

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 241



Москва 2025

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 241 (№ 4, 2025)

Дата публикации 14 апреля 2025 г.

Издается с 1995 года
Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. В. Аргучинцев,

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

Н. И. Гусева

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN (печатная версия)

0233-6723

ISSN (электронная версия)

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

ISSN 2782-4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 241

МАТЕРИАЛЫ
6 МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»
(DYSC 2024)

Иркутск, 16–20 сентября 2024 г.
Часть 4



Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Критерии устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе аддитивных преобразований формулы конечных приращений (<i>С. Г. Буланов</i>)	3
О максимальном числе остовных деревьев в кактусах с заданным числом вершин (<i>В. А. Воблый, Д. А. Кононенко</i>)	13
Позиционный принцип минимума в задачах оптимального управления с терминальными ограничениями и его расширения (<i>В. А. Дыхта</i>)	18
Вероятностные распределения, задаваемые с помощью чисел Лаха и обобщенных чисел Лаха (<i>Н. А. Колокольникова</i>)	30
Применение метода параметризации для решения задач оптимального управления с разрывами фазовой траектории (<i>И. В. Луточкин, М. С. Рыбина</i>)	40
Потери энергии быстрой цветной частицы в неабелевой плазме в рамках гамильтонова формализма (<i>Ю. А. Марков, М. А. Маркова, Н. Ю. Марков</i>)	55
Параметрическая трансформация невыпуклых задач оптимального управления (<i>В. А. Срочко, Е. В. Аксентюшкина</i>)	64
Об одном SI^* -интервале мультиопераций ранга 2 (<i>И. В. Фомина, В. И. Пантелеев</i>)	71
Первая краевая задача для некоторых смешанных уравнений теплопроводности второго и четвертого порядков (<i>В. Н. Хангасаев, В. М. Пластинина</i>)	83
Обобщенные уравнения Навье—Стокса, ассоциированные с комплексом Дольбо (<i>А. А. Шлапунов, А. Н. Полковников</i>)	90



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-3-12

УДК 517.91:519.6

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ АДДИТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФОРМУЛЫ КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

© 2025 г. С. Г. БУЛАНОВ

Аннотация. Получены критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе аддитивных преобразований разностных схем и формулы конечных приращений. Математическая конструкция критериев влечет возможность программной реализации. Для вычисления приближенных значений решения системы применяется кусочно интерполяционный метод с итерационным уточнением. Определение точек Лагранжа основано на вычислении минимума модуля функции при помощи устойчивой адресной сортировки слиянием. Применение критериев на практике позволяет выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

STABILITY CRITERIA OF SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BASED ON ADDITIVE TRANSFORMATIONS OF THE FORMULA OF FINITE INCREMENTS

© 2025 S. G. BULANOV

ABSTRACT. Based on additive transformations of difference schemes and the formula of finite increments, we obtain criteria for the Lyapunov stability of systems of ordinary differential equations. The mathematical structure of the criteria admits the possibility of software implementation. Approximate solutions of the system can be computed by the piecewise interpolation method with iterative refinement. The search for Lagrange points is based on calculating the minimum of the modulus function using the sorting by stable address merging. Practical applications of the criteria allow one to perform the stability analysis in real-time mode.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer stability analysis, numerical modeling of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Анализ устойчивости решений систем дифференциальных уравнений остается актуальным направлением исследований (см. [8, 11]). Традиционно исследование устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений выполняется на основе построения функций Ляпунова (см. [10]). Потребность выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени и отсутствие строгого алгоритма построения функций Ляпунова влечет необходимость разработки критериев устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих программную реализацию (см. [9]). В работе предлагается подход к анализу устойчивости решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе рекуррентных преобразований разностных схем в аддитивной форме. Целью преобразований является получение зависимости величины возмущения решения от возмущения начальных данных с некоторым коэффициентом пропорциональности, поведение которого определяет характер устойчивости решения системы. На этой основе формулируются критерии устойчивости в виде необходимых и достаточных условий.

Далее с помощью аддитивных преобразований формулы конечных приращений конструируются новые разновидности критериев с фиксированным, не стремящимся к нулю, шагом численного решения системы. Это позволяет существенно увеличить длину промежутка исследования и устанавливать асимптотические свойства решения при анализе устойчивости на компьютере. Вместе с тем применяемый в работе алгоритм нахождения точек Лагранжа из формулы конечных приращений требует построения непрерывного высокоточного приближения решения и правой части системы. Последнее достигается на основе кусочно интерполяционного метода с итерационным уточнением.

2. Критерии устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что в области $R = \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0\}$ для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения, функция $F(t, Y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по t (см. [4]). Требуется получить критерии устойчивости по Ляпунову для системы (1) на основе аддитивных преобразований разностных схем и формулы конечных приращений.

Представим точное решение системы (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + hf_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где q_{ki} — остаточные члены формулы Тейлора для k -й компоненты решения. Шаг h предполагается равномерным, для произвольно выбранной независимой переменной $t \in [t_0, \infty)$ имеют место соотношения $h = (t - t_0)/(i + 1)$, $i = 0, 1, \dots$, $t_{j+1} = t_j + h$, $0 \leq j \leq i$ (см. [1]). Далее, если не оговорено иное, k предполагается произвольно фиксированным.

Преобразование выражения (2) в аддитивной форме влечет соотношение

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-1)} + hf_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + hf_k(t_i, Y_i) + q_{ki},$$

или

$$y_{k(i+1)} = y_{k0} + \sum_{l=0}^i hf_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) + \sum_{l=0}^i q_{k(i-l)}, \quad y_{k0} = y_k(t_0).$$

С учетом оценки остаточных членов величина возмущения решения на промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^i h \left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) \right) \quad \forall t \in [t_0, \infty) \quad (3)$$

(см. [2]. Выделим в (3) возмущение начальных данных в виде множителя:

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \frac{1}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \left[\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^i h \left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) \right) \right] \times \\ \times (\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)) \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Теорема 1. Для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно существование такого Δ , $0 < \Delta \leq \delta$, что для всех $\tilde{Y}(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, соотношение

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^i h \left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) \right)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq \tilde{c}_1,$$

выполняется для всех $t \in [t_0, \infty)$, где $\tilde{c}_1 = \text{const}$. Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое $\Delta_1 \leq \Delta$, что неравенство $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^i h \left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) \right)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = 0.$$

Получены критерии устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы (1) в аддитивной форме. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага численного решения. Форма критериев создает предпосылки для компьютерного анализа устойчивости по ходу приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее, по аналогии с описанной выше схемой, конструируются критерии устойчивости на основе аддитивных преобразований формулы конечных приращений.

Пусть на полуоси последовательными индексами отмечены равные по длине отрезки с общими границами

$$[t_0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, t_{i+1}], \quad t_{i+1} = t_i + h_c, \quad h_c = \text{const}, \quad (4)$$

где h_c задается произвольно. Построение критериев устойчивости опирается на теорему Лагранжа о среднем, применяемую к каждому отрезку из (4).

Применяются следующие разновидности формул средних значений:

$$y_k(t_{l+1}) - y_k(t_l) = f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl}))(t_{l+1} - t_l), \quad \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1}), \quad \forall l = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

$$y_k(t) - y_k(t_l) = f_k(\theta_{kl}, Y(\theta_{kl}))(t - t_l), \quad \forall t \in (t_l, t_{l+1}), \quad \theta_{kl} \in (t_l, t), \quad \forall l = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Введем обозначения

$$\Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl}) = f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \tilde{Y}(\tilde{\xi}_{kl})) - f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl})), \\ \Delta f_k(\tilde{\theta}_{kl}, \theta_{kl}) = f_k(\tilde{\theta}_{kl}, \tilde{Y}(\tilde{\theta}_{kl})) - f_k(\theta_{kl}, Y(\theta_{kl})).$$

Теорема 2. Решение системы (1) устойчиво, если при любом выборе $h_c = \text{const}$ найдется такое $\Delta > 0$, что для любого $\tilde{Y}(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, и любого

$k = 1, 2, \dots, n$ неравенства

$$\left| \frac{\sum_{l=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq c_1, \quad c_1 = \text{const}, \quad \tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1}),$$

$$\left| \frac{\Delta f_k(\tilde{\theta}_{kl}, \theta_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq c_2, \quad c_2 = \text{const}, \quad \tilde{\theta}_{kl}, \theta_{kl} \in (t, t_{l+1}), \quad \forall t \in (t_l, t_{l+1}),$$

выполняются для всех $l = 0, 1, \dots, i$ и всех $i = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Для функций $y_k(t)$, $\tilde{y}_k(t)$ выполнены условия теоремы Лагранжа о среднем на каждом отрезке из (4). При произвольном выборе h_c из (4) и при $l = i$ из (5) следует

$$y_k(t_{i+1}) = y_k(t_i) + h_c f_k(\xi_{ki}, Y(\xi_{ki})), \quad \xi_{ki} \in (t_i, t_{i+1}), \quad \forall i = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Преобразуя (7), получим

$$y_k(t_{i+1}) = y_k(t_0) + h_c f_k(\xi_{k0}, Y(\xi_{k0})) + \dots + h_c f_k(\xi_{ki}, Y(\xi_{ki})).$$

Следовательно

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq h_c \left| \frac{\sum_{l=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| + 1.$$

Отсюда

$$|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})| \leq (c_2 h_c + 1) |\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)|. \quad (8)$$

При каждом $t \in (t_i, t_{i+1})$ величину $|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)|$ оценим из неравенства

$$|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| \leq |\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1}) - (\tilde{y}_k(t) - y_k(t))| + |\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})|. \quad (9)$$

Первое слагаемое из правой части (9) с учетом (6) оценим из неравенства

$$|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - \tilde{y}_k(t) - (y_k(t_{i+1}) - y_k(t))| \leq |\Delta f_k(\tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki})| |t_{i+1} - t|, \quad \tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki} \in (t, t_{i+1}).$$

Следовательно

$$|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - \tilde{y}_k(t) - (y_k(t_{i+1}) - y_k(t))| \leq c_3 h_c |\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)|.$$

С учетом (8) справедливо неравенство

$$|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| \leq \tilde{c} |\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)|,$$

где $\tilde{c} = (c_2 + c_3)h_c + 1$. В итоге получаем

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq \tilde{c}, \quad \tilde{c} = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

что свидетельствует об устойчивости решения системы (1). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. Решение системы (1) асимптотически устойчиво, если выполнены условия теоремы 2 и существует такое $\Delta_1 > 0$, $0 < \Delta_1 \leq \Delta$, что при любом выборе $h_c = \text{const}$ из (4) для любого $\tilde{Y}(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$, выполняются соотношения

$$\frac{h_c \sum_{l=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1 \rightarrow 0, \quad t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

$\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1})$ для всех $l = 0, 1, \dots, i$, и $f_k(\tilde{t}, \tilde{Y}) - f_k(t, Y) \rightarrow 0$ для всех $\tilde{t}$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Для фиксированного $k = 1, 2, \dots, n$ имеет место соотношение

$$\frac{\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} = \frac{h_c \sum_{l=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1.$$

Согласно условию теоремы

$$\frac{\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})| \rightarrow 0$. Величина возмущения решения для каждого $t \in (t_i, t_{i+1})$, $t \rightarrow \infty$, оценивается из неравенства (9). Второе слагаемое из правой части (9) стремится к нулю. Оценим величину первого слагаемого из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \tilde{y}_k(t_{i+1}) - \tilde{y}_k(t) - (y_k(t_{i+1}) - y_k(t)) \right| &\leq |\Delta f_k(\tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki})| h_c, \quad \tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki} \in (t, t_{i+1}), \\ |\Delta f_k(\tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki})| &\leq \max_{t, \tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}]} |\Delta f_k(\tilde{t}, t)|. \end{aligned}$$

Из условия теоремы вытекает, что $f_k(\tilde{t}, \tilde{Y}) - f_k(t, Y) \rightarrow 0$ при всех $\tilde{t}$, $t \rightarrow \infty$; следовательно, и первое слагаемое в (9) стремится к нулю. Окончательно получаем

$$|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

для всех $\tilde{Y}(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4. Для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно существование такого $\Delta > 0$, что для любого $\tilde{Y}(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ имеет место соотношение

$$\left| \frac{\Delta f_k(\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)})(t - t_{i+1}) + h_c \sum_{l=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1 \right| \leq \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (10)$$

где $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$, $i = 0, 1, \dots$; $\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2})$, $l = 0, 1, \dots, i$; $\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1})$.

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (10) и существовало такое Δ_1 , $0 < \Delta_1 \leq \Delta$, что для любого $\tilde{Y}(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ выполняются соотношения

$$\Delta f_k(\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)})(t - t_{i+1}) + h_c \sum_{l=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl}) + \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) \rightarrow 0, \quad (11)$$

$t \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow \infty$), $\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1})$, $\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2})$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$.

Для нахождения приближенных значений решения и правой части системы (1) на практике используется кусочно интерполяционный метод с итерационным уточнением (см. [3]). В качестве приближающего полинома используется полином Лагранжа, преобразованный описанным ниже способом.

В формуле полинома Лагранжа

$$P_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (t - t_r) / \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (t_j - t_r)$$

выполним следующие преобразования. Пусть $x = (t - t_0)h^{-1}$, $t_j = t_0 + jh$; тогда

$$\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (t - t_r) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (x - r)h, \quad \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (t_j - t_r) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (j - r)h.$$

В результате

$$P_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j) \frac{P_{n_0j}(x)}{G_{n_0j}(j)},$$

где

$$P_{n_0}(x) = \prod_{r=0}^{n_0-1} (x - x_r), \quad G_{n_0j}(j) = \prod_{r=0}^{n_0-1} (j - x_r), \quad x_r = \begin{cases} r, & r < j; \\ r + 1, & r \geq j. \end{cases}$$

Переменную $P_{n_0j}(x)$ можно представить в виде полинома

$$P_{n_0j}(x) = d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \dots + d_{n_0j}x^{n_0};$$

по аналогии $G_{n_0j}(j)$ преобразуется к виду

$$G_{n_0j}(j) = d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \dots + d_{n_0j}j^{n_0} \quad \text{или} \quad G_{n_0j}(j) = (-1)^{n_0-j} j!(n_0 - j)!.$$

Для вычисления коэффициентов полинома по его корням можно использовать следующий алгоритм. Пусть рассматривается полином

$$P_{n_0}(x) = \sum_{l=0}^{n_0} d_l x^l$$

с коэффициентом $d_{n_0} = 1$ и корнями $x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}$, так что

$$\sum_{l=0}^{n_0} d_l x^l = \prod_{r=0}^{n_0-1} (x - x_r).$$

Если $P_1(x) = x - x_0$, то полагаем $P_1(x) = d_{11}x + d_{01}$, где $d_{11} = 1$, $d_{01} = -x_0$. Если уже вычислены коэффициенты полинома

$$P_{k-1}(x) = d_{(k-1)(k-1)}x^{k-1} + d_{(k-2)(k-1)}x^{k-2} + \dots + d_{1(k-1)}x + d_{0(k-1)},$$

то

$$P_k(x) = \prod_{r=0}^{k-1} (x - x_r), \quad k \geq 2, \quad P_k(x) = P_{k-1}(x) \cdot (x - x_{k-1}).$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях влечет

$$\begin{cases} d_{kk} = d_{(k-1)(k-1)}, \\ d_{(k-1)k} = d_{(k-2)(k-1)} - d_{(k-1)(k-1)}x_{k-1}, \\ d_{(k-2)k} = d_{(k-3)(k-1)} - d_{(k-2)(k-1)}x_{k-1}, \\ \dots\dots\dots \\ d_{(k-l)k} = d_{(k-l-1)(k-1)} - d_{(k-l)(k-1)}x_{k-1}, \\ \dots\dots\dots \\ d_{0k} = -d_{0(k-1)}x_{k-1}, \end{cases}$$

$l = 1, 2, \dots, k - 1$. При $k = n$ левые части совпадут с искомыми значениями коэффициентов полинома. Таким образом,

$$P_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j) \frac{d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \dots + d_{n_0j}x^{n_0}}{d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \dots + d_{n_0j}j^{n_0}}. \quad (12)$$

При компьютерной реализации числитель и знаменатель в (12) можно вычислить по схеме Горнера

$$\begin{aligned} P_{n_0j}(x) &= d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \dots + d_{n_0j}x^{n_0} = \\ &= \left(b(\dots (d_{n_0j}x + d_{n_0-1j})x + d_{n_0-2j})x + \dots + d_{1j} \right)x + d_{0j}. \end{aligned}$$

Из соотношения (12) следует, что полином Лагранжа всегда можно представить в виде

$$P_{n_0}(x) = \sum_{l=0}^{n_0} c_l x^l, \quad c_l = \sum_{j=0}^{n_0} \frac{f(t_j) d_{lj}}{G_{n_0j}(j)}.$$

Приближение решения и правой части (1) на $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{2^{k_0}-1} [a_i, b_i]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах; при этом будем обозначать через $P_{kin_0}(x)$ полином, приближающий правую часть k -го уравнения системы (1) на i -м подынтервале.

Для интерполяции правой части системы (1) в $f_k(t, Y)$ подставляются приближенные значения y_k , вначале $y_k \approx y_{k0}$. Функция $f_k(t, Y_0)$ приближается полиномами вида (12) по изложенной выше схеме. При фиксированных n_0 и k_0 на отрезке $[a_i, b_i]$, $i = 0$, затем аналогично при $i = 1, 2, \dots$, выполняется итерационное уточнение, которое состоит в следующем. Пусть

$$P_{kin_0}(x) = \sum_{l=0}^{n_0} c_{kil} x^l;$$

тогда

$$f_k(t, Y_0) \approx P_{kin_0}(x), \quad x = (t - a_i)h_i^{-1},$$

h_i — шаг интерполяции на $[a_i, b_i]$.

Первообразную

$$P_{k(\text{int})i(n_0+1)}(t) = y_{k0(i-1)} + h_i \int_0^{(t-a_i)h_i^{-1}} P_{kin_0}(x) dx = y_{k0(i-1)} + h_i \sum_{l=0}^{n_0} \frac{c_{kil}}{l+1} x^{l+1}$$

принимая за приближение решения $y_k(t) \approx P_{k(\text{int})i(n_0+1)}(t)$, $t \in [a_i, b_i]$. Далее полагаем $f_k(t, Y) \approx f_k(t, P_{k(\text{int})i(n_0+1)}(t))$ и при том же n_0 на том же отрезке строим интерполяционный полином вида (12) для приближения полученной функции:

$$P_{kin_0}^{(1)}(x) \approx f_k(t, P_{k(\text{int})i(n_0+1)}(t)).$$

От этого полинома снова вычисляем первообразную с тем же значением константы

$$P_{k(\text{int})i(n_0+1)}^{(1)}(t) = y_{k0(i-1)} + h_i \int_0^{(t-a_i)h_i^{-1}} P_{kin_0}^{(1)}(x) dx,$$

подставляем в правую часть, $f_k(t, Y) \approx f_k(t, P_{k(\text{int})i(n_0+1)}^{(1)}(t))$, которую затем интерполируем аналогично:

$$P_{kin_0}^{(2)}(x) \approx f_k(t, P_{k(\text{int})i(n_0+1)}^{(1)}(t)).$$

Фактически итерации

$$\begin{aligned} P_{kin_0}^{(l)}(x) &\approx f_k(t, P_{k(\text{int})i(n_0+1)}^{(l-1)}(t)), \\ P_{k(\text{int})i(n_0+1)}^{(l)}(t) &= y_{k0(i-1)} + h_i \int_0^{(t-a_i)h_i^{-1}} P_{kin_0}^{(l)}(x) dx, \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (14)

t	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
s_1	2,359	2,459	2,504	2,531	2,550	2,563	2,574	2,582	2,588	2,593
s_2	5,568	6,049	6,275	6,414	6,511	6,583	6,639	6,685	6,724	6,756

продолжаются до заданной границы $l \leq q = \text{const}$. Выше за значение $y_{k0(i-1)}$ принимается $P_{k(\text{int})i(n_0+1)}^{(q)}(b_{i-1})$. По окончании итераций на $[a_i, b_i]$ выполняется переход к $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, где за значение y_{k0i} принимается $P_{k(\text{int})i(n_0+1)}^{(q)}(b_i)$ (см. [5]).

Практическая реализация критериев (10), (11) заключается в возможности определить значения ξ_{kl} в $f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl}))$ с высокой точностью.

Из (5) следует, что

$$h_c^{-1}(y_k(t_{l+1}) - y_k(t_l)) - f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl})) = 0.$$

Далее можно найти ξ_{kl} как минимум модуля левой части равенства

$$\min_{\xi_{kl} \in [t_l, t_{l+1}]} \left| h_c^{-1}(y_k(t_{l+1}) - y_k(t_l)) - f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl})) \right| = 0. \quad (13)$$

Минимум модуля любой функции на любом конечном отрезке с высокой точностью определяется с помощью программы на основе алгоритма сортировки (см. [6]).

3. Программный и численный эксперимент. Программный и численный эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi. На основе кусочно интерполяционного метода с итерационным уточнением строится непрерывное приближение решения и правой части исследуемой системы. Далее на каждом отрезке из (4) для всех уравнений системы находятся точки ξ_{kl} , удовлетворяющие равенству (13). После этого для каждого уравнения системы вычисляется значение модуля выражения из левой части критериев (10), (11) (в таблицах ниже соответственно s_1 и s_2). По численному поведению этих значений делается вывод об устойчивости решений системы. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост является признаком неустойчивости.

Пример 1. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y'_1 = 0,5 y_1 \frac{1}{\sqrt{t^3}} - \frac{1}{t^2} y_1 y_2^2 \left(\sum_{l=0}^3 t^l \sum_{l=0}^3 y_2^{2l} \right), \quad y'_2 = y_2 \frac{1}{\sqrt{t^3}}, \quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \quad (14)$$

на отрезке $[1, 500]$, $h_c = 1$. Ранее было аналитически установлено, что нулевое решение системы (14) устойчиво (см. [7]). Начальные значения компонент возмущенного решения $\tilde{y}_{10} = 10^{-5}$, $\tilde{y}_{20} = 2 \cdot 10^{-5}$. Результаты анализа устойчивости представлены в таблице 11. Значения s_1 и s_2 ограничены константой, что в соответствии с критерием (10) свидетельствует об устойчивости решения системы. Время работы программы ≈ 26 с.

Пример 2. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y'_1 = -0,5 y_1 \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2} \left(\sum_{l=0}^3 t^l \sum_{l=0}^3 y_2^{2l} \right) \frac{y_1^3}{y_2^2 + 1}, \quad y'_2 = -y_2 \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \quad (15)$$

при значениях длины промежутка, шага и возмущения начальных данных из примера 1. Аналитически установлено, что нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво (см. [7]). Результаты анализа устойчивости представлены в таблице 2. Значения s_1 и s_2 стремятся к нулю, что свидетельствует об асимптотической устойчивости решения системы (15).

Таблица 2. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (15)

t	50	100	150	200	250
s_1	$2,308 \times 10^{-3}$	$1,234 \times 10^{-4}$	$1,304 \times 10^{-5}$	$1,961 \times 10^{-6}$	$3,699 \times 10^{-7}$
s_2	$5,330 \times 10^{-6}$	$1,523 \times 10^{-8}$	$1,701 \times 10^{-10}$	$3,903 \times 10^{-12}$	$1,948 \times 10^{-13}$
t	300	350	400	450	500
s_1	$8,222 \times 10^{-8}$	$2,093 \times 10^{-9}$	$6,149 \times 10^{-9}$	$2,211 \times 10^{-11}$	$1,075 \times 10^{-9}$
s_2	$6,506 \times 10^{-14}$	$5,881 \times 10^{-14}$	$5,842 \times 10^{-14}$	$5,839 \times 10^{-14}$	$5,839 \times 10^{-14}$

Таблица 3. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (16)

t	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
s_1	2,439	4,302	7,867	19,341	134,627
s_2	$5,999 \times 10^4$	$1,399 \times 10^5$	$2,399 \times 10^5$	$3,599 \times 10^5$	$4,999 \times 10^5$
t	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5
s_1	$1,659 \times 10^5$	$4,155 \times 10^{20}$	$4,557 \times 10^{96}$	$1,240 \times 10^{389}$	$2,952 \times 10^{1026}$
s_2	$6,599 \times 10^5$	$8,399 \times 10^5$	$1,039 \times 10^6$	$1,259 \times 10^6$	$1,499 \times 10^6$

Пример 3. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = 0,5 y_1 \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2} y_1 y_2^2 \left(\sum_{l=0}^3 t^l \sum_{l=0}^3 y_2^{2l} \right), \quad y_2' = -t, \quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \quad (16)$$

на отрезке $[0,5; 2,5]$, $h_c = 0,1$. Начальные значения компонент возмущенного решения из примера 1. Ранее с помощью аналитических оценок и анализа на основе мультипликативных критериев было установлено, что решение системы (16) неустойчиво (см. [7]). Результаты анализа устойчивости по критериям (10), (11) представлены в таблице 3. Монотонный рост значений s_1 и s_2 свидетельствует о неустойчивости нулевого решения системы (16).

4. Заключение. Представлены критерии устойчивости по Ляпунову систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в форме необходимых и достаточных условий. Критерии получены на основе аддитивных преобразований разностных схем численного интегрирования и формулы конечных приращений в условиях существования и единственности решения, непрерывности и непрерывной дифференцируемости правой части системы. Форма критериев влечет возможность программной реализации. Для повышения достоверности анализа устойчивости по полученным критериям необходимо высокоточное вычисление решения и правой части системы, Лагранжевых точек. Для этого используется кусочно интерполяционный метод с итерационным уточнением и алгоритм вычисления минимума модуля функции на основе устойчивой адресной сортировки слиянием. Результаты программного и численного эксперимента свидетельствуют о целесообразности применения предложенного подхода на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буланов С. Г. Критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 225. — С. 28–37.
2. Буланов С. Г. Критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений в мультипликативной и аддитивной форме // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 234. — С. 108–117.

3. Джанунц Г. А., Ромм Я. Е. Варьируемое кусочно интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 10. — С. 1641–1660.
4. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Численное моделирование устойчивости по Ляпунову// Совр. наукоемк. технол. — 2021. — 7. — С. 42–60.
5. Ромм Я. Е., Джанунц Г. А. Кусочная интерполяция функций, производных и интегралов с применением к решению обыкновенных дифференциальных уравнений// Совр. наукоемк. технол. — 2020. — 12, № 2. — С. 291–316.
6. Ромм Я. Е. О границах идентификации корней полиномов на основе устойчивой адресной сортировки// Совр. наукоемк. технол. — 2021. — 12. — С. 84–108.
7. Ромм Я. Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений// Киберн. сист. анал. — 2015. — 51, № 3. — С. 107–124.
8. Akhmet M. U., Arugaslan D., Yilmaz E. Method of Lyapunov functions for differential equations with piecewise constant delay// J. Comp. Appl. Math. — 2011. — 235, № 16. — P. 4554–4560.
9. Ameer O., Massioni P., Scorletti G., Brun X., Smaoui M. Lyapunov stability analysis of switching controllers in presence of sliding modes and parametric uncertainties with application to pneumatic systems// IEEE Trans. Control Syst. Technol. — 2016. — 24, № 6. — P. 1953–1964.
10. Okereke R. N. Lyapunov stability analysis of certain third order nonlinear differential equations// Appl. Math. — 2016. — 7, № 16. — P. 1971–1977.
11. Sene N. Exponential form for Lyapunov function and stability analysis of the fractional differential equations// J. Math. Comp. Sci. — 2018. — 18, № 4. — P. 388–397.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буланов Сергей Георгиевич (Bulanov Sergey Georgievich)
 Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал)
 Ростовского государственного экономического университета, Таганрог
 (Anton Chekhov Taganrog State Institute (branch)
 of the Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russia)
 E-mail: bulanovtspi@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 13–17
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-13-17

УДК 519.175.3

О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ В КАКТУСАХ С ЗАДАНЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

© 2025 г. В. А. ВОБЛЫЙ, Д. А. КОНОНЕНКО

Аннотация. Число остовных деревьев графа является важной характеристикой его надежности как сети передачи данных. Найдено максимальное число остовных деревьев в кактусе с заданным числом вершин, а также в двудольном кактусе с заданным числом вершин. Экстремальными графами, в частности, являются графы дружбы и сети Коха.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, остовное дерево, кактус, двудольный кактус, экстремальный граф, граф дружбы, сеть Коха.

ON THE MAXIMAL NUMBER OF SPANNING TREES IN CACTI WITH GIVEN ORDER

© 2025 V. A. VOBYLI, D. A. KONONENKO

ABSTRACT. The number of spanning trees of a graph is an important characteristic of its reliability as a data transmission network. We found the maximal number of spanning trees in a cactus with a given number of vertices and also in a bipartite cactus with a given number of vertices. In particular, friendship graphs and Koch networks are extremal graphs.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, spanning tree, cactus, bipartite cactus, extremal graph, friendship graph, Koch network.

AMS Subject Classification: 05C30

Число остовных деревьев графа является важной характеристикой его надежности как сети передачи информации (см. [7, 8, 11, 13]). При этом надежность сети увеличивается при максимизации числа остовных деревьев в соответствующем ей графе. При одинаковой надежности связей в сети наиболее уязвимыми являются ребра, удаление которых приводит к максимальному уменьшению числа остовных деревьев графа (см. [10]).

Найдено максимальное число остовных деревьев в кактусе с заданным числом вершин, а также в двудольном кактусе с заданным числом вершин. Экстремальными графами, в частности, являются графы дружбы и сеть Коха.

Определение 1. Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 2. Блок — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 3 (см. [6, с. 93]). Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле.

У кактуса каждый блок является ребром или циклом.

Определение 4 (см. [5, с. 55]). Цикломатическим числом (циклическим рангом) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

В дальнейшем под числом циклов графа понимается его цикломатическое число.

Определение 5 (см. [12]). Граф дружбы — это граф, состоящий из треугольников с единственной общей вершиной.

Определение 6 (см. [9]). Обобщенный граф дружбы $f_{p,q}$ — это граф, состоящий из p q -вершинных циклов с единственной общей вершиной.

Лемма 1. Число остовных деревьев в связном графе равно произведению чисел остовных деревьев его блоков.

Лемма приводится без доказательства в книге Ф. Харари [5, с. 187]; доказательство имеется в [1].

Теорема 1 (см. [2]). Для числа остовных деревьев $t(Ca_n(k))$ в помеченном кактусе с n вершинами и k циклами при $n \geq 5$ и $k \geq 2$ верно неравенство

$$t(Ca_n(k)) \leq \left[\frac{n+k-1}{k} \right]^{k-p} \left(\left[\frac{n+k-1}{k} \right] + 1 \right)^p, \quad (1)$$

где $[x]$ — целая часть числа x , а p — остаток от деления $n+k-1$ на k .

Отметим, что знак равенства в (1) достигается при $k=1$ для графа C_n . В силу разрывности функции $y = [x]$ (целая часть числа) нахождение ее экстремумов затруднительно.

Теорема 2. Пусть F_n — граф дружбы с n вершинами. Для числа остовных деревьев $t(F_n)$ в помеченном графе F_n при $n \geq 5$ верна формула

$$t(F_n) = 3^{(n-1)/2}. \quad (2)$$

Доказательство. Граф дружбы является кактусом с одной точкой сочленения, у которого все блоки являются треугольниками. Пусть граф F_n имеет k блоков-циклов.

Каждый цикл в графе дружбы состоит из трех вершин, но одна вершина у каждого цикла общая. Поэтому число вершин в графе дружбы равно $n = 2k + 1$ (граф дружбы всегда имеет нечетное число вершин). Отсюда имеем $k = (n-1)/2$.

Так как n -вершинный граф цикла C_n имеет n остовных деревьев, то перемножая числа остовных деревьев в каждом блоке, в силу леммы 1 получим утверждение теоремы. $\square$

Лемма 2. Для числа ребер m в кактусе с n вершинами верно неравенство

$$m \leq \frac{3}{2}(n-1). \quad (3)$$

Доказательство. Применим индукцию по числу блоков кактуса. Пусть кактус имеет $k \geq 1$ блоков. Напомним, что у кактуса каждый блок является ребром или циклом.

Рассмотрим сначала кактус, состоящий из одного блока ($k=1$). В первом случае кактус — это граф K_2 (ребро), $m=1$, $n=2$ и неравенство (3) верно, так как $1 \leq 3/2$.

Во втором случае кактус является графом цикла C_q с $q \geq 3$. Так как у цикла число ребер равно числу вершин, то $m=n=q \geq 3$ и неравенство (3) равносильно неравенству $n \geq 3$.

Теперь допустим, что лемма верна для графа, состоящего из $k > 1$ блоков, и докажем, что она верна для графа, состоящего из $k+1$ блоков. Обозначим через n_k и m_k соответственно число вершин и число ребер в кактусе с k блоками.

Известно, что в любом связном графе, состоящем из нескольких блоков, существует концевой блок, который имеет только одну точку сочленения (см. [4]). Точка сочленения является общей вершиной двух блоков, поэтому имеем $n_{k+1} = n_k + n_1 - 1$. Так как блоки в связном графе не имеют общих ребер, то $m_{k+1} = m_k + m_1$. Ранее доказано, что лемма верна для кактуса, состоящего из

одного блока, т.е. $m_1 \leq 3(n_1 - 1)/2$. По предположению индукции $m_k \leq 3(n_k - 1)/2$. Следовательно, получим

$$m_{k+1} = m_k + m_1 \leq \frac{3}{2}(n_k - 1) + \frac{3}{2}(n_1 - 1) = \frac{3}{2}(n_k + n_1 - 2) = \frac{3}{2}(n_{k+1} - 1). \quad \square$$

Оценка для числа ребер n -вершинного кактуса, полученная в лемме является точной, так как она достигается для графа дружбы.

Теорема 3. *Максимальное число остовных деревьев $T(Ca_n)$ в помеченном кактусе Ca_n с n вершинами равно*

$$T(Ca_n) = 3^{(n-1)/2}.$$

Экстремальным графом является граф дружбы.

Доказательство. В силу леммы 2 максимальное число ребер в кактусе с n вершинами равно $m_{\max} = 3(n - 1)/2$. Так как для любого связного графа с n вершинами, m ребрами и k циклами верно равенство $k = m - n + 1$, то для кактуса Ca_n максимальное число циклов $k_{\max}$ равно

$$k_{\max} = m_{\max} - n + 1 = \frac{3}{2}(n - 1) - n + 1 = \frac{1}{2}(n - 1).$$

В [1] для числа остовных деревьев $t(Ca_n)$ в кактусе с n вершинами и k циклами была получена оценка

$$t(Ca_n) \leq a_k(n) = \left(1 + \frac{n-1}{k}\right)^k. \quad (4)$$

Докажем, что последовательность $a_k(n)$ возрастает при фиксированном n . Будем следовать доказательству возрастания числовой последовательности для второго замечательного предела (числа e ; см. [3, с. 84-85]).

Используем формулу бинома Ньютона

$$\begin{aligned} (1+x)^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i = 1 + \sum_{i=1}^k \frac{k \dots (k-i+1)}{i!} x^i, \\ a_k(n) &= \left(1 + \frac{n-1}{k}\right)^k = 1 + \sum_{i=1}^k \frac{k \dots (k-i+1)}{i! k^i} (n-1)^i = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{i-1}{k}\right) \frac{(n-1)^i}{i!}. \end{aligned}$$

При переходе от k к $k+1$ число слагаемых в сумме увеличивается на единицу, все слагаемые положительны и каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличивается, так как становится больше выражение, стоящее в каждой круглой скобке

$$1 - \frac{j}{k} < 1 - \frac{j}{k+1} \quad \text{при } j = 1, \dots, k-1, k = 2, \dots$$

Это означает строгое возрастание последовательности $a_k(n)$ при фиксированном n .

Следовательно, максимальное число остовных деревьев в кактусе с n вершинами получается при максимально возможном числе циклов в таком кактусе, равном $k_{\max} = (n-1)/2$. После подстановки в выражение для $a_k(n)$ значения $k_{\max}$ получим утверждение теоремы.

Оценка для числа остовных деревьев кактуса является точной, так как она достигается для графа дружбы. Однако граф дружбы не единственный экстремальный граф. Например, кактус без мостов, состоящий из цепи треугольников, также имеет максимальное число остовных деревьев. Практическим примером экстремального кактуса с наибольшим числом остовных деревьев является сеть Коха (см. [14]). $\square$

Рассмотрим теперь задачу нахождения максимального числа остовных деревьев в двудольном кактусе. Известно, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы четные (см. [5, с. 32]). Следовательно, у двудольного кактуса все циклы четные.

Лемма 3. Для числа ребер m в двудольном кактусе с n вершинами верно неравенство

$$m \leq \frac{4}{3}(n-1). \quad (5)$$

Доказательство. Применим индукцию по числу блоков кактуса. Пусть кактус имеет $k \geq 1$ блоков.

Рассмотрим сначала кактус, состоящий из одного блока ($k = 1$). В первом случае кактус — это граф K_2 (ребро), $m = 1, n = 2$ и неравенство (3) верно, так как $1 \leq 4/3$.

Во втором случае кактус является графом цикла C_q с $q \geq 4$. Так как у цикла число ребер равно числу вершин, то $m = n = q \geq 4$ и неравенство (3) равносильно неравенству $n \geq 4$.

Теперь допустим, что лемма верна для графа, состоящего из $k > 1$ блоков, и докажем, что она верна для графа, состоящего из $k + 1$ блоков. Обозначим через n_k и m_k соответственно число вершин и число ребер в кактусе с k блоками.

Известно, что в любом связном графе, состоящем из нескольких блоков, существует концевой блок, который имеет только одну точку сочленения (см. [4]). Точка сочленения является общей вершиной двух блоков, поэтому имеем $n_{k+1} = n_k + n_1 - 1$. Так как блоки в связном графе не имеют общих ребер, то $m_{k+1} = m_k + m_1$. Ранее доказано, что лемма верна для кактуса, состоящего из одного блока, т.е. $m_1 \leq 4(n_1 - 1)/3$. По предположению индукции $m_k \leq 4(n_k - 1)/3$. Следовательно, получим

$$m_{k+1} = m_k + m_1 \leq \frac{4}{3}(n_k - 1) + \frac{4}{3}(n_1 - 1) = \frac{4}{3}(n_k + n_1 - 2) = \frac{4}{3}(n_{k+1} - 1). \quad \square$$

Оценка для числа ребер n -вершинного двудольного кактуса, полученная в лемме является точной, так как она достигается для графа-четыреугольника C_4 .

Теорема 4. Максимальное число остовных деревьев $T(BCa_n)$ в помеченном двудольном кактусе BCa_n с n вершинами равно

$$T(BCa_n) = 4^{(n-1)/3}.$$

Экстремальным графом, в частности, является обобщенный граф дружбы $f_{p,4}$.

Доказательство. В силу леммы 3 максимальное число ребер в двудольном кактусе с n вершинами равно $m_{\max} = 4(n-1)/3$.

Так как для любого связного графа с n вершинами, m ребрами и k циклами верно равенство $k = m - n + 1$, то для кактуса BCa_n максимальное число циклов $k_{\max}$ в двудольном кактусе равно

$$k_{\max} = m_{\max} - n + 1 = \frac{4}{3}(n-1) - n + 1 = \frac{1}{3}(n-1).$$

Обозначим через x_i число ребер в i -м цикле кактуса BCa_n , $x_i = 2\bar{x}_i \geq 4$, $i = 1, \dots, k$, $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq m = n + k - 1$. Тогда в силу леммы 1 получим $t(BCa_n) = x_1 x_2 \dots x_k$.

Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} \leq \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k), \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Имеем

$$t(BCa_n) = x_1 x_2 \dots x_k \leq \left(\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \right)^k \leq \left(\frac{1}{k}(n + k - 1) \right)^k = \left(1 + \frac{n-1}{k} \right)^k = a_k(n).$$

В теореме 3 доказано, что последовательность $a_k(n)$ возрастает при фиксированном n . Таким образом, максимальное число остовных деревьев в двудольном кактусе с n вершинами получается при максимально возможном числе циклов в таком кактусе, которое меньше или равно $(n-1)/3$. После подстановки в выражение для $a_k(n)$ значения $k_{\max}$ получим утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* О числе остовных деревьев в помеченном кактусе// Прикл. дискр. мат. Приложение. — 2017. — 10. — С. 139–140.
2. *Воблый В. А., Кононенко Д. А.* Оценка надежности кактусных информационных сетей с заданным числом циклов// в кн.: Мат. XXI Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий, 2019. — С. 32–34.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989.
4. *Тамт Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1988.
5. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
6. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
7. *Atajan T., Inaba Y.* Network reliability analysis by counting the number of spanning trees// Proc. IEEE Int. Symp. on Communications and Information Technology — 2004. — 1. — С. 601–604.
8. *Fard N., Lee T.* Spanning tree approach in all-terminal network reliability expansion// Comput. Commun. — 2004. — 24. — С. 601–604.
9. *Fernau H., Ryan J.F., Sugeng K. A.* A sum labeling for generalized friendship graph// Discr. Math. — 2008. — 308. — С. 734–740.
10. *Fu-Shang P. Tsen, Ting-Yi Sung, Men-Yang Lin, Myrvold W.* Finding the most vital edges wirh respect to the number of spanning trees// IEEE Trans. Reliability. — 2001. — 24. — С. 1348–1353.
11. *Lam C. Y., Ip W. H.* An improved spanning tree approach for the reliability analysis of supply chain collaborative network// Enterp. Inf. Syst. — 2012. — 6, № 4. — С. 405–418.
12. *Mertzios G. B., Unger W.* The friendship problem on graphs// J. Multiple-Valued Logic Soft Comput. — 2014. — 27, № 2-3. — С. 1–11.
13. *Zarghami S. A., Gunawan I., Schultmann F.* Exact reliability evaluation of infrastructure networks using graph theory// Qual. Reliab. Eng. Int. — 2019. — 36, № 2. — С. 498–510.
14. *Zhang Zhongzhi, Shuyang Gao, Lichao Chen, Shuigeng Zhou, Hongjuan Zhang, Jihong Guan* Mapping Koch curves into scale-free small-world networks// J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — 43. — 395101.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information, Moscow, Russia)
E-mail: vitvobl@yandex.ru

Кононенко Дмитрий Андреевич (Kononenko Dmitrii Andreevich)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information, Moscow, Russia)
E-mail: dimonkononenko@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 18–29
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-18-29

УДК 517.977.5

ПОЗИЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ЕГО РАСШИРЕНИЯ

© 2025 г. В. А. ДЫХТА

Аннотация. Необходимое условие глобальной оптимальности — позиционный принцип минимума (F-ПМ), установленный для задач со свободным правым концом траекторий, обобщается на гладкую задачу с терминальными ограничениями типа равенства. Для этого применяется абстрактный метод опорных мажорант, который конкретизируется для задачи управления на уровне модифицированной функции Лагранжа с квадратичным штрафом. Но соответствующая безусловная экстремальная задача не требует решения: если исследуемый процесс оптимален в исходной задаче управления, то спуск с него в безусловной задаче на допустимую траекторию с помощью F-ПМ невозможен (при любом выборе множителя Лагранжа и штрафного параметра). Нарушение этого необходимого условия сопровождается предъявлением улучшающего процесса (который может оказаться скользящим режимом). Конструктивную основу F-ПМ составляет метод спуска с управлениями в форме обратной связи. Применение этого метода естественно и в известных методах Кротова и Понтрягина, в которых минимизируются соответственно модифицированные лагранжианы Кротова и бипозиционные лагранжианы. В результате такого расширения области применения метода позиционного спуска получены позиционные версии методов Кротова и Понтрягина, которые значительно эффективнее традиционных.

Ключевые слова: необходимые и достаточные условия, позиционные управления, экстремали, функции Кротова.

FEEDBACK MINIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH TERMINAL CONDITIONS AND ITS EXTENSIONS

© 2025 V. A. DYKHTA

ABSTRACT. The nonlocal necessary optimality condition, the so-called feedback minimum principle (F-PM) obtained in previous publications of the author for free endpoint problems, is generalized for problems with terminal constraints. The proof of the new necessary condition is based on abstract methods of support majorants and modified Lagrange functions (MLF) with a quadratic penalty. But the corresponding unconstrained problem does not necessarily have to be solved. If the reference process is optimal, then there is no descent for the MLF from it using F-PM. If this necessary optimality is violated, then we obtain an improved admissible process. The constructive basis of the feedback minimum principle is the descent method with feedback strategies. However, it is natural to use this descent method for minimizing the modified Lagrangian in the well-known Krotov and Pontryagin optimality conditions. As a result of such an extension of the F-PM descent method, we obtain feedback versions of the Krotov and Pontryagin methods, which are significantly more efficient than the traditional methods.

Keywords and phrases: necessary and sufficient optimality conditions, feedback controls, extremals, Krotov functions.

AMS Subject Classification: 49L99, 49K15

1. Введение. Статья посвящена методам решения задач оптимального управления с использованием позиционных управлений. Хотя эта цель сформулирована довольно широко, мы не будем касаться методов построения оптимального синтеза и современной теории Гамильтона—Якоби (см. [12, 17–19]). Рассматриваемые в работе задачи управления с терминальными ограничениями ставятся в классе программных управлений, но преследуемые теоретические цели — необходимые и достаточные условия оптимальности — достигаются единообразным методом позиционного спуска относительно того или иного модифицированного лагранжиана задачи.

Исходным толчком к расширенному применению позиционных управлений послужила серия работ по так называемому позиционному принципу минимума (см. [2–7]) для задач со свободным правым концом траекторий. Это необходимое условие глобальной оптимальности (точнее, множество родственных условий; см. [5]) существенно усиливает принцип максимума Понтрягина для гладких задач и типа Кларка для негладких (см. [6]), даже в элементарном варианте с конструкциями классического принципа максимума (далее этот вариант называется универсальным позиционным принципом минимума). Во всех этих условиях ключевую роль играет позиционное управление спуска. Сложности распространения позиционного принципа на задачи с терминальными ограничениями описаны в п. 2, а способ их преодоления — в п. 3 данной статьи.

Чтобы расширить класс задач с терминальными ограничениями, допускающих позиционное варьирование управления, возникла идея апробировать его на известных методах Кротова и Понтрягина, которые в традиционной форме охватывают задачи с ограничениями. Идея оказалась плодотворной: позиционные версии этих методов оказались значительно конструктивнее и эффективнее исходных.

Например, существенно расширился класс задач, для которых существует позиционная функция Кротова простой структуры — линейной или линейно-квадратичной, — причем без обязательного требования нормальности исследуемой экстремали. Между тем хорошо известны результаты Кларка и Винтера (см. [11, 26, 27]) о существовании локальной функции Кротова (и проверочной функции Каратеодори; см. [20, 21]) только для нормальных экстремалей; однако для глобальной оптимальности, которой мы придерживаемся, локальные функции не работают (см. по этому вопросу обзоры в [20, 23]). Столь же простые бипозиционные функции вида $S(x, \psi) = \langle \psi, x \rangle$ (см. [8]) оказались эффективными в позиционном принципе Понтрягина. Все эти факты подтверждены нетривиальными примерами.

В данной статье будет рассмотрен только позиционный метод Кротова с соответствующими примерами (см. пп. 6, 7). На одном из них будет иллюстрирован и позиционный метод Понтрягина (см. п. 8).

2. О позиционном принципе минимума и его распространении на задачи с терминальными ограничениями. В пп. 2–5 данной работы рассматривается следующая задача (P):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$g_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

$$J[\sigma] = g_0(x(t_1)) \rightarrow \inf.$$

Здесь через σ обозначены пары функций (x, u) с управлениями из класса $\mathcal{U} := L_\infty(T, U)$, U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна, гладкая по x , и удовлетворяет условию подлинейного роста, все функции $g_i(x)$ тоже гладкие.

Через Σ обозначим множество всех пар σ , удовлетворяющих системе (1), (2), а через $D \subset \Sigma$ — множество допустимых пар (процессов) задачи (P).

В дополнение к сказанному во введении о позиционном принципе минимума (F-ПМ) уточним, что он доказан для различных вариантов задачи (P_0) без терминальных ограничений (3) с использованием опорных мажорант функционала — слабо убывающих (u -стабильных; см. [12]) функций, являющихся решениями неравенства Гамильтона—Якоби

$$\varphi_t(t, x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \leq 0, \quad \varphi(t_1, x) = g_0(x) - g_0(\bar{x}(t_1)). \quad (4)$$

Для гладких задач (которые мы и будем рассматривать) решения неравенства (4) считаются липшицевыми, гладкими по x функциями, образующими пространство $\mathcal{F}$.

Если выбрано некоторое решение $\varphi(t, x) \in \mathcal{F}$ неравенства (4), то находим соответствующее экстремальное отображение

$$U_\varphi(t, x) = \underset{u \in U}{\operatorname{Argmin}} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \quad (5)$$

и множество $\mathcal{V}_\varphi$ его селекторов $v(t, x)$ — позиционных управлений потенциального спуска (в общем случае разрывных). Решением системы (1) с таким управлением (т.е. при $u = v(t, x)$) считается пучок движений Красовского—Субботина $\mathcal{X}(v)$ (см. [12]), дополненный решениями Каратеодори, если таковые существуют.

В этих обозначениях соответствующий F-ПМ (зависящий от φ) можно сформулировать в виде следующего условия:

Условие $\mathbf{N}(\varphi)$. Если процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ оптимален в задаче (P_0) , то траектория $\bar{x}$ оптимальна в следующей φ -присоединенной задаче:

$$g_0(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\varphi.$$

Среди всех возможных мажорант наиболее привлекательной для массового применения и универсальной является квазилинейная мажоранта

$$\varphi^\psi(t, x) = g_0(x) - g_0(\bar{x}(t)) + \left(\psi(t) - \nabla g_0(\bar{x}(t)) \right) \cdot (x - \bar{x}(t)) + r(t). \quad (6)$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — котраектория процесса $\bar{\sigma}$, т.е. решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(t, \bar{x}(t), \psi, \bar{u}(t)), \quad \psi(t_1) = g_{0x}(\bar{x}(t_1)),$$

где $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$, а «поправка» $r(t)$ обеспечивает слабое убывание функции (6).

Данная мажоранта формируется в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина, но, как указывалось во введении, соответствующий ей F-ПМ — условие $\mathbf{N}(\psi) := \mathbf{N}(\varphi^\psi)$ — существенно усиливает принцип Понтрягина и его обобщения (см. [6, 11, 21]).

Распространение F-ПМ на задачу (P) оказалось нетривиальным. Схема такого распространения представлена в [9] с использованием метода модифицированной функции Лагранжа с квадратичным штрафом. Однако её практическое применение для аналитического исследования модельных примеров весьма проблематично из-за необходимости совершать сингулярные предельные переходы, обусловленные разрывностью позиционных управлений спуска. Поэтому в данной статье предлагается использовать совершенно новый, альтернативный подход, свободный от указанных трудностей.

3. Опорные мажоранты экстремальных задач и улучшение допустимой точки.

В некотором пространстве $\mathcal{Z}$ рассмотрим задачу (A) :

$$f(z) \rightarrow \min, \quad z \in D \subset \mathcal{Z},$$

где f — конечная функция на $\mathcal{Z}$.

Функцию $\Phi(z)$, определенную на $\mathcal{Z}$, назовем *опорной сверху к f в точке $\bar{z} \in \mathcal{Z}$* , или *опорной мажорантой f в точке $\bar{z}$* , если $\Phi(\bar{z}) = f(\bar{z})$ и

$$f(z) - f(\bar{z}) \leq \Phi(z) - \Phi(\bar{z}), \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Под задачей *улучшения точки $\bar{z}$* в задаче (A) понимается нахождение точки $z_* \in D$ со свойством $f(z_*) < f(\bar{z})$. (Понятно, что при этом $\bar{z}$ не должна быть решением (A) .)

Предложение 1. Любая точка $z_* \in D$, удовлетворяющая неравенству $\Phi(z_*) < \Phi(\bar{z})$, является решением задачи улучшения точки $\bar{z}$ в задаче (A) .

Введем в рассмотрение следующую задачу (MA) :

$$\Phi(z) \rightarrow \min, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Тогда предложение 1 рекомендует заменить задачу улучшения $\bar{z}$ в задаче (А) (т.е. спуска из $\bar{z}$ по f) задачей спуска из $\bar{z}$ по мажоранте Φ без явного учета ограничения $z \in D$. Конечно, в каждой конкретной реализации данного подхода разрешимость новой задачи спуска на допустимом множестве D требует обоснования. Но если он оказался возможным, то улучшаемая точка не оптимальна в исходной задаче (она «бракуется»). Важно подчеркнуть, что при этом не требуется решать задачу (МА).

В гладких конечномерных задачах модифицированные функции Лагранжа (МФЛ) и штрафные функции порождают опорные мажоранты, для которых полное обоснование требует привлечения общей теории локального минимума (см. [15] для МФЛ) или штрафов со срезками целевой функции (см. [1]), т.е. первое слагаемое берется в виде $\bar{f}_+(z) := \max\{f(\bar{z}), f(z)\}$.

4. Позиционный принцип минимума для задачи (Р). Для доказательства F-ПМ будет использоваться МФЛ

$$M_{\lambda\gamma}(x) = g_0(x) + \lambda'g(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x)|^2, \quad (7)$$

где λ — множитель Лагранжа, $g = (g_1, \dots, g_k)$, $\gamma > 0$ — параметр штрафа и $|\cdot|$ — евклидова норма.

Свойства функции (7) и соответствующего итерационного метода решения задачи на условный экстремум $g_0(x) \rightarrow \min$, $g(x) = 0$ описаны в замечательной статье Поляка [16]. В частности, там доказано, что при независимых градиентах ограничений в точке $\bar{x}$ стандартной квадратичной достаточности для локального минимума, в безусловной задаче $M_{\bar{\lambda}\gamma}(x) \rightarrow \min$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}$ остается точкой строгого локального минимума (при $\bar{\lambda}$ — из условия критичности $\bar{x}$, и достаточно больших γ). Это свойство важно для построения численных методов, но нас интересует опорность функции $M_{\lambda\gamma}$.

Для обоснования этого свойства, следуя [16], перепишем её в следующем виде:

$$M_{\lambda\gamma}(x) = f(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x) + r|^2 + \nu,$$

где $r = \lambda/\gamma$, $\nu = -\lambda^2/2\gamma = -\gamma/2 \cdot r^2$. Отсюда получаем равенство

$$M_{\lambda\gamma}(x) - M_{\lambda\gamma}(\bar{x}) = f(x) - f(\bar{x}) + \frac{\gamma}{2}(|g(x) + r|^2 - |r|^2).$$

Если при некоторых x_* , λ , γ левая часть этого равенства оказалась < 0 , то и правая часть будет < 0 , что дает неравенство

$$f(x_*) - f(\bar{x}) < \frac{\gamma}{2}(|r| + |g(x_* + r)|)(|r| - |g(x_* + r)|).$$

Но если дополнительно оказалось, что x_* допустима, то она решает задачу улучшения. Отсюда и из приведенных соотношений следует опорность $M_{\lambda\gamma}$ в точке $\bar{x}$.

Теперь мы можем применить схему п. 3 к задаче (Р), взяв в качестве Φ функцию $M_{\lambda\gamma}$, и обратившись к семейству задач $(P_{\lambda\gamma})$ без терминальных ограничений:

$$M_{\lambda\gamma}(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \sigma \in \Sigma. \quad (8)$$

Для фиксированной задачи $(P_{\lambda\gamma})$ можно применить F-ПМ с квазилинейной мажорантой, т.е. условие $\mathbf{N}(\psi)$ из п. 2 (при этом в роли g_0 выступает функция $M_{\lambda\gamma}$). Для этого вводятся: котраектория $\eta(t)$ процесса $\bar{\sigma}$ задачи (8), её возмущение

$$p(t, x) := \nabla_x \varphi^\eta(t, x) = \eta(t) + \nabla M_{\lambda\gamma}(x) - \nabla M_{\lambda\gamma}(\bar{x}(t))$$

(см. формулы (5), (6)); η -экстремальное отображение

$$U_\eta(t, x) = \operatorname{Argmin}_{u \in U} p(t, x) \cdot f(t, x, u), \quad (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n;$$

множество его селекторов $\mathcal{V}_\eta$ и движений Красовского—Субботина $\mathcal{X}(v)$, $v \in \mathcal{V}_\eta$. (Зависимость этих объектов от $(\lambda\gamma)$ опущена.)

Обозначим через E_η объединение всех пучков движений по $v \in \mathcal{V}_\eta$, а через $E_{\lambda\gamma}^T$ — множество всех движений, удовлетворяющих терминальным ограничениям (3) (это множество может содержать траектории овыпукленной задачи (coP)).

Теорема 1. Если $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ — оптимальный процесс в задаче (P) , то при любом выборе $\lambda \in \mathbb{R}^k$ и $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$g_0(\bar{x}(t_1)) \leq g_0(x(t_1)) \quad \forall x \in E_{\lambda\gamma}^T.$$

Смысл теоремы ясен: в её предположениях спуск с $\bar{\sigma}$ на допустимую траекторию овыпукленной задачи (coP) с помощью позиционного принципа минимума невозможен ($\bar{\sigma}$ «не бракуется»). В контрпозитивном случае, когда указанный спуск окажется возможным, процесс $\bar{\sigma}$ не оптимален, а полученная траектория спуска $x^*(\cdot)$ задает допустимый процесс в задаче (coP) (на его тестировании в общем случае не будем останавливаться).

Заметим, что теорема не требует от $\bar{\sigma}$ быть решением задачи (8).

Относительно стратегии выбора параметров λ, γ : λ может наследоваться из принципа максимума, а γ — следовать рекомендациям статьи [16].

5. Примеры.

Пример 1. $\dot{x} = u, x(0) = 0, x(1) = 0, |u| \leq 1$,

$$J[\sigma] = \int_0^1 [x^2 + (u^2 - 1)^2] dt \rightarrow \inf.$$

Это знаменитый пример Больца с ограниченным управлением, в котором $\bar{\sigma} = 0$ — допустимая пара. Она не оптимальна в силу принципа максимума Понтрягина, но этот критерий не даёт улучшенной пары.

Введем штрафной лагранжиан $J[\sigma] + \lambda x(1) + \frac{\gamma}{2} x^2(1)$ и применим к нему и $\bar{\sigma}$ теорему 1. Легко убедиться, что $\eta \equiv \lambda$, а экстремальное отображение $U_\eta(x)$ находится из следующей задачи:

$$(\lambda + 2\gamma xu)u + (u^2 - 1)^2 \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1.$$

Мы достигнем (в пределе) минимума каждого слагаемого данной функции, если положим $\lambda = 0$ и выберем селектор

$$v(x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ +1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Его ломаные Эйлера равномерно сходятся к движению $x^* \equiv 0$ — траектории скользящего режима с обобщенным управлением $\frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. Очевидно, что это глобально оптимальное решение расширенной версии примера Больца.

Пример 2. $\dot{x}_1 = (t-1)u, \dot{x}_2 = x_1(u-1), x(0) = (0,0), x_1(2) = 0, |u| \leq 1, J = x_2(2) \rightarrow \min$.
Выпишем условия ПМ:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\psi_2(u-1), \quad \psi_1(2) = \lambda, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_2(2) = \lambda_0, \\ (\lambda_0, \lambda) &\neq 0, \quad \lambda_0 \in \{0, 1\}, \quad (\psi_1(t-1) + \psi_2 x_1)u \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1, \end{aligned}$$

при терминальной функции Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 x_2 + \lambda x_1.$$

Будем исследовать процесс $\bar{\sigma}$ с $\bar{u} \equiv 1, \bar{x}_1(t) = t^2/2 - t, \bar{x}_2 \equiv 0, J[\bar{\sigma}] = 0$, для которого $\lambda_0 = 1$, а условие минимума

$$\left(\lambda(t-1) + \frac{t^2}{2} - t\right)u \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1,$$

выполняется для $\bar{u}$ только при $\lambda = 0$, причем строго на интервале $(0, 2)$.

Применим к $\bar{\sigma}$ F-ПМ с целевым лагранжианом

$$M_\gamma(x) = x_2(2) + \frac{\gamma}{2} x_1^2(2)$$

при множителе $\lambda = 0$ в соответствии с теорией. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\eta_2(u-1), \quad \dot{\eta}_2 = 0, \quad \eta_1(2) = \gamma \bar{x}_1(2) = 0, \quad \eta_2 \equiv 1, \\ p(t, x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma x_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ U_\eta: \quad &(\gamma x_1(t-1) + x_1)u \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

В окрестности начальной точки многозначности $x_1(0) = 0$ можем выбрать $v(x_1) = -1|_{O_+(0)}$ (отличное от $\bar{u}$); тогда вдоль движения $x_1(t; v) = -t^2/2 + t$ функция переключения (см. (9))

$$g(t, x_1(t; v)) = t \left(1 - \frac{t}{2}\right) (1 + \gamma t) > 0 \quad \forall t \in (0, 1).$$

Поэтому управление $v = -1$ не имеет переключений, и можно положить

$$u^0 \equiv -1, \quad x_1^0(t) = t - \frac{t^2}{2}, \quad x_2^0 = \frac{t^3}{3} - t^2.$$

Для этого допустимого процесса σ^0 $J[\sigma^0] = -4/3 < 0 = J[\bar{\sigma}]$ и, следовательно, процесс $\bar{\sigma}$ не оптимален.

Примечательно, что процесс спуска σ^0 оказался строгой экстремалью Понтрягина на интервале $(0, 2)$, но известные достаточные условия (позиционные версии Кротова и Понтрягина) не позволили установить его оптимальность. Повторное применение к σ^0 F-ПМ не привело к его улучшению — вновь выдало σ^0 . Интересен конечный вердикт о минимали примера.

Опыт применения теоремы 1 к тестовым примерам с особенностями внушает сдержанный оптимизм. Определенные перспективы повышения эффективности данного F-ПМ связаны с алгоритмизацией выбора λ, γ на его итерации.

6. О традиционном методе Кротова и его обобщениях. Из методических соображений удобнее рассмотреть эту тему для задачи (P_C) с общим терминальным ограничением $x(t_1) \in C$, где C — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Остальные предположения на задачу (P) остаются в силе.

Обозначим через Φ_+ множество всех функций $\varphi : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ класса $\mathcal{F}$, удовлетворяющих неравенству

$$R[\varphi](t, x, u) := \varphi_t(t, x) + \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \geq 0 \quad \forall (t, x, u) \in T \times \mathbb{R}^n \times U, \quad (10)$$

или эквивалентному неравенству Гамильтона—Якоби

$$P[\varphi](t, x) := \varphi_t(t, x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Обратим внимание, что функции из Φ_+ сильно возрастающие, т.е. их суперпозиция $\varphi(t, x(t))$ не убывает на отрезке T вдоль любой траектории системы (1), (2). Из этого свойства элементарно выводится оценка снизу для функционала:

$$J[\sigma] \geq \eta(\varphi) + \varphi(t_0, x_0) \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad (12)$$

где

$$\eta(\varphi) = \inf \{g_0(x) - \varphi(t_1, x) \mid x \in C, \varphi(t_1, x) \geq \varphi(t_0, x_0)\}. \quad (13)$$

Поэтому, если Ω — любое множество функций из Φ_+ , то из (12) следует оценка

$$\inf J(P_C) \geq \sup_{\varphi \in \Omega} [\eta(\varphi) + \varphi(t_0, x_0)] =: V(\Omega). \quad (14)$$

Результатом анализа этих оценок является следующая теорема.

Теорема 2.

(а) Для оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ в задаче (P_C) достаточно выполнение равенства

$$J[\bar{\sigma}] = V(\Omega).$$

- (b) Пусть множество $f(t, x, U)$ выпукло на $T \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует такое множество гладких функций $\Omega \subset \Phi_+$, что

$$\min J(P_C) = V(\Omega).$$

Теорема 2 ослабляет критерий из работы [10] (неравенство Гамильтона—Якоби (11) рассматривается здесь без краевого условия). Её доказательство использует результаты Винтера [24] и Кларка с Ноур [22] о гладкой и негладкой двойственности в нелинейных задачах оптимального управления.

В частном случае, когда условие (а) теоремы 2 выполняется с одноэлементным множеством $V(\{\bar{\varphi}\})$, то $\bar{\varphi}$ называют *функцией Кротова* (кратко, *K-функцией*) процесса $\bar{\sigma}$. (Расхожее мнение о K-функции задачи в общем случае неверно.) Именно этот случай является традиционным для достаточных условий Кротова (см. [13, 14, 23]).

Однако в этом варианте инфимум в задаче (13) берется по более широкому множеству C (без неравенства монотонности для φ). Поэтому достаточные условия становятся более жесткими. Если при этом функцию Кротова исследуемого процесса $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ считать *нормализованной* (т.е. в соответствующей задаче (13) инфимум равен нулю и достигается в точке $\bar{x}(t_1)$, а $R[\varphi](t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ п. в. на T ; см. [23]), то она совпадает с проверочной функцией Каратеодори (см. [20, 21, 25–27]). В то же время в изложенной модифицированной версии Кротова запас разрешающих функций существенно расширяется.

Тем не менее естествен вопрос: при каких условиях функция Кротова (или Каратеодори) существует? Следующая теорема 8.1 из обзора [20] «является кульминацией многолетних усилий по обоснованию метода (Каратеодори)».

Теорема 3. Для оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ в нормальной задаче (P_C) необходимо и достаточно существование липшицевой функции Каратеодори процесса $\bar{\sigma}$.

Поясним, во-первых, что здесь речь идет о глобальной оптимальности (как и всюду в данной статье); между тем было очень много работ по сильному локальному минимуму. Во-вторых, нормальность задачи (P_C) означает, что $\bar{\sigma}$ и все оптимальные процессы задачи — нормальные экстремали принципа максимума (ПМ). Как известно, последнее свойство означает, что в условии трансверсальности для экстремали множитель Лагранжа (λ_0) по функционалу отличен от нуля, а в противном случае $\psi(t) \equiv 0$. Это вытекает из условия нетривиальности в (ПМ) — $\lambda_0 + \|\psi\|_{C(T)} > 0$, $\lambda_0 \in \{0; 1\}$. Наконец, в-третьих, в теореме K-функция предполагается липшицевой (без эпитета «локально») в силу предположений в постановке задачи — все траектории системы (1), (2) равномерно ограничены. Для липшицевых φ неравенства (10), (11) должны выполняться почти всюду по $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Очевидно, что в задачах со свободным правым концом (т.е. при $C = \mathbb{R}^n$) условия нормальности выполнены.

Отметим, что, как мы убедимся далее, для предлагаемой позиционной версии метода Кротова теорема 3 неверна в части необходимости и является слишком грубой в части достаточности.

7. Позиционный метод Кротова. Изложение проведем для задачи Больца (P_B) с функционалом

$$J[\sigma] = l(x(t_1)) + \int_T F(t, x(t), u(t)) dt$$

и ограничением $x(t_1) \in C$, где функции l, F непрерывные и гладкие по x ; другие ранее введенные предположения оставляем в силе.

Поскольку функционал J содержит интеграл, то условимся по-прежнему использовать запись $\varphi \in \Phi_+$, означающую, что функция $\theta(t, x, y) = \varphi(t, x) + y$ сильно возрастает относительно расширенной управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad \dot{y} = F(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = 0, \quad u \in U.$$

Выберем неформальную схему изложения метода по шагам.

1. Фиксируем некоторую $\varphi \in \mathcal{F}$ и образуем *кротовский лагранжиан*

$$\begin{aligned} K^\varphi[x(\cdot), u(\cdot)] &= J[x(\cdot), u(\cdot)] - \varphi(t, x(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_T \dot{\varphi}(t, x(t), u(t)) dt = \\ &= l(x(t_1)) - \varphi(t_1, x(t_1)) + \int_T [\dot{\varphi}(t, x(t), u(t)) + F(t, x(t), u(t))] dt + \varphi(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Очевидно, что $K^\varphi = J$ на множестве D .

2. Задача $K^\varphi[\sigma] \rightarrow \inf, \sigma \in D$, «расщепляется» на две задачи:

(А) задачу минимизации интеграла в K^φ , т.е.

$$R^\varphi(t, x, u) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \quad \forall t \in T;$$

(В) на задачу минимизации терминанта в K^φ , т.е.

$$G^\varphi(x) := l(x) - \varphi(t_1, x) \rightarrow \min, \quad x \in E^\varphi,$$

где $E^\varphi = \{x \mid x \in C, \varphi(t_1, x) - \varphi(t_0, x_0) \geq 0\}$.

3. Задача (А), а точнее, задача $K^\varphi \rightarrow \min, \sigma \in D$, решается позиционно (по схеме GF-ПМ): ищется отображение

$$U_\varphi(t, x) = \operatorname{Argmin}_{u \in U} [\varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) + F(t, x, u)],$$

которое задаёт множество своих селекторов $\mathcal{V}_\varphi$ с позиционными стратегиями

$$v(t, x) \in U_\varphi(t, x)$$

и пучками движений $\mathcal{X}(v) \forall v \in \mathcal{V}_\varphi$ расширенной системы.

Пусть выбран борелевский селектор $\bar{v}(t, x) \in \mathcal{V}_\varphi$: расширенная система имеет решение Каратеодори $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ на T с управлением $\bar{u}(t) = \bar{v}(t, \bar{x}(t))$ класса $\mathcal{E}\mathcal{U}$. Теперь мы имеем некоторую пару $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \Sigma$. Положим

$$R^\varphi(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mu(t) \quad \text{на } T.$$

Если $\mu(t) = 0$ п.в. на T , то $\varphi \in \Phi_+$ и пара $(\bar{x}, \bar{u})$ — решение задачи (А).

Если же $\mu(t) \neq 0$, то перейдем к «нормированной» функции

$$\varphi^1(t, x) = \varphi(t, x) - \int_{t_0}^t \mu(s) ds \in \Phi_+,$$

для которой

$$R^{\varphi^1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \text{п.в. на } T,$$

т.е. $(\bar{x}, \bar{u})$ — решение задачи (А), но для нормированной φ^1 .

Важно, что нормировка не меняет экстремального отображения, т.е. $U_\varphi = U_{\varphi^1}$.

4. Решаем терминальную задачу (В) с нормированной φ^1 (это общий случай):

$$G^{\varphi^1}(x) = l(x) - \varphi^1(t_1, x) \rightarrow \min, \quad x \in E^{\varphi^1}$$

(с неравенством $\varphi^1(t_1, x) - \varphi^1(t_0, x_0) \geq 0$).

Если $\min G^{\varphi^1}(x) = 0$ и достигается при $\bar{x}(t_1)$, то пара $(\bar{x}, \bar{u})$ глобально оптимальна, причем

$$J[\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)] = \varphi^1(t_0, x_0) \quad (= \min(P_B)).$$

Если же $\min G^{\varphi^1}(x) = m \neq 0$, то вывод об оптимальности $\bar{\sigma}$ остается, но для «лаконичной» формулы значения задачи делаем вторую нормировку, полагая $\varphi^2(t, x) = \varphi^1(t, x) + m$. Тогда

$$\min(P_B) = \varphi^2(t_0, x_0),$$

что совпадает с ответом для нормализованных K -функций.

Таким образом, в терминальной задаче (В) проверяется достижение минимума в точке $\bar{x}(t_1)$. Если оно нарушено, то φ не разрешающая.

На общий случай разрывной стратегии описанная схема распространяется с естественными изменениями.

Замечания 1. 1. При решении задач первую нормировку (при $\mu(t) \neq 0$) делать желательно: она элементарна, но позволяет сместить окончательный ответ на конечномерную задачу В) — проверке на минимум в ней подлелжит известная точка $\bar{x}(t_1)$.

2. В задачах (А), (В) минимумы по x естественно брать по некоторому априорно заданному множеству достижимых состояний $Q(t) \supseteq R(t)$ (=множеству достижимости или управляемости).

Пример 3 (пример из [25] с нарушением условия нормальности). $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = 2x_1u$, $x(0) = (0, 0)$, $x_2(1) = 0$, $|u| \leq 1$, $J = x_1(1) \rightarrow \min$. По утверждению автора в этом примере $\bar{x} \equiv 0$ — единственная допустимая и, следовательно, оптимальная траектория. Но липшицевой K -функции не существует. Здесь терминальная функция Лагранжа $l = \lambda_0 x_1 + \lambda x_2$ и условия ПМ имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = -2u, \quad \psi_1(1) = \lambda_0, \quad \psi_2 \equiv \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\psi_1(t) + \lambda x_1)u \rightarrow \min.$$

Отсюда для $\bar{x} \equiv 0$ получаем $\lambda_0 u \rightarrow \min \implies \lambda_0 = 0$, так как все постоянные управления генерируют $\bar{x}$. Имеем бесчисленное множество аномальных экстремалей.

Заметим, что функция $w = x_2 - x_1^2$ — первый интеграл управляемой системы и, следовательно, $\dot{w}(x) \equiv 0$, так что w сильно монотонна в любом смысле; возьмем $\varphi = w$. Тогда $R^\varphi(x, u) = \dot{w}(x) \equiv 0$ и поэтому её минимум существует для любого $(x(\cdot), u(\cdot)) \in D$, $G^\varphi(x) = x_1 - x_2 + x_1^2$ имеет минимум в точке $\bar{x}_1 = 0$ на множестве E^φ : $x_2 = 0$, $x_2 = x_1^2$. Следовательно, все пары $(\bar{x}, u(\cdot)) \in \mathcal{U}$ оптимальны. Таким образом, гладкая нелинейная $\varphi = w$ оказалась глобально разрешающей функцией Кротова для указанных пар.

Интересно, что $\bar{x} \equiv 0$ — не единственная оптимальная траектория, причем устанавливается это с линейной K -функцией $\varphi(t, x) = \langle \psi(t), x \rangle$. Действительно, возьмем $\varphi(t, x) = x_1 + \lambda x_2$ при $\lambda_0 = 1$. Тогда

$$\min_{|u| \leq 1} \dot{\varphi}(t, x, u) = -|1 + 2\lambda x_1| \quad (= P(x))$$

(см. (11)). Эта вогнутая функция достигает минимума по x_1 на границе множеств достижимости и управляемости уравнения

$$\dot{x}_1 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0 \quad (\text{так как } \min_D J = 0), \quad |u| \leq 1,$$

т.е. на отрезках прямых $x_1^1 = t$, $x_1^2 = 1 - t$ ($x_1^3 = 0$ дает уже найденные экстремали с $\bar{x}$).

Пересечение x_1^1 , x_1^2 образуют допустимую траекторию $x^0(t)$ (см. рис. 1) с релейным управлением $u^0(t) = \chi_{[0, 1/2)} - \chi_{[1/2, 1]}$ (χ_A — характеристическая функция множества A). Пара $(x^0(t), u^0(t))$ глобально оптимальна вместе с $\sigma^* = -\sigma^0$.

Замечание 1. Использование вогнутости $P(x)$ рационально. Но его можно заменить явным использованием экстремальной стратегии $v(x_1) = -\text{sign}(1 + 2\lambda x_1)$ с подбором множителя λ из финального условия $x_1(1) = 0$. Оказывается, что $\lambda = -1$.

Пример 4. Пример с бесчисленным множеством экстремалей построен В. Ф. Кротовым (см. [13, с. 55-57]): $\dot{x} = u$, $x(-1) = x(1) = 0$, $|u| \leq 1$,

$$J = - \int_T tx^2 dt \rightarrow \min.$$

Применим позиционный формализм Кротова. Зададимся линейно-квадратичной функцией

$$\varphi(t, x) = \psi(t)x + \frac{1}{2}S(t)x^2, \quad S(\cdot) \in AC,$$

и образуем кротовский лагранжиан

$$K^\varphi[x(\cdot), u(\cdot)] = J[x(\cdot), u(\cdot)] - \varphi(t, x(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_T \dot{\varphi}(t, x(t), u(t)) dt = \int_T (\psi(t)u(t) + S(t)x(t)u(t)) dt,$$

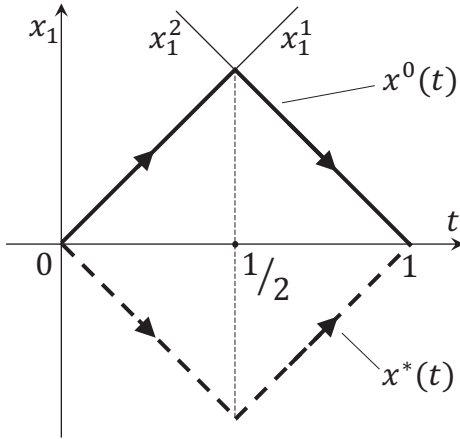


Рис. 1. Схема образования траектории $x^0(t)$ (в нижней полуплоскости — $x^*(t)$).

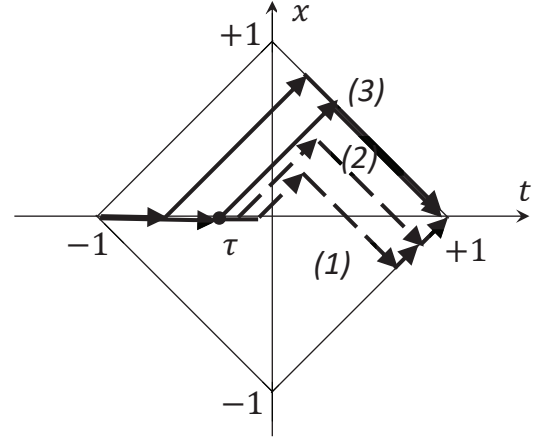


Рис. 2. Схема первого семейства экстремалей в примере 4; второе симметрично относительно оси времени.

если положить $S(t) = c - t^2$, $c \in \mathbb{R}$ — параметр, чтобы исключить x^2 в K^φ . В итоге получим задачу

$$K^\varphi[\sigma] = \int_T \left(\psi(t)u + (c - t^2)xu \right) dt \rightarrow \min, \quad \sigma \in D, \quad (15)$$

причем $K^\varphi = J$ на множестве D , и интегрант в (15) — это в точности $\dot{\varphi}(t, x, u)$. Отсюда получаем

$$\min_{|u| \leq 1} \dot{\varphi}(t, x, u) = -|\psi(t) + (c - t^2)x|.$$

Это вогнутая функция от x , задающая экстремальную стратегию, и минимум которой по x достигается на границах множеств достижимости и управляемости системы

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq 1$$

с началом в $(\tau, 0)$ и концом $(1, 0)$. Здесь τ — правый конец отрезка $[-1, \tau]$ с $x = 0$, с которого начинаются все экстремали (это следует из ПМ, см. рис. 2).

Полученный вывод, который задает структуру оптимального процесса σ^0 с траекторией x^0 в верхней полуплоскости $x \geq 0$ и симметричное решение σ^* с $x^* = -x^0$. Эти процессы определены с точностью до конкретизации параметров $\tau \in (-1, 0)$, $c \in \mathbb{R}$ из вспомогательной задачи минимизации. Остальные (не оптимальные) экстремали отсеиваются полученным выводом.

8. На пути к позиционному методу Понтрягина. Идею метода поясним на альтернативном решении примера Кротова (пример 4). Предварительно отметим, что в решении примера 4 использовалась линейно-квадратичная функция Кротова, котраектория которой $\psi(t)$ так и не была конкретизирована. По существу это была билинейно-квадратичная, бипозиционная функция S (см. [8]), а лагранжиан K^φ совпал с бипозиционным лагранжианом $\mathcal{K}_S$. Отметив это, убедимся, что для решения примера достаточно билинейной функции $S(x, \psi) = \langle \psi, x \rangle$.

Из ПМ имеем: $H = \psi u - tx^2$,

$$\dot{\psi} = 2tx, \quad \psi(-1), \psi(1) \text{ свободны}, \quad (16)$$

$$\mathcal{R}_S := \dot{S}(x, \psi) = 2tx^2 + \psi u - 2tx^2 = \psi u,$$

$$\min_{|u| \leq 1} \mathcal{R}_S = -\psi \quad (\text{не зависит от } x), \quad w(\psi) = -\text{sign } \psi \quad (17)$$

— экстремальная копозиционная стратегия. Хотя экстремальная стратегия $w(\psi)$ копозиционная, движения с нею в канонической системе не разделяются, принципиальных трудностей это не создает.

Начинаем реализовывать стратегию (17) в обратном времени. Чтобы выполнить ограничение $x(1) = 0$, в полуокрестности $O_-(1)$ должны выполняться условия

$$\psi(1) > 0, \quad w(\psi) = -1 \implies x(t) = 1 - t,$$

согласованные с (17). Тогда из (16) находим

$$\psi(t) = \psi(1) + t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{3} > 0, \quad t \in O_-(1).$$

Но в некоторый момент τ' необходимо переключение управления $w(\psi)$, чтобы прийти в точку $x(\tau) = 0$ (напомним, что все экстремали имеют начальный отрезок времени $[-1, \tau]$, причем $x(t) = u(t) = 0|_{[-1, \tau]}$). Поэтому $x(t) = t - \tau$, $u(t) = +1$ при $t > \tau$, а точнее, при $t \in [\tau, \tau']$, для сопряжения с движением $x(t) = 1 - t$ в конце периода управления.

Понятно, что $\tau' = \frac{1}{2}(\tau + 1)$, и в целом получены допустимые пары $\sigma^0 = \sigma^0(\tau)$, зависящие от параметра τ . Оптимальный процесс $\sigma^{00} = \sigma^0(\tau^0)$ получается дополнительной минимизацией функции $I(\tau) := J[\sigma^0(\tau)]$ при $\tau \in (-1, 0)$.

В силу симметрии также оптимальным будет процесс $\sigma^* = -\sigma^{00}$. Выводы в целом совпали с полученными в примере 4, но в последнем было двухпараметрическое семейство процессов для поиска оптимального.

9. Заключение. В работе доказан позиционный принцип минимума для задач оптимального управления с терминальными ограничениями типа равенства. Это необходимое условие допускает обобщение на задачи с более общими ограничениями, но для этого нужно привлекать конструктивный вариант F-ПМ для негладких задач со свободным правым концом.

Кроме того, в статье предложен и обоснован позиционный метод Кротова, существенно расширяющий область применимости и эффективности традиционного формализма. Этот метод имеет интересные (и нетривиальные) обобщения, например, на задачи с ограничениями на оба конца траектории. Этот случай требует оперирования бипозиционными функциями типа Ляпунова—Кротова $V(t, x; t_0, x_0)$ и $V(t, x; t_1, x_1)$. Теория Гамильтона—Якоби для таких задач не работает, а понятие позиционного управления требует формализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ащепков Л. Т., Константинов Г. Н. Эффект «срезки» в задачах нелинейного программирования // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1976. — 16, № 4. — С. 1047–1051.
2. Дыхта В. А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Докл. РАН. — 2015. — 462, № 6. — С. 653–656.
3. Дыхта В. А. Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона—Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автомат. телемех. — 2014. — 5. — С. 31–49.
4. Дыхта В. А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2015. — 21, № 2. — С. 73–86.
5. Дыхта В. А. О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона—Якоби // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — 28, № 3. — С. 83–93.
6. Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2022. — 41. — С. 19–39.
7. Дыхта В. А. Методы повышения эффективности позиционного принципа минимума в задачах оптимального управления // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 54–64.
8. Дыхта В. А. Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // Автомат. телемех. — 2014. — 11. — С. 19–37.
9. Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума для квазиоптимальных процессов в задачах управления с терминальными ограничениями // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2017. — 19. — С. 113–128.
10. Дыхта В. А. Неравенства Гамильтона—Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2010. — 15, № 1. — С. 405–426.
11. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.
12. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Физматлит, 1974.

13. Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969.
14. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
15. Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теория условий высших порядков в гладких задачах на экстремум с ограничениями // в кн.: Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления (Завалишин С. Т., Толстоногов А. А., ред.). — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 4–39.
16. Поляк Б. Т., Третьяков Н. В. Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1973. — 13, № 1. — С. 34–46.
17. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. — М.-Ижевск: Ин-т компьютер. иссл., 2003.
18. Субботина Н. Н., Колпакова Е. А., Токманцев Т. Б., Шагалова Л. Г. Метод характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. — Екатеринбург: Ин-т мат. мех. им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 2013.
19. Bardi M., Cappuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. — Boston: Birkhäuser, 1997.
20. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // J. Dyn. Control Syst. — 1995. — 1, № 1. — P. 1–48.
21. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. — N.Y.: Springer-Verlag, 1998.
22. Clarke F. H., Nour C. Nonconvex duality in optimal control // SIAM J. Control Optim. — 2005. — 43. — P. 2036–2048.
23. Krotov V. F. Global Methods in Optimal Control Theory. — N.Y.: Marcel Dekker, 1996.
24. Vinter R. B. Convex duality and nonlinear optimal control // SIAM J. Control Optim. — 1993. — 31. — P. 518–538.
25. Vinter R. B. Dynamic programming for optimal control problems with terminal constraints // Lect. Notes Math. — 1985. — 1119. — P. 190–202.
26. Vinter R. B. Optimal Control. — Boston: Birkhäuser, 2000.
27. Vinter R. B. Weakest conditions for existence of Lipschitz continuous Krotov functions in optimal control theory // SIAM J. Control Optim. — 1983. — 21, № 2. — P. 215–234.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Дыхта Владимир Александрович (Dykhta Vladimir Aleksandrovich)

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова

Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;

Иркутский государственный университет

(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory

of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;

Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: dykhta@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 30–39
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-30-39

УДК 519.1, 519.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАДАВАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЕЛ ЛАХА И ОБОБЩЕННЫХ ЧИСЕЛ ЛАХА

© 2025 г. Н. А. КОЛОКОЛЬНИКОВА

Аннотация. Рассматриваются вероятностные распределения, описываемые с помощью чисел Лаха и обобщённых чисел Лаха. Исследуются корни производящих функций. Находятся числовые характеристики. Изучается асимптотическое поведение распределений.

Ключевые слова: числа Лаха, Ф-схема последовательных испытаний, распределение, производящая функция, математическое ожидание, дисперсия.

PROBABILITY DISTRIBUTIONS DEFINED BY LAH NUMBERS AND GENERALIZED LAH NUMBERS

© 2025 N. A. KOLOKOLNIKOVA

ABSTRACT. Probability distributions described by means of Lah numbers and generalized Lah numbers are considered. Roots of generating functions are examined and numerical characteristics are found. The asymptotic behavior of distributions is studied.

Keywords and phrases: Lah numbers, Φ -scheme of sequential trials, distributions, generating function, expectation, variance.

AMS Subject Classification: 05A15, 60E05

1. Введение. Числа Лаха l_k^n были введены в рассмотрение в 1955 г. в [10], а затем информация о них и некоторых их свойствах была приведена в [9, с. 56–57]. Данные числа связывают возрастающие $x^{(n)}$ и убывающие $(x)_n$ факториалы. Если это знакоположительные числа l_k^n , то

$$(x)_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k l_k^n x^{(k)}, \quad x^{(n)} = \sum_{k=1}^n l_k^n (x)_k,$$

где

$$x^{(n)} = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad (x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Числа Лаха могут быть выражены следующим образом через числа Стирлинга:

$$l_k^n = \sum_{i=k}^n b_i^n a_k^i,$$

где b_i^n — модули чисел Стирлинга первого рода, a_k^i — числа Стирлинга второго рода.

Существуют различные обобщения чисел Стирлинга. В первую очередь следует отметить числа B_k^n и A_k^n , детально описанные в [3, 8], которые строятся из элементов так называемых базовых последовательностей (баз) и при конкретном задании баз превращаются в обычные числа Стирлинга. Пусть

$$\Phi_k^n = \sum_{i=k}^n B_i^n A_k^i, \quad (1)$$

где B_i^n — обобщённые числа Стирлинга первого рода, строящиеся на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, A_k^i — обобщённые числа Стирлинга второго рода, строящиеся на базе $\{\gamma_i\}_{i=0}^{k-1}$. При этом

$$\Phi_n^n = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \Phi_k^n = 0, \quad \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Заметим, что числа B_i^n , строящиеся на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения

$$B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \alpha_{n-1} B_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и дополнительных условий

$$B_n^n = 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad B_k^n = 0, \quad \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Числа A_k^n , строящиеся на базе $\{\gamma_i\}_{i=0}^{n-1}$, могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения

$$A_k^n = A_{k-1}^{n-1} + \gamma_k A_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а также условий

$$A_n^n = 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad A_k^n = 0, \quad \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Если $\alpha_i = i$, $\gamma_i = i$ при всех i , то $B_k^n = b_k^n$, $A_k^n = a_k^n$, т.е. тогда $\Phi_k^n = l_k^n$. Таким образом, числа Φ_k^n являются обобщёнными числами Лаха. Рекуррентная формула для этих чисел имеет вид

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + (\alpha_{n-1} + \gamma_k) \Phi_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В данной работе с использованием результатов работ [4–6] исследуются некоторые вероятностные распределения, описываемые с помощью чисел l_k^n и Φ_k^n .

2. Числа Лаха и связанное с ними вероятностное распределение.

2.1. Упорядоченные разбиения и числа Лаха. Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов. Это множество разбивается на непустые подмножества. Если число таких подмножеств равно k , где $k = 0, 1, \dots, n$, то число разбиений равно l_k^n , где l_k^n — знакоположительное число Лаха (см. [10]). Как известно, числа Лаха могут быть определены рекуррентным соотношением

$$l_k^n = l_{k-1}^{n-1} + (n-1+k) l_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

При этом полагают

$$l_n^n = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad l_k^n = 0, \quad \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Очевидно, что $l_0^n = 0$, если $n > 0$, и $l_1^n = n!$, $n = 1, 2, \dots$

2.2. Вероятностное распределение. Предположим, что исходное множество было разбито на случайное число упорядоченных подмножеств. Рассмотрим случайную величину ξ_n — число подмножеств, на которые было разбито n -множество. Считаем, что при каждом n все разбиения являются равновероятными. Тогда распределение величины ξ_n имеет вид

$$P\{\xi_n = k\} = l_k^n / \left(\sum_{i=1}^n l_i^n \right), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Введем обозначение

$$l_n = \sum_{i=1}^n l_i^n. \quad (5)$$

Изучим асимптотическое поведение распределения (4). Для этого рассмотрим производящую функцию чисел Лаха

$$l_n(x) = \sum_{k=1}^n l_k^n x^k,$$

а затем и производящую функцию исследуемого распределения

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n P\{\xi_n = k\}x^k.$$

Лемма 1. При любом натуральном n все корни многочлена $l_n(x)$ различны, действительны и неположительны.

Доказательство проведем методом математической индукции. Поскольку $l_1(x) = x$, $l_2(x) = x(x+2)$, то убеждаемся, что при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение справедливо.

Предположим, что при некотором натуральном n многочлен $l_n(x)$ имеет n действительных неположительных корней. Покажем, что тогда многочлен $l_{n+1}(x)$ имеет $n+1$ действительных неположительных корней. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$H_n(x) = x^n e^x l_n(x). \quad (6)$$

Продифференцируем функцию $H_n(x)$:

$$H'_n(x) = ((x+n)l_n(x) + xl'_n(x))x^{n-1}e^x.$$

На основании рекуррентного соотношения (3) $H'_n(x) = x^{n-1}e^x l_{n+1}(x)$. В силу формулы (6) имеем $H_{n+1}(x) = x^{n+1}e^x l_{n+1}(x)$. Следовательно, $H_{n+1}(x) = x^2 H'_n(x)$. По теореме Ролля функция $H'_n(x)$ имеет корни в промежутках между корнями функции $H_n(x)$. Таким образом, $H'_n(x)$ имеет $2n$ неположительных действительных корней, т.е. число таких корней у функции $H_{n+1}(x)$ равно $2n+2$. Поскольку

$$l_{n+1}(x) = x^{-n-1}e^{-x}H_{n+1}(x),$$

то очевидно, что этот многочлен имеет $n+1$ действительных неположительных корней, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Так как производящая функция изучаемого распределения (2) имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{l_n} l_n(x),$$

то ее корни совпадают с корнями функции $l_n(x)$, а значит, являются действительными и неположительными. Отсюда следует, что величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов. Поэтому асимптотическое поведение распределения (4) зависит от поведения дисперсии рассматриваемой случайной величины ξ_n . Если при $n \rightarrow \infty$ дисперсия этой величины неограниченно возрастает, то величина асимптотически нормальна.

2.3. Числовые характеристики. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины ξ_n . Имеем:

$$E\xi_n = \frac{1}{l_n} \sum_{k=1}^n k l_k^n.$$

Используя рекуррентную формулу (1), получим:

$$\sum_{k=1}^n k l_k^n = \sum_{k=1}^n (l_k^{n+1} - l_{k-1}^n - n l_k^n) = l_{n+1} - (n+1)l_n,$$

т.е.

$$E\xi_n = \frac{l_{n+1}}{l_n} - n - 1. \quad (7)$$

Применяя дважды рекуррентную формулу к l_k^{n+2} , получим

$$l_k^{n+2} = l_{k+1}^{n+1} + (n+1)l_k^{n+1} + k l_{k-1}^n + n l_k^n + k^2 l_k^n.$$

Выразив отсюда $k^2 l_k^n$, найдем

$$E\xi_n^2 = \frac{l_{n+2}}{l_n} - (3+2n)\frac{l_{n+1}}{l_n} + 2n + n^2,$$

т.е.

$$D\xi_n = \frac{l_{n+2}}{l_n} - \left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 - \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1. \quad (8)$$

Для выяснения асимптотического поведения распределения величины ξ_n нужно изучить поведение дисперсии этой величины при $n \rightarrow \infty$.

2.4. Предельные теоремы. Сначала получим асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$ для l_{n+1}/l_n и l_{n+2}/l_n .

В [1] дано следующее определение допустимой функции. Пусть $p(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Если коэффициенты a_n степенного ряда функции $e^{p(t)}$ являются положительными числами для всех достаточно больших n , то функция $e^{p(t)}$ является допустимой. В этой же работе приведена следующая теорема.

Теорема 1. Если $f(t)$ — допустимая целая функция со степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, то

$$a_n \sim f(r_n) r_n^{-n} (2\pi b(r_n))^{-1/2},$$

где $r_n > 0$, а функция b определяется равенствами

$$a(r_n) = n, \quad a(r) = r \frac{d}{dr} (\ln f(r)), \quad b(r) = r \frac{d}{dr} a(r).$$

Рассмотрим двойную производящую функцию чисел Лаха (см. [10]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n l_k^n x^k \frac{t^n}{n!} = \exp \left\{ \frac{xt}{1-t} \right\}.$$

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{t^n}{n!} = \exp \left\{ \frac{t}{1-t} \right\}.$$

Итак, имеем разложение функции $e^{t/(1-t)}$ в степенной ряд с коэффициентами $a_n = l_n/n!$. Очевидно,

$$p(t) = \frac{t}{1-t} = \sum_{i=1}^{\infty} t^i,$$

т.е. $p(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Так как $a_n > 0$ при $n > 0$, то функция $e^{t/(1-t)}$ является допустимой и можно применять теорему 1. Имеем:

$$l_n \sim n! \exp \left\{ \frac{r_n}{1-r_n} \right\} r_n^{-n} (2\pi b(r_n))^{-1/2}, \quad (9)$$

$$a(r) = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad b(r) = a(r) \frac{1+r}{1-r}, \quad b(r_n) = n \frac{1+r}{1-r},$$

где

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{\sqrt{4n+1}}{2n}.$$

Найдём асимптотические разложения для r_n при $n \rightarrow \infty$:

$$r_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n\sqrt{n}} + \frac{1}{128n^2\sqrt{n}} - \frac{1}{1024n^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^3\sqrt{n}}\right).$$

Запишем выражение (9) для $n+1$ и $n+2$:

$$\begin{aligned} l_{n+1} &\sim (n+1)! \exp \left\{ \frac{r_{n+1}}{1-r_{n+1}} \right\} r_{n+1}^{-(n+1)} \left(2\pi(n+1) \frac{1+r_{n+1}}{1-r_{n+1}} \right)^{-1/2}, \\ l_{n+2} &\sim (n+2)! \exp \left\{ \frac{r_{n+2}}{1-r_{n+2}} \right\} r_{n+2}^{-(n+2)} \left(2\pi(n+2) \frac{1+r_{n+2}}{1-r_{n+2}} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что r_{n+1} и r_{n+2} при $n \rightarrow \infty$ будут иметь разложения, отличные от разложения r_n , поэтому найдём их отдельно. Получим

$$r_{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^2} - \frac{23}{128n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{2n^3} + \frac{59}{1024n^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^3\sqrt{n}}\right),$$

$$r_{n+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{7}{8n\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} - \frac{143}{128n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^3} - \frac{1559}{1024n^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^3\sqrt{n}}\right),$$

поскольку

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{\sqrt{4n+5}}{2(n+1)}, \quad r_{n+2} = 1 + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{\sqrt{4n+9}}{2(n+2)}.$$

На основании данных результатов находим при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} \sim (n+1) \exp \left\{ \frac{1}{1-r_{n+1}} - \frac{1}{1-r_n} \right\} r_{n+1}^{-(n+1)} r_n^n \left(\frac{(n+1)(1+r_{n+1})(1-r_n)}{n(1-r_{n+1})(1+r_n)} \right)^{-1/2}.$$

Логарифмируя последнее выражение и используя разложение в ряд, приходим к соотношению

$$\ln \frac{l_{n+1}}{l_n} = \ln n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n} - \frac{7}{24n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Значит,

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = n \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n} - \frac{7}{24n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\},$$

т.е.

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = n + \sqrt{n} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{l_{n+1}}{l_n} \right)^2 = n^2 + 2n\sqrt{n} + \frac{5}{2}n + \frac{7}{4}\sqrt{n} + O(1). \quad (11)$$

Аналогичным образом проводя рассуждения, находим:

$$\frac{l_{n+2}}{l_n} = n^2 + 2n\sqrt{n} + \frac{7}{2}n + \frac{13}{4}\sqrt{n} + O(1). \quad (12)$$

Подставляя асимптотические разложения (10), (11), (12) в формулы (7) и (8), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$

$$E\xi_n = \sqrt{n} - \frac{1}{4} + o(1), \quad D\xi_n = \frac{\sqrt{n}}{2} + O(1).$$

Следовательно, $D\xi_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. доказана следующая теорема.

Теорема 3. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{D\xi_n} P\{\xi_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x_{nk}^2}{2} \right\} \rightarrow 0,$$

где $x_{nk} = (k - E\xi_n)/\sqrt{D\xi_n}$.

3. Обобщённые числа Лаха и Ф-схема последовательных испытаний.

3.1. *Описание схемы. Φ -распределение. Корни производящей функции.* Пусть проводятся испытания типа «успех-неуспех». Обозначим через ξ_n число успехов в n испытаниях. Предполагаем, что условные вероятности успехов имеют такую структуру:

$$\begin{aligned} p_{ni} &= P\{\xi_n = i + 1 | \xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1} \beta_i, \\ q_{ni} &= 1 - p_{ni} = P\{\xi_n = i | \xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1} (\delta_{n-1} + \gamma_i), \\ i &= 0, 1, \dots, n-1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Эта схема проведения испытаний называется Φ -схемой.

Теорема 4 (см. [6]). *Если последовательные испытания проводятся в условиях Φ -схемы, то распределение случайной величины ξ_n может быть записано в виде*

$$\begin{aligned} P\{\xi_n = 0\} &= \Phi_0^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i, \\ P\{\xi_n = k\} &= \Phi_k^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \beta_j, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Распределение (13) называется Φ -распределением. Комбинаторные числа Φ_k^n , участвующие в распределении (13), строятся на базах $\{\delta_i\}_{i=0}^{n-1}$ и $\{\gamma_i\}_{i=0}^{k-1}$.

Очевидно, что при разных способах задания α_{n-1} и β_i могут получаться распределения с отличающимися свойствами. Детально изучен случай, когда $\beta_i = N - i$, где N — некоторое большое натуральное число, которое может неограниченно возрастать (см. [6]). Остановимся на его рассмотрении.

Пусть $\beta_i = N - i$, $\gamma_i = i$, т.е. $\delta_i = 1/\alpha_i - N$. Тогда формула (2) запишется в виде

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - N + k \right) \Phi_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Распределение (13) примет вид

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot (N)_k, \quad k = 0, 1, \dots, \min(n, N), \quad n = 1, 2, \dots$$

Лемма 2. *При любых натуральных N , n все m корней многочлена*

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^m P\{\xi_n = k\} x^k,$$

где $m = \min(N, n)$, действительны и неположительны.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. При этом используется тот факт, что производящая функция распределения (13) удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$\Phi_m(x) = \alpha_{m-1}(\delta_{m-1} + Nx)\Phi_{m-1}(x) + x(1-x)\frac{d}{dx}\Phi_{m-1}(x), \quad m \geq 1,$$

а функция $H_{m-1}(x)$ имеет вид

$$H_{m-1}(x) = x^{\delta_{m-1}}(1-x)^{-\delta_{m-1}-N}\Phi_{m-1}(x).$$

На основании леммы 2 можем утверждать, что величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов. Поэтому для выяснения условий, при выполнении которых изучаемое распределение сходится к тому или иному предельному распределению, следует получить асимптотические формулы для характеристик.

3.2. *Числовые характеристики. Предельные распределения.* Как следует из [6], математическое ожидание $E\xi_n$ и дисперсия $D\xi_n$ случайной величины, имеющей описанное выше Φ -распределение, при любом натуральном n имеют вид

$$E\xi_n = N \left(1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha_i) \right),$$

$$D\xi_n = N(N-1) \prod_{i=0}^{n-1} (1 - 2\alpha_i) + N \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha_i) - N^2 \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha_i)^2.$$

Асимптотические формулы для этих характеристик и предельные распределения зависят от вида последовательности $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, определяющей значения условных вероятностей p_{ni} . Введем обозначения

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i, \quad B = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2.$$

Устремим N и n к бесконечности. Тогда

$$E\xi_n = N \left(1 - e^{-A} \left(1 - \frac{B}{2} \right) \right) (1 + o(1)). \quad (14)$$

Если $Ne^{-A} \rightarrow \infty$ или $Ne^{-A} \rightarrow \lambda < \infty$ (за исключением случая $A = o(1), A - NB = O(1)$) при $N, n \rightarrow \infty$, то для $D\xi_n$ имеет место асимптотическое представление

$$D\xi_n = Ne^{-A} (1 - e^{-A}(NB + 1)) (1 + o(1)). \quad (15)$$

При изучении различных вариантов предельных распределений при $N, n \rightarrow \infty$, могут возникнуть следующие случаи:

- (i) $A \rightarrow \infty$;
- (ii) $A \rightarrow \text{const}$;
- (iii) $A \rightarrow 0, NA \rightarrow \infty$;
- (iv) $A \rightarrow 0, NA \rightarrow \text{const}$;
- (v) $NA \rightarrow 0$.

(i). Если $A \rightarrow \infty$, то и $n/N \rightarrow \infty$ (поскольку $A \leq n/N$, так как $\alpha_i \leq 1/N$). Следовательно, $N = o(n)$. Формула (15) может быть записана в виде

$$D\xi_n = Ne^{-A} (1 + o(1)). \quad (16)$$

Таким образом, если $Ne^{-A} \rightarrow \infty$ при $N, n \rightarrow \infty$, то величина ξ_n асимптотически нормальна (имеет место утверждение теоремы 3).

Предположим теперь, что $Ne^{-A} \rightarrow \lambda = \text{const}$ при $N, n \rightarrow \infty$. Тогда, как установлено в [6],

$$D\xi_n = D(N - \xi_n) > E(N - \xi_n) \left(1 - E(N - \xi_n) \left(\frac{NA}{(N-1)^2} + \frac{1}{N} \right) \right). \quad (17)$$

Пусть

$$p_\lambda(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| P\{\xi = k\} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right|$$

— расстояние по вариации между распределением величины ξ и распределением Пуассона с параметром λ . Известно (см., например, [2]), что представление случайной величины в виде суммы независимых индикаторов даёт возможность оценить $p_{E(N-\xi_n)}(N - \xi_n)$ следующим образом:

$$p_{E(N-\xi_n)}(N - \xi_n) \leq E(N - \xi_n) - D(N - \xi_n).$$

Положив $\lambda_n = E(N - \xi_n)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. Если $E(N - \xi_n) = \lambda_n$, то

$$p_{\lambda_n}(N - \xi_n) \leq \lambda_n e^{-A} \left(\left(\frac{N}{N-1} \right)^2 A + 1 \right). \quad (18)$$

Следствие. Пусть $Ne^{-A} \rightarrow \lambda < \infty$ при $N, n \rightarrow \infty$. Тогда распределение величины $N - \xi_n$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Доказательство. При $A \rightarrow \infty$ формулу (14) можно переписать в виде

$$E\xi_n = N - Ne^{-A} + o(Ne^{-A}).$$

Кроме того,

$$\frac{A}{N} = o\left(\frac{e^A}{N}\right) = o(1),$$

поэтому в (18) получим

$$p_\lambda(N - \xi_n) \leq \lambda \cdot o(1) = o(1),$$

что и требовалось доказать. $\square$

(ii). Если $A \rightarrow \text{const}$ при $N, n \rightarrow \infty$, то

$$0 < \varepsilon \leq 1 - (1 + NB)e^{-A} < 1,$$

т.е. в силу (15) $D\xi_n \rightarrow \infty$, что означает асимптотическую нормальность величины ξ_n .

(iii). Если $A \rightarrow 0$ при $N, n \rightarrow \infty$, то при этом могут возникнуть разные случаи:

- (a) $NA \rightarrow \infty$;
- (b) $NA \rightarrow \text{const}$;
- (c) $NA \rightarrow 0$.

Все эти случаи описаны в [6]. Приведём некоторые результаты этой работы. Для этого перейдём к схеме серий и будем считать, что $p_i = p_{ni}$, $q_i = q_{ni}$.

Пусть $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, где при $n \rightarrow \infty$

$$I_1 = \{i : p_{ni} = o(1)\}, \quad I_2 = \{i : p_{ni} = \varepsilon_i, \quad 0 < \varepsilon_i < 1\}, \quad I_3 = \{i : p_{ni} = 1 - \alpha, \quad \alpha = o(1)\},$$

$$|I_1| = n_1, \quad |I_2| = n_2, \quad |I_3| = n_3, \quad n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

Введём обозначения

$$\xi_{n1} = \sum_{i \in I_1} \chi_i, \quad \xi_{n2} = \sum_{i \in I_2} \chi_i, \quad \xi_{n3} = \sum_{i \in I_3} \chi_i,$$

где χ_i — индикатор успеха в i -м испытании. Используя рассуждения, приведенные в [6], приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. Если при $n \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$n_2 = 0, \quad n_3 \leq c = \text{const}, \quad \sum_{i \in I_1} p_{ni} \rightarrow \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\xi_n = k\} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Теорема 7. Если при $n \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$n_2 = 0, \quad n_1 \leq c = \text{const}, \quad \sum_{i \in I_3} p_{ni} \rightarrow \mu < \infty,$$

то

$$P\{n - \xi_n = k\} = P\{n_3 - \xi_{n3}\} \rightarrow \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Теорема 8. Если при $n \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$n_2 = 0, \quad \sum_{i \in I_1} p_{ni} \rightarrow \lambda < \infty, \quad \sum_{i \in I_3} p_{ni} \rightarrow \mu < \infty,$$

то

$$P\{\xi_{n1} + n_3 - \xi_{n3} = k\} \rightarrow \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

При анализе всех возможных случаев (рассмотрении различного поведения n_1, n_2, n_3 при $n \rightarrow \infty$) было установлено, что в качестве предельных для Φ -распределений могут выступать нормальное распределение, распределение Пуассона, композиция распределения Пуассона и распределения суммы конечного числа независимых случайных индикаторов.

4. Пример применения Φ -схемы. Размещение частиц комплектами. Φ -Схема последовательных испытаний может применяться при решении различных задач, в частности, связанных со случайным размещением частиц по ячейкам. В качестве иллюстрации рассмотрим размещение частиц комплектами одинакового объёма.

Имеется N ячеек, в которых случайным образом размещают r комплектов, каждый из которых содержит m частиц. Частицы любого комплекта размещаются в ячейках по одной, причем все $\binom{N}{m}$ возможных размещений считаются равновероятными. Этот случай описан в книге [7] и изучался, например, в [2]. Будем изучать случайную величину μ_0 — число ячеек, оставшихся пустыми после размещения всех комплектов.

Опишем размещение частиц по ячейкам, используя Φ -схему последовательных испытаний. Будем считать, что частицы по одной бросаются в ячейки. Сначала размещаются частицы первого комплекта. Они, как было указано выше, займут m ячеек. Затем поочередно размещаются частицы второго, потом третьего комплекта и т. д. Считаем успехом попадание частицы в пустую ячейку, неудачей — попадание её в ячейку, где уже находится по меньшей мере одна частица. Начнем нумерацию испытаний и успехов с размещения частиц второго комплекта. Имеем

$$p_{nk} = \frac{N - m - k}{N - n + \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor m + 1}, \quad q_{nk} = \frac{m - n + \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor m + k + 1}{N - n + \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor m + 1},$$

$$k = 0, 1, \dots, \min(n - 1, N - m), \quad n = 1, 2, \dots, m(r - 1);$$

здесь $[x]$ — целая часть числа x . Структура вероятностей p_{nk} и q_{nk} соответствует описанной выше Φ -схеме испытаний. При этом

$$\{\alpha_i\}_{i=0}^{m(r-1)-1} = \left\{ \frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}, \dots, \frac{1}{N-m+1}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N-m+1}, \dots, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N-m+1} \right\}; \quad (19)$$

$$\{\beta_i\}_{i=0}^{m(r-1)-1} = \{N - m - i\}_{i=0}^{m(r-1)-1}. \quad (20)$$

Если размещены r комплектов, каждый из которых имеет объем m , то $n = rm$. Поскольку $\mu_0 = N - m - \xi_n$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. При равновероятном размещении r комплектов одинакового объема m по N ячейкам распределение числа пустых ячеек имеет вид

$$P\{\mu_0 = k\} = P\{\xi_{mr} = N - m - k\} = \Phi_{N-m-k}^{mr}(N - m)_k \prod_{i=0}^{m(r-1)-1} \alpha_i, \quad k = 0, 1, \dots, N - m. \quad (21)$$

Для нахождения значения Φ_{N-m-k}^{mr} и $\prod_{i=0}^{m(r-1)-1} \alpha_i$ в формуле (21) используются конечные последовательности (19) и (20).

Результат, обобщающий (21), может быть получен для случая, когда размещаются комплекты разного объема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендер Э. А. Асимптотические методы в теории перечислений // в кн.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа. — М.: Мир, 1979. — С. 266–310.
2. Ватутин В. А., Михайлов В. Г. Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // Теор. вероят. примен. — 1982. — 27, № 4. — С. 684–692.
3. Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
4. Колокольникова Н. А. Распределение, выражаемое через числа Лаха // Мат. 6 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения». — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2024. — С. 169–172.

5. Колокольникова Н. А. О суммировании дискретных случайных величин// в кн.: Актуальные задачи прикладной дискретной математики. Т. 10. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2024. — С. 41–48.
6. Колокольникова Н. А. Предельные теоремы для числа успехов в одной схеме зависимых испытаний. — М.: Деп. в ВИНТИ РАН, 649В92, 1992.
7. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. — М.: Наука, 1976.
8. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений. — М.: Наука, 1979.
9. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
10. Lah I. Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik// Mitt. Math. Stat. — 1955. — 7. — P. 203–212.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Колокольникова Наталья Арсеньевна (Kolokolnikova Natalia Arsen'evna)
 Иркутский государственный университет, Иркутск
 (Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
 E-mail: k_n_a_05@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 40–54
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-40-54

УДК 517.977.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВАМИ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

© 2025 г. И. В. ЛУТОШКИН, М. С. РЫБИНА

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального управления, содержащая запаздывание по фазовым переменным и управляемые разрывы фазовой траектории. Для решения задачи такого типа предлагается использовать метод параметризации, заключающийся в представлении управляющих функций в виде обобщенного сплайна с подвижными узлами и последующем сведении исходной задачи к конечномерной задаче нелинейного программирования относительно параметров управления. В данном исследовании в число переменных полученной конечномерной задачи включаются моменты разрыва фазовой траектории. Для переменных конечномерной задачи предлагается алгоритм вычисления производных целевой функции на основе использования сопряженных переменных исходной задачи оптимального управления. Предлагаемый алгоритм решения рассматриваемых задач оптимального апробирован на примерах, приведенных в работе.

Ключевые слова: оптимальное управление, запаздывание, управляемый разрыв фазовой траектории, численные методы, метод параметризации.

APPLICATION OF THE PARAMETRIZATION METHOD FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS PHASE TRAJECTORIES

© 2025 I. V. LUTOSHKIN, M. S. RYBINA

ABSTRACT. In this paper, we consider an optimal control problem involving delays in phase variables and controlled discontinuities in the phase trajectory. To solve this type of problem, we propose the parametrization method based on representing control functions as generalized splines with movable nodes and subsequently reducing the original problem to a finite-dimensional nonlinear programming problem for control parameters. In this work, the moments of discontinuity of the phase trajectory are considered as variables of the resulting finite-dimensional problem. Also, we propose an algorithm for calculating the derivatives of the objective function based on the use of the adjoint variables of the original optimal control problem. The algorithm proposed for solving the considered problems was tested by examples presented in the work.

Keywords and phrases: optimal control, delay, discontinuous phase trajectory, parametrization method, numerical methods.

AMS Subject Classification: 49M37

1. Постановка проблемы. При моделировании прикладных динамических оптимизационных проблем, формулируемых в терминах задач теории оптимального управления (ОУ), часто возникают потребности учета разрывов фазовых траекторий (см. [2,4]), а также учета запаздывающего по времени эффекта (см. [5,7,8]). В [9] предлагается модель управления экономической системой в условиях массового заболевания, в рамках которой присутствуют одновременно как запаздывание по фазовым переменным, так и управляемый разрыв фазовой траектории. В связи с этим возникает вопрос разработки методов решения таких задач ОУ.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)); \quad (1)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0; \quad (2)$$

$$x(\tau_i+) = \zeta_i(x(\tau_i-)), \quad \tau_i \in [t_0; T], \quad 1 \leq i \leq N^\tau; \quad (3)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

$$J = g(x(T), \tau_1, \dots, \tau_{N^\tau}) \rightarrow \min. \quad (5)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^r$ — вектор управления, для которых рассматривается поведение при $t_0 \leq t \leq T$; $f : \mathbb{R}^{1+2n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Функция $\psi(t)$ — детерминированная величина, описывающая поведение фазовой траектории $x(t)$ до момента начала управления. Скалярная величина $h > 0$ определяет точечное запаздывание системы. Скалярные величины τ_i представляют собой управляемые моменты разрыва фазовой траектории. Значение траектории в момент τ_i+ определяется детерминированной функцией $\zeta_i(x)$ ($1 \leq i \leq N^\tau$). Множество $U \subset \mathbb{R}^r$ является односвязным компактом. Решение задачи (1)–(5) ищется в классе кусочно непрерывных управляющих функций. Функции f , g являются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам.

Далее будем предполагать, что поставленная задача ОУ удовлетворяет условию ограниченности (см. [1]).

Условие ограниченности. Каждому допустимому управлению $u(t)$, удовлетворяющему условию (4), отвечает траектория $x(t)$ системы (1)–(3), определенная на $[t_0, T]$; семейство возможных траекторий равномерно ограничено.

Условие ограниченности позволяет обеспечить интегрируемость задачи Коши (1)–(3) для любого допустимого управления.

2. Параметризация управления. Метод параметризации (см. [3,5]) заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \equiv T \quad (6)$$

и закреплении структуры управления на промежутках $[t_{k-1}, t_k]$, $1 \leq k \leq N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad (7)$$

где $v_\mu^k \in \mathbb{R}^d$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U$ и, соответственно, $v^k = (v_1^k, \dots, v_r^k) \in \mathbb{R}^{d \times r}$.

Пусть управление (4) параметризовано в виде (6), (7); тогда фазовая траектория $x(t)$, порожденная задачей Коши (1)–(3), при $1 \leq k \leq N$ принимает зависимость от параметров управления $w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k)$ и вектора моментов разрыва фазовой траектории $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{N^\tau})$. Будем считать, что моменты разрыва упорядочены: $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{N^\tau}$. Если $\tau_s = \tau_{s+1}$, то выполняется условие разрыва в виде $x(\tau_{s+1}+) = \zeta_{s+1}(\zeta_s(x(\tau_s-)))$.

Решение задачи (1)–(3) может быть представлено как

$$x(t) = \begin{cases} z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k), & t \in [t_{k-1}; \min\{t_k, \tau_1\}); \\ z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau_1, \dots, \tau_s), & t \in [t_{k-1}; t_k) \cap [\tau_s; \tau_{s+1}), \quad s < N^\tau; \\ z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau_1, \dots, \tau_{N^\tau}), & t \in [\max\{t_{k-1}, \tau_{N^\tau}\}; t_k). \end{cases}$$

Введем функции, возвращающие индексы соответствующих множеств:

$$l(t) = k - 1, \quad t \in [t_{k-1}; t_k); \quad m(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1; \\ i, & t \in [\tau_i; \tau_{i+1}); \\ N^\tau, & t \geq \tau_{N^\tau}. \end{cases}$$

Также введем обозначения $\overline{w^k} = (w^1, w^2, \dots, w^k)$, $\overline{\tau_s} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$. Будем считать, что $z(t; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_s}) = z(t; \overline{w^{k-1}}, v^k)$, если $s < 1$.

Функции $z(\cdot)$ находятся из ряда соотношений. При $t \leq t_0$

$$z(t; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_s}) = \psi(t).$$

При $t \in [t_k; \min\{t_{k+1}, \tau_1\})$

$$\begin{aligned} z(t; \overline{w^k}, v^{k+1}) &= z(t_k; \overline{w^{k-1}}, v^k) + \\ &+ \int_{t_k}^t f\left(s, z(s; \overline{w^k}, v^{k+1}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}), u^{k+1}(s; v^{k+1})\right) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Если разрыв траектории $x(t)$ происходит на промежутке $[t_k; t_{k+1})$, то после момента разрыва при $t \in [\tau_{m(t)}; \min\{t_{k+1}, \tau_{m(t)+1}\})$ и $m(t) < N^\tau$, а также при $t \in [\tau_{m(t)}; t_{k+1})$ и $m(t) = N^\tau$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} z(t; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}) &= \zeta_{m(t)}(z(\tau_{m(t)}-; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t)}})) + \\ &+ \int_{\tau_{m(t)}}^t f\left(s, z(s; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{k+1}(s; v^{k+1})\right) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Если момент разрыва предшествует $[t_k; t_{k+1})$, то до момента следующего разрыва на $[t_k; t_{k+1})$ при $t \in [t_k; \min\{t_{k+1}, \tau_{m(t)+1}\})$ или, если разрыва на $[t_k; t_{k+1})$ нет, при $t \in [t_k; t_{k+1})$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} z(t; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}) &= z(t_k; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t)}}) + \\ &+ \int_{t_k}^t f\left(s, z(s; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{k+1}(s; v^{k+1})\right) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем функцию

$$\varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}}) = g\left(z\left(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}}\right)\right). \quad (11)$$

Таким образом, исходная задача (1)-(5) аппроксимируется следующей задачей нелинейного программирования (НП):

$$\varphi(w^1, \dots, w^N, \tau_1, \dots, \tau_{N^\tau}) \rightarrow \min \quad (12a)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} W = \left\{ w^k : w_{0,0}^{k-1} \leq w_{0,0}^k, \quad u^k(t; v^k) \in U, \quad w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, \quad k = 1, \dots, N; \right. \\ \left. t_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_{N^\tau} \leq T, \quad w_{0,0}^0 = t_0, \quad w_{0,0}^N \equiv T \leq T^* \right\}. \end{aligned} \quad (12b)$$

В поставленной задаче (12) вычисление значения целевой функции эквивалентно решению соответствующей задачи Коши. Применение методов оптимизации нулевого порядка (недифференцируемой оптимизации) приводит к достаточно долгому вычислительному процессу. Если эксперт сможет удачно выбрать класс параметризации управления (6), (7), то задача НП будет иметь небольшую размерность, при этом адекватно аппроксимирует исходную задачу ОУ. При решении задач НП небольшой размерности эффективно применение классических методов дифференцируемой оптимизации.

3. Производные по параметрам управления. В задаче НП (12) зависимость φ от $(w^1, \dots, w^N, \tau_1, \dots, \tau_{N\tau})$ задана опосредованно: решением задачи Коши (1)–(3) при представлении управления (4) в виде (6), (7). Для того, чтобы к задаче НП (12) применять методы дифференцируемой оптимизации первого порядка, необходимо построить алгоритм вычисления производных целевой функции $\varphi(w^1, \dots, w^N, \tau_1, \dots, \tau_{N\tau})$.

В [5] рассматривается задача ОУ с точечным запаздыванием без разрыва фазовой траектории: (1), (2), (4) с критерием

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min. \quad (13)$$

При параметризации управления (4) в виде (6), (7) задача (1), (2), (4), (13) имеет представление

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min \quad (14a)$$

при ограничениях

$$W = \left\{ w^k : w_{0,0}^{k-1} \leq w_{0,0}^k, u^k(t; v^k) \in U, w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, k = 1, \dots, N; \right. \\ \left. w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^* \right\}. \quad (14b)$$

Проблема вычисления производных целевой функции φ по переменным $(w^1, \dots, w^N)$ для задачи (14) с условиями (1), (2) решается на основе использования сопряженной системы.

Введем функцию Понтрягина и систему уравнений для сопряженных переменных:

$$H(t, p, x, \xi, u) = \langle p, f(t, x, \xi, u) \rangle; \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H(p(t), x, \xi, u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ \xi=x(t-h)}} - \\ - \frac{\partial H(p(t+h), x, \xi, u(t+h))}{\partial \xi} \theta(T-h-t) \Big|_{\substack{x=x(t+h) \\ \xi=x(t)}}; \\ p(T) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Big|_{x=x(T)}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть функции f, g , входящие в постановку задачи (1)–(2), (13), непрерывно дифференцируемы по всем переменным, параметризованное управление (7) дифференцируемо по параметрам $v^k, k = 1, \dots, N$. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче (14) по параметрам верны следующие формулы:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - \\ - H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(T, p(T), x(T), x(T - h), u^N(T, v^N));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(s, p(s), x(s), x(s - h), u(s))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} ds.$$

Доказательство. Выведем формулу производной функции φ по параметрам $t_k, k = 1, 2, \dots, N$. Формально эта производная может быть записана в виде

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = \frac{\partial g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))}{\partial x} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)}{\partial t_k}.$$

Второй сомножитель, полученный в правой части, представляет собой вариацию параметризованной траектории по моменту переключения управления.

Для задачи (1)-(2), (13) параметризованная траектория представляется в виде (8). В этом случае

$$z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N) = z(t_k; \overline{w^{k-1}}, v^k) + \sum_{j=k}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f\left(s, z(s; \overline{w^j}, v^{j+1}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}), u^{j+1}(s; v^{j+1})\right) ds. \quad (17)$$

Параметр t_k оказывает нетривиальное влияние на параметризованную траекторию с момента t_k , поэтому определим вариацию $y^{k00}(t)$ по данному параметру в виде

$$y^{k00}(t) = \frac{\partial z(t; \overline{w^j}, v^{j+1})}{\partial t_k}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad k \leq j \leq N-1.$$

Непосредственно дифференцируя (17) по t_k , получаем

$$y^{k00}(T) = f\left(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)\right) - f\left(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) + \int_{t_k}^T \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k00}(s-h) I(s \in [t_k+h; T]) \right) ds; \quad (18)$$

здесь $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$, $I(\eta)$ — индикаторная функция:

$$I(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta \text{ истина;} \\ 0, & \text{если } \eta \text{ ложь.} \end{cases}$$

Перейдем к выводу производной, принимая во внимание уравнение вариации (18), уравнение сопряженной переменной (16) и определение функции Понтрягина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= \langle p(T), y^{k00}(T) \rangle = \langle p(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle + \int_{t_k}^T \frac{d}{ds} \langle p(s), y^{k00}(s) \rangle ds = \\ &= \langle p(t_k), f\left(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)\right) - f\left(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) \rangle + \\ &\quad + \int_{t_k}^T \left(\langle \dot{p}(s), y^{k00}(s) \rangle + \langle p(s), \dot{y}^{k00}(s) \rangle \right) ds = \\ &= H\left(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)\right) - H\left(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) + \\ &+ \int_{t_k}^T \left(\left\langle - \frac{\partial H(p(s), x, \xi, u(s))}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial H(p(s+h), x, \xi, u(s+h))}{\partial \xi} I(s \in [t_0; T-h]) \Big|_{\substack{x=x(s+h) \\ \xi=x(s)}}, y^{k00}(s) \right\rangle + \right. \\ &+ \left. \left\langle p(s), \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) \Big|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k00}(s-h) I(s \in [t_k+h; T]) \Big|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} \right\rangle \right) ds = \end{aligned}$$

$$= H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})).$$

Производная функции φ по параметрам $v_{\mu,\alpha}^k$, $k = 1, 2, \dots, N$, $\mu = 1, 2, \dots, r$, $\alpha = 1, 2, \dots, d$, может быть записана в виде

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} = \frac{\partial g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))}{\partial x} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k}.$$

Второй сомножитель, полученный в правой части, представляет собой вариацию параметризованной траектории по параметрам $v_{\mu,\alpha}^k$.

Параметр $v_{\mu,\alpha}^k$ оказывает нетривиальное влияние на параметризованную траекторию с момента t_{k-1} , поэтому определим вариацию $y^{k\mu\alpha}(t)$ по данному параметру в виде

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; \bar{w}^j, v^{j+1})}{\partial v_{\mu,\alpha}^k}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad k-1 \leq j \leq N-1.$$

Дифференцируя (17) по $v_{\mu,\alpha}^k$ получаем

$$y^{k\mu\alpha}(T) = \int_{t_{k-1}}^T \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [t_{k-1}+h; T]) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I(s \in [t_{k-1}; t_k]) \right) ds; \quad (19)$$

здесь $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$. Принимая во внимание уравнение вариации (19), уравнение сопряженной переменной (16) и определение функции Понтрягина, можно вывести производную по $v_{\mu,\alpha}^k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} &= \langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle = \\ &= \langle p(t_k), y^{k\mu\alpha}(t_k) \rangle + \int_{t_k}^T \frac{d}{ds} \langle p(s), y^{k\mu\alpha}(s) \rangle = \int_{t_k}^T \left(\langle \dot{p}(s), y^{k\mu\alpha}(s) \rangle + \langle p(s), \dot{y}^{k\mu\alpha}(s) \rangle \right) ds = \\ &= \int_{t_k}^T \left(\left\langle - \frac{\partial H(p(s), x, \xi, u(s))}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H(p(s+h), x, \xi, u(s+h))}{\partial \xi} I(s \in [t_0; T-h]) \right|_{\substack{x=x(s+h) \\ \xi=x(s)}} y^{k\mu\alpha}(s) \rangle + \\ &\quad + \left\langle p(s), \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) \right|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} + \\ &\quad + \frac{\partial f(s, x(s), x(s-h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I(s \in [t_{k-1}; t_k]) + \\ &\quad + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [t_k+h; T]) \Big|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} \rangle \Big) ds = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(s, x(s), x(s-h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} ds. \end{aligned}$$

Если конечный момент времени T является подвижным, то производная целевой функции φ из (14) по конечному моменту находится достаточно просто:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = \frac{\partial g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))}{\partial x} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)}{\partial T}.$$

Найдем производную (17) по T :

$$\frac{\partial z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)}{\partial T} = f(T, x(T), x(T-h), u^N(T)). \quad (20)$$

Принимая во внимание выражение (20), уравнение сопряженной переменной (16) и определение функции Понтрягина, получаем

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = \langle p(T), f(T, x(T), x(T-h), u^N(T)) \rangle = H(T, p(T), x(T), x(T-h), u^N(T, v^N)).$$

Теорема доказана. $\square$

Теперь перейдем к задаче ОУ (1)–(5), которой соответствует задача НП (12). Вычисление производных целевой функции φ в задаче (12) также может быть сведено к использованию сопряженных переменных. Однако система сопряженных переменных не идентична (15), (16), введенной выше для задачи ОУ без разрыва фазовой траектории. В случае разрыва фазовой траектории сопряженные переменные также имеют разрыв.

Введем условие разрыва сопряженной траектории (см. [2]):

$$p(\tau_i-) = p(\tau_i+) \left(\frac{\partial \zeta_i(x)}{\partial x} \right)^T \Big|_{x=x(\tau_i-)}, \quad 1 \leq i \leq N^\tau. \quad (21)$$

Таким образом, в задаче ОУ (1)–(5) сопряженная система определяется условиями (15), (16), (21).

Теорема 2. Пусть функции f , g , ζ_i ($i \leq N^\tau$), входящие в постановку задачи (1)–(5), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче (12) по параметрам верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial t_k} &= H(t_k, p(t_k-), x(t_k-), x(t_k-h+), u^k(t_k, v^k)) - \\ &\quad - H(t_k, p(t_k+), x(t_k+), x(t_k-h+), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial \tau_i} &= H(\tau_i, p(\tau_i-), x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u(\tau_i-)) - \\ &\quad - H(\tau_i, p(\tau_i+), x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u(\tau_i+)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial T} &= H(T, p(T), x(T), x(T-h), u^N(T, v^N)); \\ \frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(s, p(s), x(s), x(s-h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} ds. \end{aligned}$$

Доказательство. Параметризованная траектория представляется в виде (9), (10). Введем формальную переменную $\tau_{N^\tau+1} = T$ и рассмотрим параметризованную траекторию с момента разрыва τ_i :

$$\begin{aligned} z(t; \overline{w^{l(t)}}, v^{l(t)+1}, \overline{\tau_j}) &= \zeta_j(z(\tau_j-; \overline{w^{l(\tau_j-)}}, v^{l(\tau_j-)+1}, \overline{\tau_{j-1}})) + \\ &\quad + \int_{\tau_j}^t f\left(s, z(s; \overline{w^{l(s)}}, v^{l(s)+1}, \overline{\tau_j}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{l(s)+1}(s; v^{l(s)+1})\right) ds, \end{aligned} \quad (22)$$

$\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$, $i \leq j < N^\tau$; $\tau_j \leq t \leq \tau_{j+1}$, $j = N^\tau$. Так как параметр τ_i оказывает нетривиальное влияние с момента τ_i , то определим вариацию $y^{i00}(t)$ с этого момента как производную фазовой траектории по τ_i :

$$y^{i00}(t) = \frac{\partial z(t; \overline{w^{l(t)}}, v^{l(t)+1}, \overline{\tau_j})}{\partial \tau_i}, \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad i \leq j < N^\tau; \quad \tau_j \leq t \leq \tau_{j+1}, \quad j = N^\tau.$$

Продифференцируем соотношение (22) по τ_i . При $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ имеем

$$\begin{aligned} y^{i00}(t) = & \frac{\partial \zeta_i(x(\tau_i-))}{\partial x} f\left(\tau_i, x(\tau_i-), x(\tau_i - h+), u^{l(\tau_i-)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i-)+1})\right) - \\ & - f\left(\tau_i, x(\tau_i+), x(\tau_i - h+), u^{l(\tau_i+)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i+)+1})\right) + \\ & + \int_{\tau_i}^t \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{i00}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{i00}(s-h) I(s \in [\tau_i + h; T]) \right) ds. \end{aligned} \quad (23)$$

При $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$, $i < j < N^\tau$, а также при $\tau_{N^\tau} \leq t \leq T$, $j = N^\tau$ имеем

$$\begin{aligned} y^{i00}(t) = & \frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y^{i00}(\tau_j-) + \\ & + \int_{\tau_j}^t \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{i00}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{i00}(s-h) I(s \in [\tau_j + h; T]) \right) ds. \end{aligned} \quad (24)$$

В (23) и (24) $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$.

Покажем постоянство скалярного произведения $\langle p(t), y^{i00}(t) \rangle$ на каждом из сегментов $[\tau_j; \tau_{j+1}]$. Для этого воспользуемся полученной вариацией (23), (24), уравнением для сопряженной переменной (16) и определением функции Понтрягина:

$$\begin{aligned} \langle p(\tau_{j+1}-), y^{i00}(\tau_{j+1}-) \rangle &= \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{d}{ds} \langle p(s), y^{i00}(s) \rangle ds = \\ &= \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\langle \dot{p}(s), y^{i00}(s) \rangle + \langle p(s), \dot{y}^{i00}(s) \rangle) ds = \\ &= \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\left\langle - \frac{\partial H(p(s), x, \xi, u(s))}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H(p(s+h), x, \xi, u(s+h))}{\partial \xi} I(s \in [t_0; T-h]) \right|_{\substack{x=x(s+h) \\ \xi=x(s)}}, y^{i00}(s) \rangle + \\ &\quad + \left\langle p(s), \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{i00}(s) \right|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} + \\ &\quad + \left. \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{i00}(s-h) I(s \in [\tau_j + h; T]) \right|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} \rangle ds = \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle. \end{aligned}$$

Итак, между любыми соседними точками разрыва скалярное произведение $\langle p(t), y^{i00}(t) \rangle$ постоянно и выполняется равенство

$$\langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle = \langle p(\tau_{j+1}-), y^{i00}(\tau_{j+1}-) \rangle.$$

Воспользуемся условиями, выполняющимися при разрыве вариации (24) и сопряженной траектории (21):

$$\begin{aligned} \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle &= \left\langle p(\tau_j+), \frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y^{i00}(\tau_j-) \right\rangle = \\ &= \left\langle p(\tau_j+) \left(\frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} \right)^T, y^{i00}(\tau_j-) \right\rangle = \langle p(\tau_j-), y^{i00}(\tau_j-) \rangle. \end{aligned}$$

Полученное соотношение показывает равенство скалярного произведения слева и справа в точке разрыва. Таким образом, скалярное произведение постоянно на всем промежутке определения функций $y^{i00}(t)$ и $p(t)$. В частности,

$$\langle p(\tau_i+), y^{i00}(\tau_i+) \rangle = \langle p(T), y^{i00}(T) \rangle.$$

Для вывода производной по τ_i воспользуемся полученной вариацией (23), постоянством скалярного произведения, конечным условием сопряженной переменной (16) и определением функции Понтрягина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N\tau}})}{\partial \tau_i} &= \\ &= \frac{\partial g(z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N\tau}}))}{\partial x} \frac{\partial z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N\tau}})}{\partial \tau_i} = \langle p(T), y^{i00}(T) \rangle = \langle p(\tau_i+), y^{i00}(\tau_i+) \rangle = \\ &= \left\langle p(\tau_i+), \frac{\partial \zeta(x(\tau_i-))}{\partial x} f\left(\tau_i, x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i-)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i-)+1})\right) \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle p(\tau_i+), f\left(\tau_i, x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i+)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i+)+1})\right) \right\rangle = \\ &= H\left(\tau_i, p(\tau_i-), x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i-)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i-)+1})\right) - \\ &\quad - H\left(\tau_i, p(\tau_i+), x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i+)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i+)+1})\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N\tau}})}{\partial \tau_i} &= H\left(\tau_i, p(\tau_i-), x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u(\tau_i-)\right) - \\ &\quad - H\left(\tau_i, p(\tau_i+), x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u(\tau_i+)\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим производную по моменту переключения управления t_k . Если момент переключения управления совпадает с моментом разрыва фазовой траектории, то вывод производной по t_k аналогичен выводу по моменту разрыва фазовой траектории. Пусть t_k не является моментом разрыва фазовой траектории.

Параметризованная траектория представляется в виде (8), (9), (10). Так как параметр t_k оказывает влияние с момента t_k , то параметризованную траекторию при $t \in [t_k; \tau_{m(t_k)+1})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} z(t; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t_k)}}) &= z(t_k; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t_k)}}) + \\ &+ \int_{t_k}^t f\left(s, z(s; \overline{w^{l(s)}}, v^{l(s)+1}, \overline{\tau_{m(t_k)}}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{l(s)+1}(s; v^{l(s)+1})\right) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

При $t \geq \tau_{m(t_k)+1}$ параметризованная траектория представляется системой (22), где начальный индекс $i = m(t_k) + 1$.

Определим вариацию $y_u^{k00}(t)$ как производную фазовой траектории по t_k при $t \in [t_k; \tau_{m(t_k)+1})$ из соотношения (25), а при $t \geq \tau_{m(t_k)+1}$ — из соотношения (22).

При $t_k \leq t < \tau_{m(t_k)+1}$ имеем

$$y_u^{k00}(t) = f\left(t_k, x(t_k), x(t_k - h+), u^k(t_k, v^k)\right) - f\left(t_k, x(t_k), x(t_k - h+), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) + \\ + \int_{t_k}^t \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y_u^{k00}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y_u^{k00}(s - h) I(s \in [t_k + h; T]) \right) ds. \quad (26)$$

При $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$, $m(t_k) + 1 \leq j < N^\tau$, а также при $\tau_{N^\tau} \leq t \leq T$, $j = N^\tau$ имеем

$$y_u^{k00}(t) = \frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y_u^{k00}(\tau_j-) + \\ + \int_{\tau_j}^t \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y_u^{k00}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y_u^{k00}(s - h) I(s \in [\tau_j + h; T]) \right) ds. \quad (27)$$

В (26), (27) $x = x(s)$, $\xi = x(s - h)$.

Скалярное произведение $\langle p(t), y_u^{k00}(t) \rangle$ является постоянным при $t \in [t_k; T]$. Проводя рассуждения, аналогичные выводу производной по моменту разрыва фазовой траектории τ_i , имеем

$$\langle p(T), y_u^{k00}(T) \rangle = \langle p(t_k+), y_u^{k00}(t_k+) \rangle.$$

Исходя из полученного соотношения, начальных условий в (26), конечного условия сопряженной переменной (16), определения функции Понтрягина, получаем

$$\frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial t_k} = \\ = \frac{\partial g(z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}}))}{\partial x} \frac{\partial z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial t_k} = \langle p(T), y_u^{k00}(T) \rangle = \langle p(t_k), y_u^{k00}(t_k) \rangle = \\ = \left\langle p(t_k), f\left(t_k, x(t_k), x(t_k - h+), u^k(t_k, v^k)\right) - f\left(t_k, x(t_k), x(t_k - h+), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) \right\rangle = \\ = H\left(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h+), u^k(t_k, v^k)\right) - H\left(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h+), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right).$$

Параметр $v_{\mu, \alpha}^k$ оказывает нетривиальное воздействие на фазовую траекторию начиная с момента t_{k-1} . Рассмотрим фазовую траекторию при $t \in [t_{k-1}; \tau_{m(t_{k-1})+1})$:

$$z(t; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t_{k-1})}}) = z(t_{k-1}; \overline{w^{k-2}}, v^{k-1}, \overline{\tau_{m(t_{k-1})}}) + \\ + \int_{t_{k-1}}^t f\left(s, z(s; \overline{w^{l(s)}}, v^{l(s)+1}, \overline{\tau_{m(t_{k-1})}}), z(s - h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{l(s)+1}(s; v^{l(s)+1})\right) ds. \quad (28)$$

Введем вариацию $y^{k\mu\alpha}(t)$ как производную параметризованной траектории по параметрам $v_{\mu, \alpha}^k$. При $t \in [t_{k-1}; \tau_{m(t_{k-1})+1})$ продифференцируем соотношение (28), при $t \geq \tau_{m(t_{k-1})+1}$ — соотношение (22).

При $t_{k-1} \leq t < \tau_{m(t_{k-1})+1}$ имеем

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \int_{t_{k-1}}^t \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s - h) I(s \in [t_{k-1} + h; T]) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} I(s \in [t_{k-1}; t_k]) \right) ds. \quad (29)$$

При $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$, $m(t_{k-1}) + 1 \leq j < N^\tau$, а также при $\tau_{N^\tau} \leq t \leq T$, $j = N^\tau$ имеем

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(\tau_j-) + \int_{\tau_j}^t \left(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [\tau_j + h; T]) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I(s \in [t_{k-1}; t_k]) \right) ds. \quad (30)$$

В (29), (30) $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$.

При $t \geq t_k$ скалярное произведение $\langle p(t), y^{k\mu\alpha}(t) \rangle$ постоянно; обоснование аналогично приведенному для $\langle p(t), y^{i00}(t) \rangle$. Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\langle p(t_k), y^{k\mu\alpha}(t_k) \rangle = \langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle.$$

Найдем производную целевой функции по $v_{\mu,\alpha}^k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} &= \frac{\partial g(z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}}))}{\partial x} \frac{\partial z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} = \\ &= \langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle = \langle p(t_k), y^{k\mu\alpha}(t_k) \rangle = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{ds} \langle p(s), y^{k\mu\alpha}(s) \rangle ds = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\langle \dot{p}(s), y^{k\mu\alpha}(s) \rangle + \langle p(s), \dot{y}^{k\mu\alpha}(s) \rangle \right) ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\left\langle - \frac{\partial H(p(s), x, \xi, u(s))}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H(p(s+h), x, \xi, u(s+h))}{\partial \xi} I(s \in [t_0; T-h]) \right|_{\substack{x=x(s+h) \\ \xi=x(s)}} y^{k\mu\alpha}(s) \rangle + \\ &\quad + \left\langle p(s), \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [t_{k-1} + h; T]) \right\rangle \Big|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} + \\ &\quad + \frac{\partial f(s, x(s), x(s-h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} \Big) ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p(s), x(s), x(s-h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} ds. \end{aligned}$$

Производная по моменту T находится так же, как в теореме 1. $\square$

4. Вычислительные эксперименты. Приведем примеры, подтверждающие работоспособность предлагаемого алгоритма.

Пример 1. В [4] рассмотрен следующий пример:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x^0, \quad u(t) \geq 0, \quad t \in [0; 1]; \quad (31)$$

требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^1 x^2(t) dt. \quad (32)$$

Функционал $J(\cdot)$ ограничен снизу нулем, который не достигается в классе процессов с кусочно непрерывным управлением $u(t)$ и непрерывной фазовой траекторией $x(t)$. Однако если добавить условие на возможный разрыв траектории $x(t)$, то в полученной задаче можно найти решение с $J(u) = 0$. Пусть $x(0+) = 0$, $u(t) = 0$ при всех $t \in [0; 1]$, тогда $J(u) = 0$.

Таблица 1. Результаты решения задачи (33) в классе кусочно постоянных управлений.

x^0	v_1	τ	v_2	J_{1000}	Δt	время
-0,25	24,945	0,0100	$7,028 \cdot 10^{-5}$	$3,125 \cdot 10^{-4}$	0,01	4
-0,25	117,02	0,0021	$7,021 \cdot 10^{-6}$	$4,907 \cdot 10^{-5}$	0,001	19
-0,25	121,22	0,0020	$5,362 \cdot 10^{-7}$	$4,301 \cdot 10^{-5}$	0,0001	125
-2,5	248,56	0,0100	$2,263 \cdot 10^{-6}$	$3,125 \cdot 10^{-2}$	0,01	4
-2,5	737,72	0,0034	$5,043 \cdot 10^{-10}$	$7,337 \cdot 10^{-3}$	0,001	17
-2,5	1163,6	0,0021	$-2,128 \cdot 10^{-10}$	$4,481 \cdot 10^{-3}$	0,0001	163

Для дальнейшего применения метода параметризации исходная задача (31), (32) была приведена к терминальной форме:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u, \quad \dot{x}_2 = x_1^2, \quad \dot{x}_3 = ([-u]^+)^2; \\
 x_1(0) &= x^0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0; \\
 J_C(u) &= x_2(1) + Cx_3(1) \rightarrow \inf.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $[a]^+ = a$, если $a > 0$ и $[a]^+ = 0$ в противном случае.

Решение задачи (33) проводилось методом параметризации в двух вариантах. В первом варианте в классе кусочно постоянных управлений с одним моментом переключения

$$u(t) = \begin{cases} v_1, & 0 \leq t < \tau; \\ v_2, & \tau \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{34}$$

Задача нелинейного программирования, порождаемая методом параметризации управления, содержит три переменных: v_1, v_2, τ . Задача решалась последовательно методом скорейшего спуска и методом Ньютона. Вычисление первых производных проводилось на основе нахождения соответствующих задач Коши методом Рунге—Кутты второго порядка с шагом интегрирования Δt . Вычисление вторых производных проводилось конечно-разностной аппроксимацией градиентов. В качестве начального приближения были выбраны значения $v_1 = 1, v_2 = 2, \tau = 0,5$. В таблице 1 приведены результаты решения.

В таблицах 1, 2 столбец «время» содержит значение длительности поиска решения. Единицы измерения можно считать условными, например, секунды. Из таблицы 1 видно, что при уменьшении шага интегрирования Δt : момент переключения τ стремится к 0; $v_1 \cdot \tau \approx -x^0$; v_2 стремится к 0. Таким образом, получаемое управление имеет «игольчатый» вид, ненулевую меру.

Второй вариант решения состоял в представлении управления в постоянном виде с одним управляемым разрывом фазовой траектории: $u(t) = v, 0 \leq t \leq 1; x(\tau+) = x(\tau-) + \Delta x$.

В задаче нелинейного программирования, порожденной методом параметризации, содержатся переменные $v, \tau, \Delta x$. Задача НП решалась последовательно методом скорейшего спуска и методом Ньютона. Аналогично задаче НП без учета разрыва фазовой траектории вычисление первых производных проводилось на основе нахождения соответствующих задач Коши методом Рунге—Кутты второго порядка с шагом интегрирования Δt , вычисление вторых производных — конечно-разностной аппроксимацией градиентов. В качестве начального приближения были выбраны значения $v = 0,3, \tau = 0,5, \Delta x = 0,3$. В таблице 2 приведены результаты решения.

Из таблицы 2 следует, что получаемое решение практически не зависит от шага интегрирования, качество решения существенно выше, чем решение, получаемое при кусочно постоянном виде управляющей функции. Таким образом, применение метода параметризации к задачам оптимального управления с разрывом фазовой траектории является оправданным.

Пример 2. В [4] рассмотрена модель оптимизации кредитной стратегии фирмы в виде задачи ОУ. На основе аналитических преобразований модель сводится к однофазовой с интегральным

Таблица 2. Результаты решения задачи (33) в классе постоянных управлений с разрывом фазовой траектории.

x^0	v	τ	Δx	J_{1000}	Δt	время
-0,25	$2,11 \cdot 10^{-7}$	$6,05 \cdot 10^{-14}$	0,25000	$7,26 \cdot 10^{-15}$	0,01	2
-0,25	$2,32 \cdot 10^{-7}$	$2,507 \cdot 10^{-13}$	0,25000	$2,048 \cdot 10^{-14}$	0,001	9
-0,25	$2,32 \cdot 10^{-7}$	$2,507 \cdot 10^{-13}$	0,25000	$2,048 \cdot 10^{-14}$	0,0001	65
-2,5	$1,97 \cdot 10^{-6}$	$5,852 \cdot 10^{-11}$	2,5625	$3,660 \cdot 10^{-10}$	0,01	2
-2,5	$9,05 \cdot 10^{-7}$	$5,681 \cdot 10^{-11}$	2,50000	$3,553 \cdot 10^{-10}$	0,001	13
-2,5	$9,05 \cdot 10^{-7}$	$5,676 \cdot 10^{-11}$	2,50000	$3,550 \cdot 10^{-10}$	0,0001	107

функционалом:

$$J = \int_0^T e^{-rt} u_1(t) dt \rightarrow \max_{u_1, u_2}; \quad (35)$$

$$\dot{x} = R((1 + \alpha u_2)x) - (\beta(1 + \alpha u_2) + \alpha r u_2)x - u_1;$$

$$x(0) = x^0; \quad x(t) \geq 0; \quad u_1(t) \geq 0; \quad 0 \leq u_2(t) \leq 1.$$

Здесь $R(\cdot)$ представляет собой аналог неоклассической производственной функции (вогнутая, монотонно возрастающая, при нулевом аргументе равна нулю); $x(t)$ — разность между оценкой основных фондов фирмы и кредитной задолженностью; $u_1(t)$ — средства, переводимые на депозит; $u_2(t)$ — доля от максимально возможного значения кредитной задолженности; параметры: β — норма амортизации капитала, r — банковская ставка, α — величина, определяющая максимально возможную величину кредита относительно $x(t)$. В [4] показано, что оптимальное решение задачи (35) может иметь разрывы фазовой траектории.

Для проведения вычислительных экспериментов сформулируем модель (35) в терминальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= R((1 + \alpha u_2)x_1) - (\beta(1 + \alpha u_2) + \alpha r u_2)x_1 - u_1; \\ \dot{x}_2 &= e^{-rt} u_1(t); \\ \dot{x}_3 &= ([-u_1]^+)^2 + ([-u_2]^+)^2 + ([u_2 - 1]^+)^2; \\ x_1(0) &= x_1^0; \quad x_2(0) = 0; \quad x_3(0) = 0; \\ J_C &= -x_2(T) + C \left(x_3(T) + ([-x_1]^+)^2 \right) \rightarrow \min_{u_1, u_2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Параметры модели примем следующими: $\alpha = 1,5$, $\beta = 0,25$, $r = 0,2$, $T = 5$. Будем считать, что производственная функция $R(y) = \sqrt{y}$.

Задача (36) решалась методом параметризации в классе постоянных управлений с управляемым разрывом фазовой траектории, кусочно постоянных управлений с управляемым разрывом фазовой траектории. Усложнение структуры управления происходило поэтапно: сперва решалась задача с постоянным управлением и одним разрывом фазовой траектории (4 переменные в задаче НП), затем вместо постоянного управления вводилось кусочно постоянное для каждого управления (8 переменных в задаче НП), после этого кусочно постоянное с двумя моментами переключения (12 переменных). При усложнении управления решение, полученное на предыдущем этапе, выбиралось как начальное для следующего этапа. Задачи Коши решались методом Рунге—Кутты второго порядка с шагом интегрирования 0,001. В таблице 3 приведены результаты решения для различных значений x_1^0 .

В таблице 3 представлены управляющие функции, полученные на последнем (третьем) этапе усложнения структуры управления; τ — момент разрыва фазовой траектории; Δx — величина разрыва x_1 : $x_1(\tau+) = x_1(\tau-) - \Delta x$, $x_2(\tau+) = x_2(\tau-) + \Delta x$.

Таблица 3. Результаты решения задачи (36).

x^0	u_1	u_2	Δx	τ	$x_2(T+)$	J_{1000}
1	0,831, $0 \leq t < 0,32$ 0,849, $0,32 \leq t \leq 5$	0,351, $0 \leq t < 0,48$ 0,536, $0,48 \leq t \leq 5$	0,0368	5	2,715	-2,715
10	2,091, $0 \leq t < 0,22$ 0,895, $0,22 \leq t < 0,42$ 1,065, $0,42 \leq t \leq 5$	0, $0 \leq t < 3,43$ 1, $3,43 \leq t \leq 5$	8,1618	$1 \cdot 10^{-13}$	11,79	-11,71
100	16,788, $0 \leq t < 1,27$ 3,818, $1,27 \leq t < 1,45$ 2,058, $1,45 \leq t \leq 5$	0, $0 \leq t \leq 5$	74,005	0	97,249	-97,249

Анализируя результаты в таблице 3, можно отметить, что во всех экспериментах управление u_2 , несмотря на то, что искалось в классе кусочно постоянных функций с двумя переключениями, представлено управлением более простой структуры. Если начальное значение x_1^0 большое (100), то компании нет смысла брать кредит ($u_2 \equiv 0$). Компания в начальный момент переводит часть капитала на депозит, оставшееся время ждет, пока приведенный капитал не станет равным нулю в конечный момент $x_1(T) = 0$. При умеренном начальном значении $x_1^0 = 10$ компания также часть капитала в начальный момент переводит на депозит, затем до определенного момента не берет кредит, а после этого момента и до конца за счет кредита приходит к состоянию $x_1(T) = 0$. Такой подход объясняется тем, что вес средств на депозите в начале периода планирования существенно выше, чем в конце. Если же в начале приведенный капитал мал $x_1^0 = 1$, компания в течении периода планирования кредитруется, в конечный момент остаток средств выше долга переводит на депозит.

5. Выводы. Теоремы 1, 2 дают алгоритм вычисления производных первого порядка целевой функции в задаче нелинейного программирования (14), аппроксимирующей задачу ОУ с постоянным запаздыванием, и в задаче (12), аппроксимирующей задачу ОУ с постоянным запаздыванием и управляемыми разрывами фазовой траектории. Это открывает возможность применения методов решения задач ОУ на основе методов дифференцируемой оптимизации первого порядка, при этом получаемые задачи НП имеют относительно невысокую размерность.

Представленные алгоритмы решения задач ОУ с запаздыванием и разрывом фазовой траектории были применены при анализе модели управления экономической системой в условиях массового заболевания (см. [5,6,9]). Алгоритмы решения задач ОУ с постоянным запаздыванием применялись при анализе инвестиционной модели двухсекторной экономики (см. [5]).

В данной работе приведены вычислительные эксперименты для двух задач ОУ с управляемым разрывом фазовой траектории. Результаты экспериментов показывают работоспособность предлагаемого подхода к решению таких задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будах Б. М., Беркович Е. М., Соловьева Е. П. О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1969. — 9, № 3. — С. 522–547.
2. Горбунов В. К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1978. — 18, № 5. — С. 1083–1095.
3. Горбунов В. К. Метод параметризации задач оптимального управления // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1979. — 19, № 2. — С. 292–303.
4. Дыхта В. А., Самсонок О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. — М.: Физматлит, 2000.
5. Луточкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа. — Ульяновск: УлГУ, 2024.

6. *Лутешкин И. В., Рыбина М. С.* Оптимизация в модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2024. — № 49. — С. 16–31.
7. *Максимов В. П.* Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики// Прикл. мат. вопр. управл. — 2019. — № 4. — С. 124–135.
8. *Aubin J.-P.* Time and Money. How Long and How Much Money is Needed to Regulate a Viable Economy. — Cham, 2014.
9. *Lutoshkin I. V., Rybina M. S.* Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2023. — 23, № 2. — С. 264–273.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-28-00542).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Лутешкин Игорь Викторович (Lutoshkin Igor Viktorovich)

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

(Ul'yankovsk State University, Ul'yankovsk, Russia)

E-mail: lutoshkiniv@ulsu.ru

Рыбина Мария Сергеевна (Rybina Maria Sergeevna)

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

(Ul'yankovsk State University, Ul'yankovsk, Russia)

E-mail: rybina_maria@icloud.com



ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ БЫСТРОЙ ЦВЕТНОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕАБЕЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ В РАМКАХ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА

© 2025 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. Выведена общая формула для потери энергии быстрой цветозаряженной частицы при её рассеянии на мягких бозонных возбуждениях кварк-глюонной плазмы в рамках классического гамильтонова формализма. Введено понятие эффективного тока рассматриваемого процесса рассеяния, определена его связь с классической матрицей рассеяния и найдена формула для потерь энергии высокоэнергетичной цветной частицы, движущейся в высокотемпературной плазме с неабелевым типом взаимодействия.

Ключевые слова: потери энергии, кварк-глюонная плазма, эффективный ток, классическая матрица рассеяния.

ENERGY LOSS OF A HIGH-SPEED COLOR PARTICLE IN A NON-ABELIAN PLASMA WITHIN THE FRAMEWORK OF THE HAMILTONIAN FORMALISM

© 2025 Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV

ABSTRACT. A general formula for the energy loss of a fast color-charged particle in the process of its scattering on soft boson excitations of quark-gluon plasma is derived within the framework of the classical Hamiltonian formalism. The concept of the effective current of the scattering process is introduced, its relationship with the classical scattering matrix is determined, and a formula for the energy loss of a high-energy color particle moving in a high-temperature plasma with a non-Abelian interaction type is found.

Keywords and phrases: energy losses, quark-gluon plasma, effective current, classical scattering matrix.

AMS Subject Classification: 74J20, 82D10

1. Введение. В первой работе [6] цикла, состоящего из двух статей, нами была построена классическая $\mathcal{S}$ -матрица рассеяния, определяющая процесс упругого рассеяния коллективного бозе-возбуждения с продольной поляризацией (плазмона) на жесткой цветной частице. Классическая матрица рассеяния была представлена в виде экспоненциальной функции

$$\mathcal{S} = e^{i\mathcal{T}}, \quad (1.1)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

с вещественной фазой $\mathcal{T}$, которая, для рассматриваемого процесса рассеяния задается следующим выражением:

$$\mathcal{T} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-b}. \quad (1.2)$$

Здесь коэффициентная функция в подинтегральном выражении имеет вид

$$G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} = -\frac{i}{2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) b a_1 a_2} 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}), \quad (1.3)$$

где $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) b a_1 a_2}$ — полная эффективная амплитуда, определяющая процесс упругого рассеяния плазмона на жесткой частице, найденная нами в [15], а $\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ — так называемая «резонансная разность частот»

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

Целью данной работы является приложение общей теории построения классической матрицы рассеяния для волновых систем с распределенными параметрами к задаче вычисления потерь энергии высокоэнергетической цветозаряженной частицы, проходящей через горячую кварк-глюонную плазму, т.е. потерь энергии вследствие процесса рассеяния на мягких бозонных возбуждениях среды. Как известно, для получения искомого выражения потерь энергии, необходимо знать некоторые эффективные токи бозонного или фермионного типов, связанные с интересующими нас процессами рассеяния. В рамках квантовой теории поля (см., например, [2, 3]) операторы бозонных и фермионных токов представляют собой так называемые радиационные операторы первого порядка, которые, в свою очередь, выражаются через вариационные производные квантовой $\mathcal{S}$ -матрицы. Эти соотношения предполагается использовать для получения классических бозонных, а также фермионных токов, где вместо квантовой $\mathcal{S}$ -матрицы будет использоваться классическая $\mathcal{S}$ -матрица в духе Захарова—Шульмана.

Подход к определению эффективного бозонного тока на основе квантовой $\mathcal{S}$ -матрицы уже был использован в ряде работ в приложении к задачам горячей КХД среды. Например, R. Jaskiw и V. P. Naig использовали данный эффективный ток для получения высокотемпературных функций отклика для неабелевой плазмы и соответствующего неабелевого обобщения формулы Кубо (см. [11]). В [10] формула, связывающая бозонный ток и $\mathcal{S}$ -матрицу, была использована для простого вывода эффективного действия для жестких температурных петель.

2. Общее выражение для потерь энергии заряженной частицы в плазме. В качестве приложения теории, развитой в [15], в рамках гамильтонова подхода рассмотрим задачу вычисления потерь энергии быстрой цветозаряженной частицы, проходящей через высокотемпературную кварк-глюонную плазму, связанных с процессом рассеяния данной частицы на мягких бозонных возбуждениях среды. В качестве исходного выражения будем использовать классическое выражение для потерь энергии партонов на единицу длины, являющееся минимальным расширением на цветовую степень свободы стандартной формулы для потерь энергии в обычной электромагнитной плазме (см. [1]):

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dx} &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int d\mathbf{x} dt \int d\mathcal{Q}_0 \operatorname{Re} \langle \mathbf{J}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{x}, t) \rangle = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^4}{\tau} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathcal{Q}_0 \operatorname{Re} \langle \mathbf{J}_{\mathcal{Q}}^{*a}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{k}, \omega) \rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь хромоэлектрическое поле $\mathbf{E}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{x}, t)$ определено в месте локализации частицы. К процедуре усреднения по ансамблю в выражении (2.1) мы добавили интегрирование по начальному значению цветного заряда $\mathcal{Q}_0^a$ жесткой частицы с мерой, обеспечивающей сохранение групповых

инвариантов (см. [12]):

$$d\mathcal{Q}_0 \equiv \mu \prod_{a=1}^{d_A} d\mathcal{Q}_0^a \delta(\mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^a - q_2) \delta(d^{abc} \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b \mathcal{Q}_0^c - q_3) \delta(d^{abcd} \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b \mathcal{Q}_0^c \mathcal{Q}_0^d - q_4) \dots, \quad (2.2)$$

где $d_A = N_c^2 - 1$ — размерность цветовой алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$; d^{abc} — полностью симметричные структурные константы данной алгебры, $a, b, c = 1, \dots, N_c$. Все остальные высшие (симметризованные) структурные константы для $\mathfrak{su}(N_c)$ выражаются через цветные тензоры δ^{ab} и d^{abc} (см., например, [7, 13, 17]). Число произведений δ -функций в правой части (2.2) равно рангу алгебры $\mathfrak{su}(N_c)$, т.е. $N_c - 1$. Так, например, в частном случае алгебры $\mathfrak{su}(2_c)$ необходимо оставить только первую δ -функцию, для алгебры $\mathfrak{su}(3_c)$ — две δ -функции в (2.2) и т. п. Константы $q_2, q_3, \dots$ фиксируют (зависимые от представления) значения квадратичного, кубического и т. д. инвариантов Казимира. В присоединенном представлении групповая константа q_2 — глюонный элемент Казимира $C_A = N_c$. Общий множитель μ , зависящий от N_c , в мере (2.2) выбирается так, чтобы выполнялась нормировка

$$\int d\mathcal{Q}_0 = 1,$$

следствием чего, в частности, являются равенства

$$\int d\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_0^a = 0, \quad \int d\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b = \frac{q_2}{d_A} \delta^{ab}, \quad \int d\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b \mathcal{Q}_0^c = \frac{q_3}{d_A} \left(\frac{N_c^2 - 4}{N_c} \right)^{-1} d^{abc} \quad (2.3)$$

и т. д.

3. Эффективный ток. Для определения потерь энергии необходимо знать некоторый эффективный ток жесткой цветозаряженной частицы при взаимодействии последней с окружающей средой. В качестве руководящей идеи здесь мы апеллируем к квантовой теории поля. Как уже упоминалось во введении, в свое время в рамках $\mathcal{S}$ -матричного формализма было введено в рассмотрение важное понятие *радиационных операторов* (см. [2, 3]). Среди них особую роль играет радиационный оператор первого порядка (оператор тока), задаваемый общей формулой

$$\hat{J}^{(\kappa)l}(x) = -i\hat{S}^\dagger \frac{\delta \hat{S}}{\delta \hat{\phi}_l^{\text{in}(\kappa)}(x)} \quad \text{или} \quad \hat{J}^{(\kappa)l}(x) = i \frac{\delta \hat{S}}{\delta \hat{\phi}_l^{\text{out}(\kappa)}(x)} \hat{S}^\dagger, \quad (3.1)$$

где индекс κ определяет тип поля $\hat{\phi}^{(\kappa)}$. Каждое из полей $\hat{\phi}^{(\kappa)}$ является тензорнозначной или спин-тензорнозначной величиной с конечным числом лоренцевых компонент $\hat{\phi}_l^{(\kappa)}$, $l = 1, \dots, r_\kappa$. Это выражение, например, для квантовой электродинамики, когда $\hat{\phi}_l(x) \equiv A_\mu(x)$, представляет собой, с точностью до знака, оператор электромагнитного тока, одетый радиационными поправками.

По аналогии с квантовой теорией поля определим связь между классической матрицей рассеяния $\mathcal{S}$ и эффективным током жесткой цветозаряженной частицы с помощью следующего выражения:

$$\mathcal{J}_Q^{a\mu}(\mathbf{x}, t) = -i\mathcal{S}^\dagger \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathcal{A}_\mu^{-a}(\mathbf{x})}. \quad (3.2)$$

Эффективный *одетый* ток (3.2) энергичной цветной частицы возникает в результате экранирующего действия всех термальных жестких частиц и взаимодействий с мягким цветным полем плазмы. Так как асимптотические in- и out-поля $\mathcal{A}_\mu^{-a}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{A}_\mu^{+a}(\mathbf{x})$, соответственно, удовлетворяют уравнениям свободного поля, они могут быть разложены на положительную и отрицательную частотные части инвариантным образом, так что разложение будет справедливым для всех моментов времени. Так например, можно написать

$$\mathcal{A}_\mu^{-a}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{-a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}^l t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*l}(\mathbf{k}) (c_{\mathbf{k}}^{-a})^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}^l t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right\}, \quad (3.3)$$

где $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ — асимптотические in-амплитуды, $\omega_{\mathbf{k}}^l$ — спектр продольных колебаний кварк-глюонной плазмы. Явный вид вектора поляризации продольной моды $\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k}) = (\epsilon_0^l(\mathbf{k}), \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}))$ в A_0 -калибровке определяется следующим выражением:

$$\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{u}_{\mu}(k)}{\sqrt{-\tilde{u}^2(k)}} \Big|_{\text{on-shell}}, \quad (3.4)$$

так что имеем очевидную нормировку

$$\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k}) \epsilon^{*l\mu}(\mathbf{k}) = -1.$$

Здесь продольный проектор $\tilde{u}_{\mu}(k)$ в лоренц-ковариантной форме имеет вид

$$\tilde{u}_{\mu}(k) = \frac{k^2}{(k \cdot u)} (k_{\mu} - u_{\mu}(k \cdot u)),$$

где вектор u_{μ} — 4-скорость среды, $\mu = 0, 1, 2, 3$. В частности, имеем $\tilde{u}_0(k) = 0$ в системе покоя кварк-глюонной плазмы, когда $u_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Как следствие определения (3.4) немедленно получаем $\epsilon_0^l(\mathbf{k}) = 0$. Очевидно, что

$$(\boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}))^2 = 1 \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) = 1, \quad (3.5)$$

где $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ и принята во внимание вещественность вектора поляризации. Подчеркнем, что в разложении (3.3) независимость амплитуд $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ от времени является принципиально важной, как это будет показано ниже.

Можно разрешить (3.3) относительно $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$, т.е. выразить нормальные переменные в терминах функции поля в координатном представлении $\mathcal{A}_i^{-a}(x)$, $i = 1, 2, 3$, и ее производной по времени $\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(x)$ (см. [4, 5]). С учетом нормировки (3.5) результат будет следующим:

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}}^{-a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{i\omega_{\mathbf{k}}^l t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \left[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) \right], \\ (c_{\mathbf{k}}^{-a})^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}^l t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \left[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) \right]. \end{aligned}$$

Как уже говорилось выше, функции $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ в левой части по определению не зависят от времени t , поэтому правая часть этих выражений также не должна зависеть от t . По этой причине можно считать t равным произвольной постоянной и, в частности, полагать $t = 0$. Тогда вместо последних выражений будем иметь

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}}^{-a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \left[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, 0) + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, 0) \right], \\ (c_{\mathbf{k}}^{-a})^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \left[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, 0) - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, 0) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее, принимая во внимание представление (1.1), переписываем правую часть исходного выражения для эффективного тока (3.2) в следующем виде:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^{ai}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} = \int d\mathbf{k}_1 \left\{ \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a1}} \frac{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a1}}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} + \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta (c_{\mathbf{k}_1}^{-a1})^*} \frac{\delta (c_{\mathbf{k}_1}^{-a1})^*}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} \right\}. \quad (3.7)$$

Используя явные выражения (3.6), легко находим соответствующие вариационные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a1}}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} &= \delta^{aa1} \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}{Z_l(\mathbf{k}_1)} \right)^{1/2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}_1) \delta(t), \\ \frac{\delta (c_{\mathbf{k}_1}^{-a1})^*}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} &= \delta^{aa1} \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}{Z_l(\mathbf{k}_1)} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}_1) \delta(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

При выводе этих соотношений функциональную производную от калибровочного потенциала с производной $\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, 0)$ по отношению к $\mathcal{A}_i^{-a}(x)$ полагаем равной нулю, считая что данные функции являются независимыми. Используя явный вид (1.2) фазовой функции $\mathcal{T}$ и вариационные производные (3.8), находим из (3.7) искомый трехмерный вектор эффективного тока в координатном представлении:

$$\mathcal{J}_Q^a(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 ab} F_{\mathbf{k}_2} \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) aa_2 b} F_{\mathbf{k}_1} \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \right\} \delta(t) \mathcal{Q}^{-b}.$$

Здесь для краткости обозначений полагаем

$$F_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Соответствующий ток в фурье-представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_Q^a(\mathbf{k}, \omega) &= \int dt d\mathbf{x} \mathcal{J}_Q^a(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \\ &= (2\pi)^3 \int d\mathbf{k}_1 G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 ab} F_{-\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}^l(-\mathbf{k}) (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* \mathcal{Q}^{-b} + (2\pi)^3 \int d\mathbf{k}_2 G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{(2) aa_2 b} F_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-b}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. Формула для потерь энергии жесткой цветозаряженной частицы. Вернемся теперь к выражению для потерь энергии (2.1). Хромоэлектрическое поле в (2.1), порождаемое эффективным током (3.10), определяется уравнением поля, которое в A_0 -калибровке имеет вид

$$E_Q^{ai}(\mathbf{k}, \omega) = -i\omega {}^*\tilde{\mathcal{D}}^{ij}(k) \mathcal{J}_Q^{aj}(\mathbf{k}, \omega),$$

где $i, j = 1, 2, 3$. Отличные от нуля компоненты эффективного глюонного пропагатора в данной калибровке задаются следующим выражением:

$${}^*\tilde{\mathcal{D}}^{ij}(k) = \left(\frac{k^2}{\omega^2} \right) \frac{k^i k^j}{k^2} {}^*\Delta^l(k) + \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) {}^*\Delta^t(k). \quad (4.1)$$

Здесь «скалярные» поперечный и продольный пропагаторы определены как

$${}^*\Delta^t(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^t(k)}, \quad {}^*\Delta^l(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^l(k)},$$

где, в свою очередь, «скалярные» поперечный и продольный поляризационные операторы

$$\Pi^t(k) = \frac{1}{2} \Pi^{\mu\nu}(k) P_{\mu\nu}(k), \quad \Pi^l(k) = \Pi^{\mu\nu}(k) \tilde{Q}_{\mu\nu}(k)$$

определяются с помощью соответствующих проекторов $P_{\mu\nu}(k)$ и $\tilde{Q}_{\mu\nu}(k)$, которые в лоренц-инвариантной форме задаются выражениями

$$\tilde{Q}_{\mu\nu}(k) = \frac{\tilde{u}_\mu(k) \tilde{u}_\nu(k)}{\tilde{u}^2(k)}, \quad P_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu - \tilde{Q}_{\mu\nu}(k) \frac{(k \cdot u)^2}{k^2},$$

а поляризационный тензор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ определен в приближении так называемых жестких температурных петель (см. [8, 9]).

Подставляя хромоэлектрическое поле $E_Q^{ai}(k)$ в уравнение (2.1) и учитывая структуру пропагатора (4.1), получаем формулу для потери энергии:

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dx} &= -\frac{1}{|v|} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^4}{\tau} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathcal{Q}^- \frac{\omega}{k^2} \left\{ \frac{k^2}{\omega^2} \langle |(\mathbf{k} \cdot \mathcal{J}_Q^a(\mathbf{k}, \omega))|^2 \rangle \text{Im}({}^*\Delta^l(k)) + \right. \\ &\quad \left. + \langle |(\mathbf{k} \times \mathcal{J}_Q^a(\mathbf{k}, \omega))|^2 \rangle \text{Im}({}^*\Delta^t(k)) \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где теперь мера интегрирования по цветному заряду $d\mathcal{Q}^-$ задается для асимптотического значения $\mathcal{Q}^{-a}$. Нас интересует вклад в потери энергии, связанный с рассеянием на продольных

плазменных волнах (плазмонах), т.е. вклад, пропорциональный $\text{Im}(*\Delta^l(p))$ в правой части уравнения (4.2). Используя явное выражение (3.10) фурье-образа для эффективного тока $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{k}, \omega)$ и последнее равенство в (3.5), приводим корреляционную функцию в интеграле (4.2) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \langle |(\mathbf{k} \cdot \mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{k}, \omega))|^2 \rangle = (2\pi)^6 & \left\{ F_{-\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}'_1 G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 ab} G_{\mathbf{k}'_1, -\mathbf{k}}^{*(2) a'_1 ab'} \langle (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}'_1}^{-a'_1} \rangle + \right. \\ & \left. + F_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_2 G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{(2) aa_2 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_2}^{*(2) aa'_2 b'} \langle (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* c_{\mathbf{k}'_2}^{-a'_2} \rangle \right\} \mathcal{Q}^{-b} \mathcal{Q}^{-b'}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь в правой части оставлены только члены с нетривиальными корреляционными функциями, которые в свою очередь представляем в обычном виде:

$$\langle (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}'_1}^{-a'_1} \rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}^{-a_1 a'_1} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1), \quad \langle (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* c_{\mathbf{k}'_2}^{-a'_2} \rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}'_2}^{-a_2 a'_2} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_2),$$

а для цветовой матрицы плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{-aa'}$ используем цветовую декомпозицию предложенную в [15], записанную в терминах асимптотических переменных:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{-aa'} = \delta^{aa'} N_{\mathbf{k}}^{-l} + (T^c)^{aa'} \mathcal{Q}^{-c} W_{\mathbf{k}}^{-l}. \quad (4.4)$$

Здесь $N_{\mathbf{k}}^{-l}$ и $W_{\mathbf{k}}^{-l}$ — скалярные функции, определяющие бесцветную и цветовую части плотности числа плазмонов соответственно, а цветовые генераторы T^a в присоединенном представлении определены как $(T^a)^{bc} \equiv -i f^{abc}$, где f^{abc} — антисимметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$.

Сначала проанализируем вклад от бесцветной части асимптотической плотности числа плазмонов, пропорциональный скалярной плотности $N_{\mathbf{k}}^{-l}$. Последующее интегрирование по асимптотическому заряду $\mathcal{Q}^{-a}$ в силу (2.3) приводит к соотношению

$$\int d\mathcal{Q}^{-} \mathcal{Q}^{-b} \mathcal{Q}^{-b'} = \frac{C_A}{d_A} \delta^{bb'}$$

и, таким образом, вместо (4.3) можно теперь записать

$$\begin{aligned} \int d\mathcal{Q}^{-} \langle |(\mathbf{k} \cdot \mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{k}, \omega))|^2 \rangle = \\ = (2\pi)^6 \frac{C_A}{d_A} \left\{ F_{-\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_1 G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 ab} G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{*(2) a_1 ab} N_{\mathbf{k}_1}^{-l} + F_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_1 G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) aa_1 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) aa_1 b} N_{\mathbf{k}_1}^{-l} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Первый член в скобках фактически удваивает второй член при замене $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ в общем выражении для потерь энергии (4.2). Используя явный вид коэффициентной функции $G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b}$ (1.3), получим

$$G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) aa_1 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) aa_1 b} = \frac{1}{4} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) b a a_1} (2\pi)^2 [\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1})]^2. \quad (4.6)$$

В силу цветовой и импульсной факторизации эффективной амплитуды

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2} = f^{a a_1 a_2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)}$$

далее имеем

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) b a a_1} = f^{b a a_1} f^{b a a_1} |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 = N_c d_A |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2.$$

Под квадратом δ -функции в (4.6), как обычно, понимаем

$$[\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1})]^2 = \frac{1}{2\pi} \tau \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1})$$

(см. [5]). Таким образом, произведение (4.6) окончательно принимает вид

$$G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) aa_1 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) aa_1 b} = \frac{1}{4} \tau N_c d_A |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}). \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.5), а затем в (4.2), приходим к следующему выражению:

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{|v|} \frac{(2\pi)^{10}}{2} N_c^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\omega \left(\frac{k^2}{\omega} \right) F_{\mathbf{k}}^2 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 N_{\mathbf{k}_1}^{-l} (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}) \text{Im}(*\Delta^l(k)). \quad (4.8)$$

В качестве последнего шага в подинтегральное выражение в правой части уравнения (4.8) необходимо подставить следующее представление для мнимой части скалярного пропагатора:

$$\text{Im}(*\Delta^l(k)) \simeq -\pi \text{sign}(\omega) \delta(\text{Re} * \Delta^{-1l}(k)) = -\pi \text{sign}(\omega) \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right) [\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^l) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^l)].$$

Вклад от второй δ -функции здесь просто удваивает результат от вклада первой. Подставим последнее представление в (4.8) и проинтегрируем по ω . Вспоминая определение (3.9) функции $F_{\mathbf{k}}$, находим искомое выражение для потери энергии, связанное с бесцветной частью плотности числа плазмонов (4.4):

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{1}{|v|} \frac{(2\pi)^6}{8} N_c^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 \left(\frac{k^2}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \right) |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 N_{\mathbf{k}_1}^{-l} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \quad (4.9)$$

Осталось провести аналогичный анализ для вклада от цветовой части плотности числа плазмонов, пропорциональной скалярной плотности $W_{\mathbf{k}}^{-l}$. Для этого вернемся к промежуточному выражению (4.3) и, для конкретности, рассмотрим подинтегральную функцию в первом члене в фигурных скобках, а именно:

$$G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 ab} G_{\mathbf{k}'_1, -\mathbf{k}}^{* (2) a'_1 ab'} \langle (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}'_1}^{-a'_1} \rangle \mathcal{Q}^{-b} \mathcal{Q}^{-b'}$$

или

$$G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 ab} G_{\mathbf{k}'_1, -\mathbf{k}}^{* (2) a'_1 ab'} (T^c)^{a_1 a'_1} W_{\mathbf{k}_1}^{-l} \mathcal{Q}^{-c} \mathcal{Q}^{-b} \mathcal{Q}^{-b'}, \quad (4.10)$$

если оставить в корреляционной функции только чисто неабелеву, т.е. цветовую часть. Здесь нас будет интересовать общий цветовой фактор этого выражения. Для этой цели сначала нужно выделить цветовую зависимость функций $G^{(2)}$ по правилу

$$G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 ab} = f^{a_1 ab} G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2)}, \quad G_{\mathbf{k}'_1, -\mathbf{k}}^{* (2) a'_1 ab'} = f^{a'_1 ab'} G_{\mathbf{k}'_1, -\mathbf{k}}^{* (2)},$$

а затем проинтегрировать по $\mathcal{Q}^-$ симметричное произведение трех асимптотических цветных зарядов в (4.10). В силу соотношений (2.3) данный интеграл должен быть пропорциональным полностью симметричным структурным константам цветовой алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$, т.е.

$$\int d\mathcal{Q}^- \mathcal{Q}^{-c} \mathcal{Q}^{-b} \mathcal{Q}^{-b'} \sim d^{cbb'}.$$

Нетрудно видеть, что в результате цветовой фактор из выражения (4.10) будет в свою очередь пропорционален следу произведения четырех генераторов:

$$\text{tr}(T^a T^c T^a D^c) = \frac{1}{2} N_c \text{tr}(T^c D^c) = 0.$$

Здесь введена в рассмотрение матрица D^a (в дополнение к T^a) с компонентами $(D^a)^{bc} \equiv d^{abc}$ и использовано соотношение

$$T^a T^b T^a = \frac{1}{2} N_c T^b.$$

Таким образом, вклад в потери энергии, связанный с цветовой частью плотности числа плазмонов, равен нулю, и причина этого заключается в том, что цветовой фактор этого вклада, не связанный с динамикой системы, равен нулю.

5. Заключение. В данной работе на основе полученной классической матрицы рассеяния был найден эффективный цветной ток, порождающий процесс рассеяния жесткой цветозаряженной частицы на мягких бозе-возбуждениях кварк-глюонной плазмы. Найденный ток позволил в свою очередь определить соответствующее выражение для потери энергии быстрой цветной частицы с целым спином, движущейся в высокотемпературной набелевой плазме.

Большой интерес как в чисто теоретическом, так и в практическом плане представляет собой обобщение полученных в данной работе результатов на фермионный сектор жестких и мягких возбуждений кварк-глюонной плазмы. Отметим, что само по себе рассмотрение процессов рассеяния с изменением типа статистики мягких и жестких мод представляется весьма сложным уже в самой попытке выписать адекватный этой задаче математический аппарат (см. например, ранние работы по этой теме [14, 16]). Здесь для описания цветовой степени свободы как жесткой цветной частицы с полуцелым спином, так и нормальных мягких фермионных переменных поля, предполагается использовать функции, принимающие значения в алгебре Грассмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
2. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
3. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. — М.: Наука, 1987.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984.
5. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 2. Релятивистские квантовые поля. — М.: Наука, 1978.
6. Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю. Классическая матрица рассеяния для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2025. — 240. — С. 29–38.
7. de Azcárraga J. A., Macfarlane A. J., Mountain A. J., Pérez Bueno J. C. Invariant tensors for simple groups// Nucl. Phys. B. — 1998. — 510. — P. 657–687.
8. Blaizot J.-P., Iancu E. The quark–gluon plasma: collective dynamics and hard thermal loops// Phys. Rep. — 2002. — 359. — P. 355–528.
9. Braaten E., Pisarski R. D. Soft amplitudes in hot gauge theories: a general analysis// Nucl. Phys. B. — 1990. — 337. — P. 569–634.
10. Elmfors P., Hansson T. H., Zahed I. Simple derivation of the hard thermal loop effective action// Phys. Rev. D. — 1999. — 59. — 045018.
11. Jackiw R., Nair V. P. High-temperature response functions and the non-Abelian Kubo formula// Phys. Rev. D. — 1993. — 48. — P. 4991–4998.
12. Kelly P., Liu Q., Lucchesi C., Manuel C. Classical transport theory and hard thermal loops in the quark–gluon plasma// Phys. Rev. D. — 1994. — 50. — P. 4209–4218.
13. Klein A. Invariant operators of the unitary unimodular group in n dimensions// J. Math. Phys. — 1963. — 4. — P. 1283–1284.
14. Markov Yu. A., Markova M. A. Nonlinear dynamics of soft fermion excitations in hot QCD plasma II: Soft-quark–hard-particle scattering and energy losses// Nucl. Phys. A. — 2007. — 784. — P. 443–514.
15. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction I: Plasmon – hard particle scattering// Nucl. Phys. A. — 2024. — 1048. — 122903.
16. Markov Yu. A., Markova M. A., Vall A. N. Nonlinear dynamics of soft fermion excitations in hot QCD plasma: soft-quark bremsstrahlung and energy losses// Int. J. Mod. Phys. A. — 2010. — 25. — P. 685–776.
17. Sudbery A. Computer-friendly d -tensor identities for $SU(n)$ // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — 23. — P. L705–L709.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yuri Adolfovich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatolievna)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
Иркутский государственный университет, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: NYumarkov@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 64–70
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-64-70

УДК 517.977

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2025 г. В. А. СРОЧКО, Е. В. АКСЕНЮШКИНА

Аннотация. Рассматривается невыпуклая линейно-квадратичная задача оптимального управления со знаконеопределенными матрицами квадратичных форм. Выполнены преобразование и параметризация целевого функционала, что приводит к семейству идентичных задач в смысле глобального решения. Получены условия на параметры, которые выделяют выпуклые задачи. Реализована процедура параметрической оптимизации по критерию близости к исходной задаче. Построены выпуклые линейно-квадратичные задачи, которые обеспечивают возможность улучшения экстремальных управлений в невыпуклой задаче.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, преобразование и параметризация функционала, выпуклые задачи, улучшение экстремальных управлений.

PARAMETRIC TRANSFORMATION OF NONCONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2025 V. A. SROCHKO, E. V. AKSENYUSHKINA

ABSTRACT. A nonconvex linear-quadratic optimal control problem with indefinite matrices of quadratic forms is considered. The transformation and parametrization of the target functional are performed; this leads to a family of identical problems in the sense of a global solution. Conditions on the parameters that distinguish convex problems are obtained. A parametric optimization procedure is implemented according to the criterion of proximity to the original problem. As a result, convex linear-quadratic problems are constructed, which provide the possibility of improving extremal controls in a nonconvex problem.

Keywords and phrases: linear-quadratic problem, transformation and parameterization of functional, convex problems, improvement of extremal controls.

AMS Subject Classification: 49J15, 49M25

1. Введение. Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления (ЛКЗ) в следующей постановке:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\rightarrow \min, \quad u \in V, \\ \Phi(u) &= \langle x(T), Cx(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), Qx(t) \rangle dt, \\ \dot{x} &= A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0, \\ V &= \{u(\cdot) \in PC[t_0, T] : u(t) \in U, t \in [t_0, T]\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отметим симметричность $(n \times n)$ -матриц C , Q , кусочную непрерывность допустимых управлений $u(t)$ и компактность множества $U \subset \mathbb{R}^m$.

Выделим благоприятное свойство выпуклости задачи (1):

$$C \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(C) \geq 0, \quad Q \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(Q) \geq 0.$$

Это условие неотрицательной определенности матриц C, Q в терминологии собственных значений. При этом функционал $\Phi(u)$ представляется выпуклыми квадратичными формами относительно фазовых переменных и называется выпуклым.

Для выпуклой задачи (1) принцип максимума (ПМ) есть необходимое и достаточное условие оптимальности и соответствующие итерационные методы порождают минимизирующие последовательности управлений (см. [1, 3, 5]).

Допустимое управление $u(t)$, удовлетворяющее ПМ в задаче (1) назовем, как обычно, экстремальным. Таким образом, любое экстремальное управление выпуклой задачи является оптимальным.

Предметом рассмотрения в данной статье являются невыпуклые задачи (1) следующей структуры:

$$\lambda_{\min}(C) < 0, \quad \lambda_{\max}(C) > 0; \quad \lambda_{\min}(Q) < 0, \quad \lambda_{\max}(Q) > 0.$$

Это значит, что C, Q — неопределенные матрицы, а $\Phi(u)$ — невыпуклый функционал. В этом случае ПМ теряет свойство достаточности (любое экстремальное управление подозрительно на оптимальность), задача (1) приобретает многоэкстремальный характер, и возникает проблема ее глобального решения в рамках ключевой операции тестирования экстремального управления на предмет оптимальности и улучшения (см. [4]). При этом улучшение управления $u \in V$ понимается в смысле уменьшения значения функционала $\Phi(u)$.

Наша цель состоит в разработке процедуры преобразования и параметризации невыпуклого функционала $\Phi(u)$, которая приводит к семейству выпуклых функционалов, соответствующих в определенном смысле исходной задаче. Опишем основные этапы этого преобразования.

2. Бивыпуклая декомпозиция функционала. Рассмотрим образующие функционал $\Phi(u)$ матрицы C, Q . Решим полную проблему собственных значений для матрицы C и получим собственные пары (λ_i, x^i) , $i = \overline{1, n}$, с ортонормированной системой собственных векторов x^i :

$$Cx^i = \lambda_i x^i, \quad \langle x^i, x^j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

При этом имеет место спектральное разложение

$$C = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i, \quad X_i = x^i (x^i)^T$$

(см. [6]), где $X_i \geq 0$ — матрицы ранга 1.

Отметим выражение для квадратичной формы

$$\langle x, Cx \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x^i, x \rangle^2.$$

Положим

$$I_+ = \{i = \overline{1, n} : \lambda_i > 0\}, \quad I_- = \{i = \overline{1, n} : \lambda_i < 0\}$$

и сформируем неотрицательно определенные матрицы

$$C_+ = \sum_{i \in I_+} \lambda_i X_i, \quad C_- = \sum_{i \in I_-} |\lambda_i| X_i$$

с собственными значениями

$$\lambda_j(C_+) = \begin{cases} \lambda_j, & j \in I_+, \\ 0, & j \notin I_+, \end{cases} \quad \lambda_j(C_-) = \begin{cases} |\lambda_j|, & j \in I_-, \\ 0, & j \notin I_-, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

Возьмем за основу следующее представление для матрицы C :

$$C = C_1 - C_2, \quad C_1 = C_+ + \gamma E, \quad C_2 = C_- + \gamma E. \quad (2)$$

Здесь E — единичная матрица, $\gamma > 0$ — параметр.

Отметим положительную определенность матриц C_1 , C_2 и выделим экстремальные собственные значения:

$$\lambda_{\min}(C_1) = \gamma, \quad \lambda_{\max}(C_2) = \max_{j \in I_-} |\lambda_j| + \gamma = |\lambda_{\min}(C)| + \gamma.$$

Аналогичным образом формируется «биположительное» представление для второй матрицы функционала $\Phi(u)$:

$$Q = Q_1 - Q_2, \quad Q_1 = Q_+ + \gamma E, \quad Q_2 = Q_- + \gamma E \quad (3)$$

с положительно определенными матрицами Q_1 , Q_2 и экстремальными собственными значениями

$$\lambda_{\min}(Q_1) = \gamma, \quad \lambda_{\max}(Q_2) = |\lambda_{\min}(Q)| + \gamma.$$

Определим соответствующее выражениям (2), (3) представление функционала $\Phi(u)$. Введем выпуклые функционалы

$$\Phi_i(u) = \langle x(T), C_i x(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), Q_i x(t) \rangle dt, \quad i = 1, 2.$$

В результате получаем бивыпуклую декомпозицию исходного функционала:

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u).$$

3. Параметризация функционала и выбор параметров. Определим функционал

$$\Phi_{\alpha, \beta} = \alpha \Phi_1(u) - \beta \Phi_2(u)$$

с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и образующими матрицами

$$C(\alpha, \beta) = \alpha C_1 - \beta C_2, \quad Q(\alpha, \beta) = \alpha Q_1 - \beta Q_2.$$

Сформулируем задачу с параметрами

$$\Phi_{\alpha, \beta}(u) \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad (4)$$

которая содержит задачу (1) при $\alpha = \beta = 1$.

Укажем объединяющую характеристику семейства задач (4). Введем задачу двухкритериальной оптимизации

$$\Phi(u) = \{\Phi_1(u), -\Phi_2(u)\} \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad (5)$$

и будем рассматривать ее решения в смысле Парето (p -оптимальные решения).

Далее используем известный результат (см. [2]): любое глобальное решение задачи (4) при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ является p -оптимальным в задаче (5).

Таким образом, все задачи семейства (4) на уровне глобального решения являются родственными относительно объединяющей двухкритериальной задачи (5).

Далее естественным образом возникает проблема: выделить из (4) условия на параметры выпуклые задачи, для которых любое экстремальное управление является оптимальным, т.е. процедура поиска решения реализуется достаточно просто (см. [1, 3, 5]). Свойство выпуклости функционала $\Phi_{\alpha, \beta}(u)$ определяется спектральными условиями

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) &= \lambda_{\min}(\alpha C_1 - \beta C_2) \geq 0, \\ \lambda_{\min}(Q(\alpha, \beta)) &= \lambda_{\min}(\alpha Q_1 - \beta Q_2) \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Проведем линеаризацию этих неравенств, используя оценки снизу (см. [6])

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) &\geq \alpha \lambda_{\min}(C_1) - \beta \lambda_{\max}(C_2), \\ \lambda_{\min}(Q(\alpha, \beta)) &\geq \alpha \lambda_{\min}(Q_1) - \beta \lambda_{\max}(Q_2). \end{aligned}$$

В результате получаем достаточные условия выпуклости в форме линейных неравенств

$$\alpha \geq \frac{\lambda_{\max}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_1)} \beta = \frac{|\lambda_{\min}(C)| + \gamma}{\gamma} \beta, \quad \alpha \geq \frac{\lambda_{\max}(Q_2)}{\lambda_{\min}(Q_1)} \beta = \frac{|\lambda_{\min}(Q)| + \gamma}{\gamma} \beta.$$

Введем обозначения

$$\mu = \max \{|\lambda_{\min}(C)|, |\lambda_{\min}(Q)|\}, \quad k(\gamma) = 1 + \frac{\mu}{\gamma}.$$

Тогда достаточное условие выпуклости функционала $\Phi_{\alpha,\beta}(u)$ определяется неравенством

$$\alpha \geq k(\gamma)\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

Следующий естественный шаг связан с оптимизацией выбора параметров α, β в смысле расстояния до целевой пары $(1, 1)$, выделяющей функционал $\Phi(u)$. Это приводит к элементарной параметрической задаче

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 \rightarrow \min, \quad \alpha \geq k(\gamma)\beta,$$

решение которой $(\alpha(\gamma), \beta(\gamma))$ согласно принципу Лагранжа имеет вид

$$\alpha(\gamma) = k(\gamma)\beta(\gamma), \quad \beta(\gamma) = \frac{1 + k(\gamma)}{1 + k^2(\gamma)}.$$

Поскольку $k(\gamma) > 1$, то

$$\beta(\gamma) < 1, \quad \alpha(\gamma) = \frac{k(\gamma) + k^2(\gamma)}{1 + k^2(\gamma)} > 1.$$

Отметим свойство сходимости к единичной паре $(1, 1)$ при увеличении параметра $\gamma > 0$:

$$\alpha(\gamma) \rightarrow 1, \quad \beta(\gamma) \rightarrow 1, \quad \gamma \rightarrow \infty.$$

Найдем приемлемое выражение для функционала $\Phi_{\alpha,\beta}(u)$ при $\alpha = \alpha(\gamma), \beta = \beta(\gamma)$:

$$\Phi(u, \gamma) = \alpha(\gamma)\Phi_1(u) - \beta(\gamma)\Phi_2(u) = \beta(\gamma)(k(\gamma)\Phi_1(u) - \Phi_2(u)) = \beta(\gamma)(\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_1(u)).$$

Введем функционалы

$$\Phi_+(u) = \langle x(T), C_+x(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), Q_+x(t) \rangle dt, \quad \Phi_0(u) = \langle x(T), x(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), x(t) \rangle dt.$$

Тогда $\Phi_1(u) = \Phi_+(u) + \gamma\Phi_0(u)$, и выпуклый функционал $\Phi(u, \gamma)$ принимает вид

$$\Phi(u, \gamma) = \beta(\gamma)(\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_+(u) + \mu\Phi_0(u)).$$

Поскольку $\Phi_1(u) \geq 0, u \in V$, то нормированный выпуклый функционал $\hat{\Phi}(u, \gamma) = \Phi(u, \gamma)/\beta(\gamma)$ представляет собой оценку сверху для исходного невыпуклого функционала: $\Phi(u) \leq \hat{\Phi}(u, \gamma), u \in V$.

4. Простейший вариант декомпозиции. Откажемся от решения полной проблемы собственных значений для матриц C, Q и возьмем за основу следующее очевидное представление:

$$\begin{aligned} C &= C_1 - C_2, & C_1 &= C + \gamma E, & C_2 &= \gamma E, \\ Q &= Q_1 - Q_2, & Q_1 &= Q + \gamma E, & Q_2 &= \gamma E. \end{aligned}$$

Условие $C_1 > 0$ эквивалентно неравенству

$$\lambda_{\min}(C_1) = \lambda_{\min}(C) + \gamma > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > |\lambda_{\min}(C)|.$$

Аналогично

$$Q_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\min}(Q) + \gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma > |\lambda_{\min}(Q)|.$$

В результате получаем общее условие на параметр:

$$\gamma > \mu = \max \{ |\lambda_{\min}(C)|, |\lambda_{\min}(Q)| \}.$$

Образует матричную комбинацию с одним параметром $\alpha > 0$

$$C(\alpha) = \alpha C_1 - C_2, \quad Q(\alpha) = \alpha Q_1 - Q_2$$

и реализуем условие неотрицательной определенности

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(C(\alpha)) = \alpha(\lambda_{\min}(C) + \gamma) - \gamma \geq 0 & \Rightarrow \alpha \geq \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_{\min}(C)}, \\ \lambda_{\min}(Q(\alpha)) = \alpha(\lambda_{\min}(Q) + \gamma) - \gamma \geq 0 & \Rightarrow \alpha \geq \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_{\min}(Q)}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место общая оценка

$$\alpha \geq \max \left\{ \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_{\min}(C)}, \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_{\min}(Q)} \right\}.$$

Поскольку $\lambda_{\min}(C) = -|\lambda_{\min}(C)|$, $\lambda_{\min}(Q) = -|\lambda_{\min}(Q)|$, то предыдущее неравенство принимает окончательную форму

$$\alpha \geq \frac{\gamma}{\gamma - \mu} = 1 + \frac{\mu}{\gamma - \mu}, \quad \gamma > \mu. \quad (6)$$

Это необходимое и достаточное условие неотрицательной определенности матриц $C(\alpha)$, $Q(\alpha)$ или выпуклости функционала

$$\Phi(u, \alpha) = \langle x(T), C(\alpha)x(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), Q(\alpha)x(t) \rangle dt.$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ имеем $\Phi(u, 1) = \Phi(u)$.

Выделим ближайшее к единице значение α из неравенства (6):

$$\alpha(\gamma) = 1 + \frac{\mu}{\gamma - \mu}.$$

Найдем соответствующее выражение для функционала $\Phi(u, \alpha(\gamma))$. С учетом представлений

$$C(\alpha) = \alpha(C + \gamma E) - \gamma E, \quad Q(\alpha) = \alpha(Q + \gamma E) - \gamma E$$

получаем

$$\Phi(u, \alpha(\gamma)) = \alpha(\gamma)\Phi(u) + (\alpha(\gamma)\gamma - \gamma)\Phi_0(u) = \alpha(\gamma)(\Phi(u) + \mu\Phi_0(u)).$$

Таким образом, нормированный выпуклый функционал $\tilde{\Phi}(u) = \Phi(u, \alpha(\gamma))/\alpha(\gamma)$ не зависит от γ и представляет собой оценку сверху для исходного невыпуклого функционала: $\Phi(u) \leq \tilde{\Phi}(u)$, $u \in V$.

5. Улучшение экстремальных управлений. Обсудим возможности полученных представлений с фиксированным значением параметра γ для улучшения экстремальных управлений $\bar{u} \in V$ в исходной задаче (1).

Возьмем за основу первую выпуклую задачу оптимального управления:

$$\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_1(u) \rightarrow \min, \quad u \in V; \quad (7)$$

пусть $u^* \in V$ — ее решение. Напомним, что $\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u)$, причем $\Phi_1(u) \geq 0$, $u \in V$, — выпуклый функционал.

Отметим, что управление u^* является Парето-оптимальным в следующей двухкритериальной задаче:

$$S(u) = \{\Phi(u), \Phi_1(u)\} \rightarrow \min, \quad u \in V.$$

Согласно определению такого решения (см. [2]) управление u^* является оптимальным в следующей задаче:

$$\Phi(u) \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad \Phi_1(u) \leq \Phi_1(u^*).$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Если $\Phi_1(\bar{u}) \leq \Phi_1(u^*)$, то $\Phi(u^*) \leq \Phi(\bar{u})$.

Это значит, что управление u^* решает задачу улучшения экстремальных управлений $\bar{u}$ с условием $\Phi_1(\bar{u}) \leq \Phi_1(u^*)$.

Следствие 2. Если управление u^* максимизирует функционал $\Phi_1(u)$, $u \in V$, то оно является оптимальным в исходной задаче (1).

Более того, с учетом того же определения Парето-оптимальности имеет место утверждение: для любого экстремального управления $\bar{u}$ с условием $S(\bar{u}) \neq S(u^*)$ выполняется по крайней мере одно из двух неравенств

$$\Phi(u^*) < \Phi(\bar{u}), \quad \Phi_1(u^*) < \Phi_1(\bar{u}).$$

Иными словами, оптимальное управление выпуклой задачи (7) улучшает почти любое экстремальное управление исходной задачи (1) по основному функционалу $\Phi(u)$ либо по его выпуклому фрагменту $\Phi_1(u)$.

Наконец, управление u^* обеспечивает нетривиальную оценку сверху для значения задачи (1):

$$\min_{u \in V} \Phi(u) \leq \Phi(u^*).$$

Как известно, ключевая проблема глобального решения задачи (1) состоит в конструктивном улучшении экстремальных управлений. Согласно следствию 1 основной интерес в этом плане представляют экстремальные управления $\bar{u}$ с условием $\Phi_1(\bar{u}) > \Phi_1(u^*)$. Это значит, что $\bar{u} \neq u^*$, т.е. управление $\bar{u}$ не является оптимальным в выпуклой задаче (7). Следовательно, с помощью стандартных методов принципа максимума (см. [1, 3, 5]) оно может быть строго улучшено относительно функционала $\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma} \Phi_1(u)$. При этом в рамках итерационного процесса каждое улучшающее управление $\bar{u}_k$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет по крайней мере одному из неравенств

$$\Phi(\bar{u}_k) < \Phi(\bar{u}), \quad \Phi_1(\bar{u}_k) < \Phi_1(\bar{u}).$$

Первое неравенство приводит к желаемому улучшению экстремального управления $\bar{u}$ в задаче (1), что запускает процедуру поиска следующего управления, удовлетворяющего ПМ. Второе неравенство обеспечивает частичное уменьшение функционала $\Phi(u)$ и предполагает продолжение итераций по индексу $k = 1, 2, \dots$ с ориентацией на выполнение первого неравенства. Таким образом, выпуклая задача (7) выступает в качестве тестовой для характеристики и улучшения экстремальных управлений задачи (1).

Отметим, что задача (7) зависит от параметра $\gamma > 0$, поэтому допустима ее коррекция в сторону увеличения γ , что «приближает» выпуклую задачу к исходной по коэффициентам $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$. В полной аналогии рассматривается упрощенная выпуклая задача с функционалом $\Phi(u) + \mu \Phi_0(u)$.

6. Общая схема идентификации выпуклых задач. В заключение рассмотрим общий случай матричной декомпозиции без использования скалярной матрицы γE . Ограничимся преобразованием одной матрицы C с условием $\lambda_{\min}(C) < 0$. Пусть для нее построено представление $C = C_1 - C_2$ с положительно определенными матрицами C_1 , C_2 . Одна схема такого представления описана, например, в [4]. Образует положительную комбинацию

$$C(\alpha, \beta) = \alpha C_1 - \beta C_2, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

и обеспечим условие $C(\alpha, \beta) \geq 0$, используя оценку

$$\lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) \geq \alpha \lambda_{\min}(C_1) - \beta \lambda_{\max}(C_2).$$

Отсюда получаем условие неотрицательной определенности

$$\alpha \geq \frac{\lambda_{\max}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_1)} \beta = k_1 \beta, \quad \beta > 0.$$

Найдем оценку для коэффициента k_1 . Поскольку $C = C_1 - C_2$, то

$$\lambda_{\min}(C) \geq \lambda_{\min}(C_1) - \lambda_{\max}(C_2).$$

Отсюда

$$k_1 \geq 1 + \frac{|\lambda_{\min}(C)|}{\lambda_{\min}(C_1)}.$$

Полагая, например, $\beta = 1$, получаем наилучшее значение параметра α : $\alpha_* = k_1$. Дальнейшие построения на пути к выпуклой задаче вполне очевидны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аргучинцев А. В., Васильев О. В.* Итерационные процессы принципа максимума и их модификации в системах с распределенными параметрами // Диффер. уравн. — 1996. — 32, № 6. — С. 797–803.
2. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — Москва: Наука, 1982.
3. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — Москва: Физматлит, 2000.
4. *Стрекаловский А. С.* Элементы невыпуклой оптимизации. — Новосибирск: Наука, 2003.
5. *Тятюшкин А. И.* Многометодная технология оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 2006.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — Москва: Мир, 1989.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Срочко Владимир Андреевич (Srochko Vladimir Andreevich)
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: srochko@math.isu.ru

Аксенюшкина Елена Владимировна (Aksenyushkina Elena Vladimirovna)
Байкальский государственный университет, Иркутск
(Baikal State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: AksenyushkinaEV@bgu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 71–82
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-71-82

УДК 519.716

ОБ ОДНОМ SI^* -ИНТЕРВАЛЕ МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ РАНГА 2

© 2025 г. И. В. ФОМИНА, В. И. ПАНТЕЛЕЕВ

Аннотация. Рассматриваются мультиоперации ранга 2 с суперпозицией, определенной на основе теоретико-множественной операции пересечения с выделением одного элемента. Описан интервал между клоном самодвойственных операций и мультиклоном всех мультиопераций. Полученные результаты могут быть применены при изучении других интервалов в решетке мультиклонов ранга 2.

Ключевые слова: интервал, мультиоперация, суперпозиция, клон, замкнутый класс.

ABOUT ONE SI^* -INTERVAL OF RANK 2 MULTIOPERATIONS

© 2025 I. V. FOMINA, V. I. PANTELEEV

ABSTRACT. We consider rank-2 multi-operations. The superposition is defined on the basis of a set-theoretic intersection operation with selection of a single element. The interval between the clone of self-transitive operations and the multiclon of all multi-operations is described. The results obtained can be applied to the description of other intervals in the lattice of rank-2 multiclon.

Keywords and phrases: interval, multioperation, superposition, clone, closed set.

AMS Subject Classification: 08A99

1. Введение. В теории дискретных функций одним из объектов исследования являются мультиоперации — операции, заданные на конечном множестве и возвращающие в качестве своих значений подмножества этого множества. Множество мультиопераций содержит в себе множества операций (чаще называемое множеством операций k -значной логики), частичных операций и гиперопераций. Классификация мультиопераций относительно оператора суперпозиции приводит к континууму числа замкнутых классов, поэтому задача полного описания решетки таких классов является трудно решаемой. В связи с этим интерес представляют некоторые фрагменты такой решетки. Одной из первых в этом направлении была работа [1], в которой были описаны клоны частичных операций, содержащие максимальные клоны операций. Оказалось, что в четырех случаях эти множества конечны, а в одном имеют мощность континуум. Задача исследования таких клонов для произвольных клонов операций была сформулирована в [8] и решена для частичных операций в [7]. Для мультиопераций авторам не известно решение этой проблемы на сегодняшний день. Стоит заметить, что для мультиопераций и суперпозиция определяется неоднозначно.

Для исследований нами был выбран интервал между клоном так называемых самодвойственных булевых операций, который максимален в клоне всех операций (см. [9]), и мультиклоном всех мультиопераций ранга 2. При этом применяется суперпозиция, основанная на теоретико-множественной операции пересечения с выделением одного элемента. Для такой суперпозиции рассматриваемый интервал содержит 22 клон. Если не выделять отдельно один элемент, то данный интервал содержит 17 элементов (см. [2, 3]).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00011) в Бурятском государственном университете им. Д. Банзарова.

2. Основные понятия и определения. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Для целого положительного n отображение $f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2}$ называется n -местной мультиоперацией ранга 2. Множество всех мультиопераций ранга 2 обозначим $\mathcal{M}_2$.

В множестве $\mathcal{M}_2$ выделяют подмножества операций ($\mathcal{O}_2$), квазиопераций (частичных операций) ($\mathcal{O}_2^*$) и гиперопераций ($\mathcal{H}_2$):

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_2^{(n)} &= \left\{ f : |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n \right\}, & \mathcal{O}_2 &= \bigcup_n \mathcal{O}_2^{(n)}, \\ \mathcal{O}_2^{(n)*} &= \left\{ f : |f(\tilde{\alpha})| \leq 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n \right\}, & \mathcal{O}_2^* &= \bigcup_n \mathcal{O}_2^{(n)*}, \\ \mathcal{H}_2^{(n)} &= \left\{ f : |f(\tilde{\alpha})| \geq 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n \right\}, & \mathcal{H}_2 &= \bigcup_n \mathcal{H}_2^{(n)},\end{aligned}$$

где через $|A|$ обозначена мощность множества A .

Основным оператором замыкания для дискретных операций является суперпозиция. Суперпозиция с внешней n -местной мультиоперацией f_0 и внутренними m -местными мультиоперациями $f_1, \dots, f_n$ должна определять некоторую m -местную мультиоперацию $s(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

Если рассматривать суперпозицию только операций, то значение $s(f_0, f_1, \dots, f_n)$ на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$ вычисляется следующим образом. Вначале находятся значения внутренних мультиопераций на заданном наборе. Эти значения образуют набор $(f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \dots, f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m))$, на котором уже определяется значение внешней мультиоперации. Это значение и объявляется значением суперпозиции. Очевидно, что такое определение для мультиопераций не проходит, так как набор из значений внутренних мультиопераций не обязательно будет двоичным.

В теории мультиопераций имеется несколько способов вычисления значения суперпозиции на заданном наборе. В основном они основаны на теоретико-множественных операциях пересечения и объединения (см. [4, 10]).

В данной работе используется определение, основанное на пересечении с выделением «особенного элемента». Этот «особенный» элемент можно трактовать как «полумку». Дадим строгое определение.

Рассматриваем суперпозицию $s(f_0, f_1, \dots, f_n)$ с внешней n -местной мультиоперацией f_0 и внутренними m -местными мультиоперациями $f_1, \dots, f_n$. Пусть набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ принадлежит E_2^m и $g = s(f_0, f_1, \dots, f_n)$. Тогда

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если найдется такой } i \text{ из } \{1, \dots, n\}, \text{ что} \\ & f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \emptyset \text{ или найдется набор} \\ & (\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ где } \beta_j \in f_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \text{ для } j \in \\ & \{1, \dots, n\} \text{ и при этом } f_0(\beta_1, \dots, \beta_n) = \emptyset; \\ \bigcap_{\substack{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ i \in \{1, \dots, n\}}} f_0(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\substack{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ i \in \{1, \dots, n\}}} f_0(\beta_1, \dots, \beta_n) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение суперпозиции позволяет считать мультиоперации, заданные на некотором конечном множестве A , операциями, заданными на множестве 2^A . При этом такие операции на наборах, образованных только одноэлементными подмножествами, принимают произвольные значения. На наборах, в которых хотя бы один элемент не является синглетомом, значение определяется уже в соответствии с определением суперпозиции, в которой внутренние операции суть подмножества. Переход к операциям, заданным на множестве 2^A можно избежать, если отождествить множество из одного элемента и элемент этого множества, т.е. $\{a\} = a$.

В дальнейшем мультиоперации будем рассматривать с точностью до фиктивных аргументов. Переменные для обозначения аргументов используем обычным образом, как и понятие «мультиоперация-переменная».

Мультиоперацию f , зависящую от n переменных, будем записывать в виде вектора $(\tau_{\tilde{0}}, \dots, \tau_{\tilde{1}})$ длины 2^n , где каждый элемент $\tau_{\tilde{\sigma}}$ есть $f(\tilde{\sigma})$, а $\tilde{0}, \dots, \tilde{1}$ — все двоичные представления чисел $0, \dots, 2^n - 1$ соответственно. Для одноместных и двухместных мультиопераций такой вектор имеет вид $(f(0) f(1))$ и $(f(0, 0) f(0, 1) f(1, 0) f(1, 1))$, соответственно.

Проекцией называется такая n -местная мультиоперация $e_i^n(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \{1, 2, \dots\}$), что $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ для $i \in \{1, \dots, n\}$.

Мультиклоном назовем множество мультиопераций, содержащее все проекции и замкнутое относительно суперпозиции. Вместо термина мультиклон будем использовать термин клон, если это не вызывает недоразумений.

Мультиклон Q называется максимальным в мультиклоне R , если не существует такого мультиклона K , что $Q \subset K \subset R$, и просто максимальным, если $R = \mathcal{M}_2$.

Интервалом $I(Q, R)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех мультиклонов, в котором любой элемент K удовлетворяет условию $Q \subseteq K \subseteq R$. Как обычно, для частично упорядоченных множеств интервалы будем изображать в виде диаграмм.

При описании замкнутых классов мультиопераций важную роль играет понятие сохранение предиката.

Пусть ρ^m — m -местный предикат, заданный на множестве 2^A . Для мультиоперации $f(x_1, \dots, x_n)$ будем говорить, что она сохраняет предикат ρ^m , если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ из предиката набор $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$ также принадлежит предикату.

Рассматривая $f(a_{i1}, \dots, a_{in})$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) как суперпозицию, мы сможем найти значение f на таком наборе, т.е. определение является корректным.

Если m -местный предикат R содержит всего t наборов, то его удобно задавать в виде матрицы размерности $m \times t$, в которой столбцами являются наборы из предиката.

Для двоичного набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ противоположный набор (0 противоположен 1 и наоборот) будем обозначать $\bar{\tilde{\alpha}}$. Если не указано, какой набор рассматривается, то подразумевается, что это двоичный набор, размерность которого определяется из контекста.

Замыкание множества мультиопераций Q относительно суперпозиции будем обозначать $[Q]$. Множество мультиопераций Q называется замкнутым, если $[Q] = Q$.

Для упрощения записи будем также использовать кодировку $\emptyset \leftrightarrow *$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$, а для суперпозиции $s(f_0, f_1, \dots, f_n)$ будем также использовать обозначение $f_0(f_1, \dots, f_n)$.

Недостающие определения можно найти в [2, 5, 8].

3. Основной результат. Определим следующие множества мультиопераций:

S — класс самодвойственных операций;

S^- — класс гиперопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}$;

S^* — класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * \\ 1 & 0 & - & * \end{pmatrix}$;

K_1 — множество таких мультиопераций, что на одном наборе из любой пары противоположных наборов мультиоперация возвращает $*$;

K_2 — класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & - & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}$.

Утверждение 1. Классы S , S^- , K_1 , $S^- \cup K_1$, S^* , $S^* \cup K_1$, K_2 замкнуты относительно суперпозиции.

Доказательство. S и S^- — это классы самодвойственных операций и самодвойственных гиперопераций, которые являются замкнутыми относительно суперпозиции.

Замкнутость класса K_1 следует из определения суперпозиции, из которого следует, что если внутренняя мультиоперация на каком-нибудь наборе возвращает $*$, то и вся суперпозиция возвращает $*$.

Рассмотрим класс $S^- \cup K_1$. Пусть $g(x_1, \dots, x_m) = s(f_0, f_1, \dots, f_n)$, где для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ выполняется $f_i \in S^- \cup K_1$.

Если все внутренние операции и внешняя операция из множества S^- , то и $g \in S^-$. Пусть хотя бы одна из внутренних операций f_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) принадлежит множеству K_1 . Если рассмотреть $g(x_1, \dots, x_m)$ на противоположных наборах $\tilde{\alpha}$ и $\bar{\alpha}$, то на одном из них f_i возвращает $*$. Это означает, что и g на этом наборе возвращает $*$, т.е. $g \in K_1$. Предположим, что все внутренние операции из множества S^- , а внешняя операция f_0 принадлежит K_1 . Так как на противоположных наборах $\tilde{\alpha}$ и $\bar{\alpha}$ внутренние операции возвращают противоположные значения, то наборы $(f_1(\tilde{\alpha}), \dots, f_n(\tilde{\alpha}))$ и $(f_1(\bar{\alpha}), \dots, f_n(\bar{\alpha}))$ являются противоположными. На одном из них f_0 возвращает $*$. Из этого следует, что $g \in K_1$.

Доказательство замкнутости класса S^* сводится к замкнутости класса S^- .

Замкнутость класса $S^* \cup K_1$ следует из замкнутости класса $S^- \cup K_1$.

Класс K_2 — это класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & - & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}$. Пусть $g(x_1, \dots, x_m) = s(f_0, f_1, \dots, f_n)$, где для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ выполняется $f_i \in K_2$. Предположим, что на некоторых наборах из предиката g возвращает набор не из предиката. Очевидно, что при этом наборы из предиката не содержат $*$. Поэтому можно считать, что выполняется

$$g \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & - & - & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & - \end{pmatrix} \right\}$$

(применяя при необходимости перестановку переменных, отождествление и добавление фиктивных переменных). Достаточно рассмотреть следующие случаи:

$$g \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix} \right\}.$$

Пусть $(g(01-))g(10-)) = (00)$. Тогда для некоторого α выполняется $g(01\alpha) = 0$. В соответствии с леммой 1 из [6] будет выполняться $g(10\bar{\alpha}) \in \{1, *\}$, а потому $g(10-) \neq 0$. $\square$

Если $(g(01-))g(10-)) = (0-)$, то снова для некоторого α выполняется $g(01\alpha) = 0$ и $g(10\bar{\alpha}) \in \{1, *\}$. Очевидно, что $g(10\bar{\alpha}) \neq *$. Но, если $g(10\bar{\alpha}) = 1$, то найдется $\bar{\beta}$ для которого выполняется $g(10\bar{\beta}) = 0$. По лемме 1 из [6] имеем $g(01\bar{\beta}) \in \{1, *\}$. Значит, $g(01-) \neq 0$; противоречие.

Утверждение 2. *Справедливы следующие включения:*

- (a) $[\mathcal{H}_2 \cup K_1] = \mathcal{M}_2$;
- (b) $S^- \subset S^- \cup \{*\} \subseteq S^- \cup K_1 \subseteq S^* \cup K_1 \subset K_2 \subset \mathcal{M}_2$;
- (c) $S^- \subset S^- \cup \{*\} \subseteq S^* \subset S^* \cup K_1 \subset K_2 \subset \mathcal{M}_2$.

Доказательство. (a) В классе K_1 имеется мультиоперация $f_2(x) = (0*)$, а в классе $\mathcal{O}_2$ — операция $f_3(x, y) = (1000)$. Суперпозиция $f_2(f_3)$ определяет квазиоперацию $f_4(x, y) = (*000)$. Пусть $f_5(x, y) = y$. Суперпозиция $s(f_5, f_4, (0001))$ определяет мультиоперацию $f_6 = (*001)$. Суперпозиция $s((010-), (*001), (0101))$ определяет мультиоперацию $(*10-)$. Кроме того,

$$[\mathcal{O}_2 \cup \{(*10-)\}] = \mathcal{M}_2.$$

(b), (c) следуют из того, что $S^- \subset S^* \subseteq K_2$ и $K_1 \subseteq K_2$. $\square$

Лемма 1. *Справедливо соотношение $K_1 \subseteq [S \cup \{(-*)\}]$.*

Доказательство. Пусть $f_1(x) = (-*)$, $f_2(x) = (10)$, $f_3(x, y) = y$. Построим операции

$$\begin{aligned} f_4(x, y) &= f_3(f_1, f_2) = (1*), & f_5(x) &= f_4(f_2) = (*1), \\ f_2(f_5) &= f_6(x) = (*0), & f_7(x, y) &= f_1(y), & f_8(x, y) &= f_2(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$f_3(f_7, f_8) = (1*0*), \quad f_3(f_6(y), f_6(x)) = (**0) = f_9(x, y).$$

Из f_9 с помощью отрицания несложно получить операцию $f_{10} = (1 * * *)$. Добавив в f_{10} и f_1 фиктивные аргументы, получим операции

$$f_{11}(x, y, z, u) = (1111 * \dots *), \quad f_{12}(x, y, z, u) = (- - - - * \dots *).$$

В классе S есть операция $g(x, y, z) = (01001101)$. Тогда суперпозиция $g(f_{12}, y, z)$ даст операцию $g_1(x, y, z) = (-10 - * \dots *)$.

Суперпозиция $f_3(f_{11}(x, y, z, u), g_1(y, z, u))$ определяет $g_2(x, y, z, u) = (-10 - * \dots *)$.

Пусть операция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит K_1 . По f в классе S найдем четыре операции f^1, f^2, f^3, f^4 следующим образом:

набор	f	f^1	f^2	f^3	f^4
$\tilde{\alpha}$	0	0	0	1	0
$\overline{\tilde{\alpha}}$	*	1	1	0	1
$\tilde{\beta}$	1	0	0	0	1
$\overline{\tilde{\beta}}$	*	1	1	1	0

набор	f	f^1	f^2	f^3	f^4
$\tilde{\gamma}$	—	0	0	0	0
$\overline{\tilde{\gamma}}$	*	1	1	1	1
$\tilde{\delta}$	*	0	1	0	0
$\overline{\tilde{\delta}}$	*	1	0	1	1

Несложно проверить, что $f(x_1, \dots, x_n) = g_2(f^1, f^2, f^3, f^4)$. □

Следствие 1. $K_1 \subseteq [S^- \cup \{(-*)\}]$

Следствие 2. Если $f \in \{(*0), (*, 1), (0*), (1*)\}$, то $K_1 \subseteq [S^- \cup \{f\}]$.

Доказательство. Если $f = (*0)$, то $s((-1), (*0)) = (*-)$. Остальные случаи легко сводятся к рассмотренному. □

Лемма 2. Пусть для мультиоперации f найдутся такие наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, что

$$(f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\alpha})) = (--), \quad (f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\beta})) = (**).$$

Тогда $S^* \subseteq S^- \cup \{f\}$.

Доказательство. Применяя отождествление и перестановку переменных, от мультиоперации f можно перейти к мультиоперации g с такими же свойствами, но зависящей от четырёх переменных. Поэтому считаем, что f зависит от четырёх переменных.

В матрице $(\tilde{\alpha} \tilde{\beta} \overline{\tilde{\beta}} \overline{\tilde{\alpha}})^t$ столбцами являются столбцы вида $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1100)^t$, $(1010)^t$. Операции, соответствующие этим столбцам, принадлежат S^- . Подставив эти мультиоперации в f , получим мультиоперацию $f_1(x, y) = (- * * -)$. Добавляя фиктивную переменную, получим $f_2(x, y, z) = (- - * * * -)$.

Суперпозиция $s((10001110), f_2, z, \bar{y})$ определяет мультиоперацию $g(x, y, z) = (-0 * * * 1 -)$.

Пусть теперь мультиоперация $h(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит S^* . По h построим операции f^1, f^2, f^3 из S так, как указано в таблице:

набор	f	f^1	f^2	f^3
$\tilde{\alpha}$	—	0	0	0
$\overline{\tilde{\alpha}}$	—	1	1	1
$\tilde{\beta}$	0	0	0	1
$\overline{\tilde{\beta}}$	1	1	1	0
$\tilde{\gamma}$	*	0	1	0
$\overline{\tilde{\gamma}}$	*	1	0	1

Несложно проверить, что $h(x_1, \dots, x_n) = g(f^1, f^2, f^3)$. □

$\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{t_1}$	0	$\overline{\tilde{\alpha}}_1, \dots, \overline{\tilde{\alpha}}_{t_1}$	1	$\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{t_2}$	1	$\overline{\tilde{\beta}}_1, \dots, \overline{\tilde{\beta}}_{t_2}$	0
$\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{t_3}$	—	$\overline{\tilde{\gamma}}_1, \dots, \overline{\tilde{\gamma}}_{t_3}$	—	$\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_{t_4}$	*	$\overline{\tilde{\delta}}_1, \dots, \overline{\tilde{\delta}}_{t_4}$	*
$\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{t_5}$	*	$\overline{\tilde{\zeta}}_1, \dots, \overline{\tilde{\zeta}}_{t_5}$	0	$\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{t_6}$	0	$\overline{\tilde{\eta}}_1, \dots, \overline{\tilde{\eta}}_{t_6}$	*
$\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_{t_7}$	*	$\overline{\tilde{\theta}}_1, \dots, \overline{\tilde{\theta}}_{t_7}$	1	$\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{t_8}$	1	$\overline{\tilde{\lambda}}_1, \dots, \overline{\tilde{\lambda}}_{t_8}$	*
$\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{t_9}$	*	$\overline{\tilde{\xi}}_1, \dots, \overline{\tilde{\xi}}_{t_9}$	—	$\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{t_{10}}$	—;	$\overline{\tilde{\sigma}}_1, \dots, \overline{\tilde{\sigma}}_{t_{10}}$	*

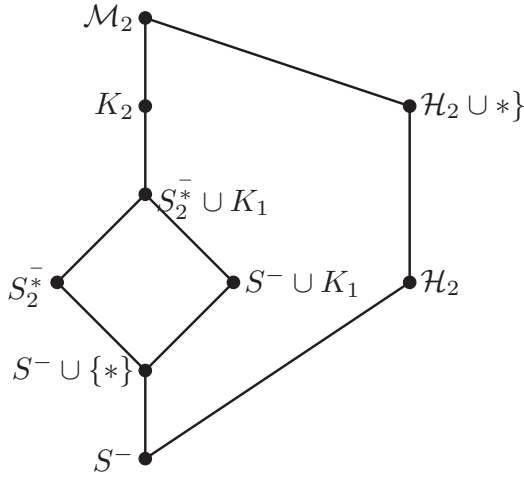
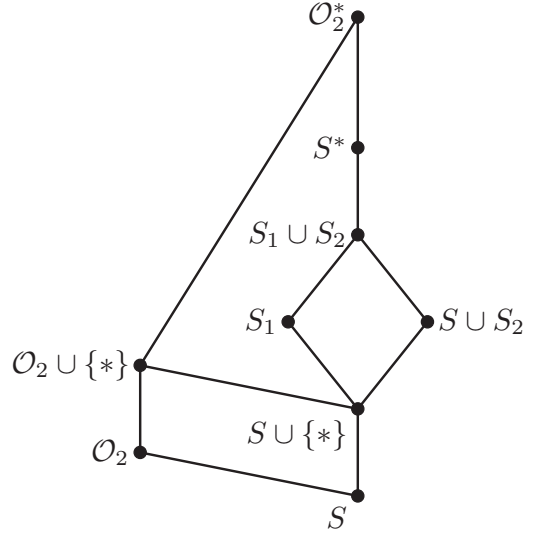
$$i \in \{1, \dots, t_1\}, \quad j \in \{1, \dots, t_2\}, \quad k \in \{1, \dots, t_3\}, \quad l \in \{1, \dots, t_4\}, \quad m \in \{1, \dots, t_5\}, \\ n \in \{1, \dots, t_6\}, \quad p \in \{1, \dots, t_7\}, \quad q \in \{1, \dots, t_8\}, \quad r \in \{1, \dots, t_9\}, \quad s \in \{1, \dots, t_{10}\}.$$
$$f_1 = (0*01), \quad f_1 = (-*1-), \quad f_1 = (-*0-), \quad f_1 = (0* -1), \quad f_1 = (0*11), \quad f_1 = (-* - -).$$
$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0 - 11 * * * * * - 1000 - 1),$$

$$g(x_1, \dots, x_m) = h(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_4(x_1, \dots, x_m)),$$

$$\begin{array}{ll}
(g_1(\widetilde{\alpha_i}), \dots, g_4(\widetilde{\alpha_i})) = (0000), & (g_1(\overline{\widetilde{\alpha_i}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\alpha_i}})) = (1111), \\
(g_1(\widetilde{\beta_j}), \dots, g_4(\widetilde{\beta_j})) = (0010), & (g_1(\overline{\widetilde{\beta_j}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\beta_j}})) = (1101), \\
(g_1(\widetilde{\gamma_k}), \dots, g_4(\widetilde{\gamma_k})) = (0001), & (g_1(\overline{\widetilde{\gamma_k}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\gamma_k}})) = (0111), \\
(g_1(\widetilde{\delta_l}), \dots, g_4(\widetilde{\delta_l})) = (0010), & (g_1(\overline{\widetilde{\delta_l}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\delta_l}})) = (1000), \\
(g_1(\widetilde{\zeta_m}), \dots, g_4(\widetilde{\zeta_m})) = (0100), & (g_1(\overline{\widetilde{\zeta_n}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\zeta_n}})) = (1011), \\
(g_1(\widetilde{\eta_j}), \dots, g_4(\widetilde{\eta_j})) = (1011), & (g_1(\overline{\widetilde{\eta_n}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\eta_n}})) = (0100), \\
(g_1(\widetilde{\theta_p}), \dots, g_4(\widetilde{\theta_p})) = (0101), & (g_1(\overline{\widetilde{\theta_p}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\theta_p}})) = (1010), \\
(g_1(\widetilde{\lambda_q}), \dots, g_4(\widetilde{\lambda_q})) = (1010), & (g_1(\overline{\widetilde{\lambda_q}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\lambda_q}})) = (0101), \\
(g_1(\widetilde{\xi_r}), \dots, g_4(\widetilde{\xi_r})) = (0110), & (g_1(\overline{\widetilde{\xi_r}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\xi_r}})) = (1001), \\
(g_1(\widetilde{\sigma_s}), \dots, g_4(\widetilde{\sigma_s})) = (1001), & (g_1(\overline{\widetilde{\sigma_s}}), \dots, g_4(\overline{\widetilde{\sigma_s}})) = (0110).
\end{array}$$

Утверждение 8. Пусть $f \notin K_2$ и $[K_2 \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{M}_2 \subseteq A$.

$$f\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{array}\right) \in \left\{\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & - & - & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & - \end{array}\right\}.$$

Рис. 1. Интервал $I(S^-, M_2)$.Рис. 2. Интервал $I(S, O_2^*)$.

Мультиоперации (01) , (10) , $(--)$ принадлежат S^- , поэтому можно считать, что получена некоторая мультиоперация из множества (00) , (11) , (-0) , (-1) , $(1-)$, $(0-)$. Каждая из них позволяет получить константу, а значит, и множества $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{M}_2$. $\square$

Теорема 1. Интервал $I(S^-, M_2)$ содержит ровно 9 различных мультиклонов, а именно, мультиклоны, представленные на рис. 1.

Доказательство следует из утверждений 2–8. $\square$

В [1] введены следующие замкнутые классы квазиопераций:

S_1 — класс квазиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}$;

S_2 — класс квазиопераций таких, что на одном из любой пары противоположных наборов она возвращает $*$;

S^* — класс квазиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & b \\ 1 & 0 & a & * \end{pmatrix}$, при этом $\{a, b\} \subseteq \{0, 1, *\}$.

Решетка клонов квазиопераций, содержащих клон самодвойственных операций имеет вид, изображённый на рис. 2 (см. [1]).

Пусть $f \notin S$ и $[S \cup \{f\}] = A$. Так как $f \notin S$, то найдется такая пара противоположных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\bar{\alpha}$, что

$$(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\alpha})) \in \{(0a), (1b), (-c), (*d), \{a, b, c, d\} \subseteq \{0, 1, -, *\}, a \neq 1, b \neq 0\}. \quad (1)$$

Это означает, что подставляя в f самодвойственные операции (01) и (10) , можно получить одну из одноместных мультиопераций из правой части равенства (1).

Если получили одну из констант 0 или 1, то, поскольку S максимален в $\mathcal{O}_2$, получим $\mathcal{O}_2 \subseteq A$. Предположим, что получили одну из операций $(0-)$, $(1-)$, (-0) , (-1) .

Рассмотрим случай $(0-)$. Суперпозиция $s((0-), (0-))$ определяет (00) . Но $[S \cup \{(00)\}] = \mathcal{O}_2$. Для остальных вариантов этого случая все аналогично, т.е. имеем $\mathcal{O}_2 \subseteq A$.

Если получена гипероперация $(--)$, то с учетом максимальной S в S^- (см. [3, 4]) получим $S^- \subseteq A$.

Если получена квазиоперация $h(x)$, то $[S \cup \{h\}]$ находится в интервале $I(S, \mathcal{O}_2)$.

Осталось рассмотреть случай, когда получена $u(x) = (*-)$. Но в этом случае по лемме 1 получим $K_1 \subseteq A$. Квазиоперация, тождественно равная $*$, принадлежит K_1 , поэтому дальше можно рассматривать только множество $S \cup \{*\}$.

Утверждение 9. Пусть $f \notin S \cup \{*\}$ и $[S \cup \{*\} \cup \{f\}] = A$. Тогда $S^- \subseteq A$, или $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, или $S_1 \subseteq A$, или $S \cup S_2 \subseteq A$, или $S \cup K_1 \subseteq A$.

Доказательство. Легко получить равенство (1) с условием $d \neq *$ и повторить последующие рассуждения. $\square$

Эти же рассуждения приводят к справедливости следующих четырех утверждений.

Утверждение 10.

- (i) Пусть $f \notin S_1$ и $[S_1 \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, или $S_1 \cup K_1 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.
- (ii) Пусть $f \notin S \cup S_2$ и $[S \cup S_2 \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, или $S \cup K_1 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.
- (iii) Пусть $f \notin S_1 \cup S_2$ и $[S_1 \cup S_2 \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, или $S_1 \cup K_1 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.
- (iv) Пусть $f \notin S^*$ и $[S^* \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, или $S^* \cup K_1 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.

Утверждение 11. Пусть $f \notin S \cup K_1$ и $[S \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, или $S_1 \cup K_1 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.

Доказательство. Пусть f на некоторой паре противоположных наборов возвращает одноместную мультиоперацию h , которая не принадлежит $S \cup K_1$. Если h — квазиоперация, то $S_1 \subseteq A$ или $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, если h — гипероперация, то $S^- \subseteq A$ или $\mathcal{M}_2 \subseteq A$. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда для f есть пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(*-)$, и пара противоположных наборов, на которых f возвращает (01) . Это позволяет получить мультиоперации $(*01-)$ и $(-01*)$. Из этих мультиопераций несложно получить $h = (*01*)$. Суперпозиция мультиоперации h и мультиопераций из класса S позволяет построить любую мультиоперацию из класса S_1 . $\square$

Утверждение 12. Пусть $f \notin S_1 \cup K_1$ и $[S_1 \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, или $S^* \cup K_1 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда для f имеется пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(*-)$, и пара противоположных наборов, на которых f возвращает (01) . Это позволяет получить мультиоперации $(*01-)$, $(010*)$ и $(*011)$. Если

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (00010111), & f_2(x, y, z) &= (* * 001111), \\ f_3(x, y, z) &= (010 * 010 *), & f_4(x, y, z) &= (00110011), \end{aligned}$$

то суперпозиция $s(f_1, f_2, f_3, f_4)$ определяет мультиоперацию $(* * 0 * 011 *)$. Суперпозиция этой мультиоперации и мультиопераций из класса S позволяет построить любую мультиоперацию из класса S^* . $\square$

Определим класс S' как класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & b \\ 1 & 0 & \alpha & * \end{pmatrix}$, $\{a, b\} \subseteq \{0, 1, -, *\}$. Несложно доказать, что этот класс замкнут относительно суперпозиции. Кроме того, этот класс содержит в себе классы K_1 и S^* .

Утверждение 13. Пусть $f \notin S^* \cup K_1$ и $[S^* \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, или $S' \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда для f найдется пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(--)$. Суперпозиция $s((01001101), (0101), (-- --), (0011))$ определяет мультиоперацию $(0 -- 1)$. Мультиоперация $(001 -- 011)$ определяется суперпозицией

$$s((01001101), (00 -- -- 11), (01010101), (00110011)).$$

Пусть

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, u) &= (001 - -011001 - -011), & f_2(x, y, z, u) &= (010 * 00110011 * * * *), \\ f_3(x, y, z, u) &= (0011001100110011), & f_4(x, y, z, u) &= (0000111100001111). \end{aligned}$$

Суперпозиция $s(f_1, f_2, f_3, f_4)$ определяет мультиоперацию

$$g(x, y, z, u) = (01 - * 0 - 0101 - 1 * * * *).$$

Если $h(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу S' , то ее значения на противоположных наборах образуют только следующие столбцы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}.$$

По h в классе S найдем четыре операции f^1, f^2, f^3, f^4 следующим образом:

набор	h	f^1	f^2	f^3	f^4
$\tilde{\alpha}$	0	0	0	0	0
$\overline{\alpha}$	*	1	1	1	1
$\tilde{\beta}$	1	0	0	0	1
$\overline{\beta}$	*	1	1	1	0
$\tilde{\gamma}$	-	0	0	1	0
$\overline{\gamma}$	*	1	1	0	1
$\tilde{\delta}$	*	0	0	1	1
$\overline{\delta}$	*	1	1	0	0
$\tilde{\nu}$	0	0	1	0	1
$\overline{\nu}$	1	1	0	1	0

Суперпозиция $s(g, f^1, f^2, f^3, f^4)$ задает h .

Рассмотрим оставшийся случай, когда для f найдется пара противоположных наборов на которых f возвращает $(*-)$ и пара противоположных наборов на которых f возвращает (01) . Это позволяет получить мультиоперацию $(*01-)$ и, добавляя фиктивные аргументы, мультиоперацию $h_1 = (* * * * 00001111 - - - -)$. В классе S^* есть квазиоперация $h_2 = (0000000011111111 *)$, операции $h_3 = (0101010101010101)$, $h_4 = (0011001100110011)$ и $h_5 = (0010001010111011)$.

Суперпозиция $s(h_5, h_1, h_2, h_3, h_4)$ определяет мультиоперацию $g = (* * * * 01001101 - 100 *)$, которая на противоположных наборах принимает в качестве своих значений все возможные столбцы из предиката, задающего класс S' . $\square$

Утверждение 14. Пусть $f \notin S'$ и $[S' \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, или $K_2 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.

Доказательство. Пусть для f найдется пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(--)$. Суперпозиция $s((01001101), (0101), (-- --), (0011))$ определяет мультиоперацию $(0 - -1)$.

Мультиоперация $(001 - -011)$ определяется суперпозицией

$$s((01001101), (00 - - - -11), (01010101), (00110011))$$

. Пусть

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, u) &= (001 - -011001 - -011), & f_2(x, y, z, u) &= (010 * 00110011 * * * *), \\ f_3(x, y, z, u) &= (0011001100110011), & f_4(x, y, z, u) &= (0000111100001111). \end{aligned}$$

Суперпозиция $s(f_1, f_2, f_3, f_4)$ определяет мультиоперацию

$$g(x, y, z, u) = (01 - * 0 - 0101 - 1 * * * *).$$

Если $h(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу K_2 , то ее значения на противоположных наборах образуют только следующие столбцы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & - & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}.$$

По h в классе S найдем четыре операции f^1, f^2, f^3, f^4 следующим образом:

набор	h	f^1	f^2	f^3	f^4
$\tilde{\alpha}$	0	0	0	0	0
$\overline{\tilde{\alpha}}$	*	1	1	1	1
$\tilde{\beta}$	1	0	0	0	1
$\overline{\tilde{\beta}}$	*	1	1	1	0
$\tilde{\gamma}$	—	0	0	1	0
$\overline{\tilde{\gamma}}$	*	1	1	0	1

набор	h	f^1	f^2	f^3	f^4
$\tilde{\delta}$	*	0	0	1	1
$\overline{\tilde{\delta}}$	*	1	1	0	0
$\tilde{\lambda}$	—	0	1	0	0
$\overline{\tilde{\lambda}}$	—	1	0	1	1
$\tilde{\nu}$	0	0	1	0	1
$\overline{\tilde{\nu}}$	1	1	0	1	0

Суперпозиция $s(g, f^1, f^2, f^3, f^4)$ задает h .

□

Таким образом, доказан основной результат.

Теорема 2. Интервал $I(S, M_2)$ содержит ровно 22 различных мультиклона, а именно, мультиклоны, представленные на рис. 3.

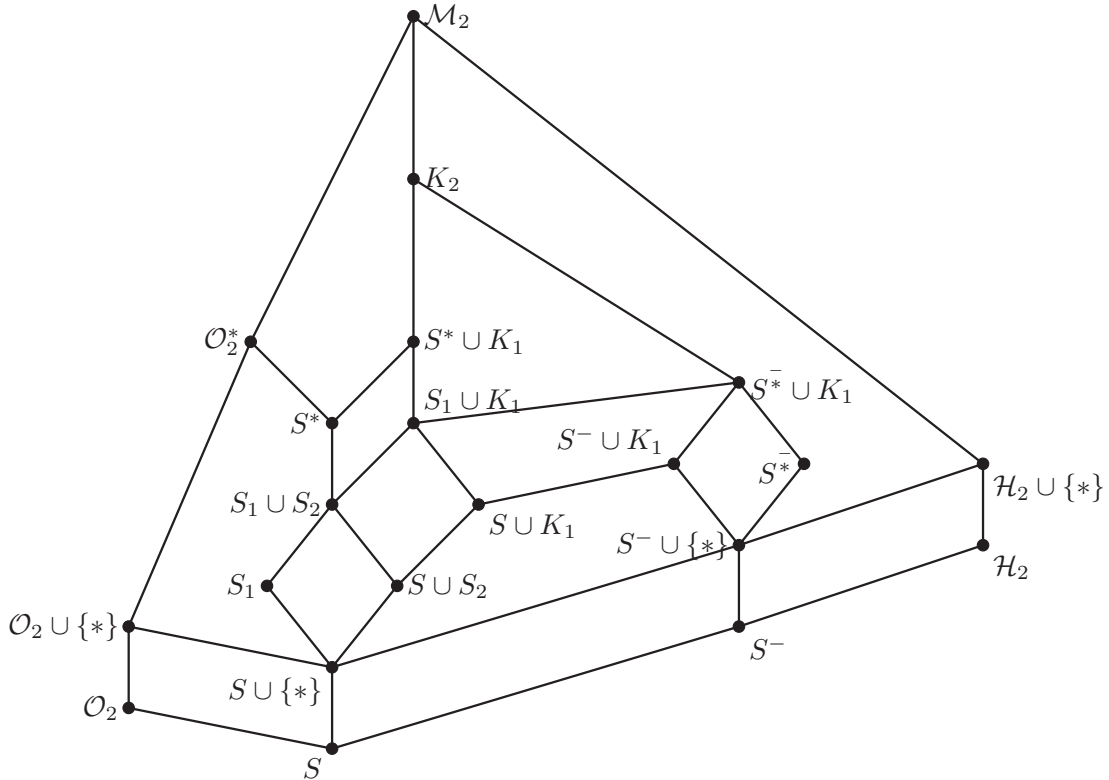


Рис. 3. Интервал $I(S, M_2)$.

Для того, чтобы избежать лишних нагромождений, на рисунке не отмечены некоторые включения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискр. мат. — 1994. — 6, № 4. — С. 58–79.
2. Бадмаев С. А., Дугаров А. Е., Фомина И. В., Шаранхаев И. К. О некоторых интервалах в решетке ультраклонов ранга 2 // Сиб. электрон. мат. изв. — 2021. — 18, № 2. — С. 1210–1218.
3. Бадмаев С. А., Дугаров А. Е., Фомина И. В., Шаранхаев И. К. О двух интервалах в решетке частичных ультраклонов ранга 2 // Сиб. электрон. мат. изв. — 2023. — 20, № 1. — С. 262–275.
4. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых мультиопераций // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнауч. серия — 2009. — 68, № 2. — С. 60–79.
5. Пантелеев В. И., Халтанова С. Ю. О некоторых интервалах в решетке клонов частичных ультрафункций // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2010. — 4. — С. 80–87.
6. Пантелеев В. И., Тагласов Э. С. ESI^* -замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов // Интел. сист. Теор. прилож. — 2021. — 25, № 2. — С. 55–80.
7. Lamsade M., Sholzel K., Haddad L., Waldhauzer T. A solution to a problem of D. Lau: Complete classification of intervals in the lattice of partial Boolean clones // IEEE 43 Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, 2013. — P. 123–128.
8. Lau D. Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Multiple-Valued Logic and Clone Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
9. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Am. J. Math — 1921. — 43, № 4. — P. 163–185.
10. Pouzet M., Rosenberg I. G. Small clones and the projection property // Alg. Univ. — 2010. — 63. — P. 37–44.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00011) в Бурятском государственном университете им. Д. Банзарова.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фомина Ирина Владимировна (Fomina Irina Vladimirovna)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: fomina-irina0104@yandex.ru

Пантелеев Владимир Иннокентьевич (Panteleev Vladimir Innokentievich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ;

Иркутский государственный университет, Иркутск

(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia;

Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: vl.panteleyev@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 83–89
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-83-89

УДК 517.95; 532.5

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

© 2025 г. В. Н. ХАНХАСАЕВ, В. М. ПЛАСТИНИНА

Аннотация. Представлена вычислительная модель решения первой краевой задачи для смешанного дифференциального уравнения в пространственно двумерном случае по неявной разностной схеме. Для уравнения четвёртого порядка использованы два различных оператора второго порядка, аналогичных одномерному по пространственной переменной смешанному оператору теплопроводности, обобщающему чисто гиперболический случай и применяемому при математическом моделировании процесса отключения электрической дуги. Доказана корректность поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, уравнение смешанного типа, локально-одномерный метод, первая краевая задача, уравнение высокого порядка.

THE FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SOME MIXED EQUATIONS OF THERMAL CONDUCTIVITY OF THE SECOND AND FOURTH ORDER

© 2025 V. N. KHANKHASAEV, V. M. PLASTININA

ABSTRACT. In this paper, we present a computational model for solving the first boundary-value problem for a mixed differential equation in a spatially two-dimensional case using an implicit finite-difference scheme. For a fourth-order equation, we use two different second-order operators that are similar to a one-dimensional mixed thermal conductivity operator in the spatial variable, generalizing the purely hyperbolic case and used in mathematical modeling of the shutdown process for an electric arc. The well-posedness of the boundary-value problem is proved.

Keywords and phrases: hyperbolic heat equation, mixed-type equation, locally one-dimensional method, first boundary-value problem, high-order equation.

AMS Subject Classification: 35M12

1. Уравнение второго порядка. В работах, посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в потоке газа, аналитически и численно решались различные математические модели для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье (см. [7, 8]). Дифференциальное уравнение переноса в частных производных, получаемое из классического закона Фурье, в двухмерном пространственном случае имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Уравнение (1) представляет собой уравнение в частных производных параболического типа, и его аналитические решения показывают парадоксальное поведение бесконечной скорости распространения теплового возмущения. Любое локальное изменение температуры вызывает мгновенное возмущение в каждой точке среды на любом расстоянии от начала координат. Это противоречит теории относительности, а также известным механизмам теплопроводности. Причина этого дефекта причинно-следственной связи заключается в том, что уравнение теплопроводности имеет первый порядок по времени. Второй недостаток, связанный с этим, — это ограничение задачи с начальными значениями. В задаче Коши может быть указана только температура T в момент времени $t = 0$. Но в экспериментах также производная по времени $\partial T / \partial t$ при $t = 0$ может быть адаптирована к экспериментальной ситуации. Это возможно в гиперболическом уравнении теплопроводности второго порядка по времени.

Эксперименты со вторым звуком в твердом гелии и других кристаллических твердых телах при очень низких температурах и очень короткой продолжительности ясно показали, что тепло течет как затухающая волна. Если кристаллическая структура практически бездефектна (идеальна) и выполняются условия для второго звука, то после импульсного нагрева наблюдаемое горбовидное образование повышенной температуры (затухающая тепловая волна) перемещается с постоянной скоростью через среду. Волна отскакивает назад и вперед от границ, медленно рассеивая свою энергию по пути. Затухающая тепловая волна описывается уравнением в частных производных гиперболического типа, впервые полученным Максвеллом, а затем постулированным Верноттом и Каттанео (см. [8]). Применяя обобщенный закон Фурье, получаем следующее гиперболическое уравнение теплопроводности в двухмерном случае:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2)$$

В предыдущей работе авторов приведена математическая модель для решения уравнения теплопроводности по явной разностной схеме для двумерного пространственного случая, не требующей применения локально-одномерного метода. Для конкретного численного расчета в среде программирования Mathcad-15 была разработана программа, однако численное решение по этой разностной схеме имеет недостаток в плане устойчивости и большого количества арифметических операций. Поэтому в данной статье рассматривается более экономичный метод решения по неявной разностной схеме с применением метода прогонки (см. [2]).

Рассмотрим математическую модель исследуемых процессов параболо-гиперболического типа по двум пространственным переменным:

$$b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + c(x, y, t)u + f(x, y, t) \quad (3)$$

в области $G = [0, X] \times [0, Y] \times [-T, T]$, $T > 0$. При этом $b(x, y, t) = 0$ при $t \leq 0$; $b(x, y, t) > 0$, $t > 0$; $a(x, y, t) > 0$ для всех $(x, y, t) \in G$, т.е. при $t \leq 0$ уравнение (3) — параболическое, а при $t > 0$ — гиперболическое.

Для конкретного численного расчета в программе Mathcad-15 температурного поля в однородной мембране с $X = Y = \pi$ и интервалом времени $[-T, T]$ были выбраны следующие значения коэффициентов: $b(x, y, t) = 0$ при $t \leq 0$; $b(x, y, t) = 1$ при $t > 0$; $a = 1$; $c(x, y, t) = \text{const} < 0$; $\lambda = \text{const} > 0$; источник тепла $f(x, y, t) = 0$.

Рассмотрим постановку первой начально-краевой задачи. Для уравнения (3), принимающего вид

$$b(t)u_{tt} + u_t = \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + cu + f(x, y, t), \quad (4)$$

ставятся следующие начально-краевые условия:

$$u(x, y, t)|_{t=T} = u_0(x, y), \quad u_0 = 10 \sin x \cdot \sin y, \quad (5)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(\pi, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad (6)$$

$$u(x, \pi, t) = 0, \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \quad -T < t \leq T.$$

Используя метод конечно-разностной аппроксимации точной постановки начально-краевой задачи (4)–(6) её дискретной реализацией, рассмотрим неявную разностную схему для уравнения (4)

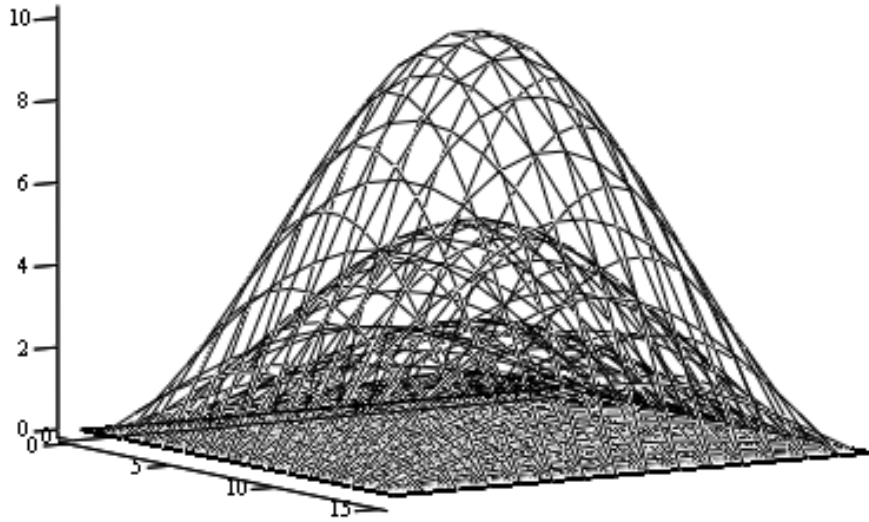


Рис. 1. График изменения температурного поля.

по локально-одномерному методу (см. [2]):

$$\begin{aligned} b(t_{k+1}) \frac{U_{i,j}^{k+1} - 2U_{i,j}^k + U_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} + \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\tau} = \\ = \lambda \frac{U_{i+1,j}^{k+1} - 4U_{i,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2} + cU_{i,j}^{k+1} + f(x_i, y_j, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Формула для параболического уравнения при $t \leq 0$:

$$\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\tau} = \lambda \frac{U_{i+1,j}^{k+1} - 4U_{i,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2} + cU_{i,j}^{k+1} + f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Приводим её к каноническому виду для нахождения коэффициентов метода прогонки:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{h^2}(U_{i+1,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1}) - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{4\lambda\tau}{h^2} - c \right) U_{i,j}^{k+1} + \frac{\lambda}{h^2}(U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}) = -\frac{1}{\tau}U_{i,j}^k - f(x_i, y_j, t_{k+1}), \\ A = C = \frac{\lambda}{h^2}, \quad B = \frac{1}{\tau} + \frac{4\lambda\tau}{h^2} - c, \quad D = -\frac{1}{\tau}U_{i,j}^k - f(x_i, y_j, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Прогонку проводим последовательно сначала в направлении оси $0x$, затем оси $0y$ по формулам локально-одномерного метода (см. [2]).

Аналогично получаем расчетные формулы метода прогонки для гиперболического этапа. Формулу для гиперболического уравнения при $t > 0$ также приводим к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\tau^2}{h^2}(U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i+1,j}^{k+1}) - \left(1 + \tau + \frac{4\lambda\tau^2}{h^2} - c\tau^2 \right) U_{i,j}^{k+1} + \frac{\lambda\tau^2}{h^2}(U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}) = \\ = -(2 + \tau)U_{i,j}^k + U_{i,j}^{k-1} - \tau^2 f(x_i, y_j, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты для вычисления в программе принимают вид:

$$A = C = \frac{\lambda\tau^2}{h^2}, \quad B = 1 + \tau + \frac{4\lambda\tau^2}{h^2} - c\tau^2, \quad D = (-2 + \tau)U_{i,j}^k + U_{i,j}^{k-1} - \tau^2 f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Начальные условия для гиперболического уравнения теплопроводности берем из известного параболического этапа с учетом непрерывной склейки.

На рис. 1 представлен график, полученный с использованием расчетных формул в среде программирования MathCad-15.

2. Уравнение четвертого порядка. В [6] рассматривались математические модели разного уровня сложности для электрической дуги, остывающей в потоке газа. Было показано, что если процессы в области амплитуды тока обычно представляют как установившиеся, хорошо описываемые классическим уравнением теплопроводности параболического типа, то интенсивное дугогашение в области нуля тока необходимо рассматривать как существенно нестационарный процесс. Для изучения таких процессов на основе обобщения гипотезы Фурье вводилось гиперболическое уравнение теплопроводности, различные краевые задачи для которого решались как численно, так и аналитически. К этой проблеме примыкает также моделирование волнового механизма теплопереноса, обусловленного конечной скоростью распространения тепла.

Связывая теперь эти две фазы горения электрической дуги, необходимо рассмотреть уравнение теплопроводности смешанного типа, где коэффициент при второй производной по времени может менять свой знак или вообще вырождаться, а также приводить постановки и исследовать корректность прямых и обратных задач для таких математических моделей.

Наряду с многочисленными методами решения краевых задач для различных уравнений второго порядка $K_1 u = h$, можно использовать и предложенный Ю. А. Дубинским подход, когда с уравнением $K_1 u = h$, которое в общем случае неразрешимо для произвольной правой части h , связывается некоторое уравнение четвертого порядка $K_2 K_1 u = K_2 h$, которое уже разрешимо всегда. Тогда исходное уравнение разрешимо с точностью до ядра оператора K_2 . Эта конструкция может использоваться и как прием описания области значений оператора $K_1 u$, соответствующего некорректной задаче.

В этой работе будут рассмотрены корректно поставленные краевые задачи в ограниченной области для таких некоэрцитивных уравнений четвертого порядка смешанно-составного типа, для которых удалось доказать разрешимость в некоторых весовых пространствах, несмотря на суперпозицию разных операторов.

Рассмотрим в области $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$Lu = K_1 K_2 u = f(x, y), \quad (7)$$

где дифференциальные операторы $K_1 u$ и $K_2 u$ имеют вид

$$K_1 u \equiv k_1(x, y)u_{yy} + u_{xx} + a_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u = f_1(x, y), \quad (8)$$

$$K_2 u \equiv k_2(x, y)u_{xx} + u_{yy} + a_2(x, y)u_x + c_2(x, y)u = f_2(x, y), \quad (9)$$

с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

$$k_1(x, 1) \geq 0, \quad k_1(x, 0) \leq 0, \quad x \in [0, 1]; \quad (10)$$

$$(2a_1 - k_{1y})(x, y) > 0, \quad (2a_2 - |k_{2x}|)(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \overline{D}; \quad (11)$$

$$k_2(1, y) = 0, \quad k_2(0, y) \leq 0, \quad y \in [0, 1]; \quad (12)$$

$$c_1(x, y), c_{1y}(x, y), c_2(x, y), c_{2x}(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in D. \quad (13)$$

Так как не сделано никаких предположений относительно знаков функций k_1 и k_2 внутри области D , то в классы уравнений вида (8) и (9) входит часть параболических, эллиптико-параболических и эллиптико-гиперболических уравнений с произвольными линиями и областями параболического вырождения, а также описанный в первой части оператор теплопроводности смешанного типа второго порядка в пространственно одномерном случае.

Рассматривая теперь уравнение (7), видим, что оно охватывает широкий класс уравнений смешанно-составного типа. Так, например, сюда входят уравнения с линиями вырождения, делящими область D на несколько частей, в которых уравнение (7) является либо эллиптическим,

либо составным (т.е. имеющим две мнимые и две действительные характеристики), либо чисто гиперболическим.

В связи с известной симметрией между K_1 и K_2 , а также с произвольностью линий вырождения, естественно исследование уравнения (7) в квадрате D . Пусть $nu = (\nu_x, \nu_y)$ — вектор внутренней нормали в D , а $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ — стороны D соответственно, $(x = 0)$, $(y = 1)$, $(x = 1)$, $(y = 0)$.

Краевая задача А. Найти такое решение уравнения (7) в области D , что

$$u|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0, \quad u_x|_{\Gamma_3} = 0, \quad K_2 u|_{\Gamma_1} = 0, \quad u_{yy}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (14)$$

Краевые задачи В (С). Найти такое решение уравнения (8) (или (9)) в области D , что

$$u|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0 \quad (\text{или } u|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0). \quad (15)$$

Заметим, что краевая задача С является частным случаем задачи В после соответствующей замены переменных, и значит, в следующей лемме индексы при коэффициентах в (8), (9) можно опустить, имея в виду краевую задачу В (для задачи С достаточно поменять переменные и соответствующие индексы).

Лемма 1. Для любой функции $u(x, y) \in C^2(D)$, удовлетворяющей (15), имеет место априорная оценка

$$\|Ku\|_0 \geq \alpha_1 \|u\|_1, \quad (16)$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в $L_2(D)$, $\|\cdot\|_1$ — норма в $W_2^1(D)$; здесь и далее через α будем обозначать некоторые положительные постоянные, не зависящие от функций, входящих в соответствующие неравенства.

Доказательство. Интегрированием по частям получаем:

$$\begin{aligned} 2 \int_D e^{\lambda y} u_y K u \, dD &= 2(k u_{yy} + u_{xx} + a u_y + c u, e^{\lambda y} u_y) = \\ &= \int_D \left\{ [(2a - k_y) - \lambda k] u_y^2 + \lambda u_x^2 - (c_y + \lambda c) u^2 \right\} e^{\lambda y} dD + \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left\{ -k u_y^2 \nu_y - 2u_x u_y \nu_x + u_x^2 \nu_y - c u^2 \nu_y \right\} e^{\lambda y} d\Gamma. \end{aligned}$$

В силу (10), (12), (13), (15) интеграл по границе неотрицателен, а из (11) при достаточно малых $\lambda > 0$ и δ следует, что

$$((2a - k_y) - \lambda k)(x, y) \geq \delta > 0, \quad (x, y) \in D.$$

Применяя теперь неравенства Коши и Фридрихса, получаем искомую оценку (16). $\square$

Из леммы 1, в частности, следует, что регулярные решения краевых задач В и С единственны.

Определение 1. Функцию $u(x, y) \in W_2^2(D)$ будем называть слабым обобщенным решением краевой задачи А, если для любых $\nu(x, y) \in C_0^\infty(D)$ имеет место тождество

$$(u, L^* \nu)_0 = (f, \nu)_0. \quad (17)$$

Определение 2. Функцию $u(x, y) \in W_2^2(D)$ будем называть полусильным решением краевой задачи А, если существует такая последовательность функций $(u_n) \in W_2^2(D)$, удовлетворяющих (14), что $Lu_n \in L_2(D)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n - f\|_0 = 0. \quad (18)$$

Теорема 1. Для любой функции $f(x, y) \in L_2(D)$ существует слабое обобщенное решение $u(x, y)$ краевой задачи А, причем в случае $k_1|_{\Gamma_2} \geq 0$, при дополнительном условии, что $(2\alpha_1 + k_{1y})(x, y) > 0$ в $\overline{D}$, существует и единственное полусильное решение.

Доказательство. Применяя к уравнению (8) метод « ε -регуляризации» уравнением составного типа третьего порядка и метод вспомогательного оператора по схеме, изложенной в [1], получаем, что существует слабое обобщенное решение $\nu(x, y) \in W_2^1(D)$ краевой задачи В, т.е. для любых $\omega(x, y) \in C_0^\infty(D)$ выполнено тождество

$$(\nu, K_1^* \omega)_0 = (f, \omega)_0. \quad (19)$$

Так как в класс уравнений вида (8) входят эллиптико-параболические уравнения, то, следуя [3], можно построить пример, показывающий, что без дополнительных ограничений решение задачи В, вообще говоря, не будет иметь большей гладкости, чем из пространства $W_2^1(D)$. Поэтому в выделенных случаях, указанных в условии теоремы 1, при дополнительном предположении, что $(2\alpha_1 + k_{1y})(x, y) > 0$ в $\overline{D}$, удастся показать при помощи метода конечных разностей и продолжения уравнения (8) в область D (см. [1]), что существует регулярное решение $u(x, y) \in W_2^2(D)$ краевой задачи В с правой частью $f(x, y) \in W_2^1(D)$, $f|_{\Gamma_2} = 0$, причем выполнена следующая апостериорная оценка:

$$\|f\|_1 \geq \alpha_2 \|u\|_2, f|_{\Gamma_4} = 0, \quad \alpha > 0. \quad (20)$$

Вследствие этого краевая задача С с правой частью $\nu(x, y) \in W_2^1(D)$ имеет регулярное решение $u(x, y) \in W_2^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям (15). Отсюда, интегрируя по частям и используя (19), получим (17), т.е. $u(x, y)$ — слабое обобщенное решение задачи А. В выделенных же случаях из существования регулярных решений и леммы 1 следуют существование и единственность сильного решения $\nu(x, y) \in W_2^1(D)$ краевой задачи В для любой функции $f(x, y) \in L_2(D)$, т.е. существует такая последовательность функций $\nu_n(x, y) \in C^4(\overline{D})$, удовлетворяющих (15), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n - \nu\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|K_1 \nu_n - f\|_0 = 0.$$

Имея последовательность функций $(u_n(x, y))$ и функцию $u(x, y)$, регулярные решения краевой задачи С с правыми частями $(\nu_n(x, y))$ и $\nu(x, y)$ соответственно, получаем при помощи оценки (20) соотношение (18), означающее, что $u(x, y)$ — полусильное решение задачи А, единственность которого следует из построения. Теорема 1 доказана. $\square$

Следуя [4, 5], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $f_2(x, y) \in W_2^2(D)$, $f_2|_{\Gamma_3} = 0$. К условию (11) добавим следующие требования:

- (а) $(2\alpha_2 + 3k_{2x})(x, y) > 0$, $(x, y) \in \overline{D}$;
- (б) $(2\alpha_2 - 3k_{2x})(1, y) > 0$ для $y \in M$, где $M = \{y \in [0, 1] : k_{2x}(1, y) > 0\}$.

Тогда регулярное решение $u(x, y)$ краевой задачи С принадлежит весовому пространству $W_{2,\varphi}^3(D)$, т.е. $\varphi u \in W_2^3(D)$, где $\varphi(x) = o((1-x)^2)$ в некоторой окрестности точки $x = 1$ и $\varphi(x) \equiv 1$ вне этой окрестности.

Теорема 2. Пусть $f(x, y) \in W_2^1(D)$, $f|_{\Gamma_2} = 0$ и выполнены условия (а), (б), а также условие $(2\alpha_1 + k_{1y})(x, y) > 0$ в $\overline{D}$. Тогда при $k_1|_{\Gamma_2} > 0$ или $k_1|_{\Gamma_2} = 0$ полусильное решение $u(x, y)$ краевой задачи А будет принадлежать пространству $W_{2,\varphi}^3(D) \cap W_2^2(D)$ и удовлетворять краевым условиям (14) в среднем.

Доказательство. Требуемая гладкость полусильного решения прямо следует из доказательства теоремы 1 и утверждения леммы 2, а из теорем вложения Соболева вытекает, что $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$; так как $u|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0$, то

$$u_x|_{\Gamma_2} = 0, \quad u_{xx}|_{\Gamma_2} = 0, \quad u_{yy}|_{\Gamma_3} = 0$$

в среднем. Отсюда, из вида уравнения (9) и краевого условия для его правой части $K_2 u|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0$, достигаемого из теорем вложения, так как $K_2 u \in W_{2,\varphi}^1(D)$, следует, что

$$u_x|_{\Gamma_3} = 0, \quad u_{yy}|_{\Gamma_2} = 0, \quad K_2 u|_{\Gamma_1} = 0$$

в среднем. Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание. Аналогичным методом можно показать, что полусильное решение краевой задачи А при соответствующих ограничениях на правую часть и коэффициенты уравнения (7) принадлежит весовому пространству более высокой гладкости.

3. Заключение. Приведена визуализация результатов численных расчетов полей температуры в разные моменты времени и их анимация по времени в пакете MathCad-15. Эта математическая модель описывает процесс, связанный с отключением электрической дуги в спутном потоке газа. В дальнейшем планируется использовать метод теплового баланса, применив эту вычислительную модель к более реальной задаче в трехмерном пространственном случае, а так же провести численные расчеты для уравнения четвертого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
2. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. — М.: Высшая школа, 1990.
3. Кон Д., Ниренберг Л. Некоэрцитивные краевые задачи// в кн.: Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1967. — С. 88–165.
4. Ханхасаев В. Н. К теории нелинейных уравнений смешанного типа четвертого порядка// в кн.: Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. — Новосибирск: Изд-во Ин-та мат. СО РАН, 1988. — С. 154–165.
5. Ханхасаев В. Н. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка// в кн.: Динамика сплошной среды. — Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН, 1981. — С. 144–150.
6. Ханхасаев В. Н., Буянтуев С. Л. Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа// Мат. 1 Междунар. науч.-практ. конф. «Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале». — Улан-Удэ, 2001. — С. 168–172.
7. Ханхасаев В. Н., Дармахаев Э. В. О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 155. — С. 89-97.
8. Шашков А. Г. Волновые явления теплопроводности. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ханхасаев Владислав Николаевич (Khankhasaev Vladislav Nikolaevich)
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ
(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: hanhvladnick@mail.ru

Пластинина Валентина Михайловна (Plastinina Valentina Mikhailovna)
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ
(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: plastininav@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 90–100
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-90-100

УДК 517.95

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С КОМПЛЕКСОМ ДОЛЬБО

© 2025 г. А. А. ШЛАПУНОВ, А. Н. ПОЛКОВНИКОВ

Аннотация. Рассматривается задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений, структурно похожая на классические эволюционные уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости. Основное отличие этой системы состоит в том, что она порождена не стандартными операторами градиента, дивергенции и ротора, а многомерным оператором Коши—Римана, его комплексом совместности (который обычно называется комплексом Дольбо) и его формально сопряженным оператором. Схожесть структуры позволяет доказать для этой задачи теорему существования слабых решений и теорему об открытом отображении на шкале специально построенных пространств Бохнера—Соболева. Кроме того, получен критерий существования «сильного» решения в данных пространствах.

Ключевые слова: комплекс Дольбо, обобщенное уравнение Стокса, обобщенное уравнение Навье—Стокса, эллиптико-параболический оператор.

GENERALIZED NAVIER—STOKES EQUATIONS ASSOCIATED WITH THE DOLBEAULT COMPLEX

© 2025 А. А. SHLAPUNOV, A. N. POLKOVNIKOV

ABSTRACT. We consider the Cauchy problem for a system of nonlinear differential equations structurally similar to the classical evolutionary Navier–Stokes equations for an incompressible liquid. The main difference of this system is that it is generated not by the standard gradient, divergence, and curl operators, but by the multidimensional Cauchy–Riemann operator, its the compatibility complex (which is usually called the Dolbeault complex) and its formally adjoint operator. The similarity of the structure makes it possible to prove the theorem of the existence of weak solutions for this problem and the open mapping theorem on the scale of specially constructed Bochner–Sobolev spaces. In addition, a criterion for the existence of a “strong” solution in these spaces is obtained.

Keywords and phrases: Dolbeault complex, generalized Stokes equation, generalized Navier–Stokes equation, elliptic-parabolic operators.

AMS Subject Classification: 35Qxx, 35Kxx, 35Nxx

1. Введение. Уравнения Навье—Стокса (см., например, [1, 2, 22] и библиографию а этих работах) на протяжении многих десятилетий остаются вызовом для как математиков-теоретиков, так и для специалистов по прикладной математике и гидродинамике. В [11] была предложена более общая задача, в рамках теории дифференциальных комплексов, а в [17] эта задача была рассмотрена для комплекса де Рама в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, на шкале специально построенных пространств

Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-02-2024-1429).

Бохнера—Соболева (в первой степени комплекса соответствующая система совпадает с уравнениями Навье—Стокса для несжимаемой жидкости). Комплекс Дольбо на комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ имеет много общих черт с комплексом де Рама, но отличается от него рядом важных особенностей: отсутствием, вообще говоря, конечномерности пространства решений оператора в нулевой степени комплекса и субэллиптичности соответствующих задач Неймана (в то время как для комплекса де Рама решения в нулевой степени комплекса суть постоянные, а задачи Неймана эллиптичны).

2. Обобщенные операторы Стокса и Навье—Стокса. Пусть $\bar{\partial}$ обозначает многомерный оператор Коши—Римана в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 2$, т.е. столбец дифференциальных операторов $(\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n)^T$, компоненты которого суть одномерные операторы Коши—Римана

$$\bar{\partial}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \iota \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} \right),$$

где ι — мнимая единица. Аналогично оператору градиента в $\mathbb{R}^n$, оператор $\bar{\partial}$ естественным образом порождает комплекс совместности

$$0 \longrightarrow C_{\Lambda^{0,0}}^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}^0} C_{\Lambda^{0,1}}^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}^1} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}^{n-1}} C_{\Lambda^{0,n}}^\infty \longrightarrow 0,$$

где $C_{\Lambda^{p,q}}^\infty$ — пространство внешних дифференциальных форм бистепени (p, q) с бесконечно гладкими коэффициентами относительно переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, $z_j = x_j + \iota x_{j+n}$, а $\bar{\partial}^0 = \bar{\partial}$, $\bar{\partial}^{q+1} \circ \bar{\partial}^q = 0$, $0 \leq q \leq n-1$ (см. [21, § 1.2]). Обозначив через $(\bar{\partial}^q)^*$ формально сопряженный оператор для $\bar{\partial}^q$, получаем набор сильно эллиптических операторов (обобщенных лапласианов комплекса Дольбо) $\Delta^q = (\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q + \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^*$, $0 \leq q \leq n$, где, по умолчанию, $\bar{\partial}^{-1} = 0$, $\bar{\partial}^n = 0$.

В [11] была предложена конструкция обобщенных уравнений Навье—Стокса, ассоциированных с дифференциальными комплексами. С учетом уточнений [14], в данном контексте мы рассматриваем следующую систему уравнений: по заданным $(0, q)$ -дифференциальной форме f на $\mathbb{C}^n \times [0, T]$ и $(0, q)$ -дифференциальной форме u_0 на $\mathbb{C}^n$ найти $(0, q)$ -дифференциальную форму u и $(0, q-1)$ -дифференциальную форму p на $\mathbb{C}^n \times [0, T]$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu \Delta^q u + \mathcal{N}^q u + \bar{\partial}^{q-1} p = f & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ (\bar{\partial}^{q-1})^* u = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ (\bar{\partial}^{q-2})^* p = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ u(z, 0) = u_0(z), & z \in \mathbb{C}^n, \\ \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{C}^n} |u(z, t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{j=1}^{2n} |\partial_j u(z, t)|^2 dx dt < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь μ , T — фиксированные положительные числа, коэффициенты всех форм зависят от параметра t , а $\mathcal{N}^q$ — подходящий нелинейный оператор. Отметим, что сильная эллиптичность оператора Δ^q означает, что оператор $\partial_t + \mu \Delta^q$ сильно равномерно параболичен по Петровскому. Что касается нелинейности $\mathcal{N}^q$, то мы ограничимся следующим случаем. Зафиксируем два билинейных дифференциальных оператора нулевого порядка с постоянными коэффициентами:

$$M_1^q : C_{\Lambda^{0,q+1}}^\infty \times C_{\Lambda^{0,q}}^\infty \rightarrow C_{\Lambda^{0,q}}^\infty, \quad M_2^q : C_{\Lambda^{0,q}}^\infty \times C_{\Lambda^{0,q}}^\infty \rightarrow C_{\Lambda^{0,q-1}}^\infty$$

и положим $\mathcal{N}^q u = M_1^q(\bar{\partial}^q u, u) + \bar{\partial}^{q-1} M_2^q(u, u)$.

Следуя классической схеме изучения уравнений Навье—Стокса, можно получить теорему о существовании слабых решений задачи (1) при дополнительных условиях на форму M_1^q . Именно,

пусть $L_{\Lambda^{p,q}}^r$ обозначает пространство дифференциальных форм

$$u = \sum_{\#I=p} \sum_{\#J=q} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

бистепени (p, q) на $\mathbb{C}^n$ с компонентами u_{IJ} в $L^r(\mathbb{C}^n)$, снабженное нормой

$$\|u\|_{L_{\Lambda^{p,q}}^r} = \left(\sum_{\#I=p} \sum_{\#J=q} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |u_{IJ}(x)|^r dx \right)^{1/r}.$$

Аналогично вводятся пространства форм на $\mathbb{C}^n$ с компонентами класса Соболева $W_{\Lambda^{p,q}}^{s,r}$, $H_{\Lambda^{p,q}}^s$. Для удобства частные случаи введенных пространств для форм бистепени $(0, q)$ будем обозначать соответственно L_q^r , $W_q^{s,r}$ и H_q^s . Далее, обозначим через $\mathcal{V}_{\Lambda^{0,q}}$ подпространство в $C_{0,\Lambda^{0,q}}^\infty$, состоящее из форм, удовлетворяющих условию $(\bar{\partial}^{q-1})^* u = 0$ в $\mathbb{C}^n$, а через $\mathbf{H}_q^s$ — замыкание $\mathcal{V}_{\Lambda^{0,q}}$ в H_q^s , $s \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно, $(\mathbf{H}_q^s)'$ обозначает сильное сопряженное пространство к $\mathbf{H}_q^s$. Кроме того, если $I = [0, T]$, $p \geq 1$, а $\mathcal{B}$ — банахово пространство функций на $\mathbb{C}^n$, то через $L^r(I, \mathcal{B})$ обозначим пространство Бохнера измеримых отображений $u : I \rightarrow \mathcal{B}$ с нормой

$$\|u\|_{L^r(I, \mathcal{B})} := \left\| \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{B}} \right\|_{L^r(I)}, \quad r \geq 1$$

(см., например, [22, гл. III, § 1]). Аналогично вводятся пространства $C(I, \mathcal{B})$, т.е. пространства всех отображений $u : I \rightarrow \mathcal{B}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C(I, \mathcal{B})} := \sup_{t \in I} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{B}}.$$

Следующая теорема показывает, что при дополнительных ограничениях на нелинейное слагаемое $\mathcal{N}^q u$ задача (1) имеет слабое решение.

Теорема 1. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $s \leq n \leq (s+1)$. Если

$$\left(M_1^q(\bar{\partial}^q w, v), v \right)_{L_q^2} = 0 \quad \text{для всех } v \in \mathcal{V}_{\Lambda^{0,q}}, \quad (2)$$

то для любой пары $(f, u_0) \in L^2(I, (\mathbf{H}_q^1)') \times \mathbf{H}_q^0$ найдется дифференциальная форма $u \in L^\infty(I, \mathbf{H}_q^0) \cap L^2(I, \mathbf{H}_q^1)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u, v)_{L_q^2} + \mu(\bar{\partial}^q u, \bar{\partial}^q v)_{L_{q+1}^2} = \langle f - \mathcal{N}^q u, v \rangle_{\Lambda^{0,q}}, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} \quad (3)$$

для всех $v \in \mathbf{H}_q^s$. Кроме того, $\partial_t u \in L^{2/(n+1-s)}(I, (\mathbf{H}_q^s)')$.

Доказательство. Доказательство проводится вполне аналогично теореме существования слабых решений для уравнений Навье—Стокса, основано на энергетических оценках, неравенствах Гальярдо—Ниренберга для $\mathbb{R}^{2n}$ и использует метод Галеркина (см., например, [1, 10, 22]). $\square$

Ключевым фактором в доказательстве является условие (2), которое выполняется и для нелинейности, возникающей в уравнениях Навье—Стокса, что позволяет доказать существование слабого решения для последних. Как обычно для уравнений типа Навье—Стокса, в этом случае не удастся доказать теорему единственности для слабых решений u уравнений (1), т.е. удовлетворяющих (3), а неизвестная форма p идентифицируется (аддитивно, с точностью до формы с постоянными коэффициентами) только в пространстве распределений с помощью информации о когомологиях комплекса Дольбо (ср. [17, 22]). Например, для уравнений Навье—Стокса давно известно, что существование регулярных решений будет следовать из существования так называемого сильного решения, т.е. слабого решения в пространстве Бохнера $L^s([0, T], L^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^n))$ с числами $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$, удовлетворяющими соотношению $2/\mathfrak{s} + n/\mathfrak{r} = 1$ при $\mathfrak{r} > n$ (см., например, [1, 15, 16] и уточнение [8] для случая $\mathfrak{r} = n = 3$). Для задачи (1) мы можем привести аналогичный критерий существования сильного решения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если решение задачи (3) лежит в пространстве $L^s(I, L_q^r)$ с некоторыми числами $r > 2n$ и s , удовлетворяющими соотношению $2/s + 2n/r = 1$, то задача (3) имеет гладкое решение при гладкой правой части.

Доказательство следует из неравенств Гальярдо—Ниренберга с применением метода Галеркина и проводится вполне аналогично классическому случаю для уравнений Навье—Стокса (см., например, [1, 15, 16]). $\square$

Заметим, что для $n = 1$ оператор Коши—Римана порождает тривиальный комплекс совместности, состоящий только из одного оператора, а поэтому задача (3) не имеет смысла. При $n > 1$ вещественная размерность пространства $\mathbb{C}^n$ равна $2n > 2$, а это означает, что стандартные неравенства Гальярдо—Ниренберга не могут гарантировать теорему единственности для задачи (3) в этом случае.

Отметим также, что при $q = 1$ имеется естественная нелинейность $\mathcal{N}^q u = \bar{\star}(\bar{\star}^1 u \wedge u) + \bar{\partial}^0 |u|^2$, структурно соответствующая форме Лэмба нелинейности, входящей в уравнения Навье—Стокса, и удовлетворяющая (2); здесь $\star$ — оператор Ходжа на дифференциальных формах, а $\bar{\star} v := \overline{(\star v)}$.

Для поиска более регулярных решений подобной задачи для комплекса де Рама в [17], была введена в рассмотрение шкала функциональных пространств Бохнера—Соболева, одна из модификаций которой была позднее использована при решении аналогичных задач для эллиптических дифференциальных комплексов на гладких компактных римановых многообразиях; она годится и для задачи (1). Более точно для $s, k \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s}$ множество всех «скоростей», т.е. таких $(0, q)$ -форм u из $C(I, \mathbf{H}_q^{k+2s}) \cap L^2(I, \mathbf{H}_q^{k+1+2s})$, что

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j u \in C\left(I, \mathbf{H}_q^{k+2s-|\alpha|-2j}\right) \cap L^2\left(I, \mathbf{H}_q^{k+1+2s-|\alpha|-2j}\right),$$

если $|\alpha| + 2j \leq 2s$. Снабдим пространство $B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s}$ естественной нормой

$$\|u\|_{B_{\text{vel}, q}^{k, s, s}} := \left(\sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|+2j \leq 2s} \left\| \partial_x^\alpha \partial_t^j u \right\|_{i, q, T}^2 \right)^{1/2},$$

где

$$\|u\|_{i, q, T} = \left(\|\nabla^i u\|_{C(I, L_{\Lambda^0, q}^2)}^2 + \mu \|\nabla^{i+1} u\|_{L^2(I, L_{\Lambda^0, q}^2)}^2 \right)^{1/2}.$$

Аналогично, для $s, k \in \mathbb{Z}_+$, пусть $B_{\text{for}, q}^{k, 2s, s}$ состоит из всех «внешних сил», т.е. $(0, q)$ -форм f из $C(I, H_q^{2s+k}) \cap L^2(I, H_q^{2s+k+1})$, для которых

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j f \in C(I, H_q^k) \cap L^2(I, H_q^{k+1})$$

при $|\alpha| + 2j \leq 2s$. Если $f \in B_{\text{for}, q}^{k, 2s, s}$, то на самом деле

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j f \in C(I, H_q^{k+2(s-j)-|\alpha|}) \cap L^2(I, H_q^{k+1+2(s-j)-|\alpha|})$$

для всех α и j , удовлетворяющих $|\alpha| + 2j \leq 2s$. Снабдим пространство $B_{\text{for}, q}^{k, 2s, s}$ естественной нормой

$$\|f\|_{B_{\text{for}, q}^{k, 2s, s}} = \left(\sum_{\substack{|\alpha|+2j \leq 2s \\ 0 \leq i \leq k}} \left\| \nabla^i \partial_x^\alpha \partial_t^j f \right\|_{C(I, L_q^2)}^2 + \left\| \nabla^{i+1} \partial_x^\alpha \partial_t^j f \right\|_{L^2(I, L_q^2)}^2 \right)^{1/2}.$$

Наконец, зафиксируем такую функцию $h_0 \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} h_0(x) dx = 1, \quad (4)$$

и введем пространство $B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2s,s}$ для «давления» p , состоящее из всех $(0, q-1)$ -форм из $C(I, H_{\text{loc},q-1}^{2s+2+1}) \cap L^2(I, H_{\text{loc},q-1}^{2s+k+2})$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} p_{0J}(x) h_0(x) dx = 0 \quad \text{для всех } t \in [0, T] \text{ и } \#J = q-1, \quad (5)$$

и таких, что $\bar{\partial}^{q-1} p \in B_{\text{for},q}^{k,2s,s}$,

$$(\bar{\partial}^{q-2})^* p = 0 \quad \text{в } \mathbb{C}^n \times [0, T], \quad (6)$$

$$\|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} < +\infty \quad \text{при } 2s+k = n+1, \quad (7)$$

$$\|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} + \|p\|_{C(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} < +\infty \quad \text{при } 2s+k > n+1; \quad (8)$$

здесь C_b — пространство ограниченных непрерывных функций в $\mathbb{C}^n$ с нормой $\|w\|_{C_b} = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |w(z)|$. Данное пространство можно снабдить нормой

$$\|p\|_{B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2s,s}} = \begin{cases} \|\bar{\partial}^{q-1} p\|_{B_{\text{for},q}^{k,2s,s}}, & 2s+k \leq n, \\ \|\bar{\partial}^{q-1} p\|_{B_{\text{for},q}^{k,2s,s}} + \|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})}, & 2s+k = n+1, \\ \|\bar{\partial}^{q-1} p\|_{B_{\text{for},q}^{k,2s,s}} + \|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} + \|p\|_{C(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})}, & 2s+k > n+1. \end{cases}$$

Ясно, что $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$, $B_{\text{for},q}^{k,2s,s}$, $B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2s,s}$ — банаховы пространства. Кроме того, далее будем рассматривать линеаризацию задачи (1); с этой целью введем обозначение

$$\mathbf{B}_q(w, u) = M_1^q(\bar{\partial}^q w, u) + \bar{\partial}^{q-1} M_2^q(w, u) + M_1^q(\bar{\partial}^q u, w) + \bar{\partial}^{q-1} M_2^q(u, w)$$

для форм u, w бистепени $(0, q)$.

Лемма 1. Пусть $n \geq 2$, $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $2s+k > n-1$. Тогда следующие отображения непрерывны:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^{q-1} : B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1} &\rightarrow B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}, & \Delta : B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} &\rightarrow B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}, \\ \partial_t : B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} &\rightarrow B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}, & \mathcal{N}^q : B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} &\rightarrow B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}. \end{aligned}$$

Кроме того, если $w \in B_{\text{vel},q}^{k+2,2(s-1),s-1}$, то отображение

$$\mathbf{B}_q(w, \cdot) : B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \rightarrow B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1},$$

тоже непрерывно и для всех $u, w \in B_{\text{vel},q}^{k+2,2(s-1),s-1}$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{B}_q(w, u)\|_{B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}} \leq c_{s,k}^q \|w\|_{B_{\text{vel},q}^{k+2,2(s-1),s-1}} \|u\|_{B_{\text{vel},q}^{k+2,2(s-1),s-1}}, \quad (9)$$

где $c_{s,k}^q$ — некоторая положительная константа, не зависящая от u, w .

Доказательство. Для линейных операторов $\bar{\partial}$, ∂_t и Δ^q утверждение леммы следует непосредственно из определения пространств, а для операторов $\mathbf{B}_q(w, \cdot)$ и $\mathcal{N}^q$ — из неравенств Гальярдо—Ниренберга (см., например, [17, лемма 3.5]) или [14, теорема 1.4]. $\square$

Далее, обозначим через φ^q фундаментальное решение обобщенного оператора Лапласа Δ^q (см., например, [21]). Рассмотрим проекцию P^q пространства $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}$ на ядро оператора $(\bar{\partial}^{q-1})^*$.

Лемма 2. Пусть $s, k \in \mathbb{Z}_+$. Для каждого q псевдодифференциальный оператор $P^q = \varphi^q(\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q$ индуцирует такое непрерывное отображение

$$P^q : B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \rightarrow B_{\text{vel},q}^{k,2(s-1),s-1}, \quad (10)$$

что

$$P^q \circ P^q u = P^q u, \quad (P^q u, v)_{L_q^2} = (u, P^q v)_{L_q^2}, \quad (P^q u, (I - P^q)u)_{L_q^2} = 0$$

для всех $u, v \in C_{0,\Lambda^0,q}^\infty$.

Доказательство. Действительно, пусть $u, v \in C_{0,\Lambda^0,q}^\infty$. Так как φ^q — фундаментальное решение обобщенного оператора Лапласа, то

$$v = \Delta^q \varphi^q v = \varphi^q \Delta^q v = \varphi^q (\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q v + \varphi^q \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^* v. \quad (11)$$

В силу того, что $\bar{\partial}^{q+1} \circ \bar{\partial}^q = 0$, имеем

$$P^q \circ P^q u = \left((\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q \varphi^q \right) \circ \left((\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q \varphi^q \right) u = \left((\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q \varphi^q (\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q \varphi^q \right) u = (\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q \Delta^q \varphi^q u = P^q u.$$

Далее, из формулы (11) получаем равенство

$$P^q = I - \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^* \varphi^q$$

на всех функциях с компактным носителем в $\mathbb{R}^{2n}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (P^q u, v)_{L_q^2} &= B(P^q u, P^q v + \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^* \varphi^q v)_{L_q^2} = (P^q u, P^q v)_{L_q^2} = \\ &= \left(u - \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^* \varphi^q u, P^q v \right)_{L_q^2} = (u, P^q v)_{L_q^2}, \end{aligned}$$

так как $(\bar{\partial}^{q-1})^* P^q = 0$. С другой стороны,

$$(P^q u, (I - P^q)u)_{L_q^2} = (P^q u, u)_{L_q^2} - (P^q u, P^q u)_{L_q^2} = 0.$$

Наконец, непрерывность отображения $P^q : B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \longrightarrow B_{\text{vel},q}^{k,2(s-1),s-1}$ следует из леммы 1 и коммутативного равенства $P^q \partial_t^j = \partial_t^j P^q$ при $j \leq s-1$. $\square$

Лемма 3. Пусть $n \geq 3$, $1 \leq q < n$, $2s+k > n$ и форма $F \in B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}$ удовлетворяет условию $P^q F = 0$ в $\mathbb{C}^n$. Тогда существует единственная форма $p \in B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, удовлетворяющая условиям (5) и

$$\bar{\partial}^{q-1} p = F \quad \text{в } \mathbb{C}^n \times [0, T]. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Покажем, что $(0, q-1)$ -форма $p = (\bar{\partial}^{q-1})^* \varphi^q F$ является решением (12). В самом деле,

$$\bar{\partial}^{q-1} p = \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^* \varphi^q F.$$

Воспользовавшись леммой 2 и равенством (11), видим, что для любой функции $v \in C_{0,\Lambda^0,q}^\infty$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \langle p, (\bar{\partial}^{q-1})^* v \rangle_q &= \left\langle (\bar{\partial}^{q-1})^* \varphi^q F, (\bar{\partial}^{q-1})^* v \right\rangle_q = \left\langle F, \varphi^q \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^* v \right\rangle_q = \\ &= \langle F, v \rangle_q - \left\langle F, \varphi^q (\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q v \right\rangle_q = \langle F, v \rangle_q, \end{aligned}$$

так как $P^q F = 0$. По построению решения имеем $\bar{\partial}^{q-1} p = F$ и $(\bar{\partial}^{q-2})^* p = 0$.

Пусть теперь $p_1, p_2 \in B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$ — два решения уравнения (12). Тогда $p = p_1 - p_2$ тоже является решением, причем $\bar{\partial}^{q-1} p = 0$. В силу того, что $p \in B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, имеем $(\bar{\partial}^{q-2})^* p = 0$, т.е. p на самом деле имеет гармонические коэффициенты в $\mathbb{C}^n$, ограниченные в бесконечно удаленной точке. Тогда по теореме Лиувилля p — постоянный вектор, т.е. «давление» восстанавливается с точностью до константы, как и для случая классических уравнений Стокса. Для обеспечения единственности вектора p воспользуемся тем, что он, по определению пространства $B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, удовлетворяет (5). Поэтому, с учетом (4), заключаем, что $p \equiv 0$. $\square$

Для того чтобы получить теорему об открытом отображении, нужно рассмотреть линеаризацию задачи (1). Именно, пусть даны $(0, q)$ -формы f и w с достаточно гладкими коэффициентами

в $\mathbb{C}^n \times [0, T]$ и $(0, q)$ -форма u_0 в $\mathbb{C}^n$. Требуется найти достаточно гладкие $(0, q)$ -форму u и $(0, q-1)$ -форму p в полосе $\mathbb{C}^n \times [0, T]$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu \Delta^q u + \mathbf{B}_q(w, u) + \bar{\partial}^{q-1} p = f & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ (\bar{\partial}^{q-1})^* u = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ (\bar{\partial}^{q-2})^* p = 0 & \text{в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ u(z, 0) = u_0(z), & z \in \mathbb{C}^n, \\ \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{C}^n} |u(z, t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{j=1}^{2n} |\partial_j u(z, t)|^2 dx dt < +\infty. \end{cases} \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть $n \geq 2$, $0 \leq q < n$, $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $2s + k > n$ и $w \in B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s}$. Тогда задача (13) индуцирует биективное непрерывное линейное отображение

$$\mathcal{A}_w^q : B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s} \times B_{\text{pre}, q-1}^{k+1, 2(s-1), s-1} \longrightarrow B_{\text{for}, q}^{k, 2(s-1), s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}, \quad (14)$$

имеющее непрерывный обратный оператор $(\mathcal{A}_w^q)^{-1}$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3, которая позволяет «восстановить» давление p после применения к задаче (13) оператора проекции P^q , с помощью стандартного метода Галеркина (см., например, [17]). $\square$

Поскольку $B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s}$ непрерывно вложено в пространство $L^s(I, L_q^{\mathbf{r}})$ с любыми числами $\mathbf{r} > 2n$ и $\mathbf{s}$, удовлетворяющими соотношению $2/\mathbf{s} + 2n/\mathbf{r} = 1$, то на шкалах введенных нами пространств справедлива теорема единственности и для нелинейного случая.

Однако в последние годы усилия научного сообщества были направлены и на поиски доказательства отсутствия теоремы существования для уравнений типа Навье—Стокса в высоких пространственных размерностях (см., например, [2, 3, 13, 20, 22]). Тем не менее, мы получаем теорему об открытом отображении или, иначе, теорему об устойчивости, для задачи (1) на введенной шкале пространств Бохнера—Соболева.

Теорема 4. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq q < n$, $s \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, $2s + k > n$. Тогда задача (1) индуцирует инъективное непрерывное нелинейное открытое отображение

$$\mathcal{A}^q : B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s} \times B_{\text{pre}, q-1}^{k+1, 2(s-1), s-1} \longrightarrow B_{\text{for}, q}^{k, 2(s-1), s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}. \quad (15)$$

Доказательство. Непрерывность оператора $\mathcal{A}^q$ следует из леммы 1. Далее, пусть

$$(u, p) \in B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s} \times B_{\text{pre}, q-1}^{k+1, 2(s-1), s-1}, \quad \mathcal{A}^q(u, p) = (f, u_0) \in B_{\text{for}, q}^{k, 2(s-1), s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}.$$

Следовательно, u является слабым решением задачи (1), т.е. удовлетворяет (3). Покажем, что задача (1) имеет не более одного решения (u, p) в пространстве $B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s} \times B_{\text{pre}, q-1}^{k+1, 2(s-1), s-1}$. В самом деле, пусть (u', p') и (u'', p'') — два решения задачи (1) в указанных функциональных пространствах, т.е. $\mathcal{A}^q(u', p') = \mathcal{A}^q(u'', p'')$. При этом формы $u = u' - u''$ и $p = p' - p''$ удовлетворяют (1) с нулевыми данными $(f, u_0) = (0, 0)$. Отсюда

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_q^2}^2 + 2\mu \|\bar{\partial}^q u\|_{L_{q+1}^2}^2 = \left((\mathbf{B}_q(u'', u'') - \mathbf{B}_q(u', u')), u \right)_{L_q^2}.$$

Из неравенства Гординга и леммы Гронуолла (см., например, [12]) следует, что $u \equiv 0$, а из леммы 3 имеем $p' = p''$. Таким образом, мы доказали инъективность оператора $\mathcal{A}^q$.

Наконец, легко увидеть, что производная Фреше $(\mathcal{A}_{(w, p_0)}^q)'$ нелинейного отображения $\mathcal{A}^q$ в произвольной точке

$$(w, p_0) \in B_{\text{vel}, q}^{k, 2s, s} \times B_{\text{pre}, q-1}^{k+1, 2(s-1), s-1}$$

равна непрерывному линейному отображению $\mathcal{A}_w^q$. По теореме 3 оператор

$$\mathcal{A}_w^q : B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1} \longrightarrow B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$$

непрерывно обратим. Таким образом, открытость образа отображения $\mathcal{A}^q$ и непрерывность его локального обратного отображения следуют из теоремы о неявной функции для пространств Банаха (см., например, [9, теорема 5.2.3]) $\square$

В частности, теорема означает, что для любой пары данных, для которой найдется решение в нужном классе, существует окрестность, для всех элементов которой тоже существуют соответствующие решения. Отметим, что для классических уравнений Навье—Стокса в других функциональных пространствах подобное утверждение отмечалось в книге О. А. Ладыженской [1]. Для некоторых других эллиптических комплексов аналогичные теоремы в различных функциональных пространствах были получены в [14, 17].

Кроме того, из теоремы 4 следует, что образ оператора (15) замкнут тогда и только тогда, когда он совпадает со всем пространством $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$.

Недавно для уравнений Навье—Стокса был получен критерий сюръективности образа в пространствах, подобных введенным нами (см. [18]), навеянный соображениями о фредгольмовых нелинейных операторах из [19]. Для нашей задачи мы можем получить аналогичный критерий.

Теорема 5. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а числа $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ удовлетворяют $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$. Отображение (15) сюръективно тогда и только тогда, когда из предкомпактности образа $\mathcal{A}^q(S)$ в пространстве $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$ любого подмножества $S = S_{\text{vel},q} \times S_{\text{pre},q-1}$ декартова произведения $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$ следует ограниченность множества $S_{\text{vel},q}$ в пространстве $L^{\mathfrak{s}}(I, L_q^{\mathfrak{r}})$.

Доказательство. Доказательство аналогично случаю, когда рассматривается уравнение Навье—Стокса, ассоциированное с комплексом де Рама (см. [18, теорема 3]). Приведем основные шаги доказательства. Пусть отображение (15) является сюръективным. Тогда образ этого отображения замкнут по теореме 4. Зафиксируем такое подмножество $S = S_{\text{vel},q} \times S_{\text{pre},q-1}$ произведения $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, что образ $\mathcal{A}^q(S)$ является предкомпактным в пространстве $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$. Если множество $S_{\text{vel},q}$ неограниченно в пространстве $L^{\mathfrak{s}}(I, L_q^{\mathfrak{r}})$, то существует такая последовательность $\{(u_k, p_k)\} \subset S$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L^{\mathfrak{s}}(I, L_q^{\mathfrak{r}})} = \infty. \quad (16)$$

Поскольку множество $\mathcal{A}^q(S)$ является предкомпактным в $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$, приходим к выводу, что соответствующая последовательность данных $\{\mathcal{A}^q(u_k, p_k) = (f_k, u_{k,0})\}$ содержит подпоследовательность $\{(f_{k_m}, u_{k_m,0})\}$, которая сходится к элементу (f, u_0) в этом пространстве. Но образ оператора $\mathcal{A}^q$ замкнут, а значит, для данных (f, u_0) существует единственное решение (u, p) задачи (1) в пространстве $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, и последовательность $\{(u_{k_m}, p_{k_m})\}$ сходится к (u, p) в этом пространстве. Поэтому $\{(u_{k_m}, p_{k_m})\}$ ограничена в $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, а это противоречит (16), поскольку пространство $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$ непрерывно вложено в пространство $L^{\mathfrak{s}}(I, L_q^{\mathfrak{r}})$ для любой пары $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, удовлетворяющей условиям $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$.

Далее, рассмотрим стандартные априорные оценки для уравнений (1). Пусть элементы рассматриваемых пространств обладают достаточной регулярностью; оценки нужны нам для доказательства сюръективности отображения (15), а не для улучшения регулярности слабых решений.

Лемма 4. Если $(u, p) \in B_{\text{vel},q}^{0,2,1} \times B_{\text{pre},q-1}^{1,0,0}$ является решением уравнений (1) с данными $(f, u_0) \in B_{\text{for},q}^{0,0,0} \times \mathbf{H}_q^2$, то $\|u\|_{0,\mu,T} \leq \|(f, u_0)\|_{0,\mu,T}$.

Доказательство следует из стандартных априорных оценок. $\square$

Наша следующая задача — оценить производные u и p по отношению к x и t .

Лемма 5. *Предположим, что $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$ удовлетворяют условию $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$. Если функция $(u, p) \in B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$ является решением уравнений (1) с данными $(f, u_0) \in B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$, то для нее справедлива оценка вида*

$$\|(u, p)\|_{B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}} \leq c(k, s, (f, u_0), u); \quad (17)$$

константа в правой части зависит от $\|f\|_{B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1}}$, $\|u_0\|_{\mathbf{H}_q^{2s+k}}$ и $\|u\|_{L^s(I, L^{\mathfrak{r}})}$, а также от $\mathfrak{r}$, T , μ и m .

Доказательство следует из неравенств Гельдера и Гальярдо—Ниренберга. $\square$

Теперь нужно показать, что образ отображения (15) замкнут. Если данное подмножество $S = S_{\text{vel},q} \times S_{\text{pre},q-1}$ декартова произведения $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$ таково, что образ $\mathcal{A}^q(S)$ является предкомпактным в пространстве $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$, то множество $S_{\text{vel},q}$ ограничено в пространстве $L^s(I, L_q^{\mathfrak{r}})$ с парой $\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$, удовлетворяющей $2/\mathfrak{s} + 2n/\mathfrak{r} = 1$.

Пусть пара $(f, u_0) \in B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$ принадлежит замыканию образа оператора $\mathcal{A}^q$. Тогда существует такая последовательность $\{(u_i, p_i)\}$ в $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, что последовательность $\{(f_i, u_{i,0}) = \mathcal{A}^q(u_i, p_i)\}$ сходится к (f, u_0) в пространстве $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$.

Рассмотрим множество $S = \{(u_i, p_i)\}$. Поскольку образ $\mathcal{A}^q(S) = \{(f_i, u_{i,0})\}$ является предкомпактным в $B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}$, из предположения следует, что подмножество $S_{\text{vel},q} = \{u_i\}$ из $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$ ограничено в пространстве $L^s(I, L_q^{\mathfrak{r}})$.

Применяя леммы 4 и 5, приходим к выводу, что последовательность $\{(u_i, p_i)\}$ ограничена в пространстве $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$. По определению $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$ последовательность $\{u_i\}$ ограничена в $C(I, \mathbf{H}_q^{k+2s})$ и $L^2(I, \mathbf{H}_q^{k+2s+1})$, а частные производные $\{\partial_t^j u_i\}$ по времени при $1 \leq j \leq s$ ограничены в $C(I, \mathbf{H}_q^{k+2(s-j)})$ и $L^2(I, \mathbf{H}_q^{k+2(s-j+1)})$. Поэтому существует такая подпоследовательность $\{u_{i_k}\}$ обладающая следующими свойствами:

- (i) последовательность $\{\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^j u_{i_k}\}$ слабо сходится в $L^2(I, L_q^2)$ при условии, что $|\alpha| + 2j \leq 2s$ и $|\beta| \leq k + 1$;
- (ii) последовательность $\{\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^j u_{i_k}\}$ сходится *-слабо в $L^\infty(I, L_q^2)$ при условии, что $|\alpha| + 2j \leq 2s$ и $|\beta| \leq k$.

Ясно, что предел u последовательности $\{u_{i_k}\}$ является решением уравнений (1), причем

- (i) каждая производная $\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^j u$ принадлежит $L^2(I, \mathbf{H}_q^0)$ при условии, что $|\alpha| + 2j \leq 2s$ и $|\beta| \leq k + 1$;
- (ii) каждая производная $\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^j u$ принадлежит $L^\infty(I, \mathbf{H}_q^0)$ при условии, что $|\alpha| + 2j \leq 2s$ и $|\beta| \leq k$.

Из энергетических оценок и леммы Гронуолла следует, что такое сильное решение будет единственным (см., например, [22] для уравнений Навье—Стокса). Кроме того, если

$$0 \leq j \leq s - 1, \quad |\alpha| + 2j \leq 2s, \quad |\beta| \leq k, \quad (18)$$

то $\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^j u \in L^2(I, \mathbf{H}_q^1)$ и $\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^{j+1} u \in L^2(I, (\mathbf{H}_q^1)')$. Отсюда следует, что $\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^j u \in C(I, \mathbf{H}_q^0)$ для всех j и α, β , удовлетворяющих условиям (18). Следовательно, u принадлежит пространству $B_{\text{vel},q}^{k+2,2(s-1),s-1}$. Более того, используя формулу (9) при $w = u$ получаем, что производные $\partial_x^{\alpha+\beta} \partial_t^j \mathcal{N}^q u$ принадлежат $C(I, L_q^2)$ для всех j и α, β , которые удовлетворяют неравенствам (18).

Кроме того, оператор P^q отображает $C(I, L_q^2)$ непрерывно в $C(I, L_q^2)$. Следовательно, поскольку u является решением задачи (1), получаем, что функция

$$\partial_x^\beta \partial_t^s u = \partial_x^\beta \partial_t^{s-1} \mu \Delta u - \partial_x^\beta \partial_t^{s-1} P^q \mathcal{N}^q u + \partial_x^\beta \partial_t^{s-1} P^q f$$

принадлежит $C(I, \mathbf{H}_q^0)$ для всех мультииндексов β , удовлетворяющих условию $|\beta| \leq k$. Другими словами, $u \in B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$. Наконец, из леммы 3 следует, что существует такое $p \in B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$, что

$$\bar{\partial}^{q-1} p = (I - P^q)(f - \mathcal{N}^q u),$$

т.е. пара $(u, p) \in B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1}$ является решением задачи (1).

Таким образом, мы доказали, что образ отображения (15) замкнут. Отсюда следует, что отображение (15) сюръективно. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1961.
2. *Ладыженская О. А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи математических наук — 2003. — 58, № 2(350). — С. 45–78.
3. *Barker T.* Higher integrability and the number of singular points for the Navier–Stokes equations with a scale-invariant bound // Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B — 2024. — 11. — P. 436–451.
4. *Barker T., Prange C.* From Concentration to Quantitative Regularity: A Short Survey of Recent Developments for the Navier–Stokes Equations // Vietnam Journal of Mathematics — 2024. — 52. — P. 707–734.
5. *Barker T., Seregin G.* A necessary condition of potential blowup for the Navier–Stokes system in half-space // Mathematische Annalen — 2017. — 369, № 3–4. — P. 1327–1352.
6. *Barker T., Seregin G.* On stability of weak Navier–Stokes solutions with large $L^{3,\infty}$ initial data // Communications in Partial Differential Equations — 2018. — 43, № 4. — P. 628–651.
7. *Choe H. J., Wolf J., Yang M.* A new local regularity criterion for suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations in terms of the velocity gradient // Mathematische Annalen — 2018. — 370, № 3–4. — P. 629–647.
8. *Escauriaza L., Seregin G. A.* $L^{3,\infty}$ -solutions of the Navier–Stokes equations and backward uniqueness // Russian Mathematical Surveys — 2003. — 58, № 2. — P. 211–250.
9. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser // Bull. of the AMS — 1982. — 7, № 1. — P. 65–222.
10. *Lions J. L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. — Berlin et al: Springer-Verlag, 1972.
11. *Mera A., Tarkhanov N., Shlapunov A. A.* Navier–Stokes Equations for Elliptic Complexes // Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys. — 2019. — 12, № 9. — С. 3–27.
12. *Mitrinović D. S., Pearić J. E., Fink A. M.* Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht: Mathematics and its Applications (East European Series), V. 53, 1991.
13. *Plecháč P., Sverák V.* Singular and regular solutions of a nonlinear parabolic system // Nonlinearity — 2003. — 16, № 6. — P. 2083–2097.
14. *Polkovnikov A. N.* An open mapping theorem for nonlinear operator equations associated with elliptic complexes // Applicable Analysis. — 2023. — 102. — P. 2211–2233.
15. *Prodi G.* Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes // Annali di Matematica Pura ed Applicata — 1959. — 48. — P. 173–182.
16. *Serrin J.* On the interior regularity of weak solutions of the Navie–Stokes equations // Archive for Rational Mechanics and Analysis — 1962. — 9. — P. 187–195.
17. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N.* An open mapping theorem for the Navier–Stokes type equations associated with the de Rham complex over $\mathbb{R}^n$ // Siberian Electronic Math. Reports — 2021. — 18, № 2. — P. 1433–1466.
18. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N.* Inverse image of precompact sets and regular solutions to the Navier–Stokes equations // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki — 2022. — 32, № 2. — P. 278–297.
19. *Smale S.* An infinite dimensional version of Sard’s theorem // Amer. J. Math. — 1965. — 87, № 4. — P. 861–866.
20. *Tao T.* Finite time blow-up for an averaged three-dimensional Navier–Stokes equation // J. of the AMS — 2016. — 29. — P. 601–674.
21. *Tarkhanov N.* Complexes of differential operators. — Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers, 1995.

22. *Temam R.* Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. — Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1979.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-02-2024-1429).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шлапунов Александр Анатольевич (Shlapunov Aleksandr Anatolievich)
Сибирский федеральный университет, Красноярск
(Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia)
E-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru

Полковников Александр Николаевич (Polkovnikov Aleksandr Nikolaevich)
Сибирский федеральный университет, Красноярск
(Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia)
E-mail: paskaattt@yandex.ru

CONTENTS

Stability criteria of systems of nonlinear ordinary differential equations based on additive transformations of the formula of finite increments (<i>S. G. Bulanov</i>)	3
On the maximal number of spanning trees in cacti with given order (<i>V. A. Voblyi, D. A. Kononenko</i>)	13
Feedback minimum principle for optimal control problems with terminal conditions and its extensions (<i>V. A. Dykhta</i>)	18
Probability distributions defined by Lah numbers and generalized Lah numbers (<i>N. A. Kolokolnikova</i>)	30
Application of the parametrization method for solving optimal control problems with discontinuous phase trajectories (<i>I. V. Lutoshkin, M. S. Rybina</i>)	40
Energy loss of a high-speed color particle in a non-Abelian plasma within the framework of the Hamiltonian formalism (<i>Yu. A. Markov, M. A. Markova, N. Yu. Markov</i>)	55
Parametric transformation of nonconvex optimal control problems (<i>V. A. Srochko, E. V. Akseniyushkina</i>)	64
About one SI^* -interval of rank 2 multioperations (<i>I. V. Fomina, V. I. Panteleev</i>)	71
The first boundary-value problem for some mixed equations of thermal conductivity of the second and fourth order (<i>V. N. Khankhasaev, V. M. Plastinina</i>)	83
Generalized Navier–Stokes equations associated with the Dolbeault complex (<i>A. A. Shlapunov, A. N. Polkovnikov</i>)	90

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)
Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Канель-Белов Алексей Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова,
Университет имени Бар-Илана)
Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Лукьяненко Дмитрий Витальевич, д.ф.-м.н. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Виктор Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)
Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.н., профессор (Университет Флоренции)
Сачков Юрий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор (Институт программных систем
им. А. К. Айламазяна)
Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)
Туганбаев Аскар Аканович, д.ф.-м.н., профессор (НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Фалалеев Михаил Валентинович, д.ф.-м.н., профессор
(Иркутский государственный университет)
Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор (Институт математики с вычислительным
центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН)
Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Канель-Белов Алексей Яковлевич
Корпусов Максим Олегович
Лукьяненко Дмитрий Витальевич
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Сачков Юрий Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.