

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 240



Москва 2025

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 240 (№ 3, 2025)

Дата публикации 10 марта 2025 г.

Издается с 1995 года
Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска	А. В. Аргучинцев, М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Н. И. Гусева
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN (печатная версия)	0233-6723
ISSN (электронная версия)	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

ISSN 2782-4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 240

МАТЕРИАЛЫ
6 МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»
(DYSC 2024)

Иркутск, 16–20 сентября 2024 г.

Часть 3



Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Оптимальное граничное управление колебаниями струны с заданными промежуточными значениями скоростей при минимизации граничной энергии (<i>В. Р. Барсегян, С. В. Солодуша, Е. В. Маркова</i>)	3
Точные и приближенные решения квазилинейной параболической системы «хищник-жертва» с нулевыми фронтами (<i>А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак</i>)	19
Классическая матрица рассеяния для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием (<i>Ю. А. Марков, М. А. Маркова, Н. Ю. Марков</i>)	29
О разрешимости и предельных свойствах некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром в главной части (<i>М. В. Фалалеев, И. В. Захарова</i>)	39
Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией. V. Общий случай (<i>М. В. Шамолин</i>)	49



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 3–18
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-3-18

УДК 517.977; 534.112

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СКОРОСТЕЙ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ ГРАНИЧНОЙ ЭНЕРГИИ

© 2025 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША, Е. В. МАРКОВА

Аннотация. Для уравнения колебания струны с заданными начальными и конечными условиями рассматриваются задачи оптимального граничного управления с заданными промежуточными условиями на значения скоростей с критериями качеств интегралов граничных энергий. Управление осуществляется смещениями концов струны. Интегралы граничных энергий рассматриваются на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения оптимальных граничных управлений колебаниями струны, использующий методы разделения переменных и проблем моментов. Проведен вычислительный эксперимент и сделан анализ полученных результатов.

Ключевые слова: граничное управление, оптимальное управление колебаниями, промежуточные условия, интеграл граничной энергии, разделение переменных.

OPTIMAL BOUNDARY CONTROL OF OSCILLATIONS OF A STRING WITH GIVEN INTERMEDIATE VALUES OF THE SPEED FOR MINIMIZING BOUNDARY ENERGY

© 2025 V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA, E. V. MARKOVA

ABSTRACT. For the equation of oscillation of a string with given initial and terminal conditions, we consider optimal boundary control problems with given intermediate conditions on the values of the speed with criteria for the qualities of the integrals of the boundary energies. The control is performed by displacements of ends of the string. Boundary energy integrals are considered over the entire time interval. We propose a constructive approach to constructing optimal boundary controls for oscillations based on the methods of separation of variables and moment problems. A computational experiment was carried out and the results obtained were analysed.

Keywords and phrases: boundary control, optimal vibration control, intermediate conditions, boundary energy integral, separation of variables.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Задачи оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями исследованы, в частности, в [1, 5, 6, 9, 17]. В работах [2–4, 7, 10–16] рассмотрены задачи для динамических (как с распределенными, так и с сосредоточенными параметрами) процессов, в которых наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями заданы также многоточечные промежуточные (как разделенные, так и

Исследование С. В. Солодуши и Е. В. Марковой выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, №AAAA-A21-121012090034-3).

неразделенные) условия. Задачи оптимального граничного управления колебательными процессами с многоточечными промежуточными условиями и функционалом интеграла от квадратов граничных смещений исследованы, в частности, в [2, 3, 15, 16].

В настоящей работе рассматриваются задачи оптимального управления колебаниями струны с заданными начальными, конечными условиями и промежуточными значениями скоростей точек струны с критериями качеств интегралов граничных энергий, заданными на весь промежуток времени. Предложен конструктивный подход построения для каждой задачи, функции оптимального граничного управления, с использованием метода разделения переменных и проблем моментов, который допускает распространение на другие неоднородные колебательные системы. Благодаря конструктивности проведены численные расчеты и сделан анализ полученных результатов.

2. Постановка задачи. Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонение от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальными и конечными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

и граничными условиями:

(а) при смещении левого конца при закрепленном правом конце

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

(б) или при смещении обоих концов

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления, $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение, а ρ — плотность струны.

Пусть в промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$), $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$,

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Минимизируемые интегралы граничной энергии имеют следующий вид:

(а) при смещении левого конца при закрепленном правом конце

$$\int_0^T [\dot{\mu}(t)]^2 dt, \quad (7)$$

(б) или при смещении обоих концов

$$\int_0^T \{[\dot{\mu}(t)]^2 + [\dot{\nu}(t)]^2\} dt. \quad (8)$$

Предположим, что выполнены условия $Q(x, t) \in C^2(\Omega)$, где $\Omega = \{(x, t), x \in [0, l], t \in [0, T]\}$, $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[0, l]$, $\psi_j(x) \in C^1[0, l]$, $j = 0, 1, \dots, m+1$. Предполагается также, что все функции удовлетворяют следующим условиям согласования:

(а) для задач со смещением левого конца при закрепленном правом конце:

$$\begin{aligned}\mu(0) &= \varphi_0(0), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(0), & \varphi_0(l) &= \psi_0(l) = 0, \\ \dot{\mu}(t_j) &= \psi_j(0), & j &= 1, \dots, m, \\ \mu(T) &= \varphi_T(0), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(0), & \varphi_T(l) &= \psi_T(l) = 0;\end{aligned}\tag{9}$$

(б) для задач со смещением обоих концов:

$$\begin{aligned}\mu(0) &= \varphi_0(0), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(0), & \nu(0) &= \varphi_0(l), & \dot{\nu}(0) &= \psi_0(l), \\ \dot{\mu}(t_j) &= \psi_j(0), & \dot{\nu}(t_j) &= \psi_j(l), & j &= 1, \dots, m, \\ \mu(T) &= \varphi_T(0), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(0), & \nu(T) &= \varphi_T(l), & \dot{\nu}(T) &= \psi_T(l).\end{aligned}\tag{10}$$

Сформулируем следующие задачи оптимального граничного управления колебаниями струны.

Задача 1 (смещение левого конца при закрепленном правом конце). Требуется найти оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (2) переходит в конечное состояние (3), обеспечивая выполнение промежуточных условий (6) и минимизируя функционал (7).

Задача 2 (смещение двух концов). Требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которых колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (2) переходит в конечное состояние (3), обеспечивая выполнение промежуточных условий (6) и минимизируя функционал (8).

3. Сведение исходных задач к задачам с нулевыми граничными условиями. Поставленные задачи, описываемые однородным уравнением (1) с неоднородными (ненулевыми) граничными условиями ((4) или (5)), сводятся к задачам оптимального управления с распределенными воздействиями (описываемым неоднородным уравнением) с нулевыми граничными условиями. Подробности указанного сведения с выкладками здесь не приводим, так как они приведены, в частности, в [4, 11]. Для корректного изложения дальнейших построений решения напомним используемые формулы.

3.1. Сведение неоднородных граничных условий к нулевым граничным условиям. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$Q(x, t) = V(x, t) + W(x, t),\tag{11}$$

где $V(x, t)$ — неизвестная функция с граничными условиями

$$V(0, t) = V(l, t) = 0.\tag{12}$$

При граничных условиях (4) (т.е. $Q(0, t) = \mu(t)$, $Q(l, t) = 0$) имеем

$$W(0, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = 0.\tag{13}$$

При граничных условиях (5) (т.е. $Q(0, t) = \mu(t)$, $Q(l, t) = \nu(t)$) имеем

$$W(0, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = \nu(t).\tag{14}$$

Функция $W(x, t)$ для граничных условий (13) и (14), соответственно, представляется в виде

$$W(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu(t),\tag{15}$$

$$W(x, t) = (\nu(t) - \mu(t)) \frac{x}{l} + \mu(t).\tag{16}$$

Для определения функции $V(x, t)$ получим следующее неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t),\tag{17}$$

где для задачи со смещением левого конца при закрепленном правом конце с функцией $W(x, t)$ вида (15)

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) \ddot{\mu}(t),\tag{18}$$

а для задачи со смещением двух концов с функцией $W(x, t)$ вида (16)

$$F(x, t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t)) \frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t). \quad (19)$$

3.2. Сведение начальных, промежуточных и конечных условий к соответствующим условиям для неоднородного уравнения. Учитывая выражения (15), (16) для функции $W(x, t)$ и условия согласования (9), (10), из начальных (2), промежуточных (6) и конечных условий (3) получим соответствующие условия для функции $V(x, t)$.

Для задачи оптимального граничного управления колебаниями струны со смещением левого конца при закреплённом правом конце, т.е. для функции $V(x, t)$, получим следующие начальные условия:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_0(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_0(0), \quad (20)$$

промежуточные условия

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_j(0), \quad j = 1, \dots, m, \quad (21)$$

конечные условия

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_T(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_T(0). \quad (22)$$

Для задачи оптимального граничного управления колебаниями струны со смещением двух концов, т.е. для функции $V(x, t)$, получим следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \varphi_0(x) - (\varphi_0(l) - \varphi_0(0)) \frac{x}{l} - \varphi_0(0), \\ \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi_0(x) - (\psi_0(l) - \psi_0(0)) \frac{x}{l} - \psi_0(0), \end{aligned} \quad (23)$$

промежуточные условия

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x) - (\psi_j(l) - \psi_j(0)) \frac{x}{l} - \psi_j(0), \quad j = 1, \dots, m, \quad (24)$$

конечные условия

$$\begin{aligned} V(x, T) &= \varphi_T(x) - (\varphi_T(l) - \varphi_T(0)) \frac{x}{l} - \varphi_T(0), \\ \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} &= \psi_T(x) - (\psi_T(l) - \psi_T(0)) \frac{x}{l} - \psi_T(0). \end{aligned} \quad (25)$$

4. Применение метода разделения переменных и сведение решения задач к проблеме моментов. Решение уравнения (17) ищем в виде

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (26)$$

Представим функции $F(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$ и $\psi_j(x)$ в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $V(x, t)$ в уравнения (17)–(19) и в условия (20)–(25), получим:

$$\ddot{V}_k^{(s)}(t) + \lambda_k^2 V_k^{(s)}(t) = F_k^{(s)}(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2, \quad s = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

$$F_k^{(1)}(t) = -\frac{2a}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t), \quad (28)$$

$$F_k^{(2)}(t) = \frac{2a}{\lambda_k l} [\ddot{\nu}(t)(-1)^k - \ddot{\mu}(t)]. \quad (29)$$

Здесь и далее значение буквы «s» в верхнем индексе характеризует при $s = 1$ задачу 1 и при $s = 2$ задачу 2.

Для задач со смещением левого конца при закрепленном правом конце начальные, промежуточные и конечные условия представляются в виде

$$V_k^{(1)}(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_0(0), \quad \dot{V}_k^{(1)}(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_0(0), \quad (30)$$

$$\dot{V}_k^{(1)}(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_j(0), \quad j = 1, \dots, m, \quad (31)$$

$$V_k^{(1)}(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_T(0), \quad \dot{V}_k^{(1)}(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_T(0). \quad (32)$$

Для задач со смещением двух концов начальные, промежуточные и конечные условия представляются в виде

$$V_k^{(2)}(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\varphi_0(0) - \varphi_0(l)(-1)^k], \quad \dot{V}_k^{(2)}(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\psi_0(0) - \psi_0(l)(-1)^k], \quad (33)$$

$$\dot{V}_k^{(2)}(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\psi_j(0) - \psi_j(l)(-1)^k], \quad j = 1, \dots, m, \quad (34)$$

$$V_k^{(2)}(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\varphi_T(0) - \varphi_T(l)(-1)^k], \quad \dot{V}_k^{(2)}(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\psi_T(0) - \psi_T(l)(-1)^k]. \quad (35)$$

Через $F_k^{(s)}(t)$, $V_k^{(s)}(t)$, $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(T)}$ и $\psi_k^{(j)}$, $s = 1, 2$, обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $F(x, t)$, $V(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$ и $\psi_j(x)$.

Общее решение уравнения (27) и ее производная имеют вид

$$V_k^{(s)}(t) = V_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(s)}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau, \quad (36)$$

$$\dot{V}_k^{(s)}(t) = -\lambda_k V_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k^{(s)}(\tau) \cos \lambda_k(t - \tau) d\tau, \quad s = 1, 2.$$

Учитывая начальные, промежуточные и конечные условия, из (36) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T F_k^{(s)}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{1k}^{(s)}(T), \quad \int_0^T F_k^{(s)}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}^{(s)}(T), \quad (37)$$

$$\int_0^{t_j} F_k^{(s)}(\tau) \cos \lambda_k(t_j - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}^{(s)}(t_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad s = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}^{(s)}(T) &= \lambda_k V_k^{(s)}(T) - \lambda_k V_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}^{(s)}(T) &= \dot{V}_k^{(s)}(T) + \lambda_k V_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}^{(s)}(t_j) &= \dot{V}_k^{(s)}(t_j) + \lambda_k V_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k t_j - \dot{V}_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k t_j, \end{aligned} \quad (38)$$

$j = 1, \dots, m$. Для задачи со смещением левого конца при закрепленном правом конце, подставляя выражение функции $F_k^{(1)}(t)$ из (28) в соотношения (37) и интегрируя по частям с учетом условий согласования, получим, что функции $\dot{\mu}(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим

интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}^{(1)}(T), & \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{2k}^{(1)}(T), \\ \int_0^T \dot{\mu}(\tau) g_k^{(1)}(\tau) d\tau &= C_{2k}^{(1)}(t_1), & \dots, & \int_0^T \dot{\mu}(\tau) g_k^{(m)}(\tau) d\tau = C_{2k}^{(1)}(t_m), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}^{(1)}(T) &= \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k T - \frac{l}{2a} \tilde{C}_{1k}^{(1)}(T), \\ C_{2k}^{(1)}(T) &= \frac{\psi_T(0)}{\lambda_k} - \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k} \cos \lambda_k T + \frac{l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(1)}(T), \\ C_{2k}^{(1)}(t_j) &= \frac{\psi_j(0)}{\lambda_k} - \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k} \cos \lambda_k t_j + \frac{l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(1)}(t_j), \\ g_k^{(j)}(\tau) &= \begin{cases} \sin \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

Для дальнейшей компактной записи интегральных соотношений (39) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{H}_k^{(1)}(\tau) &= \left(\cos \lambda_k(T - \tau) \quad \sin \lambda_k(T - \tau) \quad g_k^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad g_k^{(m)}(\tau) \right)', \\ C_k^{(1)}(t_1, \dots, t_m, T) &= \left(C_{1k}^{(1)}(T) \quad C_{2k}^{(1)}(T) \quad C_{2k}^{(1)}(t_1) \quad \dots \quad C_{2k}^{(1)}(t_m) \right)'; \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь и далее «'» в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Теперь для задачи со смещением двух концов, подставляя выражение функции $F_k^{(2)}(t)$ из (29) в соотношения (37) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (10), получим, что функции $\dot{\mu}(t)$ и $\dot{\nu}(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \dot{\nu}(\tau) (-1)^k \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}^{(2)}(T), \\ \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \dot{\nu}(\tau) (-1)^k \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{2k}^{(2)}(T), \\ \int_0^T \dot{\mu}(\tau) g_k^{(j)}(\tau) d\tau - \int_0^T \dot{\nu}(\tau) (-1)^k g_k^{(j)}(\tau) d\tau &= C_{2k}^{(2)}(t_j), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}^{(2)}(T) &= \frac{1}{\lambda_k} \left[-\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}^{(2)}(T) - (-1)^k \psi_0(l) \sin \lambda_k T + \psi_0(0) \sin \lambda_k T \right], \\ C_{2k}^{(2)}(T) &= \frac{1}{\lambda_k} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(2)}(T) + (-1)^k \psi_0(l) \cos \lambda_k T + \psi_T(0) - (-1)^k \psi_T(l) - \psi_0(0) \cos \lambda_k T \right], \\ C_{2k}^{(2)}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(2)}(t_j) - (-1)^k \psi_j(l) + \psi_j(0) + (-1)^k \psi_0(l) \cos \lambda_k t_j - \psi_0(0) \cos \lambda_k t_j \right], \end{aligned} \quad (43)$$

$j = 1, \dots, m$. Отметим, что выражения $\tilde{C}_{1k}^{(s)}(T)$, $\tilde{C}_{2k}^{(s)}(T)$, $\tilde{C}_{2k}^{(s)}(t_j)$ и $g_k^{(j)}(\tau)$ приведены в (38) и (40).

Для компактной записи интегральных соотношений (42) введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k^{(2)}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \cos \lambda_k(T - \tau) \\ \sin \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ g_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(1)}(\tau) \\ \dots & \dots \\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k^{(2)}(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}^{(2)}(T) \\ C_{2k}^{(2)}(T) \\ C_{2k}^{(2)}(t_1) \\ \dots \\ C_{2k}^{(2)}(t_m) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник колебаний и с помощью методов теории управления конечномерными системами решается задача синтеза управлений. В дальнейших построениях будем придерживаться этого подхода.

Учитывая введенные обозначения (41) и (44), для первых n гармоник соотношения (39) и (42) запишем следующим образом:

$$\int_0^T H_n^{(s)}(\tau) U_n^{(s)}(\tau) d\tau = \eta_n^{(s)}, \quad s = 1, 2, \quad (45)$$

где

$$U_n^{(1)}(\tau) = \dot{\mu}_n^{(1)}(\tau) = \dot{\mu}(\tau), \quad U_n^{(2)}(\tau) = \begin{pmatrix} \dot{\mu}_n^{(2)}(\tau) \\ \dot{\nu}_n^{(2)}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mu}(\tau) \\ \dot{\nu}(\tau) \end{pmatrix},$$

$$H_n^{(s)}(\tau) = \left(\bar{H}_1^{(s)}(\tau) \quad \bar{H}_2^{(s)}(\tau) \quad \dots \quad \bar{H}_n^{(s)}(\tau) \right)', \quad (46)$$

$$\eta_n^{(s)} = \left(C_1^{(s)}(t_1, \dots, t_m, T) \quad C_2^{(s)}(t_1, \dots, t_m, T) \quad \dots \quad C_n^{(s)}(t_1, \dots, t_m, T) \right)';$$

размеры матриц $H_n^{(s)}(\tau)$ и $\eta_n^{(s)}$ равны соответственно $(n(m+2) \times s)$ и $(n(m+2) \times 1)$. Таким образом, интегральные условия (39) и (42) представлены условием (45). Из (45) вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Первые n гармоник системы (27) с условиями (30)–(32) (или (33)–(35)) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(s)}$ из (46) можно найти управление $U_n^{(s)}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (45).*

5. Решение задач. Отметим, что левая часть условия (45) — линейная операция, порожденная функцией управления $U_n^{(s)}(\tau)$ на промежутке времени $[0, T]$, а функционалы (7) или (8) являются нормами некоторого пространства L_2 . Следовательно, задачи оптимального управления с интегральным условием (45) при функционале (7) или (8) можно рассматривать как проблему моментов, а решение этих задач следует искать с помощью алгоритма решения проблемы моментов (см. [8]). Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов для задачи 1 с функционалом (7) и интегральными условиями (39) (или (45) при $s = 1$) нужно найти величины $p_k^{(1)}$, $q_k^{(1)}$, $\sigma_{ik}^{(1)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)} C_{1k}^{(1)}(T) + q_k^{(1)} C_{2k}^{(1)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} C_{2k}^{(1)}(t_i) \right] = 1, \quad (47)$$

для которых

$$(\rho_{1n})^2 = \min_{(47)} \int_0^T (h_{1n})^{(2)}(\tau) d\tau, \quad (48)$$

где

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)} \sin \lambda_k(T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \quad (49)$$

Для определения величин $p_k^{(1)0}$, $q_k^{(1)0}$, $\sigma_{ik}^{(1)0}$, $k = 1, \dots, n$, минимизирующих (48) и удовлетворяющих (47), введем функцию

$$f_{1n} = \int_0^T (h_{1n}(\tau))^2 d\tau + \beta_{1n} \left[\sum_{k=1}^n \left(p_k^{(1)} C_{1k}^{(1)}(T) + q_k^{(1)} C_{2k}^{(1)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} C_{2k}^{(1)}(t_i) \right) - 1 \right],$$

где β_{1n} — неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные функции f_{1n} по $p_k^{(1)}$, $q_k^{(1)}$, $\sigma_{ik}^{(1)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, и приравнявая их к нулю, с учетом обозначения (49), (40), после присоединения к полученным уравнениям условия (47), получим замкнутую систему $2n + mn + 1$ алгебраических уравнений относительно стольких же неизвестных величин $p_k^{(1)}$, $q_k^{(1)}$, $\sigma_{ik}^{(1)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, и β_{1n} :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[a_{jk}^{(1)} p_j^{(1)} + b_{jk}^{(1)} q_j^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^m c_{jk}^{(1\alpha)} \sigma_{\alpha j}^{(1)} \right] &= -\frac{\beta_{1n}}{2} C_{1k}^{(1)}(T), \\ \sum_{j=1}^n \left[d_{jk}^{(1)} p_j^{(1)} + e_{jk}^{(1)} q_j^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^m f_{jk}^{(1\alpha)} \sigma_{\alpha j}^{(1)} \right] &= -\frac{\beta_{1n}}{2} C_{2k}^{(1)}(T), \\ \sum_{j=1}^n \left[a_{jk}^{(1i)} p_j^{(1)} + b_{jk}^{(1i)} q_j^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^m \vartheta_{jk}^{(1\alpha i)} \sigma_{\alpha j}^{(1)} \right] &= -\frac{\beta_{1n}}{2} C_{2k}^{(1)}(t_i), \\ \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)} C_{1k}^{(1)}(T) + q_k^{(1)} C_{2k}^{(1)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} C_{2k}^{(1)}(t_i) \right] &= 1, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} a_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \cos \lambda_j(T - \tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau, & b_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \sin \lambda_j(T - \tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau, \\ c_{jk}^{(1\alpha)} &= \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau, & d_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \cos \lambda_j(T - \tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau, \\ e_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \sin \lambda_j(T - \tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau, & f_{jk}^{(1\alpha)} &= \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau, \\ a_{jk}^{(1i)} &= \int_0^T \cos \lambda_j(T - \tau) g_k^{(i)}(\tau) d\tau, & b_{jk}^{(1i)} &= \int_0^T \sin \lambda_j(T - \tau) g_k^{(i)}(\tau) d\tau, \\ \vartheta_{jk}^{(1\alpha i)} &= \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) g_k^{(i)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (51)$$

Пусть величины $p_k^{(1)0}$, $q_k^{(1)0}$, $\sigma_{ik}^{(1)0}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, и β_{1n}^0 являются решением замкнутой системы алгебраических уравнений (50). Тогда согласно (48), (49) будем иметь

$$(\rho_{1n}^0)^2 = \int_0^T (h_{1n}^0(\tau))^2 d\tau, \quad (52)$$

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right].$$

Оптимальные функции $\dot{\mu}_n^{(1)0}(\tau)$ и $\dot{\mu}_n^{(1)0}(t)$ для любого $n = 1, 2, \dots$ представляются в виде

$$\dot{\mu}_n^{(1)0}(\tau) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} h_{1n}^0(\tau), \quad \mu_n^{(1)0}(t) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau + S_1, \quad t \in [0, T], \quad (53)$$

где S_1 — постоянная интегрирования. Учитывая, что $\mu_n^{(1)0}(0) = S_1$, то из условия согласования (9) получим $S_1 = \varphi_0(0)$.

Для явного выражения оптимального управления $\mu_n^{(1)0}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, надо вычислить следующий интеграл:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) \right] d\tau + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\}.$$

При $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) \right] d\tau = \\ & = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - t) \right] + \left[p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T \right] \right\}. \quad (54) \end{aligned}$$

Согласно (40) для второго интеграла будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[\sum_{i=1}^j \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{t_1} \left[\sum_{i=1}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=2}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right] d\tau + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} \left[\sum_{i=j-1}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_{j-1}}^t \left[\sigma_{jk}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_j - \tau) \right] d\tau \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \left[\int_{t_{s-1}}^{t_s} \left(\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right) d\tau \right] + \int_{t_{j-1}}^t \left[\sigma_{jk}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_j - \tau) \right] d\tau \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \left[\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{j-1}) \right] \right] + \right. \\ & \quad \left. + \sigma_{jk}^{(1)0} \left[\cos \lambda_k(t_j - t) - \cos \lambda_k(t_j - t_{j-1}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau = \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] \right\} d\tau = \\ & = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - t) \right] + \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k(t_j - t) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T - \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k (t_j - t_{j-1}) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} (\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{j-1})) \right] \right\}. \quad (55)
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $t_m < t \leq t_{m+1} = T$:

$$\int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - \tau) \right] d\tau + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\}.$$

Значение первого интеграла представляется формулой (54), а для второго интеграла согласно (40) будем иметь

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \left[\int_0^t \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) d\tau \right] = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{t_m} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\}, \\
& \int_0^{t_m} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau = \int_0^{t_1} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=2}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau + \\
& \quad + \dots + \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} \left[\sum_{i=m-1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left[\sigma_{mk}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_m - \tau) \right] d\tau = \\
& = \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau \right\} = \\
& = \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{i=s}^m \frac{1}{\lambda_k} \sigma_{ik}^{(1)0} [\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{s-1})] \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{t_m} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \frac{1}{\lambda_k} \sigma_{ik}^{(1)0} (\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{s-1})) \right] \right\}.$$

Таким образом, при $t_m < t \leq t_{m+1} = T$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(1)0} (\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{s-1})) \right] \right\} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - t) \right] + \left[p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T \right] \right\}. \quad (56)
\end{aligned}$$

Итак, оптимальное управление $\mu_n^{(1)0}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, согласно формулам (55) и (56), представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mu_n^{(1)0}(t) = & \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left[F_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \sigma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) + \right. \\
& \left. + G_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \sigma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i \right) \right] + \varphi_0(0), \quad (57)
\end{aligned}$$

$$F_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \sigma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_j, t \right) = \\ = \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - t) \right] + \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k (t_j - t),$$

$$G_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \gamma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_j \right) = p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T - \\ - \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k (t_j - t_{j-1}) + \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \left(\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{j-1}) \right) \right]$$

при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$ и

$$\mu_n^{(1)0}(t) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ -p_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - t) + p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - \right. \\ \left. - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T + \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \left(\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{s-1}) \right) \right] \right\} + \varphi_0(0) \quad (58)$$

при $t_m < t \leq t_{m+1} = T$. Таким образом, решение задачи 1 представлено формулами (57) и (58).

Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов для задачи 2 с функционалом (8) и интегральными условиями (42) (или (39) при $s = 2$) нужно найти величины $p_k^{(2)}$, $q_k^{(2)}$, $\sigma_{ik}^{(2)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n \left[p_k^{(2)} C_{1k}^{(2)}(T) + q_k^{(2)} C_{2k}^{(2)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)} C_{2k}^{(2)}(t_i) \right] = 1, \quad (59)$$

для которых

$$(\rho_{2n})^2 = \min_{(59)} \int_0^T \left[h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau) \right] d\tau, \quad (60)$$

где

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(2)} \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^{(2)} \sin \lambda_k (T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)} g_k^{(i)}(\tau) \right], \\ h_{2n}(\tau) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[p_k^{(2)} \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^{(2)} \sin \lambda_k (T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \quad (61)$$

Решая по аналогии с вышеизложенным задачу минимизации функционала (60) с условием (59), находим искомые величины $p_k^{(2)0}$, $q_k^{(2)0}$, $\sigma_{ik}^{(2)0}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$. Далее из (60) и (61) будем иметь

$$(\rho_{2n}^0)^2 = \int_0^T \left[(h_{1n}^0(\tau))^2 + (h_{2n}^0(\tau))^2 \right] d\tau,$$

где

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(2)0} \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^{(2)0} \sin \lambda_k (T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)0} g_k^{(i)}(\tau) \right], \\ h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[p_k^{(2)0} \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^{(2)0} \sin \lambda_k (T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)0} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \quad (62)$$

Таким образом, оптимальные управления $\mu_n^{(2)0}(t)$ и $\nu_n^{(2)0}(t)$, $\tau \in [0, T]$, согласно формулам (40) и (62), представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left[F_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) + \right. \\ &\quad \left. + G_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i \right) \right] + \varphi_0(0), \\ \nu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \left[F_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) + \right. \\ &\quad \left. + G_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i \right) \right] + \varphi_0(l)\end{aligned}\quad (63)$$

при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$, где

$$\begin{aligned}F_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) &= \\ &= \left[-p_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-t) \right] + \sigma_{jk}^{(2)0} \cos \lambda_k(t_j - t), \\ G_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i \right) &= p_k^{(2)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(2)0} \cos \lambda_k T - \\ &\quad - \sigma_{jk}^{(2)0} \cos \lambda_k(t_j - t_{j-1}) + \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(2)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{j-1}) \right) \right];\end{aligned}$$

при $t_m < t \leq t_{m+1} = T$ оптимальные управления имеют вид

$$\begin{aligned}\mu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ -p_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-t) + p_k^{(2)0} \sin \lambda_k T - \right. \\ &\quad \left. - q_k^{(2)0} \cos \lambda_k T + \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(2)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{s-1}) \right) \right] \right\} + \varphi_0(0), \\ \nu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \left\{ -p_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-t) + p_k^{(2)0} \sin \lambda_k T - \right. \\ &\quad \left. - q_k^{(2)0} \cos \lambda_k T + \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(2)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{s-1}) \right) \right] \right\} + \varphi_0(l).\end{aligned}\quad (64)$$

Решение задачи 2 представлено формулами (63) и (64).

Таким образом, имея явные виды функций оптимальных граничных управлений $\mu_n^{(s)0}(t)$ и $\nu_n^{(s)0}(t)$, $\tau \in [0, T]$, $s = 1, 2$, можно построить соответствующую функцию прогиба $Q_n^{(s)0}(x, t)$. Подставляя полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^{(s)0}(t)$ и $\nu_n^{(s)0}(t)$, $\tau \in [0, T]$, $s = 1, 2$, в (28) и (29), а найденное для $F_k^{(s)0}(t)$ выражение — в (36), получим функцию $V_k^{(s)0}(t)$, $t \in [0, T]$, $s = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$. Далее из формулы (26) будем иметь

$$V_n^{(s)0}(x, t) = \sum_{k=1}^n V_k^{(s)0}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad (65)$$

где

$$V_k^{(s)0}(t) = V_k^{(s)0}(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k^{(s)0}(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(s)0}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau,$$

а из (15) и (16) следует, что функции $W_n^{(s)0}(x, t)$, $s = 1, 2$, принимают следующий вид:

$$W_n^{(1)0}(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l} \right) \mu_n^{(1)0}(t), \quad W_n^{(2)0}(x, t) = \left[\nu_n^{(2)0}(t) - \mu_n^{(2)0}(t) \right] \frac{x}{l} + \mu_n^{(2)0}(t). \quad (66)$$

Далее, согласно (11), с учетом (65) и (66) будем иметь

$$\begin{aligned} Q_n^{(1)0}(x, t) &= \sum_{k=1}^n V_k^{(1)0}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n^{(1)0}(t), \\ Q_n^{(2)0}(x, t) &= \sum_{k=1}^n V_k^{(2)0}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \left[\nu_n^{(2)0}(t) - \mu_n^{(2)0}(t)\right] \frac{x}{l} + \mu_n^{(2)0}(t). \end{aligned} \quad (67)$$

Таким образом, для первых n гармоник оптимальные функции прогиба струны $Q_n^{(1)0}(x, t)$ и $Q_n^{(2)0}(x, t)$ имеем выражения (67).

6. Пример с вычислительным экспериментом в случае $m = 1$. Приведем иллюстрацию вышеизложенного для задачи 1. Предположим, что в промежуточный момент времени t_1 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$) заданы значения скоростей точек струны в виде

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_1} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (68)$$

Применяя предложенный выше подход, построим оптимальное граничное управление $\mu_n^0(t)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). В этом случае для определения значения величин p_1 , q_1 , σ_{11} и β_1 , согласно (50) и (51), будем иметь следующую систему алгебраических уравнений ($i = 1$, $\alpha = 1$):

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + b_{11}q_1 + c_{11}^{(1)}\sigma_{11} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{11}(T), & d_{11}p_1 + e_{11}q_1 + f_{11}^{(1)}\sigma_{11} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(T), \\ a_{11}^{(1)}p_1 + b_{11}^{(1)}q_1 + g_{11}^{(11)}\sigma_{11} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(t_1), & C_{11}(T)p_1 + C_{21}(T)q_1 + C_{21}(t_1)\sigma_{11} &= 1, \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, & b_{11} &= d_{11} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, & e_{11} &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \\ a_{11}^{(1)} &= c_{11}^{(1)} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1), \\ b_{11}^{(1)} &= f_{11}^{(1)} = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T, \\ g_{11}^{(11)} &= \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1. \end{aligned}$$

Здесь для простоты записи индекс 1, характеризующий задачу 1, опущен.

Положим $a = 1/6$, $t_1 = 2l/a$, $T = 4l/a$, $l = 1$. Пусть состояние струны и скорости точек при $t = 0$ заданы в виде

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x, \quad \psi_0(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{4}{5}x.$$

Пусть при $t = t_1 = 12$ задано промежуточное состояние струны в виде функции (68) в форме

$$\psi_1(x) = \frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{7}x,$$

а при $t = T = 24$ задано следующее конечное состояние: $\varphi_T(x) = 0$, $\psi_T(x) = 0$. Из (69) имеем

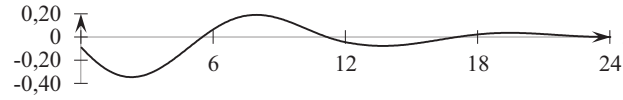
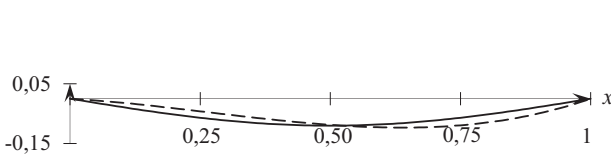
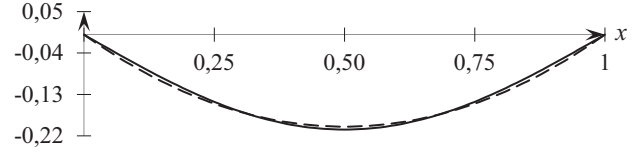
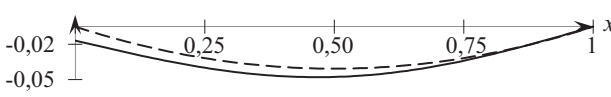
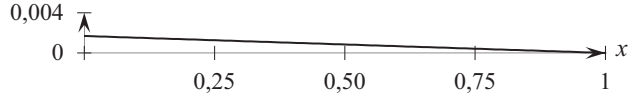
$$\begin{aligned} 12p_1 - \frac{7}{10\pi^2} &= 0, & 12q_1 + 6\sigma_{11} + \frac{48}{5\pi^3} &= 0, \\ 6q_1 + 6\sigma_{11} + \frac{276}{35\pi^3} &= 0, & -\frac{7}{5\pi^2}p_1 + \frac{96}{5\pi^3}q_1 + \frac{552}{35\pi^3}\sigma_{11} &= 1. \end{aligned} \quad (70)$$

Решение системы (70)

$$p_1^0 = -\frac{1715}{638208 + 2401\pi^2} \pi^4, \quad q_1^0 = \frac{8400}{638208 + 2401\pi^2} \pi^3, \quad \sigma_{11}^0 = -\frac{29400}{638208 + 2401\pi^2} \pi^6,$$

так что

$$(\rho_k^0)^2 = \frac{14700}{638208 + 2401\pi^2} \pi^6.$$

Рис. 1. График функции $V_1^0(t)$.Рис. 2. Графики $Q_1^0(x, 0)$ и $\varphi_0(x)$.Рис. 3. Графики $\dot{Q}_1^0(x, 0)$ и $\psi_0(x)$.Рис. 4. Графики $\dot{Q}_1^0(x, 12)$ и $\psi_1(x)$.Рис. 5. Графики $Q_1^0(x, 24)$ и $\varphi_T(x) = 0$.

Для функции колебания $Q_1^0(x, t)$ получаем:

$$Q_1^0(x, t) = \begin{cases} V_1^{(1)0}(t) \sin \pi x + (1-x)\mu_1^{(1)0}(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ V_1^{(2)0}(t) \sin \pi x + (1-x)\mu_1^{(2)0}(t) & \text{при } t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

где функция управления $\mu_1^0(t)$ равна

$$\mu_1^0(t) = \begin{cases} \frac{552}{35\pi^4} \left(\cos \frac{\pi t}{6} - 1 \right) - \frac{7}{10\pi^3} \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{24}{7\pi^4} \left(\cos \frac{\pi t}{6} - 1 \right) - \frac{7}{10\pi^3} \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

а $V_1^0(t)$ имеет вид

$$V_1^0(t) = \begin{cases} \left(\frac{7t}{60\pi^3} - \frac{14}{5\pi^3} \right) \cos \frac{\pi t}{6} + \left(\frac{92t}{35\pi^4} - \frac{391}{10\pi^4} \right) \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ \left(\frac{7t}{60\pi^3} - \frac{14}{5\pi^3} \right) \cos \frac{\pi t}{6} + \left(\frac{4t}{7\pi^4} - \frac{1009}{70\pi^4} \right) \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

График $V_1^0(t)$ представлен на рис. 1. Выражения и графики функций прогиба струны и ее производной представлены на рис. 2–5. При $t = 0$ функции $Q_1^0(x, 0)$ и $\dot{Q}_1^0(x, 0)$ равны соответственно

$$Q_1^0(x, 0) = -\frac{14}{5\pi^3} \sin \pi x, \quad \left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{32}{5\pi^3} \sin \pi x.$$

При $t = t_1 = 12$ и $t = T = 24$ функции $\dot{Q}_1^0(x, 12)$, $Q_1^0(x, 24)$, $\dot{Q}_1^0(x, 24)$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=12} = -\frac{8}{7\pi^3} \sin \pi x - \frac{7}{60\pi^2} (1-x), \quad Q_1^0(x, 24) = 0, \quad \left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=24} = -\frac{7}{60\pi^2} (1-x).$$

На рис. 2–5 графики функций $Q_1^0(x, 0)$, $\dot{Q}_1^0(x, 0)$, $\dot{Q}_1^0(x, 12)$, $Q_1^0(x, 24)$ изображены сплошной линией, а $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ – пунктирной линией. Для сравнительного анализа полученных

результатов введем обозначения

$$\varepsilon_1(x, t_i) = \left| Q_1^0(x, t_i) - \varphi_i(x) \right|, \quad \widehat{\varepsilon}_1(x, t_j) = \left| \dot{Q}_1^0(x, t_j) - \psi_j(x) \right|,$$

где $i = 0, j = 0, 1, 2$ ($i = j = 2$ соответствуют моменту времени $t_2 = T$). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 0) &\approx 0,027, & \int_0^1 \varepsilon_1(x, 0) dx &\approx 0,016, \\ \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) &\approx 0,012, & \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 12) &\approx 0,012, & \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 24) &\approx 0,012, \\ \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) dx &\approx 0,006, & \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 12) dx &\approx 0,006, & \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 24) dx &\approx 0,006. \end{aligned}$$

7. Заключение. Предложен конструктивный метод построения оптимального граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданными промежуточными условиями на значения скоростей точек струны с критерием качества, являющимся интегралом граничной энергии, заданным на всем промежутке времени. Проведенный вычислительный эксперимент и сравнительный анализ подтверждают эффективность подхода. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления колебаниями в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдукаримов М. Ф. Об оптимальном граничном управлении, производимом смещением процесса вынужденных колебаний на одном конце струны при свободном втором // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2014. — 57, № 4. — С. 280–286.
2. Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 36–47.
3. Барсегян В. Р. Задачи граничного управления и оптимального управления колебаниями струны с многоточечными промежуточными условиями на функции состояния // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — 28, № 3. — С. 38–52.
4. Барсегян В. Р., Солодуша С. В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени // Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2020. — 25, № 130. — С. 131–146.
5. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
6. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Усп. мат. наук. — 2005. — 6, № 6 (366). — С. 89–114.
7. Корзюк В. И., Козловская И. С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — 19, № 1. — С. 62–70.
8. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
9. Моисеев Е. И., Холмеева А. А. Об одной задаче оптимального граничного управления с динамическим граничным условием // Диффер. уравн. — 2013. — 49, № 5. — С. 667–671.
10. Barsegyan V. R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav J. Oper. Research. — 2012. — 22, № 1. — P. 31–39.
11. Barsegyan V. R. Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time // Mech. Solids. — 2019. — 54, № 8. — P. 1216–1226.
12. Barsegyan V. R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // Proc. Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conf.) (Moscow, Russia, June 1-3, 2016). — IEEE, 2016. — P. 1–4.
13. Barsegyan V. R., Solodusha S. V. Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection form at an intermediate moment of time // Axioms. — 2022. — 11, № 4. — P. 157–174.

14. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1847, № 1. — 012016.
15. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// *Proc. Int. Russian Automation Conference (RusAutoCon)* (Sochi, Russia, September 5–11, 2021). — IEEE, 2021. — P. 343–349.
16. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time// *Mathematics.* — 2022. — 23, № 10. — 4444.
17. *Yang K. J., Hong K. S., Matsuno F.* Robust adaptive boundary control of an axially moving string under a spatiotemporally varying tension// *J. Sound Vibration.* — 2004. — 273, № 4-5. — P. 1007–1029.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование С. В. Солодуши и Е. В. Марковой выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, №АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович (Barseghyan Vanya Rafaelovich)
 Институт механики НАН Армении, Ереван;
 Ереванский государственный университет
 (Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences
 of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia;
 Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia)
 E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна (Solodusha Svetlana Vitalievna)
 Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
 (L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
 of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
 E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Маркова Евгения Владимировна (Markova Evgeniya Vladimirovna)
 Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
 (L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
 of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
 E-mail: markova@isem.irk.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 19–28
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-19-28

УДК 517.957

ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С НУЛЕВЫМИ ФРОНТАМИ

© 2025 г. А. Л. КАЗАКОВ, Л. Ф. СПЕВАК

Аннотация. Рассматривается квазилинейная параболическая система второго порядка, известная в литературе как модель популяционной биологии «хищник-жертва». Предметом исследования являются точные и приближенные решения с двумя нулевыми фронтами, на которых одна или обе искомые функции обращаются в нуль, а на интервале между фронтами обе функции положительны. Точные решения ищутся в виде многочленов по степеням пространственной переменной с коэффициентами, зависящими от времени. Для построения приближенных решений предложен численный алгоритм, сочетающий метод коллокаций через разложение правых частей по системе радиальных базисных функций и разностную аппроксимацию производных по времени. Для верификации алгоритма проводятся иллюстрирующие численные расчеты для модельных примеров, которые соответствуют найденным точным решениям.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, система хищник-жертва, вырождение, нулевой фронт, точное решение, приближенное решение, метод коллокаций, радиальные базисные функции, вычислительный эксперимент.

EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS TO THE QUASILINEAR PARABOLIC SYSTEM “PREDATOR-PREY” WITH ZERO FRONTS

© 2025 A. L. KAZAKOV, L. F. SPEVAK

ABSTRACT. In this paper, we consider the second-order quasilinear parabolic system known in population biology as the predator-prey model and examine exact and approximate solutions with two zero fronts on which at least one of two unknown functions vanish; both these functions are positive between the fronts. We search for exact solutions in the form of polynomials in powers of the spatial variable with the coefficients depending on time. To construct approximate solutions, we propose a numerical algorithm, which is a combination of the collocation method based on the expansion of the right-hand sides by the radial basis functions and the finite-difference approximation of the derivatives in time. The algorithm is verified by model examples; the results obtained are consistent with the exact solutions found.

Keywords and phrases: nonlinear parabolic system, predator-prey system, degeneration, zero front, exact solution, approximate solution, collocation method, radial basis functions, computational experiment.

AMS Subject Classification: 35K55, 35K65

Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

1. Введение. Уравнения и системы параболического типа (см. [10]) представляют собой содержательный класс моделей различных процессов в физике высоких температур (см. [3, 8]), гидрологии и гидродинамике (см. [1, 2]), экологии (см. [14]) и др. Особую распространенность подобные математические объекты приобрели в последние десятилетия, начиная с классических работ [9, 20] в области популяционной биологии (см. [26]). В последние годы предпочтение обычно отдается нелинейным моделям (см. [13, 15]). Отдельное место в этом ряду занимают квазилинейные уравнения и системы с вырождением, поскольку они позволяют описать возмущения, которые распространяются по покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью. Подобное, как известно, невозможно при использовании линейных и полулинейных уравнений параболического типа (см. [19]). Применительно к физическим задачам, такие решения называют, в зависимости от интерпретации, тепловыми (см. [11]), фильтрационными (см. [12]) или диффузионными (см. [22]) волнами. Насколько известно авторам, для задач биологии подобные математические объекты ранее не исследовались, хотя имеют вполне логичную и естественную интерпретацию с точки зрения предметной области. Настоящая работа призвана заполнить данный пробел.

Рассматривается нелинейная (квазилинейная) параболическая система, предложенная в известной монографии Д. Мюррея [24] в качестве модели популяционной биологии, для которой строятся точные (см. [7]) и приближенные решения с двумя нулевыми фронтами. Точные решения имеют вид многочленов по степеням пространственной переменной с коэффициентами, зависящими от времени. Для построения приближенных решений предлагается пошаговый численный алгоритм с разностной аппроксимацией по времени. На каждом шаге по времени решение строится итерационно методом коллокаций (см. [18]), основанным на разложении правых частей по системе радиальных базисных функций ((см. [17, 21, 23])). Выполнены численные расчеты, результаты которых верифицированы при помощи построенных точных решений. Рассмотренный пример интерпретируется в терминах динамики популяций.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему двух квазилинейных уравнений параболического типа

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1 (uv_{xx} + u_x v_x) + f(u, v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2 (vu_{xx} + u_x v_x) + g(u, v). \quad (1)$$

Здесь $u(t, x)$, $v(t, x)$ — искомые функции; t (время) и x (координата) — независимые переменные; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — константы, $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Известные функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются достаточно гладкими. Система (1) предложена в монографии [24] в качестве математической модели взаимодействия двух популяций, в которой u и v — численности популяций «жертв» и «хищников».

Предметом настоящего исследования являются нетривиальные решения системы (1) с нулевыми фронтами, т.е. удовлетворяющие условиям

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=b(t)} = 0, \quad (2)$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ предполагаются достаточно гладкими и могут быть как известными, так и искомыми. Дополнительно будем предполагать, что $a(0) = b(0) = 0$, т.е. $u(0, 0) = v(0, 0)$.

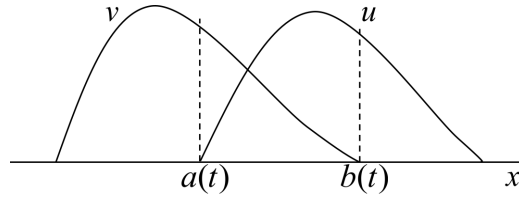
Можно убедиться, что на каждом нулевом фронте обращается в нуль множитель перед (хотя бы) одной из старших производных, т.е. параболический тип системы вырождается. Отметим, что ранее для случая $a(t) = b(t)$ была доказана теорема существования и единственности (см. [4]) нетривиального решения задачи (1), (2).

Примем, что

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0. \quad (3)$$

Это обуславливает наличие у системы (1) решения $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ и позволяет рассматривать решение с нулевым фронтом как часть *диффузионной волны* (см. [22]). Отметим, что упомянутая выше теорема из [4] не обеспечивает существование решений с подобными свойствами. Напротив, искомые функции всюду, за исключением общего нулевого фронта, имеют разные знаки, что не позволяет предложить содержательную интерпретацию данного утверждения с точки зрения предметной области.

В связи с вышесказанным сосредоточимся, в отличие от наших предыдущих работ [4–6, 22], на рассмотрении случая, когда в каждый момент времени $t > 0$ графики функций u и v в некоторой точке между нулевыми фронтами $a(t)$ и $b(t)$ пересекаются и имеют разные направления

Рис. 1. Взаимодействие популяций «хищников» (v) и «жертв» (u).

монотонности (см. рис. 1). Тогда решение естественным образом интерпретируется как динамика численности двух популяций, взаимодействующих в области $a(t) < x < b(t)$, за пределами которой популяции существуют автономно и эволюция каждой из них описывается линейным неоднородным уравнением переноса.

3. Точные решения. В данном разделе исследуются точные решения системы (1), имеющие вид многочленов по степеням пространственной переменной, коэффициенты которых в общем случае определяются при решении системы дифференциально-алгебраических уравнений. Рассматривается также частный случай, в котором система интегрируется в квадратурах и решение получается в явном виде, включая уравнения для нулевых фронтов (2).

3.1. Редукция к системе дифференциально-алгебраических уравнений. Будем искать точные решения системы (1) в виде многочленов по степеням пространственной переменной x с коэффициентами, зависящими от времени t :

$$u = \sum_{k=0}^n A_k(t)x^k, \quad v = \sum_{k=0}^n B_k(t)x^k, \quad (4)$$

где степень многочленов n подлежит определению.

Пусть функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются аналитическими, т.е. могут быть представлены в виде кратного ряда Тейлора. С учетом условия (3) их тейлоровские разложения можно записать в виде

$$f(u, v) = \gamma_1 u + \eta_1 v + \sum_{i,j=1}^{\infty} f_{ij} u^i v^j, \quad g(u, v) = \gamma_2 u + \eta_2 v + \sum_{i,j=1}^{\infty} g_{ij} u^i v^j. \quad (5)$$

Подставив представление (4) в (1), и приравняв с учетом (5) коэффициенты при одинаковых степенях x , можно убедиться, что в общем случае искомое решение существует только тогда, когда все $f_{ij} = g_{ij} = 0$, т.е.

$$f(u, v) = \gamma_1 u + \eta_1 v, \quad g(u, v) = \gamma_2 u + \eta_2 v, \quad (6)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2$ — константы, и при выполнении равенств $A_k(t) \equiv 0, B_k(t) \equiv 0$ для $k > 2$ (ненулевые значения возможны только в вырожденных частных случаях, которые не рассматриваются).

Для коэффициентов $A_k(t), B_k(t)$ при $k \leq 2$ имеем три системы уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_1 A_2 + 6\beta_1 A_2 B_2 + \eta_1 B_2 = 0, \\ \gamma_2 A_2 - 6\beta_2 A_2 B_2 + \eta_2 B_2 = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} A_1'(t) = (\gamma_1 + 4\beta_1 B_2)A_1 + (\eta_1 + 2\beta_1 A_2)B_1 + 2\alpha_1 A_2, \\ B_1'(t) = (\gamma_2 - 2\beta_2 B_2)A_1 + (\eta_2 - 4\beta_2 A_2)B_1 + 2\alpha_2 B_2; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} A_0'(t) = (\gamma_1 + 2\beta_1 B_2)A_0 + \eta_1 B_0 + A_1(\alpha_1 + \beta_1 B_1), \\ B_0'(t) = \gamma_2 A_0 + (\eta_2 - 2\beta_2 A_2)B_0 + B_1(\alpha_2 - \beta_2 A_1). \end{cases} \quad (9)$$

Ясно, что (7) — система алгебраических уравнений, (8) и (9) — системы дифференциальных уравнений первого порядка. Совместно (7)–(9) образуют систему дифференциально-алгебраических уравнений, состоящую из двух алгебраических и четырех дифференциальных уравнений.

Из проведенных рассуждений вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. Пусть функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ удовлетворяют системе (6). Тогда система (1) имеет точное решение вида (4), где $n = 2$; A_0, B_0 удовлетворяют системе алгебраических уравнений (7); A_1, B_1, A_2, B_2 удовлетворяют системе дифференциальных уравнений первого порядка (8)–(9).

Следствие. Для функций $f(u, v)$, $g(u, v)$, не удовлетворяющих (6), система (1) решений вида (4) не имеет.

3.2. Построение решения системы дифференциально-алгебраических уравнений. Система дифференциально-алгебраических уравнений (7)–(9) является распадающейся и может быть решена по нижеследующей процедуре, состоящей из трех этапов.

1. Можно видеть, что (7) — система квадратных уравнений, которая всегда имеет хотя бы одно (тривиальное) решение $A_2 = 0, B_2 = 0$. Второе решение имеет вид

$$A_2 = \frac{\gamma_1\eta_2 - \gamma_2\eta_1}{6(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}, \quad B_2 = -\frac{\gamma_1\eta_2 - \gamma_2\eta_1}{6(\beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1)}, \quad (10)$$

где $\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 \neq 0, \beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1 \neq 0$. Таким образом, A_2, B_2 — константы, которые, вообще говоря, определяются неоднозначно, причем из равенства числителей следует, что они будут равны или не равны нулю одновременно.

2. Если A_2, B_2 известны, то (8) — система линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $A_1(t), B_1(t)$, которая может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} A_1'(t) = \frac{3\beta_2\gamma_1\eta_1 + 2\beta_1\gamma_2\eta_1 + \beta_1\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1)}A_1 + \frac{3\beta_2\gamma_1\eta_1 + 2\beta_1\gamma_2\eta_1 + \beta_1\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}B_1 + \frac{\alpha_1(\gamma_1\eta_2 - \gamma_2\eta_1)}{3(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}, \\ B_1'(t) = \frac{3\beta_1\gamma_2\eta_2 + 2\beta_2\gamma_2\eta_1 + \beta_2\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1)}A_1 + \frac{3\beta_1\gamma_2\eta_2 + 2\beta_2\gamma_2\eta_1 + \beta_2\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}B_1 + \frac{\alpha_2(\gamma_2\eta_1 - \gamma_1\eta_2)}{3(\beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1)}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1 \neq 0, \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 \neq 0$. При этом в системе (11) неоднородности являются константами. Ее без труда можно решить методом вариации произвольной постоянной или численно (при задании начальных условий).

3. Найдя $A_1(t), B_1(t)$ и подставив их в (9), получим систему первого порядка относительно $A_0(t), B_0(t)$, которую можно решить стандартным методом вариации произвольной постоянной. Выражения для $A_1(t), B_2(t)$, а тем более для $A_0(t), B_0(t)$ являются весьма громоздкими и здесь не приводятся. При задании начальных данных полученную задачу Коши можно также проинтегрировать численно.

3.3. Пример точного решения. Поскольку общее решение систем (7)–(9) не слишком удобно для рассмотрения из-за громоздкости и большого количества произвольных постоянных, разберем в качестве примера один конкретный случай. Положим для определенности, что

$$3\beta_2\gamma_1\eta_1 + 2\beta_1\gamma_2\eta_1 + \beta_1\gamma_1\eta_2 = 0, \quad 3\beta_1\gamma_2\eta_2 + 2\beta_2\gamma_2\eta_1 + \beta_2\gamma_1\eta_2 = 0. \quad (12)$$

Тогда в правой части системы (8) обращаются в нуль коэффициенты перед искомыми функциями $A_1(t), B_1(t)$, и она существенно упрощается:

$$A_1'(t) = 2\alpha_1 A_2, \quad B_1'(t) = 2\alpha_2 B_2,$$

откуда следует, что

$$A_1(t) = 2\alpha_1 A_2 t + c_1, \quad B_1(t) = 2\alpha_2 B_2 t + c_2,$$

где A_1, B_2 определяются из (10), а c_1, c_2 — произвольные константы. В свою очередь, система (9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} A_0'(t) &= \frac{\gamma_1}{2}A_0 + \eta_1 B_0(t) + (2\alpha_1 A_2 t + c_1)[\alpha_1 + \beta_1(2\alpha_2 B_2 t + c_2)], \\ B_0'(t) &= \gamma_2 A_0 + \frac{\eta_2}{2}B_0(t) + (2\alpha_2 B_2 t + c_2)[\alpha_2 - \beta_2(2\alpha_1 A_2 t + c_1)]. \end{aligned}$$

Выберем конкретные значения входящих констант, при которых, в частности, выполняются равенства (12). Пусть

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta > 0, \quad \gamma_1 = 2\gamma > 0, \quad \gamma_2 = -\gamma\beta, \quad \eta_1 = \eta > 0, \quad \eta_2 = -2\beta\eta.$$

Тогда система (1) имеет следующее точное решение вида (4), удовлетворяющее условиям $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\eta}{2}x^2 + (c_1 - \alpha\eta t)x - \frac{\alpha^2\eta}{2}t^2 + \alpha c_1 t + \frac{c_1 c_2}{\gamma - \beta\eta} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1], \\ v &= -\frac{\gamma}{2}x^2 + (c_2 - \alpha\gamma t)x - \frac{\alpha^2\gamma}{2}t^2 + \alpha c_2 t - \frac{c_1 c_2 \beta}{\gamma - \beta\eta} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1], \end{aligned} \quad (13)$$

где c_1, c_2 — произвольные константы, $\gamma - \beta\eta \neq 0$. В этом случае уравнения

$$\begin{aligned} x_1^\pm(t) &= \frac{c_1 - \alpha\eta t}{\eta} \pm \sqrt{\frac{(c_1 - \alpha\eta t)^2}{\eta^2} - \alpha^2 t^2 + \frac{2\alpha c_1}{\eta} t + \frac{2c_1 c_2}{\eta(\gamma - \beta\eta)} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1]}, \\ x_2^\pm(t) &= \frac{c_2 - \alpha\gamma t}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{(c_2 - \alpha\gamma t)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 t^2 + \frac{2\alpha c_2}{\gamma} t - \frac{2\beta c_1 c_2}{\gamma(\gamma - \beta\eta)} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1]} \end{aligned}$$

определяют нулевые фронты для функций u и v соответственно.

Пусть $\alpha = 1, \gamma = \eta = 2$. Если принять $c_2 < -1, c_1\beta > 1$, то $x_1^-(0) = 0, (x_1^-)'(0) > 0; x_2^+(0) = 0, (x_2^+)'(0) > 0$, что может быть интерпретировано как динамика численности популяций «жертв» и «хищников» в общей области обитания.

4. Приближенные решения.

4.1. Алгоритм численного решения. Найти аналитическое решение задачи (1), (2) на заданном промежутке времени в общем случае вряд ли возможно вследствие нелинейности и наличия вырождения. В связи с этим встает вопрос построения приближенных решений. Спектр численных методов решения уравнений и систем параболического типа довольно широк. Исторически наиболее распространенными являются метод конечных разностей, методы конечных и граничных элементов. В последние десятилетия все большую популярность приобретают бессеточные методы (см. [25]), особенно при решении нелинейных задач.

Опыт авторов показал, что для решения нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением хорошие результаты дают применение метода двойственной взаимности в сочетании с методом граничных элементов и метод коллокаций при разностной аппроксимации по времени. В обоих случаях используется аппроксимация радиальными базисными функциями (см. [16, 18]). При этом для решения систем более подходящим является метод коллокаций (см. [5, 6]), который обеспечивает более стабильную сходимость итерационных процессов.

В данной работе, аналогично упомянутым статьям, построим пошаговый итерационный численный алгоритм, рассмотрев на этот раз, как и в предыдущих разделах, содержательный с точки зрения динамики популяций случай, проиллюстрированный на рис. 1. Последнее означает, что в каждый момент времени необходимо найти решение в интервале между нулевыми фронтами $a(t)$ и $b(t)$.

Примем для определенности, что $a(0) = b(0), a(t) < b(t)$ на некотором интервале $t \in [0, T]$, и будем искать решение задачи (1), (2) в области взаимодействия двух популяций, $x \in [a(t), b(t)]$. Представим в этой области систему (1) в произвольный момент времени в виде двух уравнений Пуассона

$$u_{xx} = \frac{\alpha_2 v_x - \beta_2 u_x v_x - v_t + g(u, v)}{\beta_2 v}, \quad v_{xx} = \frac{-\alpha_1 u_x - \beta_1 u_x v_x + u_t - f(u, v)}{\beta_1 u}. \quad (14)$$

Взяв в условиях (2) полные производные по времени, получим следующие соотношения, связывающие производные искомых функций по времени и по пространственной координате на нулевых фронтах:

$$(u_t + u_x a'(t)) \Big|_{x=a(t)} = 0, \quad (v_t + v_x b'(t)) \Big|_{x=b(t)} = 0. \quad (15)$$

Выразив u_t и v_t из уравнений (15) и подставив их в (1), получим дополнительные граничные условия на нулевых фронтах:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=b(t)} &= \bar{U}(t) = \frac{1}{\beta_2} \left(\alpha_2 + b'(t) + \frac{g(u(b(t), 0))}{v_x(t, b(t))} \right), \\ v_x|_{x=a(t)} &= \bar{V}(t) = -\frac{1}{\beta_1} \left(\alpha_1 + a'(t) + \frac{f(0, v(a(t)))}{u_x(t, a(t))} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, в произвольный момент времени имеем краевую задачу (14), (2), (16). Решение этой задачи на каждом шаге $t_k = kh$, где h — размер шага, будем искать на отрезке $x \in [l_k, L_k]$, $l_k = a(t_k)$, $L_k = b(t_k)$, в виде

$$u(t_k, x) = u_p(x) + u_h(x), \quad v(t_k, x) = v_p(x) + v_h(x), \quad (17)$$

где $u_p(x)$, $v_p(x)$ — частное решение системы (14), $u_h(x)$, $v_h(x)$ — решение подходящей задачи для однородной системы,

$$\begin{aligned} u_h'' &= 0, & u_h(l_k) &= -u_p(l_k), & u_h'(L_k) &= \bar{U}(t_k) - u_p'(L_k); \\ v_h'' &= 0, & v_h(L_k) &= -v_p(L_k), & v_h'(l_k) &= \bar{V}(t_k) - v_p'(l_k). \end{aligned} \quad (18)$$

При известном частном решении задача (18) имеет решение вида

$$u_h = u_h'[x - l_k] - u_p(l_k), \quad v_h = v_h'[x - L_k] - v_p(L_k). \quad (19)$$

Здесь значения u_h' , v_h' — решение системы уравнений, получаемой из условий (16) после нижеследующих подстановок с учетом (19):

$$\begin{aligned} u &= u_p + u_h, & v &= v_p + v_h, \\ u_x &= u_p' + u_h', & v_x &= v_p' + v_h'. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение на шаге t_k будем строить по следующей итерационной процедуре, в которой $u^{(n)}$, $u_{p(n)}$, $u_{h(n)}$, $v^{(n)}$, $v_{p(n)}$, $v_{h(n)}$ — n -е итерации решений.

I. Задаем тривиальное частное решение на начальной итерации:

$$u_{p(0)} \equiv 0, \quad v_{p(0)} \equiv 0. \quad (21)$$

II. На n -й итерации, при известном частном решении $u_{p(n)}$, $v_{p(n)}$, решение задачи (18) имеет вид

$$u_{h(n)} = u_h'[x - l_k] - u_{p(n)}(l_k), \quad v_{h(n)} = v_h'[x - L_k] - v_{p(n)}(L_k). \quad (22)$$

Подставив (22) в условия (16), с учетом (20) получим систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных u_h' и v_h' :

$$\begin{aligned} u_{p(n)}'(L_k) + u_h' &= \frac{1}{\beta_2} \left(\alpha_2 + b'(t_k) + \frac{g(u_{p(n)}(L_k) + u_h'[L_k - l_k] - u_{p(n)}(l_k), 0)}{v_{p(n)}'(L_k) + v_h'} \right), \\ v_{p(n)}'(l_k) + v_h' &= -\frac{1}{\beta_1} \left(\alpha_1 + a'(t_k) + \frac{f(0, v_{p(n)}(l_k) + v_h'[l_k - L_k] - v_{p(n)}(L_k))}{u_{p(n)}'(l_k) + u_h'} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Решив систему (23) и определив таким образом u_h' и v_h' , найдем соответствующую итерацию решения задачи (14), (2), (16):

$$u^{(n)} = u_{p(n)} + u_h'[x - l_k] - u_{p(n)}(l_k), \quad v^{(n)} = v_{p(n)} + v_h'[x - L_k] - v_{p(n)}(L_k). \quad (24)$$

III. Находим следующую итерацию частного решения как решение системы

$$\begin{aligned} u_{p(n+1)}'' &= \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}}, \\ v_{p(n+1)}'' &= \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}}, \end{aligned} \quad (25)$$

и переходим к шагу II.

Система (25) может быть решена методом коллокаций через разложение правых частей по системе радиальных базисных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}} &= \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \varphi_i(x), \\ -\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)}) &= \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \varphi_i(x). \end{aligned} \quad (26)$$

где $\varphi_i(x) = \varphi_i(|x - x_i|)$ — радиальные базисные функции, x_1, x_2, \dots, x_N — точки коллокации, расположенные на отрезке $[l_k, L_k]$. Для каждой функции φ_i существует такая функция ψ_i , что $\varphi_i = \psi_i''$. Коэффициенты $c_i^{(n+1)}$, $d_i^{(n+1)}$, $i = 1, \dots, N$, определяются из решения двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}} \right|_{x=x_k} &= \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \varphi_i(x_k), \quad k = 1, \dots, N; \\ \left. \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}} \right|_{x=x_k} &= \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \varphi_i(x_k), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (27)$$

Производные по времени в левых частях (27) вычисляются методом конечных разностей, с использованием результатов решения на предыдущем шаге.

Решив (27), найдем следующую итерацию частного решения системы (14):

$$u_{p(n+1)} = \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \psi_i(x), \quad v_{p(n+1)} = \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \psi_i(x). \quad (28)$$

Итерационный процесс (21)–(28) останавливается, если $(n+1)$ -я итерация достаточно близка к n -й. В результате получим решение задачи (1), (2) в момент времени $t = t_k$, непрерывное по x на отрезке $x \in [l_k, L_k]$:

$$u(t_k, x) = u_{p(n+1)}(x) + u_{h(n+1)}(x), \quad v(t_k, x) = v_{p(n+1)}(x) + v_{h(n+1)}(x). \quad (29)$$

4.2. Пример численного решения. Верификация алгоритма. Рассмотрим задачу (1), (2) для случая, описанного в разделе 3.3. Пусть $\alpha = 1$, $\beta = 1,1$, $\gamma = 1$, $\eta = 1$, $c_1 = 1,55$, $c_2 = -1,1$. Тогда при $a(t) = x_1^-(t)$, $b(t) = x_2^+(t)$ задача (1), (2) имеет точное решение (13), которое может быть использовано в качестве тестового для оценки корректности предложенного в предыдущем разделе алгоритма.

Поскольку в рассматриваемом случае функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются линейными, алгебраические уравнения в системе (23) приводятся к билинейному виду. Решение этой системы методом подстановки сводится к решению квадратного уравнения. Например, выразив из первого уравнения $u'_{h(n)}$ и подставив во второе, получим квадратное уравнение относительно $v'_{h(n)}$, имеющее положительный дискриминант в случае, когда область $x \in [l_k, L_k]$ не пуста. С учетом того, что функция v убывающая, отрицательный корень квадратного уравнения будет искомым значением $v'_{h(n)}$. Тогда $u'_{h(n)}$ находится однозначно из первого уравнения системы (23).

На рис. 2 сравниваются результаты расчетов и решение (13). Сравнение демонстрирует хорошее совпадение приближенного решения с точным.

Интерпретируем полученные результаты с точки зрения взаимодействия популяций «хищников» (функция $v(t, x)$) и «жертв» (функция $u(t, x)$). На начальном этапе численность «жертв» выше численности «хищников» (рис. 2(a), (b)), при этом с течением времени область взаимодействия (отрезок $[a(t), b(t)]$) увеличивается. Далее численности двух популяций выравниваются (рис. 2(c)), после чего начинается преобладание «хищников» и сокращение области взаимодействия (рис. 2(d), (e)).

Отметим, что начиная с момента времени $t \approx 0,44$ области обитания двух популяций не пересекаются, т.е. хищники и жертвы перестают взаимодействовать. Далее поведение каждой из

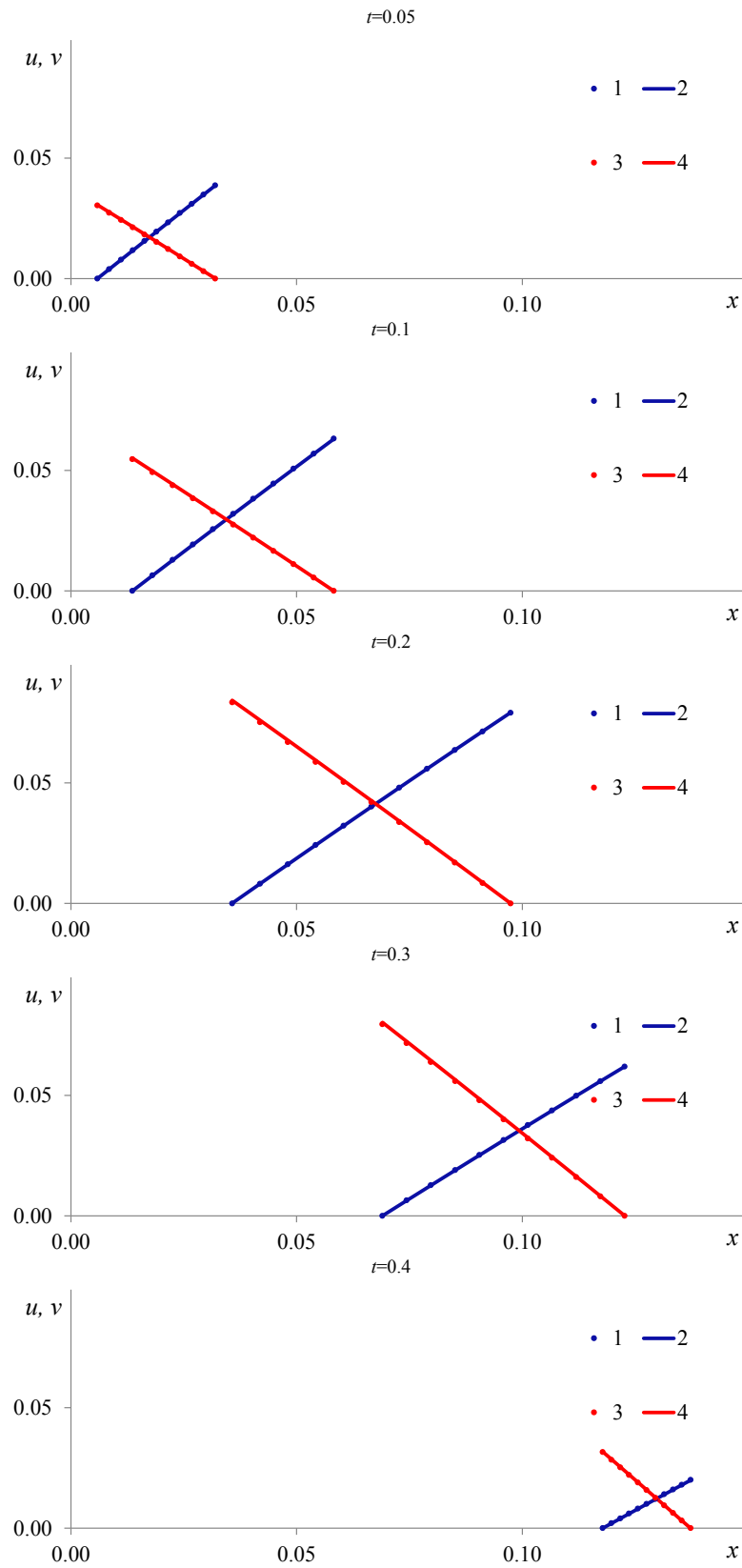


Рис. 2. Сравнение численного и точного решений в различные моменты времени: (а) $t = 0,05$; (б) $t = 0,1$; (в) $t = 0,2$; (г) $t = 0,3$; (д) $t = 0,4$. Цифровые обозначения графиков: 1 — численное решение $u(t, x)$; 2 — точное решение $u(t, x)$; 3 — численное решение $v(t, x)$; 4 — точное решение $v(t, x)$.

популяций описывается неоднородным полулинейным (в общем случае) уравнением переноса: $u_t = \alpha_1 u_x + f(u, 0)$ («жертвы») и $v_t = \alpha_2 v_x + g(0, v)$ («хищники»).

5. Заключение. Настоящая работа продолжает исследования коллектива авторов (см. [4]) по изучению модели популяционной динамики, предложенной Д. Мюрреем в [24], которая является квазилинейной параболической системой второго порядка. Получен новый класс точных решений, имеющих вид многочленов второй степени с переменными коэффициентами, определяемыми при решении системы дифференциально-алгебраических уравнений, для решения которой предложен специальный аналитический подход.

Для построения приближенных решений разработан оригинальный вычислительный алгоритм, основанный на методе коллокаций с использованием разложения правых частей по системе радиальных базисных функций. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты, для верификации результатов которых использованы точные решения.

Наиболее важным научным результатом, который был получен в ходе проведенной работы, по мнению авторов, является то, что удалось частично решить проблему, возникшую ранее при доказательстве теоремы существования (см. [4, с. 1496]), и получить осмысленные с точки зрения предметной области решения: с двумя нулевыми фронтами, между которыми обе искомые функции положительны, что можно интерпретировать как динамику численности двух взаимодействующих популяций («жертв» и «хищников») в общей области обитания, за пределами которой популяции эволюционируют автономно друг от друга, вследствие чего модель меняется принципиальным образом.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с построением новых классов точных решений с искомыми свойствами (с нулевыми фронтами). Еще одной важной, хотя, вероятно, и трудно решаемой проблемой, является распространение теоремы существования из [4] на задачу (1), (2) общего вида, когда нулевые фронты для искомым функций различны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. — М.: Физматлит, 2008.
2. Баренблатт Г. И., Енттов В. Н., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Наука, 1984.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
4. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Аналитические решения с нулевым фронтом для нелинейной вырождающейся параболической системы // Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 11. — С. 1461–1470.
5. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Задача об иницировании диффузионной волны для нелинейной параболической системы второго порядка // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2023. — 29, № 2. — С. 67–86.
6. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция-диффузия // Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — 62, № 4. — С. 169–180.
7. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — 22, № 1. — С. 112–123.
8. Ковалев В. А., Куретова Е. Д., Куркина Е. С. О формировании нитеподобных структур на ранней фазе солнечных вспышек // Физика плазмы. — 2020. — 46, № 4. — С. 351–357.
9. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. — М.: ОНТИ, 1937.
10. Ладьяженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
11. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
12. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
13. Ха Д. Т., Цибуллин В. Г. Уравнения диффузии-реакции-адвекции для системы «хищник-жертва» в гетерогенной среде // Компьютер. исслед. модел. — 2021. — 13, № 6. — С. 1161–1176.

14. Шагапов В. Ш., Мухаметшин С. М., Галиаскарова Г. Р. Распространение тяжелых атмосферных выбросов с учетом ландшафта местности// Инж.-физ. ж. — 2005. — 78, № 2. — С. 99–103.
15. Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B. Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovski–Piskunov equation with mixed boundary condition// J. Appl. Math. Comput. — 2021. — 68. — P. 1–26.
16. Al-Bayati S. A., Wrobel L. C. The dual reciprocity boundary element formulation for convection–diffusion–reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions// Int. J. Mech. Sci. — 2018. — 145. — P. 367–377.
17. Buhmann M. D. Radial Basis Functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
18. Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Method. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2013.
19. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations. — New York: Interscience, 2008.
20. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes// Ann. Eugenics. — 1937. — 7. — P. 353–369.
21. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions// Acta Num. — 2015. — 24. — P. 215–258.
22. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type// Symmetry. — 2020. — 12, № 6. — 999.
23. Kazakov A. L., Lempert A. A., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term// Symmetry. — 2020. — 12, № 6. — 921.
24. Murray J. D. Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications.. — New York: Springer, 2003.
25. Nguyen V. P., Rabczuk T., Bordas S., Duflot M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects// Math. Comput. Simul. — 2008. — 79, № 3. — P. 763–813.
26. Perthame B. Parabolic Equations in Biology. Growth, Reaction, Movement and Diffusion. — New York: Springer, 2015.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Казakov Александр Леонидович (Kazakov Aleksandr Leonidovich)
 Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
 Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург
 (V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
 Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: kazakov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович (Spevak Lev Fridrihovich)
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург
 (Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: lfs@imach.uran.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 29–38
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-29-38

УДК 517.956

КЛАССИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЙНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© 2025 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. В рамках подхода Захарова–Шульмана определена классическая матрица рассеяния для простейшего процесса взаимодействия жестких и мягких возбуждений в кварк-глюонной плазме. Вычисления проведены в близкой аналогии с методами квантовой теории поля, с заменой квантового коммутатора от квантовопольевых операторов полей на так называемую скобку Ли–Пуассона от классических переменных. Классическая \mathcal{S} -матрица определена в виде наиболее общего интегро-степенного ряда по степеням асимптотических значений нормальных бозонных переменных $c_{\mathbf{k}}^a(t)$, $c_{\mathbf{k}}^{*a}(t)$, описывающих мягкие глюонные возбуждения системы, и цветного заряда $Q^a(t)$ жесткой частицы при $t \rightarrow \infty$. Найден первый нетривиальный вклад в данную \mathcal{S} -матрицу.

Ключевые слова: гамильтонов формализм, скобка Ли–Пуассона, классическая матрица рассеяния, неабелева плазма, плазмон, цветозаряженная частица.

CLASSICAL SCATTERING MATRIX FOR HARD AND SOFT EXCITATIONS IN A PLASMA WITH NON-ABELIAN INTERACTION

© 2025 Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV

ABSTRACT. Within the framework of the Zakharov–Shulman approach, we determine the classical scattering matrix for the simplest process of interaction between hard and soft excitations in a quark-gluon plasma. Calculations are performed in close analogy with the methods of quantum field theory, with the replacement of the quantum commutator of quantum field operators by the so-called Lie–Poisson bracket of classical variables. The classical \mathcal{S} -matrix is determined in the form of the most general integro-power series in asymptotic values of the normal bosonic variables $c_{\mathbf{k}}^a(t)$ and $c_{\mathbf{k}}^{*a}(t)$ describing the soft gluon excitations of the system and the color charge $Q^a(t)$ of the hard particle at $t \rightarrow \infty$. The first nontrivial contribution to the given \mathcal{S} -matrix is obtained.

Keywords and phrases: Hamiltonian formalism, Lie–Poisson bracket, classical scattering matrix, non-Abelian plasma, plasmon, color-charged particle.

AMS Subject Classification: 81U20, 82D10

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

1. Введение. В [12] была разработана гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных бозе-возбуждений (плазмонов), взаимодействующих с классической высокоэнергетической цветозаряженной частицей, распространяющейся через горячую кварк-глюонную плазму (КГП). Для этого применялся общий формализм построения теории волн в нелинейных средах, основанный на классической гамильтоновой теории систем с распределёнными параметрами, предложенный в свое время В. Е. Захаровым (см. [4, 5]) и подробно представленный на многочисленных примерах конкретных физических систем в обзоре [6] и в монографии [18] (см. также [8, 9, 13]).

Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие гамильтонова подхода в описании нелинейных волновых систем и является первой из двух статей цикла. Здесь предложен формализм для определения явного вида так называемой классической матрицы рассеяния для процесса взаимодействия плазмона с жесткой цветозаряженной частицей. Понятие классической \mathcal{S} -матрицы впервые было введено в рассмотрение В. Е. Захаровым (см. [16]) для гамильтоновых волновых систем и затем развито в работах В. Е. Захарова и Е. И. Шульмана (см. [7, 17]). Однако в этих работах данная матрица рассеяния была определена только для мягкого сектора возбуждений физических систем. Здесь нами впервые предложен подход к определению классической матрицы рассеяния в случае движущихся в сильно неравновесной среде инжектируемых извне жестких цветных частиц. Ввиду сложности задачи мы ограничились в данной работе самым простым процессом взаимодействия: упругим рассеянием одной энергичной частицы на плазмоне; тем не менее данная задача имеет важное прикладное значение.

Во второй статье будет показано, как, зная классическую \mathcal{S} -матрицу для произвольного процесса рассеяния жесткой цветной частицы на мягких возбуждениях кварк-глюонной плазмы, определить выражение для потери энергии, которую испытывает данная частица при рассеянии. Потери энергии играют важную роль в диагностике КГП в современных экспериментах по столкновению тяжелых ультрарелятивистских ионов.

2. Гамильтониан взаимодействия плазмонов и жесткой цветной частицы. Для удобства дальнейших ссылок в данном разделе приводятся необходимые в дальнейшем изложении сведения из [12]. В частности, в указанной работе был получен явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка $\mathcal{H}^{(4)}$, который описывает упругое рассеяние плазмона на жесткой частице:

$$\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} = i \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^a, \quad (2.1)$$

где полная эффективная амплитуда $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a a_1 a_2} = f^{a a_1 a_2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} = & T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2} \right) \phi_{\mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2} + \\ & + i \left[\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l} \right) \mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} \right) \mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1} \right]. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь f^{abc} — антисимметричные структурные константы цветовой алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$, $a, b, c = 1, \dots, N_c$; $\omega_{\mathbf{k}}^l$ — дисперсионное соотношение продольной моды коллективных возбуждений КГП, \mathbf{v} — скорость жесткой частицы, которую считаем фиксированной. Амплитуды $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ и $c_{\mathbf{k}}^a$ — так называемые нормальные полевые переменные, описывающие мягкую бозонную степень свободы системы, а \mathcal{Q}^a — цветной заряд жесткой частицы, который является функцией времени t . Данные переменные подчиняются соответствующим уравнениям Гамильтона:

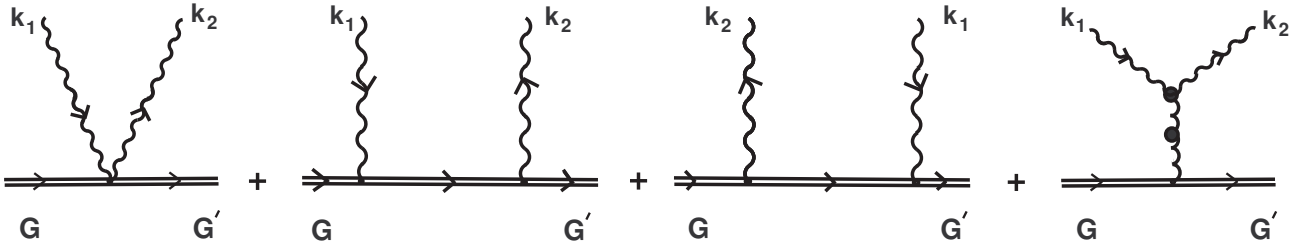


Рис. 1. Эффективная амплитуда $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 a}$ для процесса упругого рассеяния плазмона на жесткой цветной частице. Черные точки обозначает НТЛ-суммирование, а двойная линия — жесткую частицу.

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} &= -i \left\{ c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\}, & \frac{\partial c_{\mathbf{k}'}^{a'}}{\partial t} &= -i \left\{ c_{\mathbf{k}'}^{a'}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\}, \\ \frac{dQ^a}{dt} &= -i \left\{ Q^a, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\}, & Q^a(t) \Big|_{t=t_0} &= Q_0^a, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\mathcal{H}^{(0)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}}^a \quad (2.4)$$

— гамильтониан свободного поля, фигурные скобки обозначают скобку Ли–Пуассона

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^a} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*a}} - \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*a}} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^a} \right\} + i \frac{\partial F}{\partial Q^a} \frac{\partial G}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c. \quad (2.5)$$

Первый член в правой части — это стандартная каноническая скобка для систем с распределенными параметрами.

На рис. 1 дана диаграммная интерпретация различных членов в фигурных скобках в эффективной амплитуде (2.2). Второй и третий графики представляют собой комптоновское рассеяние мягких бозонных возбуждений на жесткой пробной частице, индуцированное вторым членом в правой части выражения (2.2). Линии входящей и исходящей волны на рис. 1 соответствуют нормальным переменным $c_{\mathbf{k}_1}^{a_1}$ и $c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2}$, а горизонтальная двойная линия между двумя вершинами взаимодействия соответствует «пропагатору» жесткой частицы $1/(\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1)$, который входит в (2.2) в симметризованном виде. Вершины взаимодействия соответствуют функциям $\phi_{\mathbf{k}_1}^*$ или $\phi_{\mathbf{k}_2}$. Последний график на рис. 1 связан с взаимодействием жесткой частицы с плазмонами через трехплазмонную вершинную функцию $\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ с промежуточным «виртуальным» колебанием, которому в (2.2) соответствует фактор вида

$$\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l}.$$

Этот фактор также можно записать в более простой форме $1/(\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l)$, если так называемая «резонансная разность частот» равна нулю:

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = 0.$$

Наконец, первый член $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)}$ в правой части (2.2) связан с процессом прямого взаимодействия двух плазмонов с жесткой частицей; ему отвечает первый график на рис. 1. В конкретной рассматриваемой физической системе не существует двойной контактной вершинной функции, которая описывала бы этот процесс рассеяния, и поэтому мы должны просто полагать этот член равным нулю: $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} \equiv 0$.

В заключение данного раздела отметим также, что гамильтониан (2.1) является вещественной функцией даже без использования условия резонанса $\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = 0$.

3. Классическая матрица рассеяния. Данный раздел посвящен определению классической \mathcal{S} -матрицы для процесса рассеяния жесткой цветозаряженной частицы на мягких бозонных возбуждениях среды. Дальнейшее рассмотрение будет основано на работах В. Е. Захарова и Е. И. Шульмана [7, 16, 17].

В нашем случае следующая система динамических уравнений является исходной при построении классической матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} &= -i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})c_{\mathbf{k}}^a - i\frac{\delta\mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta c_{\mathbf{k}}^{*a}}, \\ \frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} &= i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})c_{\mathbf{k}}^{*a} + i\frac{\delta\mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta c_{\mathbf{k}}^a}, \\ \frac{dQ^a}{dt} &= \frac{\partial\mathcal{H}_{\text{int}}}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Эти уравнения представляют собой следствие системы (2.3), определения свободного гамильтониана (2.4) и скобки Ли—Пуассона (2.5). Здесь \mathcal{H}_{int} — гамильтониан взаимодействия. Следуя рассуждениям [7, 16, 17], рассмотрим систему с взаимодействием, которое адиабатически выключается при $t \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}e^{-\epsilon|t|}, \quad \epsilon > 0.$$

Решение системы уравнений (3.1) асимптотически переходит в решение уравнений свободного поля:

$$c_{\mathbf{k}}^a(t) \rightarrow c_{\mathbf{k}}^{\pm a}(t) \equiv c_{\mathbf{k}}^{\pm a} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}, \quad Q^a(t) \rightarrow Q^{\pm a},\tag{3.2}$$

где в правой части величины $c_{\mathbf{k}}^{\pm a}$ и $Q^{\pm a}$ — некоторые постоянные. Отметим, что отображения (3.2) являются формальным каноническим преобразованием, и в новых переменных *полный* гамильтониан \mathcal{H} имеет вид

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k})(c_{\mathbf{k}}^{\pm a})^* c_{\mathbf{k}}^{\pm a}.$$

Функции $(c_{\mathbf{k}}^{-a}, Q^{-a})$ и $(c_{\mathbf{k}}^{+a}, Q^{+a})$ не являются независимыми. Существует нелинейный оператор \hat{S}_ϵ , связывающий так называемые in- и out-поля и асимптотические цветные заряды. Здесь обозначение «in-» связывается с состоянием, которому приписывается знак «-», а обозначение «out-» связывается с состоянием со знаком «+». Иногда мы будем использовать эту удобную терминологию, принятую в квантовой теории поля для обозначений асимптотических in- и out-полевых операторов, определенных соответственно в областях при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ (см., например, [11]). Данные операторы, в частности, удовлетворяют перестановочным соотношениям и уравнениям для свободных полей. Для дальнейшего анализа перейдем к так называемому «представлению взаимодействия»:

$$c_{\mathbf{k}}^a(t) = \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t)e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}, \quad c_{\mathbf{k}}^{*a}(t) = \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(t)e^{i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}.$$

Уравнения движения (3.1) принимают в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} &= -i\frac{\delta\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}} e^{-\epsilon|t|}, \\ \frac{\partial \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} &= i\frac{\delta\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a} e^{-\epsilon|t|}, \\ \frac{dQ^a}{dt} &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c e^{-\epsilon|t|},\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ — гамильтониан взаимодействия, выраженный в терминах новых переменных $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a$ и $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}$. Эти уравнения эквивалентны интегральным уравнениям, определяющим временную эволюцию рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) &= c_{\mathbf{k}}^{-a} - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(\tau)} e^{-\epsilon|\tau|}, \\
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(t) &= (c_{\mathbf{k}}^{-a})^* + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(\tau)} e^{-\epsilon|\tau|}, \\
 \mathcal{Q}^a(t) &= \mathcal{Q}^{-a} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\partial \mathcal{Q}^b(\tau)} f^{abc} \mathcal{Q}^c(\tau) e^{-\epsilon|\tau|}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Решения этих интегральных уравнений можно формально представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) &= S_{\epsilon}(-\infty, t) [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \\
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(t) &= S_{\epsilon}^*(-\infty, t) [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \\
 \mathcal{Q}^a(t) &= S_{\epsilon}(-\infty, t) [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}].
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь и далее, чтобы не водить новые обозначения, интегральные операторы в правых частях для решений $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t)$ и $\mathcal{Q}^a(t)$ записаны с помощью одного и того же символа $S_{\epsilon}(-\infty, t)[\dots]$, хотя это не вполне корректно.

При конечных ϵ и достаточно малых $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и \mathcal{Q}^{-a} интегральный оператор $S_{\epsilon}(-\infty, t)$ может быть получен в виде сходящегося ряда путем итерации предыдущих интегральных уравнений. В [17] ряд, полученный для оператора $S_{\epsilon}(-\infty, t)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, был назван *классической матрицей перехода*. Определен предел каждого члена ряда при $\epsilon \rightarrow 0$, а полученное таким образом выражение является конечным в смысле обобщенных функций.

Далее, полагая $t \rightarrow +\infty$, находим из (3.4)

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = S_{\epsilon} [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \quad (c_{\mathbf{k}}^{+a})^* = S_{\epsilon}^* [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \quad \mathcal{Q}^{+a} = S_{\epsilon} [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \tag{3.5}$$

где $S_{\epsilon} \equiv S_{\epsilon}(-\infty, +\infty)$. Соответствующий предел интегрального оператора S_{ϵ} при $\epsilon \rightarrow +0$

$$\mathcal{S} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} S_{\epsilon}(-\infty, +\infty)$$

получил название *классической матрицы рассеяния*.

4. Рассеяние плазмона на жесткой цветозаряженной частице. Определим структуру классической матрицы рассеяния в простейшем случае квадратичного по полевым переменным $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a$ и $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}$ и линейного по цветному заряду \mathcal{Q}^a гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)}$, заданного выражением (2.1). В представлении взаимодействия первое и третье интегральные уравнения в (3.3) принимают вид

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)baa_1} \tilde{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}(\tau) \mathcal{Q}^b(\tau) e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \tau - \epsilon|\tau|}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{Q}^a(t) = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{2} f^{abc} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)ba_1a_2} \tilde{c}_{\mathbf{k}_1}^{*a_1}(\tau) \tilde{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}(\tau) \mathcal{Q}^c(\tau) e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \tau - \epsilon|\tau|}, \tag{4.2}$$

где в показателе экспонент появляется «резонансная разность частот»

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \tag{4.3}$$

уже упомянутая в разделе 2. Интегральные уравнения (4.1) и (4.2) можно символически представить в графической форме, как показано на рис. 2. Пояснения к графическим элементам даны в таблице 1.

Таблица 1. Элементы диаграмм графической интерпретации уравнений (4.1) и (4.2).

Название	Элемент диаграммы	Фактор в уравнениях
неизвестная нормальная полевая переменная	a, k 	$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t)$
неизвестный цветной заряд	a 	$Q^a(t)$
асимптотическая амплитуда поля	a, k 	$c_{\mathbf{k}}^{-a}$
асимптотический цветной заряд	a 	Q^{-a}
экспоненциальный множитель	a — a' 	$\delta^{aa'} e^{i\tau\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} - \epsilon \tau }$
полная эффективная амплитуда		$\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)baa_1}$
антисимметричные структурные константы		f^{abc}

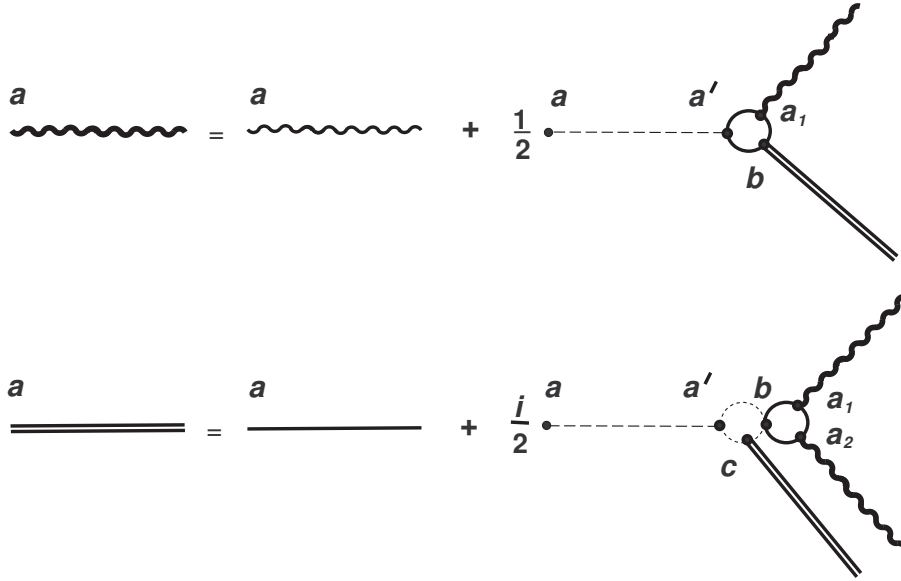


Рис. 2. Графическое представление двух взаимодействующих уравнений (4.1) и (4.2).

Графическое представление удобно тем, что дает возможность соотнести с каждым членом ряда, возникающим в результате итерации интегральных уравнений (4.1) и (4.2), определенную графическую диаграмму.

Для наших целей достаточно определить итерацию первого порядка. Для уравнения (4.1) это просто означает, что в правой части следует сделать замену $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(\tau) \rightarrow c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $Q^a(\tau) \rightarrow Q^{-a}$; тогда

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \left(\int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \tau - \epsilon|\tau|} \right) \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)baa_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} Q^{-b}. \quad (4.4)$$

Зависимость от времени собирается здесь в отдельный множитель. Проанализируем интеграл по переменной τ . Для определенности предположим, что $t > 0$ и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon|\tau|} &= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau + \epsilon\tau} + \int_0^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon\tau} = \\ &= \frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + \epsilon} + \left(\frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon} e^{(i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon)t} - \frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon} \right) = \\ &= \frac{2\epsilon}{(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})^2 + \epsilon^2} + \frac{1}{i} \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i\epsilon} e^{(i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon)t}. \end{aligned}$$

Используя пределы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi\delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{ixt}}{x + i\epsilon} = 0$$

(см. [3]), находим требуемый предел для нашего интеграла:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon|\tau|} = 2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}).$$

Таким образом, полагая $\epsilon \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$, находим из (4.4):

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}^{(2)baa_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} \mathcal{Q}^{-b} 2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}) \equiv S \left[c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a} \right]. \quad (4.5)$$

Это выражение определяет классическую матрицу рассеяния в первом нетривиальном приближении. Аналогичные рассуждения для второго интегрального уравнения (4.2) в том же порядке итераций приводят нас к следующему соотношению:

$$\mathcal{Q}^{+a} = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{2} f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{(2)ba_1a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-c} 2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}). \quad (4.6)$$

5. Явный вид классической матрицы рассеяния. Во второй части работы нам понадобится понятие эффективного классического тока, связанного с процессом рассеяния жесткой цветной частицы на плазмоне. Для его определения необходимо знать явный вид классической матрицы рассеяния, тогда как в выражениях (4.5) и (4.6) она представлена в форме некоторого интегрального оператора. Попробуем определить явную форму классической матрицы рассеяния по аналогии с квантовой теорией поля. Как хорошо известно, связь между асимптотическими состояниями in- и out-полевых операторов задается квантовополевой S -матрицей (см. [1, 2, 11]):

$$\hat{\phi}^{\text{out}}(x) = \hat{S}^\dagger \hat{\phi}^{\text{in}}(x) \hat{S}.$$

Далее, если представить общую форму квантовой S -матрицы как экспоненту от некоторой фазовой матрицы \hat{T} (см., например, [14]),

$$\hat{S} = e^{i\hat{T}}, \quad (5.1)$$

где \hat{T} — эрмитов оператор, то последнее соотношение можно переписать в виде ряда коммутаторов

$$\hat{\phi}^{\text{out}}(x) = e^{-i\hat{T}} \hat{\phi}^{\text{in}}(x) e^{i\hat{T}} = \hat{\phi}^{\text{in}}(x) + \frac{i}{1!} [\hat{\phi}^{\text{in}}, \hat{T}] + \frac{i^2}{2!} [[\hat{\phi}^{\text{in}}, \hat{T}], \hat{T}] + \frac{i^3}{3!} [[[\hat{\phi}^{\text{in}}, \hat{T}], \hat{T}], \hat{T}] + \dots \quad (5.2)$$

По аналогии с (5.1) будем искать классическую S -матрицу в виде экспоненциальной функции

$$\mathcal{S} = e^{i\mathcal{T}}, \quad (5.3)$$

где теперь $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$, а квантовые коммутаторы в (5.2) заменим на скобку Ли–Пуассона: $[\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}$, как она была определена уравнением (2.5). Выпишем ее в новых асимптотических переменных $c_{\mathbf{k}}^{-a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ и \mathcal{Q}^{-a} :

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-c}} \frac{\delta G}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-c})^*} - \frac{\delta F}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-c})^*} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-c}} \right\} + i \frac{\partial F}{\partial \mathcal{Q}^{-a}} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{Q}^{-b}} f^{abc} \mathcal{Q}^{-c}.$$

Тогда правые части первого и последнего соотношений в (3.5) в пределе при $\epsilon \rightarrow +0$ можно формально представить в виде следующих рядов:

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{i}{1!} \{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\} + \frac{i^2}{2!} \{\{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \frac{i^3}{3!} \{\{\{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \dots, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{Q}^{+a} = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{1!} \{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\} + \frac{i^2}{2!} \{\{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \frac{i^3}{3!} \{\{\{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \dots \quad (5.5)$$

Эти ряды фактически представляют собой некоторое каноническое преобразование. Обсуждение таких преобразований в случае аналитической механики можно найти в [10, 15]. Они тесно связаны с однопараметрическими подгруппами общих канонических преобразований, в которых функция \mathcal{T} (в нашем случае, функционал) играет роль *генератора* некоторой подгруппы. Однако в примерах, рассмотренных в [10, 15], предполагается, что \mathcal{T} — это функция с заданной функциональной зависимостью. В нашем рассмотрении функционал \mathcal{T} сам является неизвестной величиной, которую необходимо определить.

Будем искать \mathcal{T} в виде наиболее общего интегро-степенного разложения по степеням нормальных in-полевых переменных $c_{\mathbf{k}}^{-a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ и асимптотического цветного заряда \mathcal{Q}^{-a} :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & F^a \mathcal{Q}^{-a} + \int d\mathbf{k}_1 [g_{\mathbf{k}_1}^{a1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a1} + g_{\mathbf{k}_1}^{*a} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a})^*] + \int d\mathbf{k}_1 [f_{\mathbf{k}_1}^{a1b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a1} + f_{\mathbf{k}_1}^{*a1b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a1})^*] \mathcal{Q}^{-b} + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* \right] + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* \right] \mathcal{Q}^{-b} + \dots \quad (5.6) \end{aligned}$$

В рамках нашего приближения достаточно рассмотреть только второй член в правых частях (5.4) и (5.5), тогда будем иметь, соответственно,

$$\begin{aligned} \{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\} = & \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*} = g_{\mathbf{k}}^{*a} + f_{\mathbf{k}}^{*ab} \mathcal{Q}^{-b} + \int d\mathbf{k}_1 \left[g_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + 2g_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* \right] + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 \left[G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + 2G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* \right] \mathcal{Q}^{-b} + \dots \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\} = & \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathcal{Q}^{-b}} f^{abc} \mathcal{Q}^{-c} = f^{abc} F^b \mathcal{Q}^{-c} + f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 [f_{\mathbf{k}_1}^{a1b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a1} + f_{\mathbf{k}_1}^{*a1b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a1})^*] \mathcal{Q}^{-c} + \\ & + f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* \right] \mathcal{Q}^{-c} + \dots \end{aligned}$$

Два полученных выше выражения следует подставить в (5.4) и (5.5) соответственно и сравнить с асимптотическими соотношениями (4.5) и (4.6). В результате получаем первую отличную от нуля коэффициентную функцию в представлении (5.6):

$$G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} = -\frac{i}{2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) b a_1 a_2} 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}), \quad (5.7)$$

и поэтому вместо (5.6) можно теперь написать

$$\mathcal{T} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-b} + \dots \quad (5.8)$$

В силу определения (5.7) функции $G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b}$ и свойства

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2} = -\mathcal{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2) a a_2 a_1}$$

полной эффективной амплитуды (2.2), которое, напомним, является следствием требования вещественности эффективного гамильтониана, видно, что функция \mathcal{T} вещественна, как и должно быть.

В заключение этого раздела отметим, что асимптотические амплитуды $c_{\mathbf{k}}^{\pm a}(t)$, определенные в (3.2), могут быть выражены через исходные амплитуды $c_{\mathbf{k}}^a(t)$, $c_{\mathbf{k}}^{*a}(t)$ и цветной заряд $Q^a(t)$. В ведущем приближении это соотношение имеет вид

$$c_{\mathbf{k}}^{\pm a}(t) = c_{\mathbf{k}}^a(t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \pm i0} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1}(t) Q^b(t) + \dots$$

6. Заключение. В данной работе при помощи уравнений Гамильтона для нормальной бозонной переменной поля и цветного заряда пробной частицы была определена классическая матрица рассеяния для процесса взаимодействия жесткой цветной частицы с мягкими бозе-возбуждениями кварк-глюонной плазмы. Для этой цели был использован известный подход Захарова—Шульмана, развитый при формализации описания так называемых гамильтоновых волновых систем различной физической природы. Достаточная универсальность этого подхода позволила разработать метод построения классической \mathcal{S} -матрицы для такого сложного объекта, каким является существенно неравновесная кварк-глюонная плазма, взаимодействующая с жесткими цветозаряженными партонами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
2. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. — М.: Наука, 1987.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
4. Захаров В. Е. Гамильтонов формализм для гидродинамических моделей плазмы// ЖЭТФ. — 1971. — 60. — С. 1714–1726.
5. Захаров В. Е. Гамильтонов формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией// Изв. вузов. Радиофизика. — 1974. — 17. — С. 431–453.
6. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтонов формализм для нелинейных волн// Усп. физ. наук. — 1997. — 167. — С. 1137–1167.
7. Захаров В. Е., Шульман Е. И. О матрице рассеяния и интегрируемости волновых систем, обладающих дополнительным интегралом движения// Докл. АН СССР. — 1985. — 283, № 6. — С. 1325–1328.
8. Красицкий В. П. О каноническом преобразовании в теории слабонелинейных волн с нераспадным законом дисперсии// ЖЭТФ. — 1990. — 98. — С. 1644–341.
9. Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю., Гитман Д. М. Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия// ЖЭТФ. — 2020. — 157. — С. 327–341.
10. Медведев Б. В. Начала теоретической физики. — М.: Наука, 1977.
11. Швeбер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.
12. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction, I: Plasmon – hard particle scattering// Nucl. Phys. A. — 2024. — 1048. — 122903.
13. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction// Int. J. Mod. Phys. A. — 2023. — 38. — 2350015.
14. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W. On the formulation of quantized field theories, II// Nuovo Cim. — 1957. — 6. — P. 319–333.
15. Sudarshan E. C. G., Mukunda N. Classical Dynamics: A Modern Perspective. — New York: Wiley, 1974.

16. *Zakharov V. E.* Integrable systems in multidimensional spaces// Lect. Notes Phys. — 1983. — 153. — P. 190–216.
17. *Zakharov V. E., Schulman E. I.* On additional motion invariants of classical Hamiltonian wave systems// Phys. D. — 1988. — 29. — P. 283–320.
18. *Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G.* Kolmogorov Spectra of Turbulence, I. Wave Turbulence. — Springer–Verlag, 1992.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yuri Adolfovich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatolievna)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
Иркутский государственный университет, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: NYumarkov@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 39–48
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-39-48

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ
НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ
В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2025 г. М. В. ФАЛАЛЕЕВ, И. В. ЗАХАРОВА

Аннотация. Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных, содержащие малый параметр при одной из старших производных. Установлена связь между решением сингулярно возмущенной подобным способом задачи и решениями предельной системы, в которой параметр возмущения обращается в нуль. Исследовано влияние матричного пучка, составленного из коэффициентов уравнений системы, на разрешимость как исходной, так и предельной задач. Сформулированы достаточные условия для предельного перехода по параметру от возмущенной системы к предельной. Векторно-матричными методами получены явные формулы для решений рассматриваемых задач.

Ключевые слова: малый параметр, задача Коши, предельная задача, матричный пучок, индекс регулярности.

ON THE SOLVABILITY AND LIMITING PROPERTIES
OF SOME SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH A SMALL PARAMETER IN THE PRINCIPAL PART

© 2025 M. V. FALALEEV, I. V. ZAKHAROVA

ABSTRACT. In this paper, we consider linear systems of partial differential equations involving a small parameter as the coefficient of one of higher derivatives and establish a relationship between solutions of the singularly perturbed problem and solutions of the limit system in which the perturbation parameter is equal to zero. We examine the influence of the matrix pencil composed of the coefficients of the equations on the solvability of both original and limit problems and state sufficient conditions for the passage to the limit in terms of the parameter from the perturbed system to the limit system. Using vector-matrix methods, we obtain explicit formulas for solutions of the problems considered.

Keywords and phrases: small parameter, Cauchy problem, limit problem, matrix pencil, regularity index.

AMS Subject Classification: 35A20

1. Введение. При исследовании проблем разрешимости различных типов дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) параллельно возникают вопросы о разрешимости возмущенных задач для этих же уравнений. Возмущения могут быть как регулярными, так и сингулярными. В последнем случае соотношения между решениями исходной и возмущенной задачами могут быть весьма различными: от абсолютной несовместимости до «перетекания»

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

одного в другое через предельный переход. Ряд примеров такого рода можно найти, например, в работе А. И. Янушаускаса [8]. Естественно ожидать ещё большего разнообразия для сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Причем, если для одного дифференциального уравнения необходимо учитывать только свойства дифференциального оператора, то при исследовании систем дифференциальных уравнений на их разрешимость существенно влияет также матричная структура из коэффициентов системы. В данной работе представлены некоторые классы сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных, предложена методика их исследования, получены теоремы о связи решений возмущенной и предельной задач. Статья является продолжением исследований авторов, начатых в [5, 6].

2. Системы, сводящиеся к уравнениям гиперболического типа. Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\sum_{j=1}^n \left(b_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right) = h_i(x, t), \quad (1)$$

$$u_i(x, 0, \epsilon) = f_i(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = g_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $u_i(x, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, $f_i(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $g_i(x) \in C(\mathbb{R})$, $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x, t)$ абсолютно интегрируемы по x на \mathbb{R} , $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр.

Задачу (1)–(3) можно переписать в следующей векторно-матричной форме:

$$\mathbb{B} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \mathbb{A} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \bar{h}(x, t),$$

$$\bar{u}(x, 0, \epsilon) = \bar{f}(x), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = \bar{g}(x);$$

здесь $\mathbb{B} = \|b_{ij}\|$, $\mathbb{A} = \|a_{ij}\|$,

$$\bar{u}(x, t, \epsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x, t, \epsilon) \\ u_2(x, t, \epsilon) \\ \dots \\ u_n(x, t, \epsilon) \end{pmatrix}, \quad \bar{h}(x, t) = \begin{pmatrix} h_1(x, t) \\ h_2(x, t) \\ \dots \\ h_n(x, t) \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \dots \\ g_n(x) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, разрешимость задачи (1)–(3) зависит как от свойств дифференциального оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right)$, так и от свойств матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$. Отследить влияние каждого из этих факторов является задачей данного исследования. При этом для матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ возможны два существенно разных случая: обратимости и необратимости матрицы \mathbb{B} . Финальная цель исследования — установить связь между решениями исходной (возмущенной) задачи (1)–(3) и предельной (при $\epsilon = 0$) задачи (1)–(2), а также получить условия существования этих решений.

2.1. Случай обратимости матрицы \mathbb{B} . Пусть в матричном пучке $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ матрица \mathbb{B} обратима; тогда без ограничения общности можно считать ее единичной: $\mathbb{B} = \mathbb{E}_n$.

Известно (см. [3]), что для любой квадратной матрицы \mathbb{A} размерности n существует такая невырожденная матрица \mathbb{T} , что

$$\mathbb{T} \mathbb{A} \mathbb{T}^{-1} = \mathbb{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{E}_{q_1} + \mathbb{N}_{q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{E}_{q_2} + \mathbb{N}_{q_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu \mathbb{E}_{q_\mu} + \mathbb{N}_{q_\mu} \end{pmatrix} = \text{diag} \{ \lambda_1 \mathbb{E}_{q_1} + \mathbb{N}_{q_1}, \lambda_2 \mathbb{E}_{q_2} + \mathbb{N}_{q_2}, \dots, \lambda_\mu \mathbb{E}_{q_\mu} + \mathbb{N}_{q_\mu} \}; \quad (4)$$

здесь $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu = n$, индекс q_i при единичных квадратных матрицах \mathbb{E}_{q_i} и при жордановых нильпотентных блоках \mathbb{N}_{q_i} означает их размерность q_i ,

$$\mathbb{N}_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, \mu, \quad \mathbb{N}_{q_i}^{q_i} = \mathbb{O}_{q_i}. \quad (5)$$

Относительно матрицы \mathbb{A} будем предполагать выполненным следующее условие:

(A) $\det \mathbb{A} \neq 0$ и все ее собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ положительны.

При выполнении условия **(A)** невырожденной заменой переменных $\bar{v} = T\bar{u}$ задача (1)–(3) приводится к следующему блочно-диагональному виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \mathbb{J}_n \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = \bar{H}(x, t), \quad (6)$$

$$\bar{v}(x, 0, \epsilon) = \bar{F}(x) = \mathbb{T}\bar{f}(x), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = \bar{G}(x) = \mathbb{T}\bar{g}(x), \quad (8)$$

$$\bar{H}(x, t) = \mathbb{T}\bar{h}(x, t),$$

т.е. распадается на μ независимых систем уравнений гиперболического типа (в соответствии с жордановыми «ящичками» $\lambda_i \mathbb{E}_{q_i} + \mathbb{N}_{q_i}$). Рассмотрим первый блок из q_1 уравнений системы (6)–(8) (остальные блоки исследуются аналогично):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + v_2 = H_1(x, t), \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) + v_3 = H_2(x, t), \\ \dots \\ \frac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{q_1-1}}{\partial t} \right) + v_{q_1} = H_{q_1-1}(x, t), \\ \frac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} \right) = H_{q_1}(x, t). \end{cases} \quad (9)$$

Решая последнее q_1 -е уравнение этой системы (например, по методике работы [6]), находим:

$$\begin{aligned} v_{q_1}(x, t, \epsilon) &= M\left(x, t, \lambda_1, F_{q_1}(x), G_{q_1}(x), H_{q_1}(x, t)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \left\{ \frac{1}{2} \left[F_{q_1}\left(x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}\right) + F_{q_1}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}\right) \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-t/\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}\right) \left(\sqrt{\lambda_1 \epsilon} G_{q_1}(x - \xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\epsilon}} F_{q_1}(x - \xi) \right) + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{i} \mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}\right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_1} t}{2\sqrt{\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}} F_{q_1}(x - \xi) \right] d\xi \right\} - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{2\epsilon}\right) \int_{x-\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}}^{x+\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{(t-\tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x-\xi)^2}\right) H_{q_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau; \quad (10) \end{aligned}$$

здесь $\mathcal{J}_0(ix)$ и $\frac{1}{i}\mathcal{J}_1(ix)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка мнимого аргумента.

В [6] было доказано предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \left\{ \frac{1}{2} \left[F_{q_1}\left(x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}\right) + F_{q_1}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}\right) \right] + \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{-t/\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}\right) \left(\sqrt{\lambda_1 \epsilon} G_{q_1}(x - \xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\epsilon}} F_{q_1}(x - \xi) \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{i} \mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}\right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_1} t}{2\sqrt{\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}} F_{q_1}(x - \xi) \right] d\xi \right\} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} \\ & \quad \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{\alpha \lambda_1}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_1 (x - \xi)^2}{4t}\right) \cdot F_{q_1}(\xi) d\xi = v_j^0(x, t). \end{aligned}$$

Следуя методике той же работы [6], получаем следующее асимптотическое представление (см. [4]):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha(t - \tau)}{2\epsilon}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{(t - \tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x - \xi)^2}\right) \approx \\ & \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha \lambda_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(t - \tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x - \xi)^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_1 (x - \xi)^2}{2\left(\sqrt{(t - \tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x - \xi)^2} + (t - \tau)\right)}\right) \cdot [1 + O(\epsilon)], \end{aligned}$$

из которого получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha(t - \tau)}{2\epsilon}\right) \int_{x - \frac{t - \tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}}^{x + \frac{t - \tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{(t - \tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x - \xi)^2}\right) H_{q_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau \approx \\ & \approx -\int_0^t \int_{x - \frac{t - \tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}}^{x + \frac{t - \tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}} \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha \lambda_1} \sqrt[4]{(t - \tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x - \xi)^2}} \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_1 (x - \xi)^2}{2\left(\sqrt{(t - \tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x - \xi)^2} + (t - \tau)\right)}\right) H_{q_1}(\xi, \tau) \cdot [1 + O(\epsilon)] d\xi d\tau \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} \\ & \quad \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} -\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha \lambda_1} (t - \tau)} \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_1 (x - \xi)^2}{4(t - \tau)}\right) H_{q_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом доказано предельное равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_{q_1}(x, t, \epsilon) &= M_0\left(x, t, \lambda_1, F_{q_1}(x), H_{q_1}(x, t)\right) = \frac{\sqrt{\lambda_1 \alpha}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_1 \alpha (x - \xi)^2}{4t}\right) F_{q_1}(\xi) d\xi - \\ & - \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi \lambda_1 \alpha} (t - \tau)} \exp\left(-\frac{\lambda_1 \alpha (x - \xi)^2}{4(t - \tau)}\right) H_{q_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau = v_{q_1}^0(x, t). \quad (11) \end{aligned}$$

Полученная в пределе функция $v_{q_1}^0(x, t)$ является решением задачи Коши для предельного q_1 -го уравнения системы (9):

$$\begin{cases} \alpha \lambda_1 \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial x^2} - H_{q_1}(x, t), \\ v_{q_1}(x, 0) = F_{q_1}(x). \end{cases}$$

Решая $(q_1 - 1)$ -е уравнение системы (9) по формуле (10), находим

$$v_{q_1-1}(x, t, \epsilon) = M\left(x, t, \lambda_1, F_{q_1-1}(x), G_{q_1-1}(x), H_{q_1-1}(x, t) - v_{q_1}(x, t, \epsilon)\right),$$

и после предельного перехода по формуле (11)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_{q_1-1}(x, t, \epsilon) = M_0\left(x, t, \lambda_1, F_{q_1-1}(x), H_{q_1-1}(x, t) - v_{q_1}^0(x, t)\right) = v_{q_1-1}^0(x, t)$$

получаем решение предельной задачи для $(q_1 - 1)$ -го уравнения системы (9) и т. д. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если в матричном пучке $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ матрица $\mathbb{B} = \mathbb{E}_n$ единичная, а для матрицы \mathbb{A} выполнено условие (A), то для решения задачи (1)–(3) справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \bar{u}(x, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \mathbb{T}^{-1} \bar{v}(x, t, \epsilon) = \mathbb{T}^{-1} \bar{v}^0(x, t) = \bar{u}^0(x, t),$$

где $\bar{u}^0(x, t)$ – решение предельной ($\epsilon = 0$) задачи (1)–(2).

2.2. Случай необратимости матрицы \mathbb{B} . В этом случае будем предполагать, что матричный пучок $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ регулярен (см. [2, 7]), т.е. $\det(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A}) \neq 0$. Тогда существует такая пара невырожденных матриц \mathbb{P} и \mathbb{Q} размерности n , что

$$\mathbb{P}(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})\mathbb{Q} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{N}_{n-d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{E}_{n-d} \end{pmatrix},$$

где \mathbb{E}_d и \mathbb{E}_{n-d} – единичные квадратные матрицы, $\mathbb{O}_{d \times (n-d)}$ и $\mathbb{O}_{(n-d) \times d}$ – нулевые прямоугольные матрицы указанных размерностей, $\mathbb{N}_{n-d} = \text{diag}\{\mathbb{N}_{m_1}, \mathbb{N}_{m_2}, \dots, \mathbb{N}_{m_j}\}$, \mathbb{N}_{m_i} – жордановы нильпотентные блоки размерности m_i (см. (5)), $n - d = m_1 + m_2 + \dots + m_j$; \mathbb{J}_d – квадратная матрица размерности d жордановой структуры; $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu = d$ в обозначениях формулы (4). Если $\det \mathbb{A} \neq 0$, то все $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, \mu$. Величину $\tilde{m} = \max\{m_1, m_2, \dots, m_j\}$ называют индексом регулярности матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ (см. [2, 7]).

Итак, относительно матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ будем предполагать выполненным условие

(B) пучок $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ регулярен, $\det \mathbb{A} \neq 0$ и все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ положительны.

При выполнении условия **(B)** невырожденной заменой $\bar{u} = \mathbb{Q} \bar{v}$ задача (1)–(3) приводится к блочно-диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{N}_{n-d} \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{E}_{n-d} \end{pmatrix} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = \tilde{H}(x, t), \quad (12)$$

$$\bar{v}(x, 0, \epsilon) = \tilde{F}(x) = \mathbb{Q}^{-1} \bar{f}(x), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = \tilde{G}(x) = \mathbb{Q}^{-1} \bar{g}(x), \quad \tilde{H}(x, t) = \mathbb{P} \bar{h}(x, t). \quad (13)$$

Первые d уравнений системы (12) имеют такой же блочный вид, как система (6), поэтому в силу теоремы 1 для них задача (12)–(13) обладает предельным свойством. Оставшиеся $(n - d)$ уравнений системы (12) распадаются на j независимых блоков. Как и выше для системы (6)–(8), исследуем один из блоков, а именно, последний (j -й); остальные исследуются аналогично.

Выпишем подсистему из последних m_j уравнений системы (12):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_{n-m_j+2}}{\partial x^2} - \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-m_j+1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{n-m_j+1}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x, t), \\ \frac{\partial^2 v_{n-m_j+1}}{\partial x^2} - \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-m_j}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{n-m_j}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x, t), \\ \dots \\ \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{n-1}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-1}(x, t), \\ - \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) = \tilde{H}_n(x, t). \end{cases} \quad (14)$$

Решением последнего уравнения системы (14) является функция

$$\begin{aligned} v_n(x, t, \epsilon) &= \tilde{M} \left(x, t, \tilde{F}_n(x), \tilde{G}_n(x), \tilde{H}_n(x, t) \right) = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha}{\epsilon} (t - \tau) \right) \right) \tilde{H}_n(x, \tau) d\tau + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha}{\epsilon} t \right) \right) \tilde{G}_n(x) + \tilde{F}_n(x). \end{aligned} \quad (15)$$

В результате предельного перехода

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_n(x, t, \epsilon) = \tilde{M}_0 \left(x, t, \tilde{F}_n(x), \tilde{H}_n(x, t) \right) = \tilde{F}_n(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \tilde{H}_n(x, \tau) d\tau = v_n^0(x, t) \quad (16)$$

получаем решение предельного (при $\epsilon = 0$) уравнения (для последнего уравнения системы (14)).

Решением предпоследнего уравнения системы (14) в соответствии с формулой (15) является функция

$$v_{n-1}(x, t, \epsilon) = \tilde{M} \left(x, t, \tilde{F}_{n-1}(x), \tilde{G}_{n-1}(x), \tilde{H}_{n-1}(x, t) - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right),$$

т.е. для разрешимости системы (14) требуется повышенная гладкость по пространственной переменной от входных данных задачи (1)–(3), а именно, $f_i(x), g_i(x), h(x, t) \in C^{2(\tilde{m}-1)}(\mathbb{R})$, где \tilde{m} – индекс регулярности матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ (см. [2, 7]). После предельного перехода в соответствии с формулой (16) получаем решение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_{n-1}(x, t, \epsilon) = \tilde{M}_0 \left(x, t, \tilde{F}_{n-1}(x), \tilde{H}_{n-1}(x, t) - \frac{\partial^2 v_n^0}{\partial x^2} \right) = v_{n-1}^0(x, t)$$

предельной задачи для предпоследнего уравнения системы (14) и т. д. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если для матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ выполнено условие **(B)**, $f_i(x), g_i(x), h(x, t) \in C^{2(\tilde{m}-1)}(\mathbb{R}^1)$, где \tilde{m} – индекс регулярности матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$, то для решения задачи (1)–(3) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \bar{u}(x, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \mathbb{Q} \bar{v}(x, t, \epsilon) = \mathbb{Q} \bar{v}^0(x, t) = \bar{u}^0(x, t),$$

где $\bar{u}^0(x, t)$ – решение предельной ($\epsilon = 0$) задачи (1)–(3).

Замечание 1. Повышенная гладкость на входные данные задачи является проявлением свойства необратимости матрицы \mathbb{B} . В случае нарушения этих условий задача (1)–(3) окажется неразрешимой в данных условиях, но можно ставить вопрос о ее разрешимости в пространстве расщеплений (см. [1]).

Замечание 2. Очевидно, для разрешимости предельной задачи условие (3) не нужно.

3. Системы, сводящиеся к уравнениям эллиптического типа. Изложенная методика применима к исследованию задачи Дирихле в полупространстве $t > 0$ для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\sum_{j=1}^n \left(b_{ij} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} \right) + a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right) = h_i(x_1, x_2, t), \quad (17)$$

$$u_i(x_1, x_2, 0, \epsilon) = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

где $u_i(x_1, x_2, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, $f_i(x_1, x_2) \in C(\mathbb{R}^2)$, $h_i(x_1, x_2, t) \in C(\mathbb{R}^3)$, $f_i(x_1, x_2)$, $h_i(x_1, x_2, t)$ абсолютно интегрируемы по x_1, x_2 на \mathbb{R}^2 , $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр.

Перепишем задачу (17)–(18) в векторно-матричном виде:

$$\mathbb{B} \Delta_2 \bar{u} + \mathbb{A} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \bar{h}(x_1, x_2, t), \quad \bar{u}(x_1, x_2, 0, \epsilon) = \bar{f}(x_1, x_2),$$

где, как и выше, $\mathbb{B} = \|b_{ij}\|$, $\mathbb{A} = \|a_{ij}\|$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$,

$$\bar{u}(x_1, x_2, t, \epsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, t, \epsilon) \\ u_2(x_1, x_2, t, \epsilon) \\ \dots \\ u_n(x_1, x_2, t, \epsilon) \end{pmatrix}, \quad \bar{h}(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} h_1(x_1, x_2, t) \\ h_2(x_1, x_2, t) \\ \dots \\ h_n(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

3.1. Случай обратимости матрицы \mathbb{B} . Пусть в матричном пучке $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ матрица $\mathbb{B} = \mathbb{E}_n$ единичная, а для матрицы \mathbb{A} выполнено условие **(A)**. Заменой переменных $\bar{v} = T \bar{u}$ задача (17)–(18) приводится к блочно-диагональному виду:

$$\Delta_2 \bar{v} + \mathbb{J}_n \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = \bar{H}(x_1, x_2, t), \quad (19)$$

$$\bar{v}(x_1, x_2, 0, \epsilon) = \bar{F}(x_1, x_2) = T \bar{f}(x_1, x_2), \quad (20)$$

$$\bar{H}(x_1, x_2, t) = T \bar{h}(x_1, x_2, t),$$

т.е. распадается на μ независимых систем уравнений эллиптического типа. Рассмотрим первый блок из q_1 уравнений системы (19)–(20):

$$\begin{cases} \Delta_2 v_1 + \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + v_2 = H_1(x_1, x_2, t), \\ \Delta_2 v_2 + \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) + v_3 = H_2(x_1, x_2, t), \\ \dots \\ \Delta_2 v_{q_1-1} + \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_{q_1-1}}{\partial t} \right) + v_{q_1} = H_{q_1-1}(x_1, x_2, t), \\ \Delta_2 v_{q_1} + \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} \right) = H_{q_1}(x_1, x_2, t). \end{cases} \quad (21)$$

Решением последнего уравнения системы (21) является функция следующего вида:

$$\begin{aligned} v_{q_1}(x_1, x_2, t, \epsilon) &= V \left(x_1, x_2, t, F_{q_1}(x_1, x_2), H_{q_1}(x_1, x_2, t) \right) = \\ &= \frac{\lambda_1 t}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{q_1}(y_1, y_2) \frac{2\epsilon + \alpha \sqrt{\lambda_1 \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2}}{\left(\sqrt{\lambda_1 \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2} \right)^3} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left(- \frac{\alpha \lambda_1 ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}{2 \left(t + \sqrt{\lambda_1 \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2} \right)} \right) dy_1 dy_2 - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{q_1}(y_1, y_2, \tau)}{\left(\sqrt{\lambda_1 \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + (t - \tau)^2} \right)^3} \times \\
& \times \exp \left(- \frac{\alpha \lambda_1 ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}{2 \left(t - \tau + \sqrt{\lambda_1 \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + (t - \tau)^2} \right)} \right) dy_1 dy_2 d\tau. \quad (22)
\end{aligned}$$

Отсюда после предельного перехода получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v_{q_1}(x_1, x_2, t, \epsilon) &= V_0 \left(x_1, x_2, t, F_{q_1}(x_1, x_2), H_{q_1}(x_1, x_2, t) \right) = \\
&= \frac{\alpha \lambda_1}{4\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{q_1}(y_1, y_2) \exp \left(- \frac{\alpha \lambda_1}{4t} ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) \right) dy_1 dy_2 - \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{q_1}(y_1, y_2, \tau)}{(t - \tau)} \exp \left(- \frac{\alpha \lambda_1}{4(t - \tau)} ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) \right) dy_1 dy_2 d\tau = \\
&= v_{q_1}^0(x_1, x_2, t). \quad (23)
\end{aligned}$$

Очевидно, функция $v_{q_1}^0(x_1, x_2, t)$ является решением следующей задачи Коши для уравнения теплопроводности, которое является предельным для q_1 -го уравнения системы (21):

$$\begin{cases} \alpha \lambda_1 \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} = \Delta_2 v_{q_1} - H_{q_1}(x_1, x_2, t), \\ v_{q_1}(x_1, x_2, 0) = F_{q_1}(x_1, x_2). \end{cases}$$

Выпишем далее по формуле (22) решение $(q_1 - 1)$ -го уравнения системы (21):

$$v_{q_1-1}(x_1, x_2, t, \epsilon) = V \left(x_1, x_2, t, F_{q_1-1}(x_1, x_2), H_{q_1-1}(x_1, x_2, t) - v_{q_1}(x_1, x_2, t, \epsilon) \right).$$

Осуществив предельный переход по формуле (23), получим решение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v_{q_1-1}(x_1, x_2, t, \epsilon) = V_0 \left(x_1, x_2, t, F_{q_1-1}(x_1, x_2), H_{q_1-1}(x_1, x_2, t) - v_{q_1}^0(x_1, x_2, t) \right) = v_{q_1-1}^0(x_1, x_2, t)$$

предельной задачи для $(q_1 - 1)$ -го уравнения системы (21) и т. д. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Если в матричном пучке $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ матрица $\mathbb{B} = \mathbb{E}_n$ единичная, а для матрицы \mathbb{A} выполнено условие **(A)**, то для решения задачи (17)–(18) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{u}(x_1, x_2, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{T}^{-1} \bar{v}(x_1, x_2, t, \epsilon) = \mathbb{T}^{-1} \bar{v}^0(x_1, x_2, t) = \bar{u}^0(x_1, x_2, t),$$

где $\bar{u}^0(x_1, x_2, t)$ – решение предельной ($\epsilon = 0$) задачи (17)–(18).

Замечание 3. Теоремы 1 и 3 обобщают результаты авторов, представленные в [6]. А именно, во-первых, в [6] рассматривались системы уравнений с нулевой правой частью (т.е. однородные); во-вторых, предполагалось, что все элементарные делители матрицы \mathbb{A} имеют степень 1. В этом случае жорданова форма матрицы \mathbb{A} имеет диагональный вид и соответственно системы (1)–(3) и (17)–(18) после описанных выше невырожденных замен переменных распадаются на n независимых уравнений.

3.2. *Случай необратимости матрицы \mathbb{B} .* В этом случае при сформулированных условиях для задачи (17)–(18) предельные соотношения не выполняются. Действительно, предполагая выполненным условие **(B)**, невырожденной заменой переменных $\bar{u} = \mathbb{Q}\bar{v}$ задачу (17)–(18) сведем к блочно-диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{N}_{n-d} \end{pmatrix} \Delta_2 \bar{v} + \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{E}_{n-d} \end{pmatrix} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = \tilde{H}(x_1, x_2, t), \quad (24)$$

$$\bar{v}(x_1, x_2, 0, \epsilon) = \tilde{F}(x_1, x_2) = \mathbb{Q}^{-1} \bar{f}(x_1, x_2), \quad \tilde{H}(x_1, x_2, t) = \mathbb{P} \bar{h}(x_1, x_2, t). \quad (25)$$

Очевидно, блок из первых d уравнений системы (24) имеет вид задачи (19)–(20), а значит, обладает предельным свойством, но оставшиеся j блоков из $(n-d)$ уравнений (именно они заключают в себе влияние необратимости матрицы \mathbb{B}) уже не обладают требуемыми предельными свойствами. Это легко увидеть исследовав, например, как и выше, последний j -й блок уравнений системы (24). Он имеет вид

$$\begin{cases} \Delta_2 v_{n-m_j+2} + \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-m_j+1}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_{n-m_j+1}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x_1, x_2, t), \\ \Delta_2 v_{n-m_j+1} + \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-m_j}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_{n-m_j}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x_1, x_2, t), \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_2 v_n + \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_{n-1}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-1}(x_1, x_2, t), \\ \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) = \tilde{H}_n(x_1, x_2, t). \end{cases}$$

Решением последнего уравнения этой системы является функция

$$\begin{aligned} v_n(x_1, x_2, t, \epsilon) = & \frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(\exp\left(\frac{\alpha}{\epsilon}(t-\tau)\right) - 1 \right) \tilde{H}_n(x_1, x_2, \tau) d\tau + \\ & + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\exp\left(\frac{\alpha}{\epsilon}t\right) - 1 \right) \dot{v}_n(x_1, x_2, 0, \epsilon) + \tilde{F}_n(x_1, x_2) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \infty. \end{aligned}$$

Замечание 4. Эффекты такого рода встречаются и для отдельных типов уравнений в частных производных (и не только); примеры можно найти в [8].

4. Заключение. Таким образом, можно утверждать, что среди задач для систем уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части, существуют специальные классы систем, имеющих регулярную асимптотику, и, как следствие, допускающие применение методов регулярной теории возмущений для построения их асимптотического решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
2. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
4. *Двайт Г. Б.* Таблица интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.
5. *Захарова И. В.* О некоторых задачах для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 183. — С. 61–72.
6. *Захарова И. В., Фалалеев М. В.* О некоторых системах дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром в главной части // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 234. — С. 50–58.
7. *Чистяков В. Ф., Шеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003.

8. Янушаускас А. И. О зависящих от малого параметра уравнениях с частными производными// в кн.: Сборник научных трудов Иркутского университета. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. — С. 94–103.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фалалеев Михаил Валентинович (Falaleev Mikhail Valentinovich)

Иркутский государственный университет, Иркутск

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: mvfalaleev@gmail.com

Захарова Ирина Валентиновна (Zakharova Irina Valentinovna)

Иркутский государственный университет, Иркутск

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: zair@math.isu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 49–89
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-49-89

УДК 517.9; 531.01

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ.
V. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

© 2025 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем любого нечетного порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к многообразию меньшей размерности. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм. Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 236. — С. 72–88. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 237. — С. 49–75. Третья часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 238. — С. 69–100. Четвертая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 239. — С. 62–97.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

INVARIANTS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC SYSTEMS
OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION.
V. GENERAL CASE

© 2025 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present new examples of integrable dynamical systems of any odd order that are homogeneous in part of the variables. In these systems, subsystems on the tangent bundles of lower-dimensional manifolds can be distinguished. In the cases considered, the force field is partitioned into an internal (conservative) part and an external part. The external force introduced by a certain unimodular transformation has alternate dissipation; it is a generalization of fields examined earlier. Complete sets of first integrals and invariant differential forms are presented. The first part of the paper: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **236** (2024), pp. 72–88. The second part of the paper: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **237** (2024), pp. 49–75. The third part of the paper: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **238** (2024), pp. 69–100. The fourth part of the paper: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **239** (2024), pp. 62–97.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, first integral with essential singular points, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

5. Инварианты однородных систем произвольного нечетного порядка	50
5.1. Введение	50
5.2. Некоторые примеры из динамики n -мерного твердого тела в неконсервативном поле сил	51
5.3. Системы порядка $(2n + 1)$ при отсутствии внешнего силового поля	59
5.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов	72
5.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования	73
5.6. Системы со знакопеременной диссипацией	76
Список литературы	86

5. ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

5.1. Введение. Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [14, 15, 83], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками.

Как и в разделах 1–4 наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [4, 5, 41, 42]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на n -мерной поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» —

это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической пространственной динамики твердого тела.

В данном разделе 5 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного $(2n + 1)$ -порядка, в которых может быть выделена система с n степенями свободы на своем $2n$ -мерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

5.2. Некоторые примеры из динамики n -мерного твердого тела в неконсервативном поле сил. Рассмотрим движение однородного осесимметричного n -мерного твердого тела с передним плоским торцом ($(n - 1)$ -мерным диском) в неконсервативном поле сил в условиях квазистационарности. Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр n -мерного диска, лежащий на оси симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \dots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, \dots, Dx_n лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \dots, I_n = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [8, 19]), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству \mathbb{R}^n , при котором касательные силы воздействия среды на $(n - 1)$ -мерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \cos \beta_1 \\ v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \dots \\ v \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} \cos \beta_{n-2} \\ v \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \cos \beta_1 \\ v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \dots \\ v \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} \cos \beta_{n-2} \\ v \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} \end{pmatrix} + \\ + \Omega^2 \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\Omega} \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x/m \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma = CD$, $v > 0$.

Вспомогательная матрица для вычисления момента неконсервативной силы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & \dots & x_{nN} \\ -S & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

тогда та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
& (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_1 = 0, \\
& \dots\dots\dots, \\
& (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1-1} = 0, \\
& (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} + (-1)^{n+1}(I_1 - I_2)W_{n-1}(\Omega) = (-1)^n x_{nN} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1+1} = 0, \\
& \dots\dots\dots, \\
& (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2-1} = 0, \tag{5.2.3} \\
& (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} + (-1)^n(I_1 - I_2)W_{n-2}(\Omega) = (-1)^{n-1} x_{n-1,N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2+1} = 0, \\
& \dots\dots\dots, \\
& (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_{n-2}-1} = 0, \\
& (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} + (I_1 - I_2)W_2(\Omega) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} + (I_2 - I_1)W_1(\Omega) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, фазовым пространством системы (5.2.1), (5.2.3) порядка $n(n+1)/2$ является прямое произведение n -мерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(n)$: $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathfrak{so}(n)$.

Сразу же заметим, что система (5.2.1), (5.2.3), в силу имеющейся динамической симметрии $I_2 = I_3 = \dots = I_n$, обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \text{const}, \dots, \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \text{const}, s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{5.2.4}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \dots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{5.2.5}$$

Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (\mathbf{V}_C — скорость центра масс, см. также [54, 57, 60])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \tag{5.2.6}$$

то в системе (5.2.1), (5.2.3) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{5.2.7}$$

Случай (5.2.7) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ после некоторого преобразования системы (5.2.1), (5.2.3) порядка $n(n+1)/2$.

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$\begin{aligned}
& T = T_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega) = \\
& = \sum_{i,j=0, i \leq j}^{n-1} \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \omega_{r_i} \omega_{r_j} = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \omega_{r_0} = v. \tag{5.2.8}
\end{aligned}$$

Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции $(n-2)$ -х поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \dots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \dots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (5.2.9)$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \dots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2.10)$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos \beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin \beta.$$

В частности, при $n = 5$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos \beta_3 + \omega_7 \sin \beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \cos \beta_2 + \omega_9 \sin \beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos \beta_3 + \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 + \omega_9 \cos \beta_2] \cos \beta_1 + \omega_{10} \sin \beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 - \omega_9 \cos \beta_2] \sin \beta_1 + \omega_{10} \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Систему (5.2.1), (5.2.3) в случаях (5.2.4), (5.2.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2 \right) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_{n-1} v - \sigma \left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2 \right) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_{n-2} \cos \alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = 0. \quad (5.2.14)$$

$$\dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_{n-3} \cos \alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (5.2.15)$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{n-2} \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} + (-1)^n z_1 \cos \alpha - \\ - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

$$\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{nN} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (5.2.17)$$

$$\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n+1} \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{(n-1)N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (5.2.18)$$

.....

$$\dot{\omega}_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (5.2.19)$$

$$\times \left\{ Z_{n-1} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) + \sum_{s=2}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right\} -$$

$$- \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_{n-2} \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z), \quad (5.2.23)$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} +$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \left[-Z_{n-1} + Z_{n-2} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=3}^{n-2} (-1)^s Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right\} +$$

$$+ \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_{n-3} \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z), \quad (5.2.24)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Z'_1 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} +$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s Z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z), \quad (5.2.25)$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad (5.2.26)$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad (5.2.27)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}} +$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad (5.2.28)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z) = -\sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha +$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.$$

Видно, что в системе (5.2.20)–(5.2.28) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (5.2.21)–(5.2.28) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$ -мерном фазовом пространстве. В частности, при выполнении условия (5.2.7) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

Система (5.2.20)–(5.2.28) содержит динамические уравнения движения n -мерного твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z), \quad \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \cos \alpha, \quad (5.2.29)$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + \sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \sin \alpha, \quad (5.2.30)$$

$$Z'_{n-1} = - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_{n-1} (Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \cos \alpha, \quad (5.2.31)$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \sigma n_1 Z_{n-2} (Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \cos \alpha, \quad (5.2.32)$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2} + \\ + \sigma n_1 Z_{n-3} (Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \cos \alpha, \quad (5.2.33)$$

.....,

$$Z'_1 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \cos \alpha, \quad (5.2.34)$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.2.35)$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.2.36)$$

.....,

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}. \quad (5.2.37)$$

5.2.1. *Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.* Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [8, 19], динамические функции s , x_{2N}, \dots, x_{nN} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad (5.2.38)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}$).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $s = 1, \dots, n-2$, входящие в систему (5.2.20)–(5.2.28), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) = R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, n-2.$$

Тогда, благодаря условиям (5.2.6), (5.2.38) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.2.20)–(5.2.28)) примет вид аналитической системы

$$\mathbf{v}' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z), \quad (5.2.39)$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (5.2.40)$$

$$Z'_{n-1} = \sin \alpha \cos \alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - b Z_{n-1} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (5.2.41)$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + b Z_{n-2} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - b Z_{n-2} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (5.2.42)$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2} + b Z_{n-3} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - b Z_{n-3} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (5.2.43)$$

.....,

$$Z'_1 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} +$$

$$+bZ_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (5.2.44)$$

$$\beta_1' = Z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.2.45)$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.2.46)$$

$$\dots\dots\dots, \quad (5.2.47)$$

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-4}}, \quad (5.2.47)$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}, \quad (5.2.48)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z) = -b \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/(n-2)I_2$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (5.2.39)–(5.2.48) может быть рассмотрена на своем фазовом $(2n-1)$ -мерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T\mathbb{S}^{n-1}\{Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, \dots, 0 < \beta_{n-3} < \pi, 0 \leq \beta_{n-2} < 2\pi\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$ -мерной сфере $\mathbb{S}^{n-1}\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, \dots, 0 < \beta_{n-3} < \pi, 0 \leq \beta_{n-2} < 2\pi\}$.

Теорема 5.1. Система (5.2.39)–(5.2.48) обладает $n+2$ независимыми первыми интегралами (полным набором), $n+1$ из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделах 1–4) необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

5.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости. Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$ -мерный диск, $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ — компоненты силы \mathbf{S} «воздействия среды», не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций (x_{1N}, \dots, x_{nN}) от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно.

Итак, примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, \dots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad (5.2.49)$$

Здесь Ω — тензор угловой скорости, (h_1, \dots, h_n) — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$, то $x_{2N} = Q_2 - h_1 \omega_{r_{n-1}}/v$, $x_{3N} = Q_3 + h_1 \omega_{r_{n-2}}/v$, \dots , $x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1} h_1 \omega_{r_1}/v$. Здесь $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω .

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [8, 19] допустим равенство $Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N$, а динамические функции s, x_{2N}, \dots, x_{nN} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad (5.2.50)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Причем $h_2 = \dots = h_n$ в силу динамической симметрии тела.

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $s = 1, \dots, n-2$, входящие в систему (5.2.21)–(5.2.28), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - \frac{h_1}{v} z_{n-1}, \\ \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h_1}{v} z_{n-2}, \\ &\dots, \\ \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= (-1)^{n+1} \frac{h_1}{v} z_1. \end{aligned} \quad (5.2.51)$$

Тогда, благодаря условиям (5.2.6), (5.2.50) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.2.20)–(5.2.28)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z), \quad (5.2.52)$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_{n-1} \cos^2 \alpha, \quad (5.2.53)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-1} &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - bZ_{n-1} \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_{n-1}^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_{n-1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-2} &= (1 + bH_1) Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1) \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_{n-2} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - bZ_{n-2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_{n-2} Z_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_{n-2} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.2.55)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-3} &= (1 + bH_1) Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ &- (1 + bH_1) \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &+ bZ_{n-3} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - bZ_{n-3} \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_{n-3} Z_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_{n-3} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.2.56)$$

$$\begin{aligned} &\dots, \\ Z'_1 &= (1 + bH_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} + \\ &+ bZ_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_1 Z_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.2.57)$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1) Z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.2.58)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.2.59)$$

.....,

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-4}}, \quad (5.2.60)$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}, \quad (5.2.61)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z) = -b \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/(n-2)I_2$, $H_1 = Bh_1/(n-2)I_2 n_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (5.2.52)–(5.2.61) может быть рассмотрена на своем фазовом $(2n-1)$ -мерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T\mathbb{S}^{n-1}\{Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, \dots, 0 < \beta_{n-3} < \pi, 0 \leq \beta_{n-2} < 2\pi\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$ -мерной сфере $\mathbb{S}^{n-1}\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, \dots, 0 < \beta_{n-3} < \pi, 0 \leq \beta_{n-2} < 2\pi\}$.

Теорема 5.2. Система (5.2.52)–(5.2.61) обладает $n+2$ независимыми первыми интегралами (полным набором), $n+1$ из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделах 1–4) необходимо повторить важное замечание. С точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы, хотя рассматриваемые первые интегралы являются действительными функциями.

5.3. Системы порядка $(2n+1)$ при отсутствии внешнего силового поля. Пусть $v, \alpha, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{v}, \dot{z}_n, \dots, \dot{z}_1, v\dot{\alpha}, v\dot{\beta}_1, \dots, v\dot{\beta}_{n-1})^T &= A(\alpha, \beta)P, \\ P^T &= (v^2, vz_n, \dots, vz_1, z_n^2, z_n z_{n-1}, \dots, z_n z_1, z_{n-1}^2, z_{n-1} z_{n-2}, \dots, z_{n-1} z_1, \dots, z_2^2, z_2 z_1, z_1^2), \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

где $A(\alpha, \beta)$ — матрица размером $(2n+1) \times (n+1)(n+2)/2$ (система, аналогичная (1.3.1), (2.3.1), (3.3.1), (4.3.1)).

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новые фазовые переменные Z_k , $z_k = Z_k v$, $k = 1, \dots, n$, $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, систему (5.3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta)Q, \\ Q^T &= (1, Z_n, \dots, Z_1, Z_n^2, Z_n Z_{n-1}, \dots, Z_n Z_1, Z_{n-1}^2, Z_{n-1} Z_{n-2}, \dots, Z_{n-1} Z_1, \dots, Z_2^2, Z_2 Z_1, Z_1^2), \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

$$(Z_n', \dots, Z_1', \alpha', \beta_1', \dots, \beta_{n-1}')^T = \hat{A}(\alpha, \beta)Q - (Z_n \Psi(\alpha, Z), \dots, Z_1 \Psi(\alpha, Z), 0, \dots, 0)^T, \quad (5.3.3)$$

где $A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat{A}(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (5.3.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать $2n$ оставшихся уравнений в качестве системы (5.3.3) на $2n$ -мерном фазовом многообразии $N^{2n}\{Z_n, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$.

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (5.3.2), (5.3.3) порядка $2n + 1$:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_n(\alpha), \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \quad (5.3.4)$$

$$\alpha' = f_n(\alpha)Z_n + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\delta(\alpha),$$

$$Z'_n = -f_n(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] Z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_{n-1}^2 -$$

$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_{n-2}^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_n \Psi(\alpha, Z) = \zeta_n(Z; \alpha, \beta),$$

$$Z'_{n-1} = -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_{n-1} Z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_{n-2}^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_{n-1} \Psi(\alpha, Z) = \zeta_{n-1}(Z; \alpha, \beta),$$

.....

$$Z'_2 = -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)] Z_2 Z_n -$$

$$- f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)] Z_2 Z_{n-1} - \dots$$

$$\dots - f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) [2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3})] Z_2 Z_3 -$$

$$- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) Z_1^2 -$$

$$- Z_2 \Psi(\alpha, Z) = \zeta_2(Z; \alpha, \beta),$$

$$Z'_1 = -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] Z_1 Z_n -$$

$$- f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] Z_1 Z_{n-1} -$$

$$- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) [2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)] Z_1 Z_{n-2} - \dots$$

$$\dots - f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] Z_1 Z_2 -$$

$$- Z_1 \Psi(\alpha, Z) = \zeta_1(Z; \alpha, \beta),$$

$$\beta'_1 = Z_{n-1} f_1(\alpha),$$

$$\beta'_2 = Z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1),$$

$$\beta'_3 = Z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2),$$

.....

$$\beta'_{n-1} = Z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}),$$

(5.3.5)

$DQ(\xi) = d \ln |Q(\xi)| / d\xi$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3$, \dots , $i_1(\beta_{n-2})$, $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, $i, j, k = \alpha, \beta$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (5.3.4), (5.3.5) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Уравнение (5.3.4) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (5.3.5) в качестве независимой системы (с n степенями свободы) на $2n$ -мерном многообразии

$$N^{2n} \{Z_n, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\} = TM^n \{Z_n, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$$

(касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия $M^n\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, см. также [64, 73, 74]).

Система (5.3.4), (5.3.5) имеет более общий вид, чем система (5.2.29)–(5.2.37) (где в данном случае нужно формально заменить $n \rightarrow n+1$), взятая из динамики многомерного твердого тела, и при $b = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, а также при

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) \equiv \dots \equiv f_{n-1}(\alpha) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, f_n(\alpha) \equiv -1, g_1(\beta_1) \equiv \dots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = -\frac{1}{\sin \beta_1}, \\ h_1(\beta_2) \equiv \dots \equiv h_{n-3}(\beta_2) &= -\frac{1}{\sin \beta_2}, \dots, i_1(\beta_{n-2}) = -\frac{1}{\sin \beta_{n-2}}, \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \equiv \dots \equiv \Gamma_{\alpha n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \dots \equiv \Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \\ \dots, \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) &= \frac{\cos \beta_{n-2}}{\sin \beta_{n-2}}, \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, \dots, \\ \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 \dots \sin^2 \beta_{n-2}, \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1, \\ \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2, \dots, \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2 \dots \sin^2 \beta_{n-2}, \\ \dots, \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_{n-2} \cos \beta_{n-2}, \end{aligned}$$

в частности, они совпадают.

Рассмотрим структуру системы (5.3.5). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с $n(n-1)+1$ ненулевым коэффициентом связности на касательном расслоении $TM^n\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_{n-1}; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ многообразия $M^n\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ (в частности, на расслоении (n -мерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т.д.):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\ + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \dots, \\ \ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \dots + \\ + \Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \dots + \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} &= 0. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1, \dots, z_n в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= z_n f_n(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 &= z_{n-1} f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\ \dots, \\ \dot{\beta}_{n-1} &= z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}), \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (5.3.5)):

$$Z'_k = \zeta_k(Z; \alpha, \beta), \quad k = 1, \dots, n, \tag{5.3.8}$$

при этом уравнения (5.3.6) почти всюду эквивалентны совокупности (5.3.7), (5.3.8), которая, прежде всего, присутствует в системе (5.3.5). Здесь для полной ясности лучше изменить независимую переменную и вместо (5.3.7) выбрать равенства

$$\begin{aligned}\alpha' &= Z_n f_n(\alpha), \\ \beta_1' &= Z_{n-1} f_1(\alpha), \\ \beta_2' &= Z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta_3' &= Z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\ &\dots\dots\dots, \\ \beta_{n-1}' &= Z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}).\end{aligned}$$

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (5.3.6).

(а) Системы на касательном расслоении к n -мерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего $(n + 1)$ -мерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного $(n + 1)$ -мерного твердого тела (см. также [77, 79, 80]).

(б) Системы на касательном расслоении более общей n -мерной поверхности вращения.

(с) Системы на касательном расслоении n -мерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (5.3.4), (5.3.5) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системах (1.3.5), (1.3.6), (2.3.4), (2.3.5), (3.3.4), (3.3.5) и других, они не нарушают консервативности, поскольку система (5.3.4), (5.3.5) обладает полным набором (а именно, $n + 2$) гладких первых интегралов.

5.3.1. О количествах неизвестных функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении n -мерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n + 1)/2$ функций. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических очень сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n - 3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ из (5.3.7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь $n(n - 1) + 1$ ненулевым коэффициентом связности, формирующим уравнения геодезических (5.3.6). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет $n(n - 1)/2 + 1$ функция. Таким образом, мы имеем $3n(n - 1)/2 + 2$ функции, характеризующие исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий $B(n)$ на имеющиеся $A(n) = 3n(n - 1)/2 + 2$ функции? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше $A(n)$, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(n)$, тем больше разность $A(n) - B(n)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(n) = (n - 1)^2 + n(n - 1)/2 + 1$ условие на имеющиеся $A(n)$ функций. Число $B(n)$ складывается из трех слагаемых: $B(n) = B_1(n) + B_2(n) + B_3(n)$.

Число $B_1(n)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n - 3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$, а именно,

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha) &\equiv \dots \equiv f_{n-1}(\alpha) =: f(\alpha), \\
g_1(\beta_1) &\equiv \dots \equiv g_{n-2}(\beta_1) =: g(\beta_1), \\
h_1(\beta_2) &\equiv \dots \equiv h_{n-3}(\beta_2) =: h(\beta_2), \\
&\dots\dots\dots, \\
i_1(\beta_{n-2}) &=: i(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

т.е. $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$.

Число $B_2(n)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \dots \equiv \Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\
\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \dots \equiv \Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \\
\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) &\equiv \dots \equiv \Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_3(\beta_2), \\
&\dots\dots\dots, \\
\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

т.е. $B_2(n) = n(n-1)/2$.

Число $B_3(n)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned}
&f_n^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
&\dots\dots\dots, \\
&f_n^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] + \\
&+ f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
&f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
&\dots\dots\dots, \\
&f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] + \\
&+ f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
&\dots\dots\dots, \\
&f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2) \dots r_1^2(\beta_{n-3}) [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] + \\
&+ f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
&\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0,
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

т.е. $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$.

Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned}
B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1,
\end{aligned}$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества произвольных функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия).

Замечание 5.1. Пусть выполнены условия (5.3.9), (5.3.10), при этом реализуется система дифференциальных равенств (5.3.11). Тогда справедливы следующее $n(n-1)/2 + 1$ тождество:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &= \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1), \quad \dots, \\ \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) &= \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \\ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &= \Gamma_{22}^1(\beta_1), \quad \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2), \quad \dots, \\ \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) &= \Gamma_{n-1, n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \\ &\dots\dots\dots, \\ \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) &= \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\beta_{n-2}), \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha), \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

а также $(n-1)(n-2)/2$ тождеств

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) \equiv \dots \\ &\dots \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) =: \Gamma_n(\alpha), \\ \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) \equiv \dots \equiv h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \\ &\dots\dots\dots, \\ \Gamma_{n-2, n-2}^{n-3}(\beta_{n-3}) &\equiv i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-3}(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}). \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых $n-1$ равенства из (5.3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned} f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + \\ + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Из (5.3.14) следуют первые две строки тождеств из (5.3.12) и первые две строки тождеств из (5.3.13).

Далее, в условиях замечания вторая группа из $n-2$ равенств из (5.3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned} [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] + \\ + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Из (5.3.15) следуют вторые две строки тождеств из (5.3.12) и третья строка тождеств из (5.3.13).

И так далее.

И, наконец, в условиях замечания $(n-1)$ -я группа из одного равенства из (5.3.11) переписывается в виде

$$[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] + i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \equiv 0. \tag{5.3.16}$$

Из (5.3.16) следует предпоследняя строка тождеств из (5.3.12).

Из последней строки (5.3.11) также следует последняя строка тождеств из (5.3.12). \square

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 5.1.

Замечание 5.2. Пусть выполнены условия (5.3.9), (5.3.10), при этом реализуются $(n-1)^2 + 1$ тождество (5.3.12) и (5.3.13). Тогда система дифференциальных равенств (5.3.11) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) \equiv \dots \\
& \dots \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) =: \Gamma_n(\alpha), \\
& \Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) \equiv \dots \equiv h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \\
& \dots, \\
& \Gamma_{n-2, n-2}^{n-3}(\beta_{n-3}) \equiv i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-3}(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}); \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0; \\
& f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha) \equiv 0, \\
& 2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv 0, \\
& \dots, \\
& 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2}) + i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\beta_{n-2}) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Таким образом, при выполнении $(n-1)^2$ условий (5.3.9), (5.3.10) $n(n-1)/2 + 1$ условие (5.3.11) и $n(n-1)/2 + 1$ условие (5.3.17) в упомянутом смысле эквивалентны.

5.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы порядка $2n + 1$ достаточно знать, вообще говоря, $2n$ независимых инвариантов.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (5.3.4), (5.3.5) достаточно знать $n + 2$ независимых тензорных инварианта: или $n + 2$ первых интеграла, или $n + 2$ независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством $n + 2$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

И то, что полный набор состоит из $n + 2$, а не из $2n$, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (5.3.6), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{5.3.18}$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \tag{5.3.19}$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 5.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются $(n-1)^2 + n(n-1)/2 + 1$ алгебраическое и дифференциальное соотношение (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17) на $3n(n-1)/2 + 2$ функции: на $n(n-1)/2 + 1$ функцию $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$ из (5.3.7) и на $n(n-1) + 1$, вообще говоря, ненулевой коэффициент связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (5.3.6).

Теорема 5.3. Если выполнены условия (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17), то система (5.3.4), (5.3.5), рассмотренная на произведении $\mathbb{R}_+^1 \{v\} \times TM^n \{Z_n, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, обладает полным набором, состоящим из $n + 2$ гладких первых интегралов вида

$$\Phi_0(v; Z_n; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_n\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \tag{5.3.20}$$

$$\Phi_1(v; Z_n, \dots, Z_1) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) = C_1^2 = \text{const}; \tag{5.3.21}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(v; Z_{n-1}, \dots, Z_1; \alpha) &= v^2 \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2} \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Delta(\alpha) &= A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const};\end{aligned}\tag{5.3.22}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(v; Z_{n-2}, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1) &= v^2 \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2} \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) &= g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\};\end{aligned}\tag{5.3.23}$$

$$\begin{aligned}\Phi_n(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) &= v^2 Z_1 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \text{const}, \\ \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) &= i(\beta_{n-2}) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \Gamma_{n-1}(b) db \right\};\end{aligned}\tag{5.3.24}$$

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const}.\tag{5.3.25}$$

Более того, после некоторого ее приведения – замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_n(\alpha) \frac{d}{d\tau}\tag{5.3.26}$$

и фазовых

$$\begin{aligned}w_n &= Z_n, \quad w_{n-1}^* = \ln |w_{n-1}|, \quad w_{n-1} = \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2}, \\ w_s^* &= \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, \quad s = 1, \dots, n-2, \\ w_{n-2} &= \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \quad \dots, \quad w_1 = \frac{Z_{n-1}}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2}}\end{aligned}\tag{5.3.27}$$

– фазовый поток системы (5.3.4), (5.3.5) сохраняет фазовый объем с плотностью

$$\rho(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_n(\alpha)}$$

на произведении $\mathbb{R}_+^1 \{v\} \times TM^n \{w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, т.е. сохраняется соответствующая внешняя дифференциальная форма

$$\frac{v^3}{f_n(\alpha)} dv \wedge dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \dots \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-1}.$$

Доказательство. Докажем, для начала, вторую часть теоремы 5.3, а именно, сделаем замены (5.3.26) независимой переменной и (5.3.27) фазовых переменных. Тогда система (5.3.4), (5.3.5) при выполнении условий (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17) распадается следующим образом:

$$v' = v \Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_{n-1}^*} + w_n^2) \tilde{\Delta}(\alpha),\tag{5.3.28}$$

$$\alpha' = w_n + b(e^{2w_{n-1}^*} + w_n^2) \Delta(\alpha),$$

$$w_n' = -\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) e^{2w_{n-1}^*} - w_n \Psi_1(\alpha, w),\tag{5.3.29}$$

$$w_{n-1}^{*'} = \frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) w_n - \Psi_1(\alpha, w),$$

Действительно, дифференцирование функции (5.3.20) в силу системы (5.3.4), (5.3.5) при выполнении условий (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17) дает

$$2bv^2 f_n(\alpha)(Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \equiv 0,$$

поскольку следующее тождество

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) \quad (5.3.34)$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено второе уравнение из (5.3.22).

Дифференцирование функции (5.3.21) в силу системы (5.3.4), (5.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -2 \left[f_n^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{v^2 Z_{n-1}^2 Z_n}{f_n(\alpha)} - \\ & \dots, \\ & -2 \left[f_n^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] + \right. \\ & \left. + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{v^2 Z_1^2 Z_n}{f_n(\alpha)} - \\ & -2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{v^2 Z_{n-2}^2 Z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \\ & \dots, \\ & -2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) \right] + \right. \\ & \left. + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{v^2 Z_1^2 Z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \\ & \dots, \\ & -2 \left[f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1) h_{n-4}^2(\beta_2) \dots r_1^2(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2}) \right] + \right. \\ & \left. + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \right] \times \\ & \times \frac{v^2 Z_1^2 Z_2}{f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3})} \equiv 0. \end{aligned}$$

Дифференцирование функции Φ_2 из (5.3.22) в силу системы (5.3.4), (5.3.5) в условиях теоремы дает

$$-v^2 f_n(\alpha) \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2} Z_n \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\}.$$

Но, благодаря второму уравнению из (5.3.22), функция $\Delta(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (5.3.34), что и доказывает наличие первого интеграла (5.3.22).

Дифференцирование функции (5.3.23) в силу системы (5.3.4), (5.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -v^2 f_n(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2} Z_n \Psi_1(\beta_1) - \\ & -v^2 f(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2} Z_{n-1} \Delta(\alpha). \end{aligned}$$

Но функции $\Delta(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (5.3.34) и

$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1), \quad (5.3.35)$$

что и доказывает наличие первого интеграла (5.3.23).

В дальнейшем по предположению индукции считаем, что в условиях теоремы доказано существование первого интеграла вида

$$\Phi_{n-1}(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-3}(\beta_{n-3}) = C_{n-1} = \text{const}. \quad (5.3.36)$$

Идем далее. Дифференцирование функции (5.3.24) в силу системы (5.3.4), (5.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -v^2 f_n(\alpha) Z_1 Z_n \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) \left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right] + \\ & + v^2 Z_1 Z_{n-1} f(\alpha) \Delta(\alpha) \Psi_2(\beta_2) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) \left[- \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) + \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right] + \\ & \dots, \\ & + v^2 Z_1 Z_2 f(\alpha) g(\beta_1) \dots r(\beta_{n-3}) \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-3}(\beta_{n-3}) \times \\ & \times \left[(-1)^n \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) + (-1)^{n+1} \frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} \right]. \end{aligned}$$

Но функции $\Delta(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$, \dots , $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (5.3.34), (5.3.35), \dots , а также

$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} = \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}), \quad (5.3.37)$$

что и доказывает наличие первого интеграла (5.3.24).

Далее, рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n первых интегралов (5.3.36) и (5.3.24) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \quad (5.3.38)$$

Но угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (5.3.5):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{Z_1}{Z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (5.3.38), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (5.3.25).

Теорема полностью доказана. \square

Заметим также, что равенства (5.3.11) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (5.3.21). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны. Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 5.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, когда метрика на n -мерной сфере \mathbb{S}^n индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$ -мерного пространства (задача класса (a)), система порядка $2n+1$, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned}
& \ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_1 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\
& \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\
& - \left[\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_2 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\
& \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \\
& - \left[\dot{\beta}_3^2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_3 + \dot{\beta}_5^2 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_4 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_3 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \quad (5.3.39) \\
& \dots, \\
& \ddot{\beta}_{n-2} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + 2\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_{n-3}}{\sin \beta_{n-3}} - \\
& - \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin \beta_{n-2} \cos \beta_{n-2} = 0, \\
& \ddot{\beta}_{n-1} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + 2\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_{n-2}}{\sin \beta_{n-2}} = 0
\end{aligned}$$

и имеющая первые интегралы (5.3.20)–(5.3.25), примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_n + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \sin \alpha, \\
Z_n' &= -(Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_n \Psi(\alpha, Z), \\
Z_{n-1}' &= Z_{n-1} Z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_{n-1} \Psi(\alpha, Z), \\
Z_{n-2}' &= Z_{n-2} Z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \\
& - (Z_1^2 + \dots + Z_{n-3}^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_{n-2} \Psi(\alpha, Z), \\
& \dots, \\
Z_1' &= Z_1 Z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1 \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^{s+1} Z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_{n-1} \frac{1}{\sin \alpha}, \\
\beta_2' &= -Z_{n-2} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1}, \\
& \dots, \\
\beta_{n-1}' &= (-1)^n Z_1 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2}}.
\end{aligned} \quad (5.3.40)$$

Пример 5.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, но когда метрика на n -мерной сфере \mathbb{S}^n индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (a)), система порядка $2n + 1$, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_1 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 0, \\
\ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \\
- \left[\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_2 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_1 \cos \beta_1 &= 0, \\
\ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \\
- \left[\dot{\beta}_3^2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_3 + \dot{\beta}_5^2 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_4 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_3 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_2 \cos \beta_2 &= 0, \quad (5.3.41) \\
\dots\dots\dots, \\
\ddot{\beta}_{n-2} + \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-2} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + 2 \dot{\beta}_{n-3} \dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_{n-3}}{\sin \beta_{n-3}} - \\
- \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin \beta_{n-2} \cos \beta_{n-2} &= 0, \\
\ddot{\beta}_{n-1} + \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-1} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + 2 \dot{\beta}_{n-2} \dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_{n-2}}{\sin \beta_{n-2}} &= 0
\end{aligned}$$

и имеющая первые интегралы (5.3.20)–(5.3.25), примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \cos \alpha, \\
\alpha' &= -Z_n + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \sin \alpha, \\
Z_n' &= -(Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_n \Psi(\alpha, Z), \\
Z_{n-1}' &= Z_{n-1} Z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_{n-1} \Psi(\alpha, Z), \\
Z_{n-2}' &= Z_{n-2} Z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\
&- (Z_1^2 + \dots + Z_{n-3}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} - Z_{n-2} \Psi(\alpha, Z), \\
\dots\dots\dots, \\
Z_1' &= Z_1 Z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^{s+1} Z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
\beta_2' &= -Z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\
\dots\dots\dots, \\
\beta_{n-1}' &= (-1)^n Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2}}.
\end{aligned} \quad (5.3.42)$$

Пример 5.3. В случае n -мерного пространства Лобачевского (с координатами $x_1 = \beta_1, \dots, x_{n-1} = \beta_{n-1}, y = \alpha$, задача класса (с)) система порядка $2n + 1$, при получении которой используются уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha} (\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dots - \dot{\beta}_{n-1}^2) = 0, \quad \ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 = 0, \quad \dots, \quad \ddot{\beta}_{n-1} - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-1} = 0 \quad (5.3.43)$$

и имеющая первые интегралы (5.3.20)–(5.3.25), примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \frac{1}{\alpha^2},$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= Z_n \alpha + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \frac{1}{\alpha}, \\
Z_n' &= -Z_{n-1}^2 - \dots - Z_1^2 - Z_n \Psi(\alpha, Z), \\
Z_{n-1}' &= Z_{n-1} Z_n - Z_{n-1} \Psi(\alpha, Z), \\
&\dots\dots\dots, \\
Z_1' &= Z_1 Z_n - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_{n-1} \alpha, \\
\beta_2' &= Z_{n-2} \alpha, \\
&\dots\dots\dots, \\
\beta_{n-1}' &= Z_1 \alpha.
\end{aligned} \tag{5.3.44}$$

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, $n + 2$) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно, не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

5.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов. Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (5.3.4), (5.3.5) при условиях (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17) (лишь в уравнение на Z_n') внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_n(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$), при этом пусть, в частности, $f_n(\alpha) \equiv -1$.

Исследуем вопрос устойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы (для этого некоторые коэффициенты необходимо доопределить по непрерывности) по части переменных α, Z_n, \dots, Z_1 . Соответствующие уравнения на $\alpha', Z_n', \dots, Z_1'$ (а их $n + 1$ уравнение) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_n + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\delta(\alpha), \\
Z_n' &= F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)(Z_{n-1}^2 + \dots + Z_1^2) + bZ_n(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\
Z_{n-1}' &= -f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)Z_{n-1}Z_n - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)(Z_{n-2}^2 + \dots + Z_1^2) + \\
&\quad + bZ_{n-1}(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\
&\dots\dots\dots, \\
Z_2' &= -f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)Z_2Z_n + f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_2Z_{n-1} - \dots - \\
&\quad - f(\alpha)g(\beta_1) \dots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\beta_{n-2})Z_1^2 + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\
Z_1' &= -f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)Z_1Z_n + f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_1Z_{n-1} + \dots + \\
&\quad + f(\alpha)g(\beta_1) \dots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\beta_{n-2})Z_1Z_2 + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\tilde{\delta}(\alpha).
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что, действительно, имеет место при $b = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность подтвердилась бы наличием в системе полного набора (в данном случае $n + 2$) гладких (автономных) первых интегралов.

Рассмотрим следующую функцию (Ляпунова) для уравнений (5.4.1):

$$W(Z_n, \dots, Z_1; \alpha) = Z_1^2 + \dots + Z_n^2 + 2 \int_0^\alpha F(\xi) d\xi, \quad F(0) = 0, \quad \frac{dF(0)}{d\alpha} > 0, \tag{5.4.2}$$

которая в проколотой окрестности начала координат положительна и равна нулю только в самом начале координат.

Предложение 5.1. *Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ строго одного знака в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (5.4.1), — либо притягивающая, либо отталкивающая точка.*

Доказательство. Полная производная функции (5.4.2) в силу уравнений (5.4.1) равна

$$b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) F(\alpha) \delta(\alpha). \quad (5.4.3)$$

Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно отрицательны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (5.4.1), — притягивающая точка.

Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно положительны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (5.4.1), — отталкивающая точка.

Два последних утверждения следуют из теорем Ляпунова и Четаева. \square

Следствие 5.1. *В условиях предложения 5.1 рассматриваемая система, содержащая уравнения (5.4.1), не может обладать полным набором гладких первых интегралов.*

Следствие 5.2. *В динамике многомерного твердого тела (см. также раздел 5.2) в системах, где присутствуют уравнения вида (5.4.1), функции $\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)$ имеют следующий вид: $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$. Таким образом, величина (5.4.3) переписывается в виде*

$$b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \cos \alpha [Z_1^2 + \dots + Z_n^2 + \sin^2 \alpha].$$

Видно, что в данном случае начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (5.4.1), — отталкивающая точка.

Таким образом, добавляя в систему (5.3.4), (5.3.5) при условиях (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17) (лишь в уравнение на Z'_n) внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_n(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$) рассматриваемая система, вообще говоря, перестает быть консервативной.

5.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования. Модифицируем систему (5.3.4), (5.3.5) при наличии двух ключевых параметров $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_n(\alpha)$ в уравнение на Z'_n системы (5.5.1), (5.5.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет (как показано в предыдущем разделе 5.4) при дополнительном условии: $b = 0$.

Мы расширим введение силового поля, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_n(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^n\{Z_n, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (5.5.1)$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= Z_n + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\bar{\Delta}(\alpha)}, \\
Z_n' &= F(\alpha) - [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] Z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_{n-1}^2 - \\
&\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_{n-2}^2 - \dots \\
&\quad \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_n \Psi(\alpha, Z), \\
Z_{n-1}' &= - [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_{n-1} Z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha) f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_{n-2}^2 - \dots \\
&\quad \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha) f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_{n-1} \Psi(\alpha, Z), \\
&\quad \dots, \\
Z_2' &= - [2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)] Z_2 Z_n - \frac{f_1(\alpha)}{f_n(\alpha)} [2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)] Z_2 Z_{n-1} - \dots \\
&\quad \dots - \frac{f_{n-3}(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) [2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3})] Z_2 Z_3 - \\
&\quad - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha) f_n(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)}{g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' &= - [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] Z_1 Z_n - \frac{f_1(\alpha)}{f_n(\alpha)} [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] Z_1 Z_{n-1} - \\
&\quad - \frac{f_2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1(\beta_1) [2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)] Z_1 Z_{n-2} - \dots \\
&\quad \dots - \frac{f_{n-2}(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] Z_1 Z_2 - \\
&\quad - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_{n-1} \frac{f_1(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \\
\beta_2' &= Z_{n-2} \frac{f_2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1(\beta_1), \\
\beta_3' &= Z_{n-3} \frac{f_3(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\
&\quad \dots, \\
\beta_{n-1}' &= Z_1 \frac{f_{n-1}(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Напомним, что система (5.5.1), (5.5.2) фактически является образом следующей системы при замене $d/dt = f_n(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_n(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \quad (5.5.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= f_n(\alpha)Z_n + b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)f_n(\alpha), \\ Z_n' &= F(\alpha)f_n(\alpha) - f_n(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] Z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_{n-1}^2 - \\ &\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_{n-2}^2 - \dots \\ &\quad \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_n\Psi(\alpha, Z), \\ Z_{n-1}' &= -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_{n-1}Z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_{n-2}^2 - \dots \\ &\quad \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_{n-1}\Psi(\alpha, Z), \\ &\quad \dots, \\ Z_2' &= -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)] Z_2Z_n - \\ &\quad - f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)] Z_2Z_{n-1} - \dots \\ &\quad \dots - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) [2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3})] Z_2Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] Z_1Z_n - \\ &\quad - f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] Z_1Z_{n-1} - \\ &\quad - f_2(\alpha)g_1(\beta_1) [2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)] Z_1Z_{n-2} - \dots \\ &\quad \dots - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] Z_1Z_2 - \\ &\quad - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_{n-1}f_1(\alpha), \\ \beta_2' &= Z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \beta_3' &= Z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \\ &\quad \dots, \\ \beta_{n-1}' &= Z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}). \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Также напомним, что выше (раздел 5.4) мы ввели подобное поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_n' системы (5.4.1), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля).

Но мы будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbb{R}_+^1\{v\}$ и касательного расслоения $TM^n\{Z_n, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ приняла вид (5.5.1), (5.5.2).

Только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого *унимодулярного преобразования*.

Система (5.5.3), (5.5.4) имеет более общий вид, чем система (5.2.39)–(5.2.48), взятая из динамики многомерного твердого тела, и при $b = -b_1$, $\mu = 1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &\equiv \dots \equiv f_{n-1}(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_n(\alpha) \equiv -1, \quad g_1(\beta_1) \equiv \dots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = -\frac{1}{\sin \beta_1}, \\ h_1(\beta_2) &\equiv \dots \equiv h_{n-3}(\beta_2) = -\frac{1}{\sin \beta_2}, \quad \dots, \quad i_1(\beta_{n-2}) = -\frac{1}{\sin \beta_{n-2}}, \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \dots \equiv \Gamma_{\alpha n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \quad \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \dots \equiv \Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \\ \dots, \quad \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) &= \frac{\cos \beta_{n-2}}{\sin \beta_{n-2}}, \quad \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, \quad \dots, \\ \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 \dots \sin^2 \beta_{n-2}, \quad \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1, \\ \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2, \quad \dots, \quad \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2 \dots \sin^2 \beta_{n-2}, \\ \dots, \quad \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_{n-2} \cos \beta_{n-2}, \end{aligned}$$

в частности, они совпадают.

Силовое поле в уравнениях на v' , Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α' , а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ , и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого).

5.6. Системы со знакопеременной диссипацией.

5.6.1. Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы. Перейдем теперь к интегрированию системы (5.5.1), (5.5.2) порядка $2n + 1$ при выполнении свойств (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы порядка $2n - 1$.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (5.5.1), (5.5.2) достаточно знать $n + 2$ независимых тензорных инварианта: или $n + 2$ первых интеграла, или $n + 2$ независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством $n + 2$. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 5.4 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются $(n - 1)^2 + n(n - 1)/2 + 1$ алгебраическое и дифференциальное соотношение (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17) на $3n(n - 1)/2 + 2$ функции: на $n(n - 1)/2 + 1$ функцию $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n - 3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$ и на $n(n - 1) + 1$, вообще говоря, ненулевой коэффициент связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Тогда после замены фазовых переменных (5.3.27) система (5.5.1), (5.5.2) при условиях (5.3.9), (5.3.10), (5.3.17) распадается следующим образом:

$$v' = v\Psi_0(\alpha, w), \quad \Psi_0(\alpha, w) = -b(w_{n-1}^2 + w_n^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (5.6.1)$$

$$\alpha' = w_n + b(w_{n-1}^2 + w_n^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha),$$

$$w_n' = F(\alpha) - \Gamma_n(\alpha) \frac{f_n^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} w_{n-1}^2 - w_n \Psi_0(\alpha, w), \quad (5.6.2)$$

$$w_{n-1}' = \Gamma_n(\alpha) \frac{f_n^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} w_{n-1} w_n - w_{n-1} \Psi_0(\alpha, w),$$

$$w'_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) \frac{1+w_s^2}{w_s} f(\alpha) g(\beta_1) \dots \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \quad (5.6.3)$$

$$\beta'_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) \dots, \quad s = 1, \dots, n-2,$$

$$\beta'_{n-1} = \mathcal{Z}_1(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \quad (5.6.4)$$

где в системах (5.6.3) символом « \dots » показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций g, h, \dots , зависящая от соответствующего угла β_s , при этом

$$\mathcal{Z}_k(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv Z_k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

— функции в силу замены (5.3.27).

Видно, что для полной интегрируемости системы (5.6.1)–(5.6.4) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (5.6.2), по одному — для систем (5.6.3) (их всего $n-2$; после соответствующих замен независимых переменных в них) и два дополнительных тензорных инварианта, привязывающих уравнения (5.6.1) и (5.6.4) (т.е. всего $n+2$).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (5.6.5)$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha). \quad (5.6.6)$$

Условие (5.6.5) назовем «геометрическим», а условие (5.6.6) — «энергетическим».

Условие (5.6.5) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения.

Условие (5.6.6) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию.

Теорема 5.4. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются условия (5.6.5) и (5.6.6). Тогда система (5.6.1)–(5.6.4) обладает полным набором — $n+2$ (одним гладким и $n+1$, вообще говоря, имеющим существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает $n+2$ инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Доказательство. Для доказательства теоремы 5.4 для начала сопоставим системе третьего порядка (5.6.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_n}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2/f_n^2(\alpha) + bw_n(w_{n-1}^2 + w_n^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_nF(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_n + b(w_{n-1}^2 + w_n^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n/f_n^2(\alpha) + bw_{n-1}(w_{n-1}^2 + w_n^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_{n-1}F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_n + b(w_{n-1}^2 + w_n^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_n = u_2\Delta(\alpha), \quad w_{n-1} = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \quad (5.6.8)$$

приводим систему (5.6.7) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 &= \\ &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_n^2(\alpha) + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_2F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 &= \\ &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_n^2(\alpha) + bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_1F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

которая переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_n^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha)u_2^2 - b_1\mu u_2F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{[f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)/f_n^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)/\Delta(\alpha)]\Delta^2(\alpha)u_1u_2 - b_1\mu u_1F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

здесь и далее напомним, что

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Теперь для интегрирования системы (5.6.10) нам потребуется выполнение геометрического и энергетического условий (5.6.5) и (5.6.6).

Действительно, после их выполнения из системы (5.6.10) вытекают следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (5.6.12)$$

Уравнение (5.6.12) имеет вид уравнения Абеля [10, 82] и его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$ данное уравнение имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1\lambda\mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (5.6.13)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1 \left(\frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 + b_1\lambda\mu w_n\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (5.6.14)$$

Система (5.6.1)–(5.6.4) является динамической системой с переменной диссипацией. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (или в систему (5.3.4), (5.3.5), в которой необходимо перейти к новой независимой переменной по формуле (5.3.26), или в систему (5.3.28)–(5.3.31), в которой уже введены фазовые переменные (5.3.27)). Так система (5.3.4), (5.3.5), в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (5.3.21), (5.3.22) ($Z \rightarrow w$).

Боле того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (5.6.1)–(5.6.4) при условии (5.6.6) обладает первым интегралом вида

$$\Theta \Big|_{B=0} (B; v; w_n, w_{n-1}; \alpha) = v^2(w_{n-1}^2 + w_n^2 - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (5.6.15)$$

где

$$\Theta(B; v; w_n, w_{n-1}; \alpha) = v^2(w_{n-1}^2 + w_n^2 + B\lambda\mu w_n\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha))$$

— семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.6.15), (5.3.22) ($Z \rightarrow w$) также является первым интегралом системы (5.6.1)–(5.6.4) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta \Big|_{B=b_1} (B; v; w_n, w_{n-1}; \alpha) = v^2(w_{n-1}^2 + w_n^2 + b_1 \lambda \mu w_n \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const} \quad (5.6.16)$$

и (5.3.22) ($Z \rightarrow w$) по отдельности не является первым интегралом системы (5.6.1)–(5.6.4). Однако отношение функций (5.6.16), (5.3.22) ($Z \rightarrow w$) является первым интегралом (5.6.14) системы (5.6.1)–(5.6.4) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (5.6.2) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (5.6.13) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_1 \lambda \mu}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2}{4} + \lambda. \quad (5.6.17)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2 + 4\lambda \geq 0, \quad (5.6.18)$$

и фазовое пространство системы (5.6.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (5.6.17).

Таким образом, в силу соотношения (5.6.13) первое уравнение системы (5.6.10) при условиях (5.6.5) и (5.6.6) можно переписать в виде

$$\Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (5.6.19)$$

Тогда дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (5.6.2) при $\kappa = -1$ найдется из следующего уравнения Бернулли:

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1 \lambda \mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1 \lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)}, \quad (5.6.20)$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\}, \quad u(u_2) = \lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2,$$

при этом постоянная C_1 выбирается из условия (5.6.18).

Замечание 5.3. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть выражения (5.6.13).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (5.6.21)$$

Выражение первого интеграла (5.6.21) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы (5.6.1)–(5.6.4) порядка $2n + 1$ при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (5.6.2). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти первые интегралы — по одному для систем (5.6.3) (их всего $n - 2$; меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимых переменных, а также еще два (дополнительных) первых интеграла, привязывающих уравнения (5.6.1) и (5.6.4).

Первые интегралы для систем (5.6.3) выглядят следующим образом:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-2, \quad (5.6.22)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n-2$, см. (5.3.23), ..., (5.3.24).

Действительно, системам (5.6.3) можно сопоставить, соответственно, следующие уравнения первого порядка:

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s} [2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \quad s = 1, \dots, n-2, \quad j = g, h, \dots, i,$$

интегрирование которых и дает искомые первые интегралы (5.6.22).

В переменных Z первые интегралы (5.6.22) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta'_3(Z_{n-1}, \dots, Z_1; \beta_1) &= \frac{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2} \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}, \\ \Theta'_4(Z_{n-2}, \dots, Z_1; \beta_2) &= \frac{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-3}^2} \Psi_2(\beta_2)} = C'_4 = \text{const}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Theta'_n(Z_2, Z_1; \beta_{n-2}) &= \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \Psi_{n-2}(\beta_{n-2})} = C'_n = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.6.23)$$

Для получения искомого первого интеграла, привязывающего уравнение (5.6.4), рассмотрим уровень C_n первого интеграла (5.6.22). На этом уровне справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{1}{\sqrt{C_n^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - 1}}. \quad (5.6.24)$$

Но угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (5.5.2):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{Z_1}{Z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (5.6.24), и получаем требуемое утверждение о наличии следующего первого интеграла, привязывающего уравнение (5.6.4):

$$\Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{i(b)}{\sqrt{C_n^2 \Psi_{n-2}^2(b) - 1}} db = C_5 = \text{const}. \quad (5.6.25)$$

И наконец, нетрудно проверить, что у системы (5.6.1)–(5.6.4) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (1.5.17), (2.6.27) и другими), который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; w_n, w_{n-1}; \alpha) = v^2(1 + 2bw_n \Delta(\alpha) - b^2 \mu(w_{n-1}^2 + w_n^2)) = C_0 = \text{const} \quad (5.6.26)$$

и привязывает уравнение (5.6.1).

Продолжим доказательство теоремы 5.4.

I. Составная рассматриваемая система (5.6.1)–(5.6.4) при выполнении свойств (5.6.5), (5.6.6) имеет следующий вид ($w_{n-1}^* = \ln |w_{n-1}|$, $w_s^* = \ln |w_s + \sqrt{1+w_s^2}|$, $s = 1, \dots, n-2$):

$$v' = X_v(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = v \Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_{n-1}^*} + w_n^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (5.6.27)$$

$$\begin{aligned}\alpha' &= X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = w_n + b(e^{2w_{n-1}^*} + w_n^2)\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)), \\ w_n' &= X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}e^{2w_{n-1}^*} - w_n\Psi_1(\alpha, w),\end{aligned}\quad (5.6.28)$$

$$\begin{aligned}w_{n-1}^* &= X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_n - \Psi_1(\alpha, w), \\ w_s^* &= X_{w_s^*}(w_{n-1}, w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_s) = \\ &= e^{w_{n-1}^*}\Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \beta_s' &= X_{\beta_s}(w_{n-1}, w_s^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) =\end{aligned}\quad (5.6.29)$$

$$\begin{aligned}&= e^{w_{n-1}^*}\Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \frac{W_s(w_s^*)}{\sqrt{1 + W_s^2(w_s^*)}}, \quad s = 1, \dots, n-2, \\ \beta_{n-1}' &= X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = \\ &= \pm \frac{e^{w_{n-1}^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*)) \dots (1 + W_{n-2}^2(w_{n-2}^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1)h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}),\end{aligned}\quad (5.6.30)$$

где

$$\begin{aligned}\Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1)h(\beta_2) \dots j(\beta_{s-1}) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*)) \dots (1 + W_{s-1}^2(w_{s-1}^*))}}, \quad s = 1, \dots, n-2,\end{aligned}\quad (5.6.31)$$

$$w_s = W_s(w_s^*), \quad s = 1, \dots, n-2,$$

в силу замены (5.3.27), при этом в составной системе (5.6.27)–(5.6.30) штрихом обозначена также производная по новому независимому переменному τ . Здесь $j(\beta_s)$ — функция от соответствующего угла β_s (например, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, \dots , $i(\beta_{n-2})$).

При этом, более явно,

$$\begin{aligned}\Xi_1(\alpha) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \\ \Xi_2(w_1^*; \alpha, \beta_1) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) \frac{1}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}}, \\ \Xi_3(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1)h(\beta_2) \frac{1}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Xi_{n-2}(w_{n-3}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1)h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*)) \dots (1 + W_{n-3}^2(w_{n-3}^*))}}.\end{aligned}\quad (5.6.32)$$

В принципе, замены $w_s \rightarrow w_s^*$, $s = 1, \dots, n-1$, носят технический характер, и при этом можно использовать как переменные w_s^* , так и переменные w_s .

Для составной системы (5.6.27)–(5.6.30) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) dv \wedge dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \dots \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-1},$$

из следующего линейного дифференциального уравнения с частными производными:

$$\operatorname{div} [\rho(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) X(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})] = 0, \quad (5.6.33)$$

где

$$\begin{aligned}
& X(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = \\
& = \{X_v(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha), X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\
& X_{w_{n-2}^*}(w_{n-1}^*, w_{n-3}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), X_{\beta_{n-2}}(w_{n-1}^*, w_{n-2}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}), \dots, \\
& X_{w_1^*}(w_{n-1}^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_{n-1}^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})\}
\end{aligned} \tag{5.6.34}$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (5.6.27)–(5.6.30) в координатах

$$(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}).$$

Уравнение (5.6.33) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
& X_v(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\rho_v + \\
& + X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\rho_{w_n} + X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\rho_{w_{n-1}^*} + \\
& + X_{w_{n-2}^*}(w_{n-1}^*, w_{n-3}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})\rho_{w_{n-2}^*} + \\
& + X_{\beta_{n-2}}(w_{n-1}^*, w_{n-2}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}), \rho_{\beta_{n-2}} + \dots + \\
& + X_{w_1^*}(w_{n-1}^*; \alpha, \beta_1)\rho_{w_1^*} + X_{\beta_1}(w_{n-1}^*, w_1^*; \alpha)\rho_{\beta_1} + \\
& + X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})\rho_{\beta_{n-1}} = \\
& = -\rho \operatorname{div} X(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}).
\end{aligned} \tag{5.6.35}$$

Как было указано выше для систем меньшего порядка, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ дивергенции векторного поля

$$X(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$$

системы (5.6.27)–(5.6.30) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля

$$\rho(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})X(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$$

преобразованной системы, т.е. системы (5.6.27)–(5.6.30), умноженной на

$$\rho(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}),$$

после замены

$$\rho(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \frac{d}{dt_1} = \frac{d}{dt_2}$$

старой независимой переменной t_1 при переходе к новой независимой переменной t_2 в системе (5.6.27)–(5.6.30).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $X(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ системы (5.6.27)–(5.6.30) функцию $\rho_2(v) = v^3$ из (1.3.18) (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2), (2.3.23), (2.3.24) и других систем). Имеем:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} [v^3 X(v; w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})] = \\
& = -4v^3 b(e^{2w_{n-1}^*} + w_n^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_{n-1}^*} + w_n^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\
& + v^3 b(e^{2w_{n-1}^*} + 3w_n^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_{n-1}^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + \dots + 0 + 4v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\
& + v^3 b_1 \lambda \tilde{\Delta}(\alpha) (\mu - 3\Delta^2(\alpha)) - v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - 0 + 0 + \dots + 0 \equiv v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha).
\end{aligned}$$

Тогда преобразованная система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (5.6.35) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
v' &= v^3 X_v(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\
\alpha' &= v^3 X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\
w_n' &= v^3 X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\
w_{n-1}^{*'} &= v^3 X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\
w_{n-2}^{*'} &= v^3 X_{w_{n-2}^*}(w_{n-1}^*, w_{n-3}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \\
\beta_{n-2}' &= v^3 X_{\beta_{n-2}}(w_{n-1}^*, w_{n-2}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}), \\
&\dots\dots\dots, \\
w_1^{*'} &= v^3 X_{w_1^*}(w_{n-1}^*; \alpha, \beta_1), \\
\beta_1' &= v^3 X_{\beta_1}(w_{n-1}^*, w_1^*; \alpha), \\
\beta_{n-1}' &= v^3 X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \\
\rho' &= -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho
\end{aligned} \tag{5.6.36}$$

(здесь штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной).

У системы, состоящей из первых $2n + 1$ уравнения системы (5.6.36), уже найдены $n + 2$ первых интеграла (5.6.26), (5.6.14), (5.6.21), (5.6.22) и (5.6.25) (полный набор). Найдем и дополнительный первый интеграл, привязывающий уравнение (последнее уравнение системы (5.6.36)) на функцию ρ .

Действительно, из системы уравнений (5.6.36) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_n + b(w_{n-1}^2 + w_n^2) \Delta(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha) (\mu - \Delta^2(\alpha))}, \tag{5.6.37}$$

тогда, вводя в рассмотрение однородные координаты (5.6.8), имеем:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha) (\mu - \Delta^2(\alpha))} \tag{5.6.38}$$

или

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \tag{5.6.39}$$

Теперь, из соотношения (5.6.39) и первого соотношения (5.6.11) вытекает следующее дифференциальное равенство (при $\kappa = -1$):

$$\frac{d\rho}{du_2} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2 + u_1^2}, \tag{5.6.40}$$

а из него — следующая квадратура:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-[b_1 \lambda \mu] du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1 U(C_1, u_2) \tag{5.6.41}$$

(о функциях $u(u_2)$ и $U(C_1, u_2)$ см. (5.6.20)).

Становится справедливым следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}.$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} dv \wedge dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \dots \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-1}, \quad u_2 = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}.$$

Ну а общее решение линейного дифференциального уравнения (5.6.35) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F} [\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{n+1}], \quad (5.6.42)$$

где $\mathcal{F} [\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{n+1}]$ — произвольная гладкая функция $n + 2$ аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{n+1}$ — $n + 2$ независимых первых интеграла (5.6.26), (5.6.14), (5.6.21), (5.6.22) и (5.6.25) соответственно.

В частности, за $n + 2$ функционально независимых решения линейного уравнения (5.6.35) в частных производных можно взять следующие функции ($u_2 = w_n / \Delta(\alpha)$, $u_1 = w_{n-1} / \Delta(\alpha)$, $w_{n-1}^* = \ln |w_{n-1}|$, $w_s^* = \ln |w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, \dots, n - 2$):

$$\rho_0(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_0(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \quad (5.6.43)$$

$$\rho_1(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \quad (5.6.44)$$

$$\rho_2(v; w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \quad (5.6.45)$$

$$\rho_3(v; w_n, w_{n-2}^*; \alpha, \beta_{n-2}) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_{n-2}^*; \beta_{n-2}), \quad (5.6.46)$$

.....

$$\rho_n(v; w_n, w_1^*; \alpha, \beta_1) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_n(w_1^*; \beta_1), \quad (5.6.47)$$

$$\rho_{n+1}(v; w_n; \alpha, \beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}). \quad (5.6.48)$$

II. Рассмотрим далее системы (5.6.3). Поскольку они могут быть приведены к независимым подсистемам, проведем рассуждения об «автономном» поиске инвариантных дифференциальных форм, хотя общий подход для поиска таких форм уже освещен выше.

После некоторого их приведения — замен независимых переменных в них

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \pm w_{n-1} f(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \\ \frac{d}{dt} &= \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \frac{d}{d\tau}, \\ &\dots, \end{aligned} \quad (5.6.49)$$

$$\frac{d}{dt} = \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{(1 + w_1^2) \dots (1 + w_{n-3}^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) \dots r(\beta_{n-3}) \frac{d}{d\tau}$$

при $s = n - 2, \dots, 1$ соответственно — системы (5.6.3) можно объединить следующим образом:

$$\begin{aligned} w'_s &= X_{w_s}(w_s; \beta_s) = \sqrt{1 + w_s^2} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \beta'_s &= X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}}, \quad s = 1, \dots, n - 2, \quad j = r, \dots, h, g, \end{aligned} \quad (5.6.50)$$

при этом в системе (5.6.50) штрихом обозначена также производная по новой независимой переменной τ .

Для каждого $s = 1, \dots, n - 2$ для системы (5.6.50) будем искать интегральный инвариант с плотностью $\rho(w_s; \beta_s)$, соответствующей дифференциальной форме площади $\rho(w_s; \beta_s) dw_s \wedge d\beta_s$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_s; \beta_s) X(w_s; \beta_s)] = 0, \quad (5.6.51)$$

где

$$X(w_s; \beta_s) = \{X_{w_s}(w_s; \beta_s), X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\} \quad (5.6.52)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (5.6.50) в координатах $(w_s; \beta_s)$.

Уравнение (5.6.51) переписется в виде

$$X_{w_s}(w_s; \beta_s)\rho_{w_s} + X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\rho_{\beta_s} = -\rho \operatorname{div} X(w_s; \beta_s), \quad (5.6.53)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \quad (5.6.54)$$

Тогда система уравнений характеристик (для каждого $s = 1, \dots, n-2$) линейного дифференциального уравнения (5.6.53) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{w}_s &= X_{w_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\beta}_s &= X_{\beta_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\rho} &= -\rho \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+2}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \end{aligned} \quad (5.6.55)$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (5.6.55), уже найден первый интеграл (5.6.22) (для любого $s = 1, \dots, n-2$). Найдем дополнительный независимый первый интеграл для системы (5.6.55) уравнений характеристик.

Сопоставим двум последним уравнениям системы (5.6.55) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\beta_s} = -\rho \left[2\Gamma_{s+2}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \quad s = 1, \dots, n-2. \quad (5.6.56)$$

Последнее уравнение дает следующее инвариантное соотношение:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s; \rho) = \rho \cdot \Psi_s(\beta_s) = C_{\rho_{s+2}} = \operatorname{const}, \quad (5.6.57)$$

которое является вторым, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (5.6.55) (для каждого $s = 1, \dots, n-2$). О функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n-2$, см. (5.3.23), ..., (5.3.24).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (5.6.53) (для каждого $s = 1, \dots, n-2$) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \frac{\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]}{\Psi_s(\beta_s)}, \quad (5.6.58)$$

где $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ — произвольная гладкая функция одного аргумента (для каждого $s = 1, \dots, n-2$), при этом Θ_{s+2} , $s = 1, \dots, n-2$, — первый интеграл (5.6.22).

В частности, если в качестве функции $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ выбрать

$$\mathcal{G}[\Theta_{s+2}] = \frac{1}{\Theta_{s+2}} = \frac{\Psi_s(\beta_s)}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad (5.6.59)$$

то за решение линейного уравнения (5.6.53) (для каждого $s = 1, \dots, n-2$) в частных производных можно взять следующую функцию:

$$\rho_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}. \quad (5.6.60)$$

Теорема 5.4 доказана. \square

Заметим, что все найденные в разделе 5.6.1 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (5.5.1), (5.5.2) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (5.5.3), (5.5.4). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_n(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данном разделе 5 предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем порядка $2n+1$.

Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — характеризуют подкачку энергии. Результат исключительно интересен тем, что все это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы.

Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в \mathbb{R}^n // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.

25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.

51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
60. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 215. — С. 81–94.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
66. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
69. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.

70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
73. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
74. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
75. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
76. *Шамолин М. В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 514, № 1. — С. 98–106.
77. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 512, № 1. — С. 10–17.
78. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
79. *Шамолин М. В.* Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы// Диффер. уравн. — 2024. — 60, № 3. — С. 322–345.
80. *Шамолин М. В.* Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2024. — 516, № 1. — С. 65–74.
81. *Шамолин М. В.* Инварианты систем с малым числом степеней свободы, обладающих диссипацией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 2. — С. 3–15.
82. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. — New York: Chapman and Hall, 2017.
83. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
84. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
85. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms (*Vasilyev V.*, ed.). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

CONTENTS

Optimal boundary control of oscillations of a string with given intermediate values of the speed for minimizing boundary energy (<i>V. R. Barseghyan, S. V. Solodusha, E. V. Markova</i>)	3
Exact and approximate solutions to the quasilinear parabolic system “predator-prey” with zero fronts (<i>A. L. Kazakov, L. F. Spevak</i>)	19
Classical scattering matrix for hard and soft excitations in a plasma with non-abelian interaction (<i>Yu. A. Markov, M. A. Markova, N. Yu. Markov</i>)	29
On the solvability and limiting properties of some systems of partial differential equations with a small parameter in the principal part (<i>M. V. Falaleev, I. V. Zakharova</i>)	39
Invariants of homogeneous dynamic systems of arbitrary odd order with dissipation. V. General case (<i>M. V. Shamolin</i>)	49

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)
Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Канель-Белов Алексей Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова,
Университет имени Бар-Илана)
Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Лукьяненко Дмитрий Витальевич, д.ф.-м.н. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Виктор Юрьевич д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)
Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.н., профессор (Университет Флоренции)
Сачков Юрий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор (Институт программных систем
им. А. К. Айламазяна)
Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)
Туганбаев Аскар Аканович, д.ф.-м.н., профессор (НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Фалалеев Михаил Валентинович, д.ф.-м.н., профессор
(Иркутский государственный университет)
Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор (Институт математики с вычислительным
центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН)
Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Канель-Белов Алексей Яковлевич
Корпусов Максим Олегович
Лукьяненко Дмитрий Витальевич
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Сачков Юрий Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.