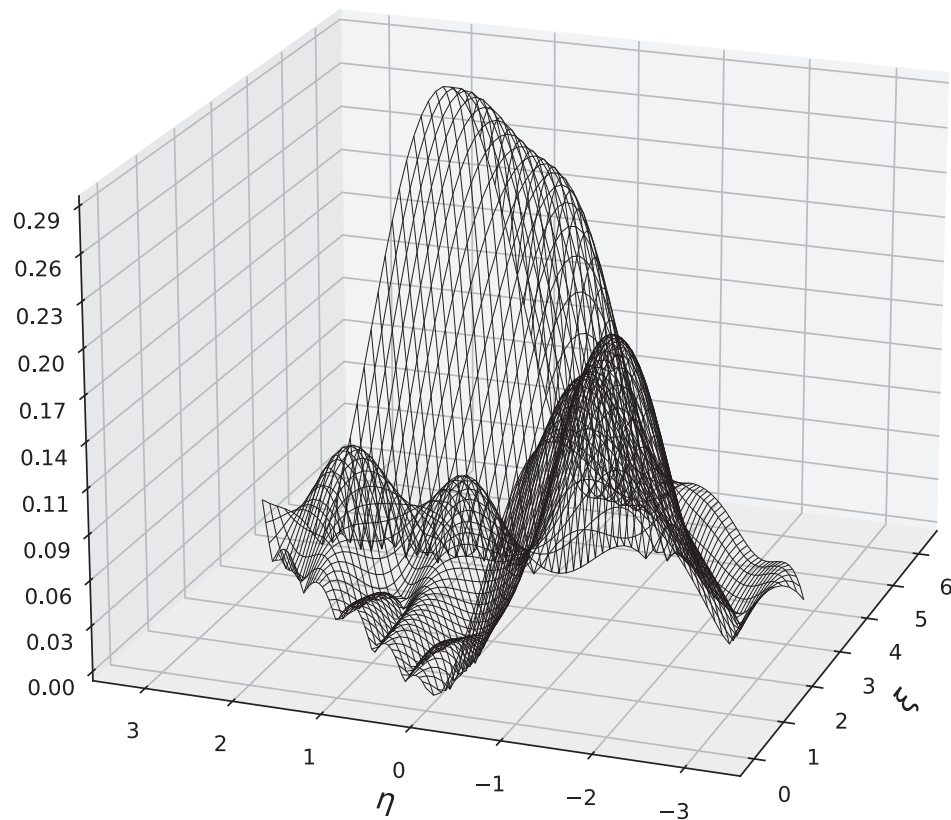


Рис. 4. Поверхность ошибки нейронной сети, обученной с функционалом невязки

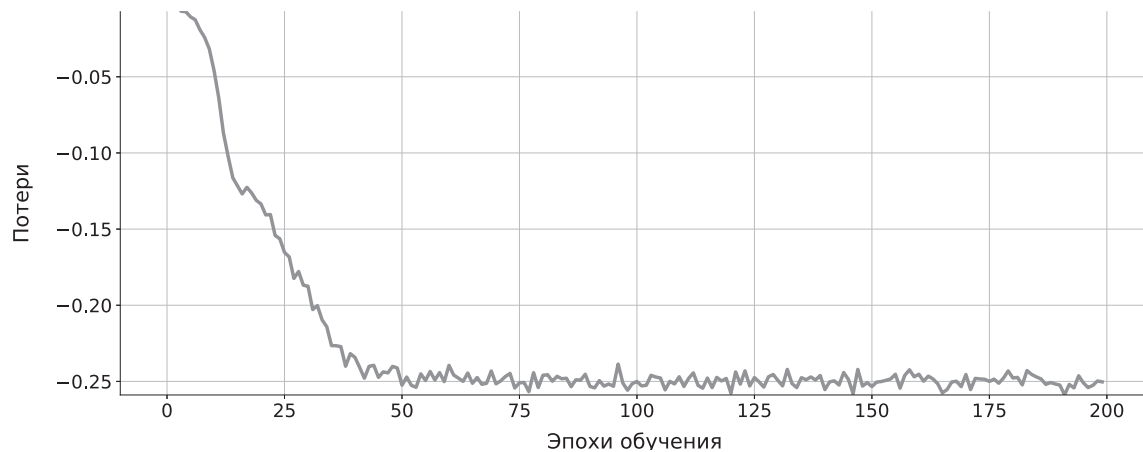


Рис. 5. Кривая обучения нейронной сети при помощи квазиклассического функционала

Таким образом, при использовании квазиклассического функционала (6) процесс обучения нейронной сети ускоряется примерно в три раза, при этом достигаются существенно более высокие значения показателей качества нейросетевой модели, в частности, более низкие значения абсолютной ошибки аппроксимации.

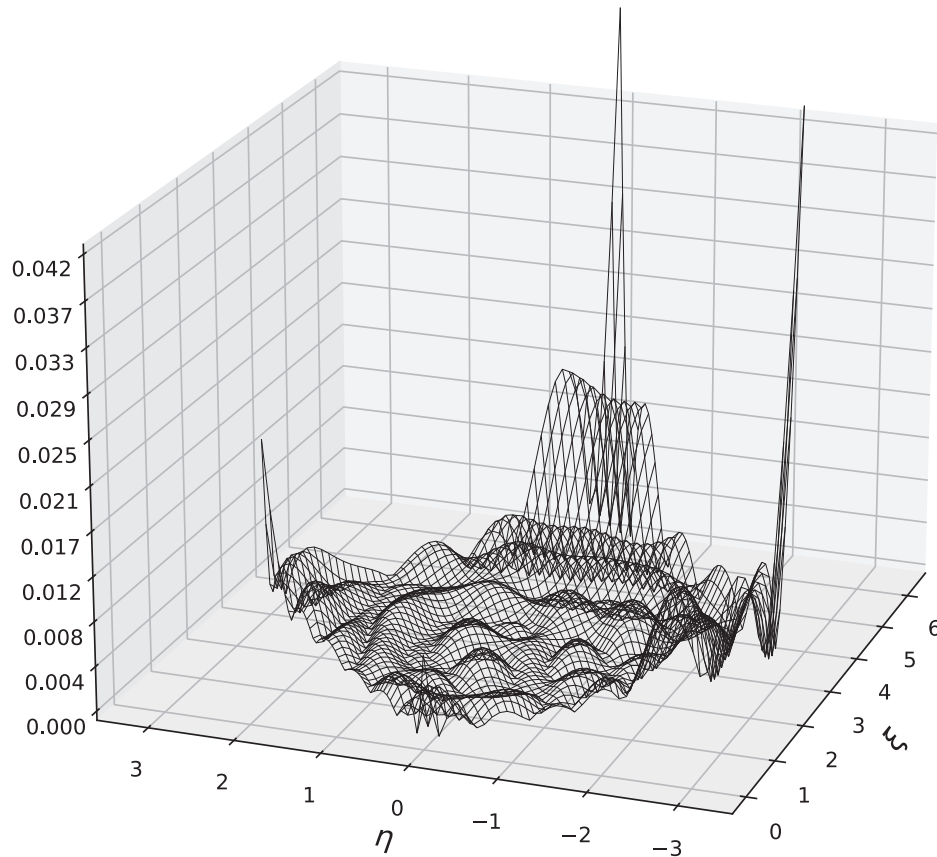


Рис. 6. Поверхность ошибки нейронной сети, обученной с квазиклассическим функционалом

5. Заключение. При помощи метода симметризирующего оператора В. М. Шалова получена компактная вариационная формулировка краевой задачи для гиперболического уравнения, содержащая всего два интеграла по области краевой задачи и фрагменту границы области, с подынтегральными выражениями, зависящими от неизвестной функции и ее первых производных. Полученный вариационный функционал при его использовании в качестве функционала потерь нейронной сети имеет ряд преимуществ перед функционалом потерь на основе невязки, в том числе более высокую скорость обучения нейронной сети и более высокое качество аппроксимации решения краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973.
2. *Филиппов В. М.* Вариационный метод решения краевых задач для волнового уравнения// Диффер. уравн. — 1984. — 20, № 11. — С. 1961–1968.
3. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов// Итоги науки техн. Совр. пробл. мат. Нов. достиж. — 1992. — 40. — С. 3–176.
4. *Шалов В. М.* Некоторое обобщение пространства К. Фридрихса// Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 2. — С. 292–294.
5. *Шалов В. М.* Решение несамосопряженных уравнений вариационным методом// Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 3. — С. 511–512.
6. *Шалов В. М.* Принцип минимума квадратичного функционала для гиперболического уравнения// Диффер. уравн. — 1965. — 1, № 10. — С. 1338–1365.
7. *E W., Yu B.* The deep Ritz method: A deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems// Commun. Math. Stat. — 2018. — 6, № 1. — P. 1–12.

8. *Geneva N., Zabaras N.* Modeling the dynamics of PDE systems with physics-constrained deep autoregressive networks// J. Comput. Phys. — 2020. — 403. — 109056.
9. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations// J. Comput. Phys. — 2019. — 378. — P. 686–707.
10. *Sirignano J., Spiliopoulos K.* DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations// J. Comput. Phys. — 2018. — 375. — P. 1339–1364.
11. *Young W. H.* On multiple integration by parts and the second theorem of the mean// Proc. London Math. Soc. — 1917. — 2, № 16. — P. 273–293.
12. *Zhu Y., Zabaras N., Koutsourelakis P.-S., Perdikaris P.* Physics-constrained deep learning for high-dimensional surrogate modeling and uncertainty quantification without labeled data// Journal of Computational Physics — 2019. — 394. — P. 56–81.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках проекта № 002092-0-000 Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шорохов Сергей Геннадьевич (Shorokhov Sergey Gennadievich)

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва

(Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia)

E-mail: shorokhov-sg@rudn.ru

CONTENTS

On the solvability of a variational parabolic equation with a nonlocal-in-time condition on the solution (<i>A. S. Bondarev, A. A. Petrova, O. M. Pirovskikh</i>)	3
The Cauchy problem with a parameter perturbed by a linear functional (<i>L. R. D. Dreglea Sidorov, N. A. Sidorov</i>)	10
Local bifurcations in one version of the multiplier-accelerator model (<i>A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, D. G. Frolov</i>)	18
Converting a continuous fuzzy signal by a linear dynamic system (<i>V. L. Khatskevich</i>)	34
Invariants of homogeneous dynamic systems of arbitrary odd order with dissipation. II. Fifth-order systems (<i>M. V. Shamolin</i>)	49
Training a neural network for a hyperbolic equation by using a quasiclassical functional (<i>S. G. Shorokhov</i>)	76

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович