

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 242



Москва 2025

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 242 (№ 5, 2025)

Дата публикации 12 мая 2025 г.

Издается с 1995 года
Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

А. С. Бондарев
А. В. Овчинников
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN (печатная версия)	0233-6723
ISSN (электронная версия)	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

ISSN 2782-4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 242

МАТЕРИАЛЫ
ВОРОНЕЖСКОЙ ЗИМНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»

Воронеж, 30 января — 4 февраля 2025 г.



Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Численно-аналитический метод исследования динамики шарнирно закрепленной упругой пластины (<i>М. А. Анкилов, А. С. Андреев</i>)	3
Метод эквивалентных операторов в исследовании одного класса дифференциальных операторов первого порядка с постоянным операторным коэффициентом (<i>А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова</i>)	11
Аппроксимации вероятности перколяции на периодическом графе $\mathbb{Z}^2$ (<i>Ю. П. Вирченко, Д. А. Черкашин</i>)	22
Перечисление помеченных эйлеровых 3-кактусов (<i>В. А. Воблый</i>)	41
Классическое решение смешанной задачи с граничным условием Зарембы и условиями сопряжения для полулинейного волнового уравнения (<i>В. И. Корзюк, Я. В. Рудько</i>)	46
Влияние запаздывания и конкуренции на макроэкономическую динамику (<i>А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, Д. Г. Фролов</i>)	61
Распределения (не)единственности для целых функций произвольного роста (<i>Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин</i>)	74
Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии трехмагнетонных систем в модели Гейзенберга (<i>С. М. Ташипулатов</i>)	82
Исследование слабой разрешимости начально-краевой задачи для системы Навье—Стокса на основе метода параболической регуляризации (<i>М. В. Чирова</i>)	92



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 3–10
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-3-10

УДК 519.63

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2025 г. М. А. АНКИЛОВ, А. С. АНДРЕЕВ

Аннотация. На основе простейшей математической модели свободных колебаний упругой пластины разработан численно-аналитический метод исследования ее динамики в случае шарнирного закрепления концов. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого найдено методом Бубнова–Галеркина. Цель исследования — определить погрешность полученного приближенного решения при помощи функционала типа Ляпунова. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность предложенного метода.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика, упругая пластина, метод Бубнова–Галеркина, дифференциальное уравнение в частных производных, функционал Ляпунова.

NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR STUDYING THE DYNAMICS OF HINGED ELASTIC PLATE

© 2025 M. A. ANKILOV, A. S. ANDREEV

ABSTRACT. Based on the simplest mathematical model of free oscillations of an elastic plate, a numerical-analytical method for studying its dynamics in the case of hinged fastening of the ends has been developed. The model is described by a partial differential equation; we search for a solution by the Bubnov–Galerkin method. The purpose of the study is to determine the error of the obtained approximate solution using a Lyapunov-type functional. Numerical experiments have been conducted to confirm the reliability of the proposed method.

Keywords and phrases: mathematical modeling, dynamics, elastic plate, Bubnov–Galerkin method, partial differential equation, Lyapunov functional.

AMS Subject Classification: 35Q74

1. Введение. В строительстве при проектировании и эксплуатации наземных сооружений необходимо учитывать различные силовые нагрузки, воздействующие на деформируемые элементы этих сооружений, например, ветровые и снеговые нагрузки. Любое силовое воздействие может привести к потере устойчивости возникающих при этом колебаний элементов, что приводит к необходимости точных расчетов параметров сооружений. Согласно концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову необходимо определить прочностные и инерционные характеристики деформируемых элементов и величины силовых воздействий на них, при которых малым деформациям элемента в начальный момент времени $t = 0$ будут соответствовать и малые деформации в любой момент времени $t > 0$.

В последние десятилетия исследованиям динамики и устойчивости деформируемых тел с учетом различных силовых воздействий на них уделяется пристальное внимание, как российских, так и зарубежных исследователей, среди которых, например, С. Д. Алгазин, А. С. Андреев, С. М. Белоцерковский, Р. Л. Бисплингхофф, В. В. Болотин, П. А. Вельмисов, А. С. Вольмир,

А. Г. Григолюк, М. А. Ильгамов, А. А. Ильюшин, И. А. Кийко, Б. Ю. Кудрявцев, Р. Е. Лампера, Дж. Майлс, Д. М. Минасян, А. А. Мовчан, Л. И. Могилевич, В. И. Морозов, Ю. Н. Новичков, В. В. Овчинников, Я. Г. Пановко, Б. К. Скрипач, В. Г. Табачников, Г. Фершинг, Я. Ц. Фын, Р. Л. Халфман, Л. Г. Шандаров, Х. Эшли и др. В частности, отметим работы [2–4, 7, 9, 10].

В статье исследуется математическая модель свободных колебаний упругой пластины, для которой произведена разработка численно-аналитического метода исследования ее динамики. Исследуется случай шарнирного закрепления концов упругой пластины. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого отыскивается методом Бубнова—Галеркина (см. [11]). Цель исследования — на основе построения функционала типа Ляпунова определить погрешность полученного приближенного решения. С помощью математической системы Mathematica произведены численные эксперименты, доказывающие на этой простой задаче о свободных колебаниях упругой пластины-полосы достоверность предложенного численно-аналитического метода определения погрешности приближенного решения, полученного с помощью метода Бубнова—Галеркина.

2. Математическая модель. Рассматривается плоская задача о малых колебаниях упругой пластины, динамика которой описывается следующим уравнением (см. [1]):

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \beta_0 w(x, t) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (1)$$

Здесь функция $w(x, t)$ описывает деформацию (прогиб) упругой пластины. Частные производные по координате x и по времени t обозначены штрихом и точкой сверху соответственно. Обозначения коэффициентов уравнения (1): $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — изгибная жесткость пластины; l , h — длина и толщина пластины; $M = h\rho$ — масса пластины; E , ρ — модуль упругости и плотность пластины; β_0 — коэффициент жесткости основания; ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов пластины. Тогда должны выполняться следующие краевые условия:

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0. \quad (2)$$

Начальные условия

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x) \quad (3)$$

должны быть согласованы с краевыми условиями (2).

3. Функционал. Введем функционал типа Ляпунова

$$\Phi(t) = \int_0^l \{M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t)\} dx. \quad (4)$$

Дифференцируя Φ по переменной t , получим

$$\dot{\Phi}(t) = 2 \int_0^l \{M\dot{w}(x, t)\ddot{w}(x, t) + Dw''(x, t)\dot{w}''(x, t) + \beta_0 w(x, t)\dot{w}(x, t)\} dx.$$

Подставим $M\ddot{w}(x, t)$ из уравнения (1):

$$\dot{\Phi}(t) = 2 \int_0^l \{\dot{w}(x, t)(-Dw''''(x, t) - \beta_0 w(x, t)) + Dw''(x, t)\dot{w}''(x, t) + \beta_0 w(x, t)\dot{w}(x, t)\} dx. \quad (5)$$

Интегрируя по частям, с учетом условий (2) получим равенство

$$\int_0^l w''(x, t)\dot{w}''(x, t)dx = \int_0^l w''''(x, t)\dot{w}(x, t)dx. \quad (6)$$

Тогда с учетом (6) равенство (5) примет вид

$$\dot{\Phi}(t) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя (7) от 0 до t , получим:

$$\Phi(t) = \Phi(0). \quad (8)$$

Таким образом, из (3), (4) получим равенство

$$\int_0^l \left\{ M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) \right\} dx = \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx. \quad (9)$$

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega^{IV}(x) = -\lambda\omega''(x), \quad x \in [0, l], \quad (10)$$

с краевыми условиями

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(l) = 0, \quad \omega''(0) = 0, \quad \omega''(l) = 0, \quad (11)$$

соответствующими (2), является самосопряженной и полностью определенной, так как для любых функций $u(x)$ и $v(x)$, имеющих на интервале $(0, l)$ непрерывные производные четвертого порядка, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^l u(x)v^{IV}(x)dx &= \int_0^l v(x)u^{IV}(x)dx, & \int_0^l u(x)v''(x)dx &= \int_0^l v(x)u''(x)dx, \\ \int_0^l u(x)u^{IV}(x)dx &> 0, & -\int_0^l u(x)u''(x)dx &> 0. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство Рэля (см. [6]) для функции $w(x, t)$ примет вид

$$\int_0^l w(x, t)w^{IV}(x, t)dx \geq -\lambda_1 \int_0^l w(x, t)w''(x, t)dx,$$

где $\lambda_1 = \pi/l$ — наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи (10), (11). После интегрирования по частям это неравенство примет вид

$$\int_0^l w'^2(x, t)dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t)dx. \quad (12)$$

Согласно (12) из (9) получим неравенство

$$\int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + D\lambda_1 w'^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx \leq \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx. \quad (13)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского

$$\left(\int_0^x w'(x, t)dx \right)^2 \leq \left(\int_0^x w'^2(x, t)dx \right) \left(\int_0^x 1dx \right),$$

получим оценку

$$(w(x, t) - w(0, t))^2 \leq x \int_0^x w'^2(x, t)dx \leq l \int_0^l w'^2(x, t)dx.$$

С учетом краевых условий (2), окончательно получим неравенство

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t)dx. \quad (14)$$

Согласно (14) из (13) окончательно получим неравенство

$$\frac{D\lambda_1}{l}w^2(x,t) + \int_0^l \{M\dot{w}^2(x,t) + \beta_0 w^2(x,t)\} dx \leq \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx, \quad (15)$$

на основании которого доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Решение $w(x,t)$ краевой задачи (1), (2) является устойчивым по отношению к возмущениям начальных данных (3) и выполняется неравенство*

$$w^2(x,t) \leq \frac{l^2}{\pi D} \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx. \quad (16)$$

4. Исследование динамики методом Бубнова—Галеркина. Согласно методу Бубнова—Галеркина (см. [11]) решение начально-краевой задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$w_m(x,t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)g_k(x), \quad (17)$$

где функции

$$g_k(x) = \sin \gamma_k x, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

согласуются с краевыми условиями (2), а $a_k(t)$ определим из условия ортогональности невязки уравнения (1) к функциям $g_k(x)$, $k = 1, \dots, m$.

Так как $g_k(x)$ и γ_k являются собственными функциями и собственными значениями краевой задачи (10), (11), то система функций $g_k(x)$ вида (18) ортогональна на $[0, l]$:

$$\int_0^l g_k(x)g_n(x)dx = 0, \quad n \neq k, \quad \int_0^l g_k^2(x)dx = \frac{l}{2}, \quad (19)$$

и любую четырехкратно непрерывно дифференцируемую по переменной x функцию $w(x,t)$ можно разложить в ряд

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)g_k(x), \quad (20)$$

абсолютно и равномерно сходящийся в $(0, l)$.

Из условий ортогональности невязок уравнения (1) и начальных условий (3) к функциям $\{g_n(x)\}_{n=1}^m$ запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $a_n(t)$, $n = 1, \dots, m$ и начальные условия $a_n(0)$, $\dot{a}_n(0)$:

$$M\ddot{a}_n(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t) = 0, \quad n = 1, \dots, m, \quad (21)$$

$$a_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x)g_n(x)dx, \quad \dot{a}_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x)g_n(x)dx. \quad (22)$$

5. Остаточный член метода Бубнова—Галеркина. Рассмотрим остаточный член $R_m(x,t)$ разложения (17):

$$w(x,t) = w_m(x,t) + R_m(x,t). \quad (23)$$

Будем искать $R_m(x,t)$ в виде

$$R_m(x,t) = a_{m+1}(t)g_{m+1}(x), \quad (24)$$

где функция $a_{m+1}(t)$ подбирается так, чтобы функция $w(x, t)$ в виде (23) удовлетворяла уравнению (9), которое в силу ортогональности базисных функций (18) примет вид:

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = - \sum_{k=1}^m (M\dot{a}_k^2(t) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(t)) + \frac{2}{l} \int_0^l \{ M f_2^2(x) + D f_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \} dx. \quad (25)$$

Для согласования левой и правой частей уравнения (25) возьмем следующие начальные условия:

$$a_{m+1}(0) = \sqrt{\frac{\frac{2}{l} \int_0^l \{ D f_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \} dx - \sum_{k=1}^m (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0)}{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}}, \quad (26)$$

$$\dot{a}_{m+1}(0) = \sqrt{\frac{\frac{2}{l} \int_0^l f_2^2(x) dx - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k^2(0)}{M}}. \quad (27)$$

Решая задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (21) с начальными условиями (22), найдем $a_n(t)$, $n = 1, \dots, m$, подставляя которые в нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (25) с начальными условиями (26), (27), найдем $a_{m+1}(t)$.

6. Численный эксперимент. Будем считать, что пластина изготовлена из алюминия; тогда коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность пластины равны $\nu = 0,3$ (безразмерный), $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 2700$ кг·м⁻³.

Возьмем длину и толщину пластины равными $l = 0,02$ м и $h = 0,001$ м. Тогда масса и изгибная жесткость пластины суть $M = h\rho = 2,7$ кг·м⁻², $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2)) \approx 6,6$ Н·м. Пусть коэффициент жесткости основания равен $\beta_0 = 4$ Па·м⁻¹.

Возьмем в качестве начальных условий (в метрах) следующие:

$$w(x, 0) = 10^{10} \cdot x^4 \cdot (l - x)^4, \quad \dot{w}(x, 0) = -10^{10} x^3 \cdot (l - x)^5.$$

На рис. 1, 2 представлены полученные с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica графики функции (17) при $m = 5$ в точке $x_* = l/2$ при $t \in [0; 0,0001]$ и $t \in [0; 0,001]$ соответственно, а на рис. 3 изображены прогибы упругой пластины в моменты времени $t_0 \in \{0; 0,2; 0,5; 1\}$.

7. Оценка погрешности. Решая в системе Mathematica нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (25) с начальными условиями (26), (27), для описанного выше численного эксперимента найдено $a_{m+1}(t)$. Оценивая погрешность метода Бубнова—Галеркина, получим

$$\varepsilon = |w(x, t) - w_5(x, t)| = |R_5(x, t)| \leq |a_6(t)| \leq \sup_t |a_6(t)| \approx 5,734 \times 10^{-11}.$$

Для доказательства достоверности предложенного численно-аналитического метода определения погрешности приближенного решения, полученного с помощью метода Бубнова—Галеркина, найдена разность между пятидесятым и представленным на рис. 1–3 пятым приближениями:

$$\varepsilon_0 = |w_{50}(x, t) - w_5(x, t)| \approx 5,573 \times 10^{-11}.$$

Аналогично, для эксперимента при $m = 10$ найдена оценка $a_{m+1}(t)$:

$$\varepsilon \leq 6,902 \times 10^{-12}.$$

При этом разность между 50-м и 10-м и между 100-м и 10-м приближениями составила

$$\varepsilon_0 = |w_{50}(x, t) - w_{10}(x, t)| \approx 6,103 \times 10^{-12}, \quad \varepsilon_0 = |w_{100}(x, t) - w_{10}(x, t)| \approx 6,143 \times 10^{-12},$$

что показывает эффективность предложенного численно-аналитического метода по определению погрешности приближенного решения, найденного с помощью метода Бубнова—Галеркина.

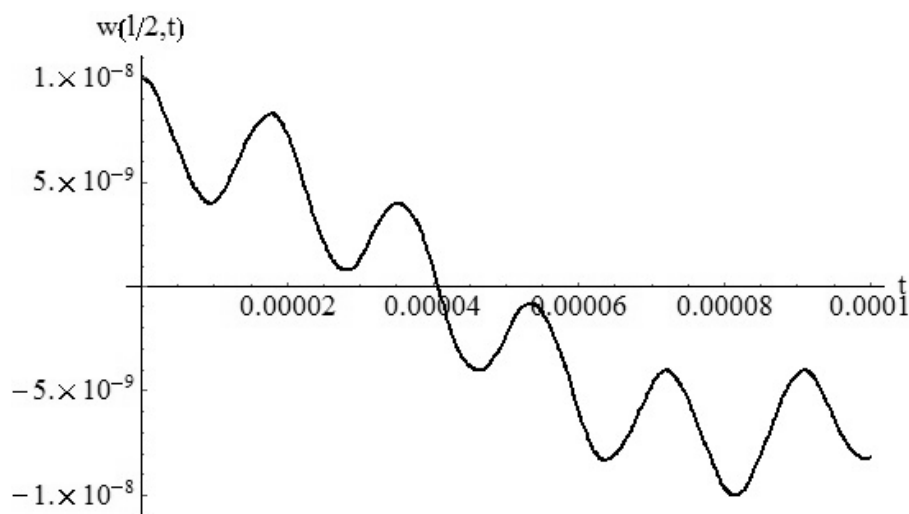


Рис. 1. Деформация пластины $w(x, t)$ в точке $x = l/2$ при $t \in [0; 0,0001]$.

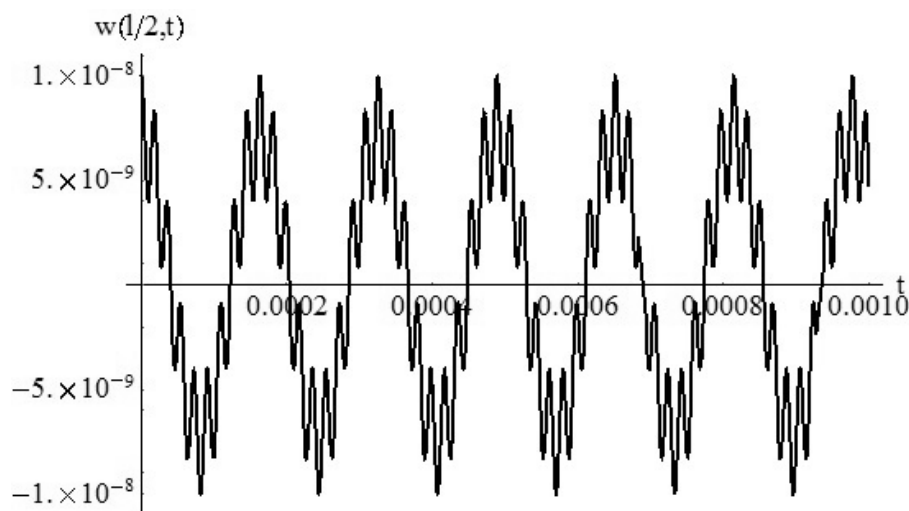


Рис. 2. Деформация пластины $w(x, t)$ в точке $x = l/2$ при $t \in [0; 0,001]$.

8. Заключение. Описанию метода Галеркина и сходимости приближенного решения, полученного этим методом, к точному решению посвящено большое количество научных работ (см., например, [5], [8]). В данной статье на примере простейшей математической модели колебаний шарнирно закрепленной по краям упругой пластины произведена разработка численно-аналитического метода определения погрешности полученного методом Бубнова—Гареркина приближенного решения.

В дальнейшем с помощью предложенного метода определения погрешности планируется найти с заданной точностью решения дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе нелинейных, описывающих колебания упругой пластины. Планируется произвести моделирование с учетом продольных и поперечных составляющих деформации пластины, демпфирования материала пластины, сжимающего или растягивающего пластину продольного усилия, различных силовых воздействий на пластину.

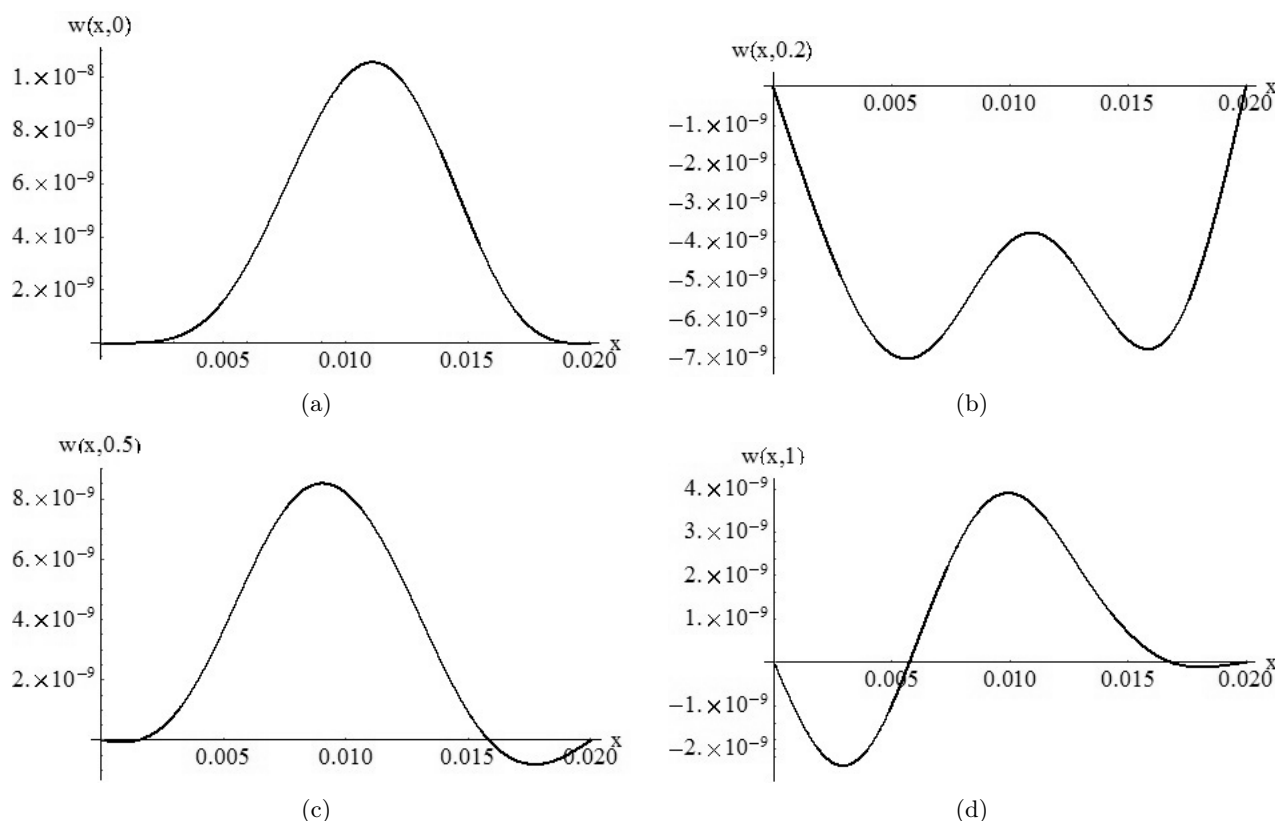


Рис. 3. Прогиб упругой пластины в моменты времени
(a) $t_0 = 0$; (b) $t_0 = 0,2$; (c) $t_0 = 0,5$; (d) $t_0 = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. — М.: Наука, 1968.
2. Божанов Е. Т., Ержанов Ж. С. Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения. — Алматы, 2001.
3. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины, частично заполненной жидкостью // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2023. — 29, № 2. — С. 27–40.
4. Волмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972.
5. Келдыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1942. — 6, № 6. — С. 309–330.
6. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968.
7. Попов В. С., Попова А. А. Динамика взаимодействия пульсирующего слоя вязкой сжимаемой жидкости с пластиной на нелинейно-упругом основании // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2024. — 114, № 3. — С. 45–69.
8. Ретина А. И. Сходимость метода Галеркина решения нелинейной задачи о собственных модах микродисковых лазеров // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2021. — 163, № 1. — С. 5–20.
9. Сулов А. В., Ярославкина Е. Е. Исследование влияния температурных напряжений на собственные колебания пластин // Вестн. Самар. ун-та. Естественнауч. сер. — 2024. — 30, № 2. — С. 45–53.
10. Сухотерин М. В., Сосновская А. А. Потеря устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины // Науч.-тех. вестн. информ. техн. мех. опт. — 2024. — 24, № 4. — С. 629–636.
11. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. — М.: Мир, 1988.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Анкилов Михаил Андреевич (Ankilov Mikhail Andreevich)

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

(Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: mankilov.2000@mail.ru

Андреев Александр Сергеевич (Andreev Aleksandr Sergeevich)

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

(Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: asa5208@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 11–21
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-11-21

УДК 517.9

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2025 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Л. Н. КОСТИНА, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассматривается применение метода эквивалентных операторов к дифференциальному оператору $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, действующему в однородном пространстве функций $\mathcal{F}$. При этом считается, что оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ есть нормальный оператор с компактной резольвентой в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Приводятся условия его обратимости, оценки нормы обратного в разных пространствах $\mathcal{F}$.

Ключевые слова: метод эквивалентных операторов, оператор с компактной резольвентой, гильбертово пространство, спектр.

THE METHOD OF EQUIVALENT OPERATORS IN THE STUDY OF ONE CLASS OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS WITH CONSTANT OPERATOR COEFFICIENT

© 2025 А. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, L. N. KOSTINA, N. B. USKOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider the application of the method of equivalent operators to the differential operator $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ acting in a homogeneous space of functions $\mathcal{F}$. We assume that the operator $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ is a normal operator with compact resolvent in the Hilbert space $\mathcal{H}$. Conditions for its invertibility and estimates for the norm of the inverse in various spaces $\mathcal{F}$ are given.

Keywords and phrases: method of equivalent operators, operator with compact resolvent, Hilbert space, spectrum.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\text{End } \mathcal{H}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, со стандартной нормой. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — нормальный линейный замкнутый оператор с компактной резольвентой. Пусть оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ (см. [25]). В работе рассматривается линейный оператор $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, где через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обозначено одно из функциональных пространств (см. [1]), например, $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $1 \leq p \leq \infty$ (см. далее раздел 1). Одним из методов изучения таких операторов является метод эквивалентных операторов, который последовательно развивался в [1–9, 26] и окончательно оформился (именно в приложении для рассматриваемого класса операторов) в [8]. Для оператора $\mathcal{L}$ строится ограниченный разностный оператор $\mathcal{D}$ в подходящем пространстве последовательностей, эквивалентный оператору $\mathcal{L}$ (см. определение 3.2), т.е. имеющий совпадающие с $\mathcal{L}$ состояния

обратимости (см. определение 3.1). В статье известные результаты из работ [1–9, 26] применяются к оператору $\mathcal{L}$, который является именно хорошим модельным примером применения метода эквивалентных операторов, а также к эквивалентному ему оператору $\mathcal{D}$. В частности, приводятся оценки нормы обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ в разных пространствах (при условии его обратимости), или описания спектра Берлинга (см. определение 2.2) элементов ядра $\text{Ker } \mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}$.

2. Основные определения. Перейдем к подробной постановке задачи, для чего сначала введем используемые функциональные пространства. Через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обозначено одно из ниже перечисленных функциональных пространств: $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций; пространство $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций; пространство $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ исчезающих на бесконечности функций $x \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$; пространство Степанова $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty)$, локально суммируемых со степенью p измеримых на $\mathbb{R}$ функций, для которых конечна величина

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^1 \|x(t+s)\|^p ds.$$

Отметим, что все эти пространства являются однородными пространствами функций (см., например, [1, определение 2.1] или [26, определение 2.1]). Для функционального пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ введем ассоциированное ему дискретное пространство последовательностей $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ (см. [1]). Для $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ассоциированным является $l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, $1 \leq p \leq \infty$; для $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ассоциированными являются соответственно $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ и $c_0(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$.

Введем также в рассмотрение пространства $L_{\omega,p} = L_{\omega,p}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_0^\omega \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \text{ess sup}_{\tau \in [0, \omega]} \|x(\tau)\|,$$

и $C_\omega = C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Заметим, что C_ω есть замкнутое подпространство ω -периодических функций из C_b , а $L_{\omega,p}$, $p \in [1, \infty)$, — замкнутое подпространство из пространства Степанова S_p . Обозначим через $\mathcal{F}_\omega$ любое из пространств C_ω , $L_{\omega,p}$, $p \in [1, \infty)$.

Так как $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — нормальный оператор с компактной резольвентой, то его спектр допускает представление $\sigma(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{J}} \{\lambda_i\}$, где $\mathbb{J}$ — одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, и все собственные значения λ_i , $i \in \mathbb{J}$, имеют конечную кратность.

Далее всюду считается выполненным следующее предположение.

Предположение 2.1. Для всех λ_i из $\sigma(A)$ выполнено неравенство $\text{Re } \lambda_i \leq 0$, $i \in \mathbb{J}$.

Напомним (см. [27]), что величина $s(A) = \sup\{\text{Re } \lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$ называется спектральной границей оператора A . В рассматриваемом случае $s(A) \leq 0$.

Пусть $P_i = P(\{\lambda_i\}, A)$, $i \in \mathbb{J}$, — спектральный проектор оператора A (проектор Рисса), построенный по множеству $\{\lambda_i\}$, $i \in \mathbb{J}$. Отметим, что проекторы P_i , $i \in \mathbb{J}$, образуют дизъюнктивную систему проекторов, т.е. удовлетворяют следующим условиям: $P_i P_j = 0$, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{J}$; $P_i = P_i^*$, $i \in \mathbb{J}$, ряд $\sum_{m \in \mathbb{J}} P_m x$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ и

$$\|x\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{J}} \|P_m x\|^2;$$

из равенства $P_i x = 0$ для всех $i \in \mathbb{J}$ следует, что вектор x нулевой. Пусть $\mathcal{H}_i = \text{Im } P_i$, $i \in \mathbb{J}$. Подпространства $\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, образуют базис из подпространств в $\mathcal{H}$. Рассматриваемый оператор A является спектральным оператором скалярного типа (см. [17]) и представим в виде

$$A = \sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i P_i.$$

В силу выполнения предположения 2.1 оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ вида

$$T(t) = \sum_{i \in \mathbb{J}} e^{\lambda_i t} P_i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \mathbb{J}.$$

Следуя работам [1–9, 18, 19, 26], определим в пространстве $\mathcal{F}$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

где функцию x из $\mathcal{F}$ отнесем к $D(\mathcal{L})$, если существует такая функция $y \in \mathcal{F}$, что для почти всех $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{R}$, верно равенство

$$x(t) = T(t-s)x(s) - \int_s^t T(t-\tau)y(\tau) d\tau; \quad (1)$$

при этом полагается $\mathcal{L}x = y$. Заметим, что оператор $\mathcal{L}$ определен корректно, т.е. для каждого $x \in D(\mathcal{L})$ существует единственный $y \in \mathcal{F}$.

Для формулировки некоторых результатов нам понадобится понятие спектра Берлинга (см., например, [26]).

Определение 2.1 (см. [26]). Банахово пространство $\mathcal{X}$ называется невырожденным банаховым $L_1(\mathbb{R})$ -модулем, если существует билинейное отображение $(f, x) \mapsto fx : L_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, обладающее следующими свойствами:

- (i) $(f * g)x = f(gx)$ для всех $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;
- (ii) $\|fx\| \leq \|f\|_1 \|x\|$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;
- (iii) равенство $fx = 0$ для всех $f \in L_1(\mathbb{R})$ означает $x = 0 \in \mathcal{X}$.

Рассматриваемые пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H}) = \mathcal{X}$ являются невырожденными банаховыми $L_1(\mathbb{R})$ -модулями, причем модульная структура задается формулой

$$(fx)(t) = (f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(s)x(t-s) ds, \quad x \in \mathcal{F},$$

и она считается ассоциированной с представлением $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$, $S(t)x(s) = x(t+s)$ (см. [26]).

Определение 2.2. ([26]) Спектром Берлинга элемента $x \in \mathcal{X}$ называется множество

$$\Lambda(x) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой такой } f \in L_1(\mathbb{R}), \text{ что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \right\}.$$

Здесь символом $\widehat{f}(\lambda)$ обозначено преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Спектр Берлинга для $x \in L_2$ совпадает с носителем преобразования Фурье этой функции.

3. Эквивалентные операторы. Введем понятие состояний обратимости абстрактного оператора $B : D(B) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, действующего в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$.

Определение 3.1 (см. [1, определение 1.1]). Рассмотрим следующие условия:

1. $\text{Ker } B = \{0\}$, где $\text{Ker } B$ — ядро оператора B ;
2. $1 \leq n = \dim \text{Ker } B < \infty$;
3. $\dim \text{Ker } B = \infty$;
4. $\text{Ker } B$ — дополняемое подпространство либо в $\mathcal{X}$, либо в $D(B)$ с нормой графика оператора B ;

5. $\text{Im } B = \overline{\text{Im } B}$, что эквивалентно условию

$$\gamma(B) = \inf_{x \in D(B) \setminus \text{Ker } B} \frac{\|Bx\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } B)},$$

где $\text{dist}(x, \text{Ker } B) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } B} \|x - x_0\|$;

6. $\text{Ker } B = \{0\}$, $\gamma(B) > 0$;

7. $\text{Im } B$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство;

8. $\text{Im } B$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство конечной коразмерности $1 \leq \text{codim Im } B = m < \infty$, где $\text{codim Im } B = \dim \mathcal{X} \setminus \text{Im } B$;

9. $\text{Im } B = \mathcal{X}$;

10. $\text{Ker } B = \{0\}$, $\text{Im } B = \mathcal{X}$.

Будем говорить, что оператор B находится в состоянии S , если для него выполнены все условия из совокупности условий $S = \{k_1, \dots, k_l\}$, $1 \leq k_l \leq 10$.

Через $\text{St}_{\text{inv}}(B)$ обозначается множество состояний обратимости оператора B .

Определение 3.2 (см. [8]). Линейные операторы $C : D(C) \subset \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$ и $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_2$ называются эквивалентными, если $\text{St}_{\text{inv}}(C) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{E})$.

Основная идея метода эквивалентных операторов состоит в следующем. Для исследуемого оператора строится эквивалентный ему оператор, состояния обратимости которого известны или легко вычисляются. Например, если $C, \mathcal{E} \in B(\mathcal{H})$ и $\mathcal{E} = UCV$, где U, V — обратимые операторы, то известно, что $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{E}) = \text{St}_{\text{inv}}(C)$. Для дифференциальных операторов метод эквивалентных операторов окончательно оформился в [8, 9]; он заключается в построении разностного ограниченного оператора, эквивалентного данному, или разностного линейного отношения (см. [1]). Общую схему метода эквивалентных операторов и связь эквивалентных операторов со слабо подобными, подобными операторами и методом операторов преобразования можно найти в [10, 11].

Введем обозначение $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2, s \leq t\}$. Обычно, как и в [1–8, 26], состояния обратимости, как и определение оператора $\mathcal{L}$, происходит с помощью эволюционного семейства $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, $s \leq t$. При этом предполагается, что выполнены следующие условия:

- (i) $\mathcal{U}(t, t) = I$;
- (ii) $\mathcal{U}$ сильно непрерывно на множестве Δ ;
- (iii) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $s, t, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau \leq s \leq t$;
- (iv) $\sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| \leq K < \infty$.

В рассматриваемом случае

$$\mathcal{U}(t, s) = T(t-s) = \sum_{i \in \mathbb{J}} e^{\lambda_i(t-s)} P_i, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad t \geq s.$$

Отметим также, что такое эволюционное семейство есть периодическое эволюционное семейство с любым периодом $\omega > 0$, так как $\mathcal{U}(t+\omega, s+\omega) = \mathcal{U}(t, s)$ (см. [9, определение 1]).

Введем в рассмотрение следующие операторы:

(a) полугруппа Хоуленда (см. [29]) $T_{\mathcal{L}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$, задаваемая формулой (см. также [5]):

$$(T_{\mathcal{L}}(t))x(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t) = T(t)x(s-t), \quad x \in \mathcal{F}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0; \quad (2)$$

(b) операторы $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{D}$, задаваемые формулами

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_0 x)(s) &= x(s) - T(1)x(s-1), \quad x \in \mathcal{F}, \quad s \in \mathbb{R}, \\ (\mathcal{D}x)(n) &= x(n) - T(1)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathcal{F}_d. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно [8], оператор $\mathcal{D}$ называется сопровождающим оператором для оператора $\mathcal{L}$. Из результатов [8, 9] следует основная теорема метода эквивалентных операторов.

Теорема 3.1. $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{L}) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{D}_0) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{D})$.

Заметим, что применение полугрупп разностных операторов для исследования обратимости оператора $\mathcal{L}$ в $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ использовалось в монографиях [24, 27].

Исследование дифференциальных операторов в весовых пространствах с помощью разностных операторов в ассоциированных пространствах (без введения понятий состояний обратимости и эквивалентных операторов) осуществлялось, например, в [15].

4. Основные результаты. В этом разделе мы применим результаты из [1–9, 26] к рассматриваемым операторам $\mathcal{D}$ и $\mathcal{L}$.

Символом $\mathbb{T}$, как обычно, обозначена единичная окружность. Через $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначена изометрическая группа операторов сдвига на $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (S(t)x)(s) &= x(s+t), & x \in \mathcal{F}, & \quad s, t \in \mathbb{R}, \\ (S(m)x)(n) &= x(n+m), & x \in \mathcal{F}_d, & \quad n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{D}$, согласно [4], называется оператором взвешенного сдвига с постоянным операторным коэффициентом. Из [4, теорема 7] вытекает условие его обратимости.

Теорема 4.1. *Для того чтобы оператор $\mathcal{D}$ был обратим, необходимо и достаточно выполнения условия $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.*

Очевидно, что это условие равносильно условию $s(A) < 0$.

Оператор $\mathcal{D}$, заданный формулой (3), можно переписать в виде

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n) - T(1)S(-1)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathcal{F}_d. \quad (4)$$

Из формулы (4) очевидно вытекает следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть $\|T(1)S(-1)\| < 1$ в некотором пространстве $\mathcal{F}_d$. Тогда оператор $\mathcal{D}$ обратим и обратный к нему в $\mathcal{F}_d$ задается формулой*

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{n \geq 0} (T(1)S(-1))^n; \quad (5)$$

при этом

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T(1)S(-1)\|}.$$

Отметим очевидные факты. Во-первых, операторы $T(1)$ и $S(-1)$ перестановочны. Во-вторых, так как оператор

$$T(1) = \sum_{i \in \mathbb{J}} e^{\lambda_i} P_i$$

является нормальным, то

$$\|T(1)\| = e^{s(A)}, \quad \|T(1)S(-1)\| \leq \|T(1)\| \|S(-1)\| = e^{s(A)}.$$

Таким образом, из $e^{s(A)} < 1$ следует, что $s(A) < 0$. Отметим также следующий результат из [4].

Лемма 4.1. *Спектр $\sigma(T(1)S(-1))$ оператора $T(1)S(-1)$ представим в виде*

$$\sigma(T(1)S(-1)) = \left\{ \gamma\lambda : \gamma \in \mathbb{T}, \lambda \in \sigma(T(1)) \right\}.$$

В [12, 13] было доказано, что спектр ограниченного оператора, действующего в пространствах l_p , $p \in [1, \infty]$, не зависит от пространства l_p . Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{D}$ был обратим в любом из пространств l_p , $p \in [1, \infty]$, необходимо и достаточно, чтобы $s(A) < 0$. При этом если $\mathcal{D}$ обратим в одном из пространств l_p , $p \in [1, \infty]$, то он обратим во всех l_q , $q \in [1, \infty]$.*

Заметим, что результаты теоремы 4.3 также можно получить из более общих результатов [4, теоремы 4, 6]. В [4, теорема 7] приведена общая формула вида обратного оператора к $\mathcal{D}$, которая в адаптированном к рассматриваемому оператору A виде, следующая:

$$(\mathcal{D}^{-1}f)(n) = \sum_{m \leq n} (T(1))^{n-m} f(m), \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad f \in \mathcal{F}_d. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) одинаковы с учетом того, что $(S(-1))^k = S(-k)$.

Отметим статью [23], в которой утверждение теоремы 4.3 и формула (6) получены при $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Из теорем 3.1 и 4.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.4. Пусть $s(A) < 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}$, определенный формулой (1), обратим в пространстве L_p , $p \in [1, \infty]$. При этом если он обратим в одном из пространств L_p , $p \in [1, \infty]$, то он обратим и во всех пространствах L_q , $q \in [1, \infty]$.

Отметим, что условие $s(A) < 0$, которое является необходимым и достаточным для обратимости оператора $\mathcal{L}$, постулируется в [1–9, 26, 27] (см., например, [1, теорема 1]).

Перейдем далее к непосредственному применению к рассматриваемому оператору $\mathcal{L}$, определенному с помощью (1), и полугруппам $T(t)$, $t \geq 0$, и $T_{\mathcal{L}}(t)$, $t \geq 0$, результатов работ [1–9, 26, 27], что позволит выписать вид оператора $\mathcal{L}^{-1}$, получить соотношения между нормами операторов $\mathcal{D}^{-1}$, $\mathcal{L}^{-1}$ в различных пространствах, описать ядро оператора $\mathcal{L}$.

Определение 4.1 (см. [26]). Полугруппа $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ называется гиперболической (или допускающей экспоненциальную дихотомию), если $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

Так как

$$T(1) = \sum_{i \in \mathbb{J}} e^{\lambda_i} P_i,$$

то $\sigma(T(1)) = \{e^{\lambda_i}, i \in \mathbb{J}\}$. Следовательно, полугруппа T является гиперболической, если $s(A) < 0$.

Теорема 4.5 (см. [26, теорема 1.1]). Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ обратим;
- (ii) полугруппа T гиперболическая;
- (iii) полугруппа Хоуланда $T_{\mathcal{L}}$, определенная формулой (2), гиперболическая.

Заметим, что для $\mathcal{F} \in \{C_0, L_p, p \in [1, \infty)\}$ этот результат доказан в [30].

Из [5, теоремы 1, 2] вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.6. Оператор $\mathcal{L}$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы Хоуланда $T_{\mathcal{L}}$ в любом из банаховых пространств L_p , $p \in [1, \infty)$, C_0 . Спектр $\sigma(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ и спектр $\sigma(T_{\mathcal{L}}(t))$, $t \geq 0$, связаны соотношением

$$\sigma(T_{\mathcal{L}}(t)) \setminus \{0\} = \{e^{\lambda t} : \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\}.$$

Так как мы рассматриваем оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то можно применить классический результат Герхарда и Прюсса (см. [27, 28, 31]).

Теорема 4.7. Оператор $\mathcal{L}$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\lambda_j \notin i\mathbb{R}$ для всех $j \in \mathbb{J}$ и резольвента $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$\gamma(A) = \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Величина $\gamma(A)$ в [21] называлась частотной характеристикой оператора A ; она имеет важное значение в оценке нормы обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ в пространстве L_2 .

Заметим, что в рассматриваемом случае из выполнения условия $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ следует выполнение условий теоремы 4.7 (см. [26, Corollary 3.4]). В общем случае это неверно.

Теорема 4.8 (см. [2, лемма 4]). Если оператор $\mathcal{L}$ обратим, то $\|\mathcal{L}^{-1}\|_2 = \gamma(A)$.

Далее, используя результаты, например, [26], выпишем обратный оператор для $\mathcal{L}$ (при условии его обратимости).

Теорема 4.9. Пусть $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ обратим, $\mathcal{L}^{-1} \in B(\mathcal{F})$ и

$$(\mathcal{L}^{-1}y)(t) = - \int_{-\infty}^t T(t-\tau)y(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{F}.$$

Основываясь на результатах [10, 11], сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.10. Пусть оператор $\mathcal{D}$ необратим и $T(1)S(-1)$ — компактный оператор. Тогда $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{D}) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{L}) = \{2, 8\}$.

Вернемся к полугруппе $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(\mathcal{H})$. Напомним, что полугруппа называется экспоненциально устойчивой, если $\|T(t)\| \leq M e^{-\gamma_1 t}$, $t \geq 0$, а пара (M, γ_1) называется параметрами экспоненциальной устойчивости (см. [7]). Таким образом, полугруппа T экспоненциально устойчива с параметрами $(1, s(A))$. Величина $\omega_0(t)$ называется типом (или постоянной роста) полугруппы T и определяется формулой

$$\omega_0(T) = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t} \|T(t)\| < \infty \right\}.$$

Так как T — экспоненциально устойчивая полугруппа, то согласно [7] имеем $\omega_0(T) = (\gamma(A))^{-1}$.

Приведем еще результаты из [2], в адаптированном для рассматриваемых операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}$ виде, позволяющие оценивать нормы $\|\mathcal{L}^{-1}\|$ и $\|\mathcal{D}^{-1}\|$ друг через друга, а также нормы $\|\mathcal{L}^{-1}\|$ в $\mathcal{F}$ через величину $\gamma(A)$ и нормы $\|\mathcal{D}^{-1}\|_p$ через $\|\mathcal{D}^{-1}\|_q$. Отметим, что теоремы 4.11 – 4.14 существенно улучшают общие результаты из [9] для рассматриваемого класса операторов.

Теорема 4.11. Пусть $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ — обратимый оператор. Тогда для оператора $\mathcal{D} : \mathcal{F}_d \rightarrow \mathcal{F}_d$ имеют место оценки

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leq 2 + \|\mathcal{L}^{-1}\|$$

для пространств L_∞ , C_b и

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leq 1 + 2^{1-1/p} (1 + \|\mathcal{L}^{-1}\|)$$

для пространств L_p , S^p , $1 \leq p < \infty$.

Теорема 4.12. Если разностный оператор $\mathcal{D} \in B(\mathcal{F})$ обратим, то оператор $\mathcal{L}$ также обратим и имеют место оценки

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq 1 + \|\mathcal{D}^{-1}\|$$

для пространств L_∞ , C_b и

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq 2^{1-1/p} (1 + \|\mathcal{D}^{-1}\|)$$

для пространств L_p , S^p , $1 \leq p < \infty$.

Для полноты изложения приведем ниже общую теорему об оценках нормы обратного к $\mathcal{D}$ оператора в разных пространствах.

Теорема 4.13. Если оператор $\mathcal{D}$ обратим в одном из пространств l_p , $p \in [1, \infty]$, то он обратим и в пространстве l_q , $q \in [1, \infty]$, причем имеет место оценка

$$\|\mathcal{D}^{-1}\|_q \leq 8 \|\mathcal{D}^{-1}\|_p^2 - \|\mathcal{D}^{-1}\|_p + 1.$$

Теорема 4.14. Пусть оператор $\mathcal{L}$ обратим в L_2 . Тогда он обратим в $\mathcal{F}$ и норма обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$ допускает оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty &\leq 1 + \left(1 + 8(1 + \sqrt{2}(1 + \gamma(A))^2)\right), \\ \|\mathcal{L}^{-1}\|_p &\leq 2^{1-1/p} \left(1 + \left(1 + 8(1 + \sqrt{2}(1 + \gamma(A))^2)\right)\right). \end{aligned}$$

При этом вторая оценка верна для пространств L_p и S^p , $p \in [1, \infty)$, а первая — для пространств L_∞ , C_0 , C_b .

С помощью спектра Берлинга можно описать ядро оператора $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

Теорема 4.15 (см. [26, Lemma 3.1]). Пусть $x \in \text{Ker } \mathcal{L}$. Тогда

$$i\Lambda(x) \subseteq \sigma(A) \cap i\mathbb{R}.$$

Теорема 4.16 (см. [26, Lemma 3.8]). Пусть $x \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}x = y$. Тогда

$$\Lambda(x) \subseteq \Lambda(y) \cup \{\lambda \in \mathbb{R} : i\lambda \in \sigma(A)\}.$$

Теорема 4.17 (см. [26, Lemma 3.6]). Пусть $\tilde{S}(f)x = f * x$, $x \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}$. Тогда для всех $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in D(\mathcal{L})$ верно равенство

$$\mathcal{L}\tilde{S}(f)x = \tilde{S}(f)\mathcal{L}x.$$

Определение 4.2 (см. [14, 16]). Число $\mathcal{X}_g(\mathcal{U})$ из $\mathbb{R}$, определенное формулой

$$\mathcal{X}_g(\mathcal{U}) = \lim_{\tau, s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathcal{U}(\tau + s, \tau)\|}{s}$$

называют верхним генеральным показателем семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$.

В рассматриваемом случае

$$\mathcal{U}(\tau + s, \tau) = T(s), \quad s \geq 0, \quad \|T(s)\| = e^{s(A)}, \quad \mathcal{X}_g(\mathcal{U}) = s(A).$$

Введем в рассмотрение изометрическую группу линейных операторов $\{V(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ из $\text{End } \mathcal{F}$

$$(V(\lambda)x)(s) = e^{i\lambda s}x(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}$$

(см. [9]). Из результатов статьи [9] вытекает следующий результат.

Теорема 4.18. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} V(-\lambda)\mathcal{L}V(\lambda) &= \mathcal{L} - i\lambda I, & V(-\lambda)T_{\mathcal{L}}(t)V(\lambda) &= e^{-i\lambda t}T_{\mathcal{L}}(t), \\ V(-\lambda)\mathcal{D}V(\lambda) &= e^{-i\lambda}\mathcal{D}, & \lambda \in \mathbb{R}, \quad t &\geq 0; \end{aligned}$$

в последнем равенстве

$$(V(\lambda)x)(n) = e^{i\lambda n}x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathcal{F}_d.$$

Таким образом, операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L} - i\lambda I$, $\mathcal{D}$ и $e^{i\lambda n}\mathcal{D}$, а также $T_{\mathcal{L}}(t)$ и $T_{\mathcal{L}}(t)e^{-\lambda t}$ подобны. Отметим еще один результат. Из результатов [9] вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.19. Имеют место равенства

$$\mathcal{L}S(\omega)x = S(\omega)\mathcal{L}x, \quad x \in D(\mathcal{L}), \quad T_{\mathcal{L}}(t)S(\omega) = S(\omega)T_{\mathcal{L}}(t), \quad t \geq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Периодическая, периода $\omega > 0$, сильно непрерывная функция $\mathcal{P}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{U}(t, t - \omega) - I = T(\omega) - I, \quad t \in \mathbb{R},$$

называется функцией Пуанкаре (см. [9, 24]). В рассматриваемом случае она является постоянной функцией $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$. Используя результаты статьи [9], сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.20. Оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}_\omega$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t) = T(\omega) - I$. В случае, если оператор $\mathcal{L}$ обратим, то

$$(\mathcal{L}_\omega)^{-1}(t) = \int_0^\omega G(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad f \in \mathcal{F}_\omega,$$

где функция Грина $G: [0, \omega] \times [0, \omega] \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ задается формулой

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (T(\omega) - I)^{-1}T(t - \tau), & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ (T(\omega) - I)^{-1}T(t - \tau + \omega), & t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

К рассматриваемому оператору $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ или $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}_\omega$ можно применить и другие результаты статьи [9], так как соответствующее эволюционное семейство $\mathcal{U}(t, s) = T(t - s)$ является ω -периодическим с любым $\omega > 0$.

Имеют место следующие утверждения (см. [9]).

Теорема 4.21. Оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}_\omega$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $T_{\mathcal{L}}$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}_\omega$.

Теорема 4.22. Пусть $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}_\omega$. Тогда $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{L}) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{P})$.

Теорема 4.23. Полугруппа $T_{\mathcal{L}}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}_\omega$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sigma(T_{\mathcal{L}}(\omega)) \setminus \{0\} = \sigma(T(\omega) \setminus \{0\}), \quad \exp(\sigma(\mathcal{L})) = \{\exp \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\} = \sigma(T(\omega)).$$

5. Примеры.

Пример 5.1. Рассмотрим оператор

$$A : D(A) \subset L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], \quad (Ax)(u) = x'(u), \quad u \in [0, 1],$$

и область определения оператора A задается периодическим краевым условием

$$D(A) = \{x \in W_2^1[0, 1], \quad x(0) = x(1)\}.$$

Символом $W_2^1[0, 1]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2[0, 1]$ с производными из $L_2[0, 1]$. Оператор A является нормальным, его спектр состоит из простых собственных значений $\lambda_n = i2\pi n$, $e_n(t) = e^{i2\pi nt}$, $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом он является генератором сильно непрерывной группы операторов

$$T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi nt} P_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{здесь } s(A) = 0.$$

С помощью формулы (1) можно определить оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. В этом случае группа $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ не является гиперболической, так как $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

Пусть теперь оператор A задается формулой $(Ax)(u) = x'(u) + \alpha x(u)$ с той же областью определения, где $\alpha \in \mathbb{R}_-$, $|\alpha| > 1$. Тогда $\lambda_n = i2\pi n + \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, собственные векторы и спектральные проекторы не изменились. Очевидно, что $s(A) = \alpha$. При этом полугруппа $T(t)$ является гиперболической, например, при $|\alpha| > 1$, и с ее помощью можно не только определить оператор $\mathcal{L}$, но и применить к нему, а также к сопровождающему разностному оператору $\mathcal{D}$ результаты предыдущего раздела. Отметим, что в этом случае оператор $T(1)$ не является компактным.

Пусть

$$A = a^2 \frac{d^2}{du^2}, \quad D(A) = \{x \in W_2^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0\}.$$

Тогда

$$\sigma(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-(a\pi n)^2\},$$

соответствующие собственные векторы имеют вид $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$, $n \in \mathbb{N}$, и $P_n x = (x, e_n)e_n$. Оператор A является самосопряженным оператором со спектром, лежащим в левой полуплоскости. Отметим, что в рассматриваемом случае полугруппа $T(t)$, $t \geq 0$, является гиперболической. Поэтому в рассматриваемом случае к оператору A можно применить теорию предыдущего раздела.

Если изменить граничные условия на $y'(0) = y'(1) = 0$, то $\lambda_n = -(a\pi n)^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, условие $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ не выполнено, полугруппа $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ не является гиперболической.

Пример 5.2 (см. [20, 22]). При моделировании химического процесса катализа (см. [20, 22]) возникает интегро-дифференциальный оператор

$$A : D(A) \subset L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], \quad (Ax)(u) = a^2 x''(u) - \alpha x(u) + \alpha^2 \int_0^1 e^{-\alpha(u-s)} x(s) ds,$$

с областью определения

$$D(A) = \{x \in W_2^2[0, 1] : x'(0) = x'(1) = 0\},$$

и в этом случае $\mathcal{H} = L_2[0, 1]$. В [22] доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть $\alpha > \ln 2$. Тогда у оператора A есть счетное множество вещественных значений, все они различны и имеют асимптотику

$$\lambda_k = -(a\pi k)^2 - \alpha + (6a^2\alpha^3 - 7\alpha^3)(\pi k)^{-2} + \mathcal{O}(k^{-4}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

При значениях параметров модели $\alpha = 17,5$ и $a^2 = 0,004$ (см. [20, 22]) с помощью точных формул из [22] там же приведены первые четыре собственных значения, наибольшим из которых является $\lambda = -7,9122$. Таким образом, $s(A) = -7,9122$, полугруппа $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ является гиперболической.

Таким образом, можно определить линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = -d/dt + A$ в функциональном пространстве $\mathcal{F}$, а также к этому оператору и к сопровождающему для него оператору D применить результаты предыдущего раздела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1 (409). — С. 77–128.
2. Баскаков А. Г., Синтяев Ю. Н. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений // Диффер. уравн. — 2010. — 46, № 2. — С. 210–219.
3. Баскаков А. Г. О дифференциальных и разностных фредгольмовых операторах // Докл. РАН. — 2007. — 416, № 2. — С. 156–160.
4. Баскаков А. Г., Пастухов А. И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. ж. — 2001. — 42, № 6. — С. 1231–1243.
5. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ. прилож. — 1996. — 30, № 3. — С. 1–11.
6. Баскаков А. Г. Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Мат. — 2001. — № 5. — С. 3–11.
7. Баскаков А. Г. Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений // Мат. сб. — 2015. — 206, № 8. — С. 23–62.
8. Баскаков А. Г., Диденко В. Б. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — 82, № 1. — С. 3–16.
9. Баскаков А. Г., Диденко В. Б. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами // Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 3. — С. 323–338.
10. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Костина Л. Н., Ускова Н. Б. О состояниях обратимости некоторых классов операторов // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2024. — № 2. — С. 27–35.
11. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Костина Л. Н., Ускова Н. Б. Об эквивалентных операторах // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 235. — С. 3–14.
12. Баскаков А. Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 17–26.
13. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. ж. — 1997. — 38, № 1. — С. 14–28.
14. Баскаков А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Мат. заметки. — 1996. — 59, № 6. — С. 811–820.
15. Бичегкуев М. С. Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 4. — С. 20.
16. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
17. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
18. Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1976. — 40, № 6. — С. 1380–1408.
19. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
20. Матрос Ю. Ш., Валко П. Эффективность гетерогенного катализатора при периодическом изменении температуры исходной смеси // Докл. АН СССР. — 1979. — 248, № 4. — С. 912–914.
21. Перов А. И. Частотные признаки существования ограниченных решений // Диффер. уравн. — 2007. — 43, № 7. — С. 896–904.
22. Перов А. И., Глушко Е. Г., Тюленева И. Г. Собственные значения и собственные функции одного интегро-дифференциального оператора // Диффер. уравн. — 1988. — 24, № 3. — С. 516–519.
23. Слюсарчук В. Е. О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем // Укр. мат. ж. — 1987. — 39, № 2. — С. 210–215.
24. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
25. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
26. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces // Mediterr. J. Math. — 2016. — 13. — P. 2443–2462.

27. *Engel K. -J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — New York: Springer, 2000.
28. *Gearhart L.* Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space// Trans. Am. Math. Soc — 1978. — 236. — P. 385–394.
29. *Howland J. S.* Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians// Math. Ann. — 1974. — 207. — P. 315–335.
30. *Latushkin Y., Montgomery-Smith S.* Evolutionary semigroups and Lyapunov theorems in Banach spaces// J. Funct. Anal — 1995. — 127. — P. 173–197.
31. *Prüss J.* On the spectrum of C_0 -semigroups// Trans. Am. Math. Soc — 1984. — 284, № 2. — P. 847–857.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич (Baskakov Anatoly Grigorievich)
Воронежский государственный университет, Воронеж
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валерьевна (Garkavenko Galina Valerievna)
Воронежский государственный университет, Воронеж
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Костина Любовь Николаевна (Kostina Lyubov Nikolaevna)
Воронежский государственный университет, Воронеж
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: kostinalubov@bk.ru

Ускова Наталья Борисовна (Uskova Natalya Borisovna)
Воронежский государственный технический университет, Воронеж
(Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)
E-mail: nat-uskova@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 22–40
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-22-40

УДК 519.24

АППРОКСИМАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ $\mathbb{Z}^2$

© 2025 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, Д. А. ЧЕРКАШИН

Аннотация. Разрабатывается метод построения аппроксимаций сколь угодно большой точности для вероятности перколяции из фиксированной вершины на квадратной решетке. На основе этого метода произведен расчет первого приближения вероятности перколяции, который дает для нее гарантированную оценку сверху вместе с оценкой снизу для порога перколяции.

Ключевые слова: вероятность перколяции, ветвящийся случайный процесс, иерархический граф, надкритический режим.

APPROXIMATIONS OF THE PERCOLATION PROBABILITY ON A PERIODIC GRAPH $\mathbb{Z}^2$

© 2025 Yu. P. VIRCHENKO, D. A. CHERKASHIN

ABSTRACT. A method for constructing approximations of arbitrarily high accuracy for the probability of percolation from a fixed vertex on a square lattice is developed. Based on this method, a first approximation of the percolation probability is calculated, which gives a guaranteed upper estimate for it together with a lower bound for the percolation threshold.

Keywords and phrases: percolation probability, branching random process, hierarchical graph, supercritical regime.

AMS Subject Classification: 60K35, 60J85

1. Введение. Теория перколяции первоначально возникла на основе анализа вероятностных моделей, связанных с описанием эффектов возникновения и/или исчезновения пространственного просачивания в конкретных физических ситуациях траекторий движения частицы при наличии случайных статических препятствий (см. [10, 12, 14]). Впоследствии стало ясно, что идея, лежащая в основе теории перколяции, допускает широкое обобщение в математическом смысле в виде понятия *просачивания случайных полей*, которое применимо не только к описанию физических ситуаций, возникающих в физике твердого тела, но и, например, в теории фильтрации жидкостей, а также к описанию аналогичных эффектов просачивания, имеющих не только физическое происхождение (см. [3–6]). Математическое оформление идей теории перколяции превратило ее к настоящему времени в своеобразный и довольно сложный раздел теории вероятностей.

Однако несмотря на значительное экстенсивное развитие теории, в ней, с нашей точки зрения, ощущается недостаточность аналитических методов исследования конкретных перколяционных моделей, т.е. таких методов, которые бы позволяли давать ответы на вопросы, представляющие интерес в приложениях. Одной из существенных причин такого положения является то, что в теории перколяции крайне затруднительно выявлять и в дальнейшем использовать в качестве аналитического инструмента какие-либо уравнения, которым могли бы подчиняться статистические характеристики отношения связности случайных множеств, являющееся объектом изучения

теории. Это связано, в частности, с тем, что понятие *связности случайных множеств* в евклидовых пространствах различной размерности по своей природе носит *пространственно нелокальный* характер. В связи с этим при решении задач теории перколяции приходится придумывать прямые методы аппроксимации вероятностей различных случайных событий, как это имеет место, например, в статистической механике (см., например, [17]). В настоящее время в дискретной теории перколяции имеются только лишь аналитические методы, основанные на так называемом *кластерном разложении* и контурных оценках (см., например, [13, 15]; здесь мы (с определенным умыслом) не упоминаем о методе, связанном с перечислением непересекающихся путей на графах). В частности, при вычислении вероятности перколяции из фиксированной вершины периодического графа на бесконечность, которая является основным объектом исследования настоящей работы, несмотря на суммируемость этого разложения, его сходимость очень медленная, и попытки увеличения скорости сходимости оказываются малоэффективными (см. [19]). Более того, это разложение не приспособлено для расчета самой интересной характеристики — *порога перколяции*.

Настоящая работа направлена на разработку метода аппроксимаций при расчете вероятности перколяции на так называемых периодических графах (см. [15]). Он основан на специальных перколяционных моделях, которые авторы называют *иерархическими* (см. [1]). Термин выбран нами по аналогии с иерархическими моделями Ф. Дайсона, используемыми в равновесной статистической механике решеточных систем при изучении фазовых переходов для гиббсовских случайных полей на кристаллических решетках (см. по этому поводу [8, 11]). Отличительным свойством этих моделей является то, что исследование каждой из них может быть сведено к изучению подходящей марковской цепи общего типа (см. [16]), связанной с марковским ветвящимся случайным процессом с дискретным временем (см., например, [7]).

В разделе 2 дано введение в систему понятий дискретной теории перколяции, в разделе 3 описан основной инструмент исследования — марковские цепи с ветвлением. В разделе 4 определены иерархические перколяционные модели, ассоциированные с так называемой квадратной решеткой. Раздел 5 посвящен конструкции аппроксимаций вероятности перколяции бернуллиевского случайного поля на квадратной решетке, а раздел 6 — описанию расчета аппроксимации первого порядка вероятности перколяции в рамках предлагаемого метода.

Настоящую работу следует рассматривать как продолжение работы [1]. По этой причине мы дублируем в тексте определения понятий, введенные в цитированной работе и приводим без доказательств наиболее важные для дальнейшего изложения утверждения, справедливость которых установлена в [1].

2. Теория перколяции на бесконечных графах. Пусть V — не более чем счетное множество, на котором определено бинарное симметричное отношение φ . Элементы множества V будем называть *вершинами* и обозначать в дальнейшем строчными латинскими буквами x, y, z и т. д. Наличие отношения φ между элементами x и y будем обозначать $\varphi(x, y)$. Симметричность отношения φ означает, что $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Отношение φ называется *отношением смежности*, а пара $\langle V, \varphi \rangle = \Gamma$ называется графом. Нас в дальнейшем будет интересовать только случай, когда множество V бесконечно.

Число элементов в каждом подмножестве $W \subset V$ будем обозначать символом $|W|$. В частности, если W бесконечно, то будем писать $|W| = \infty$. Случайные множества W вершин будем называть *конфигурациями*. При этом семейства конфигураций являются случайными событиями. Для каждой вершины $x \in V$ кардинальное число $|\{y \in V : \varphi(x, y)\}|$ называется ее степенью. Если это число бесконечно, то считаем, что степень вершины бесконечна. В дальнейшем рассматриваем только графы, у которых степень каждой вершины конечна. Такие графы мы называем *локально компактными*.

Для каждой конфигурации W и отношения φ определено сужение φ_W этого отношения на W . В этом случае для каждой конфигурации определена пара $\langle W, \varphi_W \rangle = \Gamma_W$, которая является подграфом Γ_W графа Γ .

Так как существует естественная биекция между всеми конфигурациями W из V и случайными дихотомическими функциями $\rho(x)$, $x \in V$, принимающими значения в $\{0, 1\}$, устанавливаемая

формулой $W = \{x : \rho(x) = 1\}$, то определение фиксированной конфигурации $W \subset V$ эквивалентно определению соответствующей ей функции $\rho(x)$, $x \in V$.

Последовательность $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y \rangle$ вершин из V , в которой $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j \in I_n$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ называется *путем* на графе Γ из вершины x в вершину y . Если все вершины последовательности находятся в конфигурации W , то будем говорить, что путь $\gamma(x, y)$ расположен в W . При этом число n в последовательности $\gamma(x, y)$ называется длиной этого пути; этот факт будем записывать в виде $d(\gamma(x, y)) = n$. Кроме того, концевые вершины пути $\gamma(x, y)$ называются *связанными на W* ; этот факт мы будем записывать в виде $\varphi(x, y; W)$.

Если последовательность $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ бесконечна, т.е. $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j \in \mathbb{N}$, то такой путь называется бесконечным с начальным узлом x . При этом полагаем $d(\gamma(x)) = \infty$.

Таким образом, для каждой конфигурации W определено бинарное симметричное отношение связности $\varphi(\cdot, \cdot; W)$. Если такое отношение имеет место для любой пары $\{x, y\} \subset W$, то подграф Γ_W называется *связным*. В частности, будем предполагать, что весь граф Γ является связным, т.е. отношение $\varphi(\cdot, \cdot; V)$ имеет место для любой пары вершин этого графа. Каждый связный подграф Γ_W , $W \subset V$, будем называть *кластером*. Кроме того, в дальнейшем, чтобы избежать недоразумений, будем отличать в обозначениях произвольным образом выбранные конфигурации и кластеры. Для последних мы будем использовать прописную букву C .

Очевидно, отношение связности $\varphi(\cdot, \cdot; W)$, транзитивно по отношению к любым трем вершинам x, y, z для любой конфигурации $W \subset V$. Поэтому оно является *отношением эквивалентности*. Согласно общему свойству таких отношений любая конфигурация W разбивается однозначным образом на дизъюнктивное семейство $\mathfrak{C}[W]$ связных кластеров $\{C_j; j \in \mathbb{N}\}$. Ввиду указанной выше биекции между конфигурациями и дихотомическими функциями любая такая функция $\rho(x)$, $x \in V$, определяет взаимно однозначным образом набор кластеров в V . Число вершин в каждом кластере C_j из набора, соответствующего конфигурации W , будем обозначать $|C_j|$, $j \in \mathbb{N}$. Если $x \in W$, то в наборе кластеров $\mathfrak{C}[W] = \{C_j; j \in \mathbb{N}\}$, составляющих эту конфигурацию, имеется единственный кластер $C(x)$, который ее содержит.

Для любой конфигурации W на соответствующем ей графе Γ_W возможно введение метрики. Расстояние $\text{dist}(x, y)$ между любыми двумя его вершинами x и y из Γ_W определяется формулой

$$\text{dist}(\gamma(x, y)) = \min \{d(\gamma(x, y)); \{\gamma(x, y)\} \subset W\}.$$

Путь $\gamma(x, y)$ (соответственно, бесконечный путь $\gamma(x)$) называется *несамопересекающимся*, если для любых двух вершин x_j и x_k , $j \neq k$, из последовательности $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y \rangle$ (соответственно, $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$) выполняется $x_j \neq x_k$, $\{j, k\} \subset I_n \cup \{0\}$ (соответственно, $\{j, k\} \subset \mathbb{N}_+$).

Наибольший интерес в теории перколяции представляет случай, когда граф Γ перколяционной модели бесконечный и локально компактный. В этом случае конечность кластера, расположенного в V , эквивалентна конечности любого расположенного в нем несомопересекающегося пути, и в таком графе Γ существуют сколь угодно удаленные друг от друга вершины.

Тип бесконечных графов, для которых ставятся и решаются задачи дискретной теории перколяции, определяется ее приложениями. Бесконечные графы, используемые в статистической математической физике и теории случайных процессов, по отношению к которым приложима теория перколяции, бывают в основном двух типов. Это так называемые *древесные бесконечные графы*, о которых пойдет речь в следующем разделе, и *периодические графы* (см. [15]), которые используются в статистической механике решетчатых систем (см. [17]). Ниже будут определены бесконечные графы *иерархического типа*, построение которых осуществляется на основе синтеза математических идей, используемых при построении графов указанных двух типов.

Определим теперь вероятностное пространство $\langle \mathcal{W}, \mathfrak{W}, \mathbf{P} \rangle$ каждой перколяционной модели дискретной теории перколяции. Пространством $\mathcal{W}$ элементарных случайных событий, очевидным образом, является семейством всех конфигураций $W \subset V$. σ -Алгебра $\mathfrak{W}$ в вероятностном пространстве $\langle \mathcal{W}, \mathfrak{W}, \mathbf{P} \rangle$ должна порождаться не более чем счетным классом случайных событий, которые представляются семействами конфигураций. Для определения самосогласованной перколяционной модели потребуем, чтобы отношение смежности на графе Γ было измеримым относительно σ -алгебры $\mathfrak{W}$. В связи с этим выберем в качестве класса $\mathfrak{W}_0$ случайных событий,

порождающего эту σ -алгебру, класс всех так называемых *цилиндрических случайных событий* — семейств $\mathcal{A}[X] = \{W \subset V : X \subset W, |X| < \infty\}$ конфигураций, каждое из которых определяется конечным набором X вершин из V . Класс $\mathfrak{M}_0$ цилиндрических событий счетен, и поэтому порождаемая им минимальная σ -алгебра $\mathfrak{M}$, содержащая этот класс, автоматически является счетнопорожденной.

Пусть $Z \subset V$. Введем семейство конфигураций $\mathcal{C}[Z] = \{W \subset V : \varphi(x, y; W), \{x, y\} \subset Z\}$.

Теорема 1. Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — связный бесконечный локально компактный граф. Тогда для любого множества $Z \subset V$ семейство конфигураций $\mathcal{C}[Z]$ измеримо.

Справедливость этого утверждения дает основание ставить и решать задачу о вычислении вероятности каждого события, которое заключается в связанности любого конечного набора вершин графа Γ . Поэтому следствием теоремы 1, в частности, является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — связный бесконечный локально компактный граф. Тогда для любой вершины $x \in V$ семейство конфигураций $\mathcal{C}_\infty[x] = \{W : \exists(\gamma(x) \subset W : d(\gamma(x)) = \infty)\}$ измеримо.

Определение 1. Если на σ -алгебре $\mathfrak{M}$ определена такая мера P , что для фиксированной вершины $x \in V$ графа Γ вероятность $P[x] = \Pr\{W \subset V : W \in \mathcal{C}_\infty[x]\} > 0$, то говорят, что из этой вершины существует перколяция.

Одной из центральных проблем теории перколяции является установление условий для графа Γ и меры P , которые приводят к существованию перколяции из какой-либо его вершины. В общем случае определение меры на бесконечных графах является математической проблемой. Примеры ее постановки и решения имеются в статистической механике решеточных моделей (см. [17]) и конструктивной квантовой теории поля (см. [18]), в рамках которых для определения меры P приходится устанавливать существование так называемого *термодинамического предела* распределений вероятностей для гиббсовских случайных полей. В настоящей работе мы ограничиваемся изучением перколяции для меры P , которая связана с *однородным бернуллиевским случайным полем* $\{\rho(x); x \in V\}$ на бесконечном графе, который называется *квадратной решеткой* $\mathbb{Z}^2$.

Определение 2. Случайное дихотомическое поле $\{\rho(x); x \in V\}$, определяемое на не более чем счетном множестве V на основе набора вероятностей

$$\Pr\{\mathcal{A}[X]\} = c^{|X|}, \quad X \subset V, \quad (1)$$

при фиксированном значении $c \in [0, 1]$, называется *однородным бернуллиевским полем*.

Таким образом, распределение вероятностей однородного бернуллиевского поля полностью определяется значением одного параметра $c = \Pr\{\rho(x) = 1\} \in [0, 1]$ — вероятностью заполнения фиксированной вершины графа. Этот параметр будем называть *концентрацией*.

3. Марковские цепи с ветвлением. Циклом на графе Γ называется конечная последовательность $\langle x_0, x_1, \dots, x_n = x_0 \rangle$, в которой $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, n$. Связный граф Γ , не имеющий циклов, называется *древесным*. Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — древесный граф, у которого имеется какая-либо отмеченная вершина, которой припишем метку $\mathbf{0}$. Для любой вершины $x \in V$ существует единственный путь, связывающий ее с вершиной $\mathbf{0}$. Введем бесконечный дизъюнктивный набор множеств вершин S_m , $m \in \mathbb{N}$, так, что $S_m = \{x \in V : \text{dist}(\mathbf{0}, x) = m\}$. Очевидно, что

$$V = \{\mathbf{0}\} \cup \left(\bigcup_m S_m \right).$$

Множество S_m будем называть *поколением* порядка m . *Индексом ветвления* любой вершины $x \neq \mathbf{0}$ для древесного графа будем называть ее степень, уменьшенную на единицу. Каждая вершина y древесного графа из поколения S_m смежна с какой-либо одной вершиной $x \in S_{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — связный бесконечный локально компактный древесный граф с начальной вершиной $\mathbf{0}$. В этом случае индексы ветвления всех вершин конечны и конечны все наборы S_m ,

$m \in \mathbb{N}$. Бесконечный граф такого типа будем называть *однородным* (деревом Кэйли), если индекс ветвления у всех вершин $x \neq \mathbf{0}$ одинаков и равен степени нулевой вершины. Каждая вершина $x \in S_m$ из дерева Кэйли с индексом ветвления n смежна ровно с n вершинами $y \in S_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}_+$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Рассмотрим задачу теории перколяции из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе Γ при заданном на нем бернуллиевском случайном поле $\rho(x)$, $x \in \Gamma$. Введем в рассмотрение марковские цепи $\langle X_m \subset S_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ со значениями в виде конечных наборов вершин из S_m , т.е. такие цепи обладают изменяющимся *пространством состояний* S_m , $m \in \mathbb{N}_+$. Эти случайные последовательности мы будем называть *марковскими цепями с ветвлением*.

Индукцией по $m \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие взаимно однозначным образом каждой вершине $x \in S_m$ графа Γ указанного типа с индексом ветвления, равным n , метку в виде последовательности $\langle j_1, j_2, \dots, j_m \rangle$, где $j_k \in I_n$, $k \in I_m$. При $m = 1$ для каждой вершины $x \in S_1$, $\varphi(\mathbf{0}, x)$, поставим в соответствие однокомпонентную последовательность $\langle j_1 \rangle$, $j_1 \in I_n$. Пусть для всех вершин из $\bigcup_{k=1}^m S_k$ определены метки $\langle j_1, j_1, \dots, j_k \rangle$. Зафиксируем одну из таких вершин с индексом ветвления n в последнем наборе S_m . Это означает, что она смежна с n вершинами $y_1, y_2, \dots, y_n$, $\varphi(x, y_k)$, $k \in I_n$ из набора S_{m+1} , так как расстояние от каждой из этих вершин до $\mathbf{0}$ на единицу больше, чем расстояние от вершины x . Присвоим этим вершинам метки $\langle j_1, j_1, \dots, j_m, j_{m+1} \rangle$. Ввиду произвольности $m \in \mathbb{N}$, каждой из вершин графа Γ присвоена метка.

Введем на пространствах состояний S_m цепи инъекцию $T : 2^{S_m} \mapsto 2^{S_{m-1}}$, которая действует в каждом из наборов S_m , переводя каждую вершину $\langle j_1, j_1, \dots, j_m \rangle$ в вершину $\langle j_1, j_1, \dots, j_{m-1} \rangle$, где $T \emptyset = \emptyset$ при $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Распределение вероятностей любой марковской цепи полностью определяется распределением вероятностей $P_0(A)$ в начальном состоянии A и условной вероятностью перехода за один шаг ее эволюции, которая в нашем случае представляется функцией $P^{(m)}(A, A') = \Pr\{X_m = A \in S_m | X'_{m-1} = A' \in S_{m-1}\}$. Положим $A \subset S_0 = \{\mathbf{0}\}$, т.е. $A = \{\mathbf{0}\}$ с вероятностью единица. Распределение вероятностей в любой момент $m \in \mathbb{N}$ определяется на основе уравнения

$$P_m(A) = \sum_{A' \subset S_{m-1}} P^{(m)}(A, A') P_{m-1}(A'), \quad A \in S_m.$$

Для конструируемой марковской цепи с ветвлением условная вероятность $P^{(m)}(A, A')$ должна быть такой, что соотношение $T X_m \subset X'_{m-1}$ выполняется с вероятностью единица. Тогда

$$P_m(A) = \sum_{\substack{A' \subset S_{m-1}: \\ T A \subset A'}} P^{(m)}(A, A') P_{m-1}(A'), \quad A \subset S_m.$$

Если $T A = A'$, то набор $A \subset S_m$ представим в виде дизъюнктивного разложения

$$A = \bigcup_{x \in A'} A_x, \quad T A_x = \{x\}, \quad |A_x| \leq n,$$

т.е. в A_x входят только те вершины y из набора S_m , для каждой из которых существует такое $j \in I_n$, что $y = \langle x, j \rangle$. Отсюда следует, что $|A| = \sum_{x \in T A} |A_x|$.

Будем говорить, что марковская цепь с ветвлением обладает *марковским измельчением* (см. [2]), если

$$P^{(m)}(A, A') = \prod_{x \in A'} p(A_x), \quad (2)$$

где $p(A) = \Pr\{X = A\}$, $A \subset S_1$ — распределение вероятностей на 2^{S_1} , $S_1 = I_n$.

Введем производящую функцию случайной величины $|X_m|$:

$$F_m(\zeta) = \sum_{A \subset S_m} \zeta^{|A|} P_m(A), \quad \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \leq 1,$$

и введем обозначение

$$G(\zeta) \equiv F_1(\zeta) = \sum_{A \subset I_n} \zeta^{|A|} P_1(A).$$

Теорема 3. Производящая функция $F_m(\zeta)$ удовлетворяет функционально-разностному уравнению

$$F_{m+1}(\zeta) = F_m(G(\zeta)), \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

При этом $F_0(\zeta) = \zeta$.

Для марковских цепей с ветвлением имеется *надкритический режим*, который определяется распределением $p(\cdot)$ на 2^{S_1} и при реализации которого выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \{|X_m| > 0\} = 1 - F_m(0) > 0.$$

При его реализации предел $q = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(0) < 1$, так что траектория с вероятностью $(1 - q)$ уходит на бесконечность.

Теорема 4. Надкритический режим существует тогда и только тогда, когда распределение условных вероятностей $p(\cdot)$ при условии, что $\mathbf{0} \in W$, обладает свойствами $p(\emptyset) = 0$, либо $p(\emptyset) > 0$, но

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) > 1.$$

В последнем случае условная вероятность его реализации равна $(1 - q)$, где q является единственным отличным от 1 решением уравнения

$$q = \sum_{A \subset I_n} q^{|A|} p(A).$$

В частности, если из вершины $\mathbf{0}$ однородного древесного графа Γ , на множестве V вершин которого определено случайное однородное бернуллиевское поле $\{\rho(x); x \in V\}$ с концентрацией $c \in (0, 1)$, то на этом графе возможна постановка задачи о перколяции из этой вершины на бесконечность, т.е. возможно существование с ненулевой вероятностью бесконечной траектории у марковской цепи с ветвлением. В этом случае распределение условных вероятностей $p(\cdot)$, в соответствии с (1), определяется формулой

$$p(A) = c^{|A|} (1 - c)^{n - |A|}, \quad A \subset I_n.$$

Наличие перколяции означает существование надкритического режима. Так как безусловная вероятность $P(c)$ перколяции в случае, если она определяется на основе поля $\{\rho(x); x \in V\}$, равна $P(c) = c(1 - q)$, где $q \equiv q(c)$ зависит от $c \in (0, 1)$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Перколяция из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе с заданным на нем однородным бернуллиевским случайным полем с концентрацией $c \in [0, 1]$ существует тогда и только тогда, когда $c > c_*$, где c_* — так называемый порог перколяции, который определяется как единственное решение $c_* \in (0, 1)$ уравнения

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) = 1, \tag{3}$$

где $p(A) = c^{|A|} (1 - c)^{n - |A|}$. При этом вероятность $P(c)$ ее реализации при $c > c_*$ равна $c(1 - q(c))$, где $q(c)$ — условная вероятность отсутствия перколяции является единственным отличным от единицы вещественным решением уравнения

$$q(c) = \sum_{A \subset I_n} q^{|A|}(c) p(A). \tag{4}$$

4. Иерархические модели, ассоциированные с $\mathbb{Z}^2$. Рассмотрим, теперь, применение описанных выше построений для конструирования аппроксимаций вероятности перколяции на бесконечном периодическом графе размерности 2, который называется квадратной решеткой $\mathbb{Z}^2$. С этой целью определим последовательности $\langle \Gamma^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ специальных графов, которые мы называем иерархическими. В общем случае каждая такая последовательность может быть поставлена в соответствие каждому бесконечному локально компактному графу Γ так, чтобы возникала возможность аппроксимации вероятности перколяции на этом графе вероятностями перколяции на графах $\Gamma^{(n)}$ с возрастающей точностью при увеличении номера n — порядка аппроксимации (см. [1]).

Опишем построение последовательности иерархических перколяционных моделей, ассоциированных с квадратной решеткой. Этот бесконечный граф представляет собой набор вершин

$$V = \left\{ x = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2; n_j \in \mathbb{Z}, j \in \{1, 2\} \right\}$$

в $\mathbb{R}^2$, на котором определено отношение смежности

$$\varphi(x, y) = \left\{ \langle x, y \rangle : y = x \pm \mathbf{e}_j; j \in \{1, 2\} \right\}.$$

Зафиксируем конечное множество

$$V_0^{(n)} = \left\{ x : x = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2; |n_j| \leq n, j \in \{1, 2\} \right\},$$

$(2n + 1)^2$ элементов которого будем называть *внутренними вершинами*, а множество

$$\partial_+ V_0^{(n)} = \left\{ x : x \in V \setminus V_0^{(n)}, \exists (y \in V_0^{(n)} : \varphi(x, y)) \right\}$$

будем называть *внешней границей* этого множества $V_0^{(n)}$. Обозначив через $\varphi_0^{(n)}$ сужение отношения φ на $V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}$, удалив из него пары смежности $\{x, y\} \subset \partial_+ V_0^{(n)}$, определим связный конечный граф

$$\Gamma_0^{(n)} = \left\langle V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)} \right\rangle,$$

который будем называть *исходным графом* для построения бесконечного локально компактного иерархического графа $\Gamma^{(n)}$ порядка n посредством процедуры *склеивания*. Для этого следующим образом определим рекуррентно конечные графы $\Gamma_m^{(n)}$, $m \in \mathbb{N}_+$.

Пусть для фиксированного значения $n \in \mathbb{N}_+$ имеется бесконечный набор $\mathfrak{G}^{(n)}$ графов, изоморфных графу $\Gamma_0^{(n)}$ с точки зрения отношения связности. Занумеруем вершины внешней границы $\partial_+ V_0^{(n)} \equiv S_1$ графа $\Gamma_0^{(n)}$, которые будем называть вершинами первого поколения, присвоив им метки $\langle j_1 \rangle$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$.

На первом шаге рекуррентного процесса построения выберем $4(2n + 1)$ графов из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$, нулевым вершинам которых присвоим метки $\mathbf{0}_{j_1}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$. Множества их внутренних вершин обозначим $V_{1;j_1}^{(n)}$ и, соответственно, множества вершин их внешних границ — $\partial_+ V_{1;j_1}^{(n)}$. Эти графы обозначим $\Gamma_{1;j_1}^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$. Определим теперь граф $\Gamma_1^{(n)}$ посредством операции приклеивания, которая заключается в отождествлении вершин $\mathbf{0}_{j_1}$ с вершинами $\langle j_1 \rangle$ графа $\Gamma_0^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$. Граф $\Gamma_1^{(n)} = \langle V_1^{(n)} \cup \partial_+ V_1^{(n)}, \varphi_1^{(n)} \rangle$ состоит из множества

$$V_1^{(n)} = V_0^{(n)} \cup \bigcup_{j_1=1}^{4(2n+1)} V_{1;j_1}^{(n)}$$

внутренних вершин, число которых равно $|V_1^{(n)}| = (2n + 1)^2 [1 + 4(2n + 1)]$, и набора

$$\partial_+ V_1^{(n)} = \bigcup_{j_1=1}^{4(2n+1)} \partial_+ V_{1;j_1}^{(n)} \equiv S_2$$

вершин внешней границы второго поколения, число которых равно $|\partial_+ V_1^{(n)}| = [4(2n + 1)]^2$.

Вершинам внешней границы второго поколения присвоим метки $\langle j_1, j_2 \rangle$ так, что каждая метка с $j_2 = 1, \dots, 4(2n+1)$ входит в состав внешней границы множества $V_{1;j_1}^{(n)}$ с соответствующим номером j_1 . Отношение смежности $\varphi_1^{(n)}$ на графе $\Gamma_1^{(n)}$ представляет собой объединение пар смежных вершин всех графов $\Gamma_0^{(n)}$ и $\Gamma_{1;j_1}^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n+1)$, с учетом отождествления вершин $\mathbf{0}_{j_1}$ с вершинами $\langle j_1 \rangle$ внешней границы графа $\Gamma_0^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n+1)$. При этом вершины графов $\Gamma_{1;j_1}^{(n)}$ с различными номерами j_1 делаются несмежными.

Индукцией по порядку $m \in \mathbb{N}$ построим последовательно графы $\Gamma_m^{(n)}$. Положим, что уже определены множества $V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$, $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m$, и на их основе построен граф $\Gamma_m^{(n)}$ с множеством внутренних вершин

$$V_m^{(n)} = V_{m-1}^{(n)} \cup \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m} V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)},$$

где все графы $\Gamma_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$ с соответствующим каждому из них множеством внутренних вершин $V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$ и множеством $\partial_+ V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$ вершин внешней границы $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m$ выбираются из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$. Таким образом, число внутренних вершин графа $\Gamma_m^{(n)}$ равно

$$|V_m^{(n)}| = (2n+1)^2 \sum_{k=0}^m [4(2n+1)]^k = (2n+1)^2 \frac{[4(2n+1)]^{m+1} - 1}{4(2n+1) - 1}.$$

Число вершин множества

$$\partial_+ V_m^{(n)} = \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m} \partial_+ V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)} \equiv S_m$$

внешней границы m -го поколения этого графа равно

$$|\partial_+ V_m^{(n)}| = \sum_{\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m} |\partial_+ V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}| = [4(2n+1)]^{m+1}.$$

Отношение смежности $\varphi_m^{(n)}$ на этом графе представляет собой объединение пар смежных вершин графа $\Gamma_{m-1}^{(n)}$ и всех графов $\Gamma_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$, где $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m$, с учетом отождествления вершин $\mathbf{0}_{j_1, \dots, j_m}$ с вершинами $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ внешней границы графа $\Gamma_{m-1}^{(n)}$. При этом вершины $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ с различными наборами $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ полагаются несмежными на новом графе.

После построения графа $\Gamma_m^{(n)}$ граф $\Gamma_{m+1}^{(n)}$ строится следующим образом. Сначала определяется множество

$$V_{m+1}^{(n)} = V_m^{(n)} \cup \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle \in I_{4(2n+1)}^{m+1}} V_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$$

его внутренних вершин на основе графов $\Gamma_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$, где $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m+1$, выбранных из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$. Затем определяется множество вершин

$$\partial_+ V_{m+1}^{(n)} = \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle \in I_{4(2n+1)}^{m+1}} \partial_+ V_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$$

его внешней границы и, наконец, определяется отношение смежности $\varphi_{m+1}^{(n)}$ на множестве $V_{m+1}^{(n)} \cup \partial_+ V_{m+1}^{(n)}$, которое является объединением пар смежных вершин графа $\Gamma_m^{(n)}$ и всех графов $\Gamma_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$, где $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m+1$, с учетом отождествления вершин $\mathbf{0}_{j_1, \dots, j_{m+1}}$ с вершинами $\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle$ внешней границы графа $\Gamma_m^{(n)}$ и вершины $\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle$ с различными наборами $\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle$ являются не смежными на новом графе.

Определение 3. Иерархический граф $\Gamma^{(n)} = \langle V^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$, соответствующий исходному графу $\Gamma_0^{(n)}$, является теоретико-множественным пределом $\Gamma_m^{(n)} \rightarrow \Gamma^{(n)}$ при $m \rightarrow \infty$, у которого

$$V^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m^{(n)}, \quad \varphi^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m^{(n)}.$$

Очевидно, иерархический граф $\Gamma^{(n)} = \langle V^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$ локально компактен, так как он порождается склеиванием счетного множества конечных связных графов из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$, причем на каждом этапе приклеивается лишь конечный набор графов, каждый раз с новыми вершинами отождествления. Порождаемый иерархический граф $\Gamma^{(n)}$ обладает выделенной вершиной $\mathbf{0}$. Вершины иерархического графа $\Gamma^{(n)}$, помеченные в результате его построения всеми метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$, $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, являются его *вершинами сочленения* между конечными графами $\Gamma_{m, j_1, \dots, j_m}$, подклеиваемыми в процессе его построения, которые мы называем *блоками*. Это означает, что любой путь, соединяющий вершины из блоков $\Gamma_{m, j_1, \dots, j_m}$ и $\Gamma_{m+1, j_1, \dots, j_m, j_{m+1}}$ обязательно пройдет через вершину $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$.

Пусть на иерархическом графе $\Gamma^{(n)}$ определено однородное бернуллиевское поле $\{\rho(x); x \in V^{(n)}\}$ с параметром $c \in (0, 1)$. Тогда для такого графа определено случайное событие

$$\mathfrak{A}_\infty = \left\{ W \subset V^{(n)} : \exists(\gamma(\mathbf{0}) : \{\gamma(\mathbf{0})\} \subset W, |\gamma(\mathbf{0})| = \infty) \right\}$$

наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$.

Таким образом, на графе $\Gamma^{(n)}$ определена *иерархическая перколяционная модель*, которую обозначим $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$. Иерархические перколяционные модели обладают свойством, которое позволяет строить на их основе аппроксимации решений задачи перколяции на графе $\mathbb{Z}^2$, точность которых возрастает при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\mathcal{Q}_m(B)$, $B \subset S_m$, случайное событие, состоящее в том, что для множества B существует путь из вершины $\mathbf{0}$ в конечную вершину, находящуюся в B , а для любой вершины из $S_m \setminus B$ такой путь отсутствует. Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Для любого набора $B \subset S_m$ такого, что $B = B_x$, $\{x\} = \mathsf{T} B \neq \emptyset$ для вершины $x \in S_{m-1}$, условная вероятность события $\mathcal{Q}_m(B)$ при условии, что $\varphi(\mathbf{0}, x; W)$ равна

$$\Pr \left\{ \mathcal{Q}_m(B) | W : \varphi(x, \mathbf{0}; W) B \right\} = \Pr \left\{ W \subset V^{(n)} : W \cap S_m = B | W : \varphi(x, \mathbf{0}; W) \right\}.$$

Доказательство. Равенство следует из того, что, в силу независимости значений случайного поля $\rho(z)$, $z \in V^{(n)}$, появление любого пути γ на конфигурациях $W \subset V_m^{(n)}$, связывающий вершину x с какой-либо вершиной $y \in B$ и не связывающий x с ни с одной из вершин в $(V_m^{(n)})_x \setminus B$, $\mathsf{T}(V_m^{(n)})_x = \{x\}$ не зависит от части случайной реализации поля $\rho(z)$, $z \in V^{(n)}$ в вершинах $z \in V_m^{(n)} \setminus (V_m^{(n)})_x$. $\square$

Пусть отношение $\varphi(x, A; W)$ означает, что вершина x связана с каждой вершиной из A на конфигурации W , и $\bar{\varphi}(x, A; W)$ — противоположное отношение (при условии несмежности вершин из $\partial_+ V_0^{(n)}$ на иерархическом графе). При этом $\varphi(x, A)$ будет означать, что вершина x смежна с какой-нибудь вершиной из A , а $\bar{\varphi}(x, A)$ имеет противоположный смысл. Для каждого множества $A \subset \partial_+ V_0^{(n)}$ рассмотрим случайные события $\mathcal{Q}(A) \equiv \mathcal{Q}_1(A)$,

$$\mathcal{Q}(A) = \left\{ \mathbf{0} \in W : \exists(z \in V_0^{(n)}, \varphi(z, A) : \varphi(\mathbf{0}, z; W)), \forall(z \in V_0^{(n)}, \varphi(\mathbf{0}, z; W) : \bar{\varphi}(z, \partial_+ V_0^{(n)} \setminus A)) \right\}.$$

В частности,

$$\mathcal{Q}(\emptyset) = \left\{ \mathbf{0} \in W : \forall(z \in V_0^{(n)}, \varphi(\mathbf{0}, z; W) : \bar{\varphi}(z, \partial_+ V_0^{(n)})) \right\}.$$

Следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Лемма 2. Для любых наборов $B \subset S_m$ и $B' \subset S_{m-1}$, $\mathsf{T} B \subset B'$ имеют место формулы

$$\Pr \left\{ \mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(B') \right\} = p_0^{|B' \setminus \mathsf{T} B|} \Pr \left\{ \mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(\mathsf{T} B) \right\}, \quad (5)$$

$$\Pr \{ \mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(\mathbb{T} B) \} = \prod_{x \in \mathbb{T} B} p(B_x), \quad (6)$$

где

$$p(A) = \Pr \{ \mathcal{Q}(A) | \mathbf{0} \in W \}, \quad p_0 = \Pr \{ \mathcal{Q}(\emptyset) | \mathbf{0} \in W \}.$$

Пусть C — конечный кластер на этом графе, набор $\partial_+ C = \{x \notin C : \exists(y \in C : \varphi(x, y))\}$ является его *внешней границей*, а набор $\partial_- C = \{x \in C : \exists(y \notin C : \varphi(x, y))\}$ — *внутренней границей*. Оба этих множества вершин конечны.

Обозначим через $\mathfrak{D}(V_0^{(n)})$ и $\mathfrak{D}(V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)})$ семейства всех кластеров $C(\mathbf{0})$, которые содержат вершину $\mathbf{0}$ и содержатся соответственно в $V_0^{(n)}$ и $V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}$. При этом каждый кластер C' из $\mathfrak{D}(V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)})$ представим единственным образом в виде $C \cup \Delta$, где $\Delta \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}$, если отношение смежности понимается в смысле иерархического графа, т.е. никакие из вершин в $\partial_+ V_0^{(n)}$ не смежны между собой. Следовательно, событие

$$\{\mathbf{0} \in W\} = \{\mathbf{0} \in W \subset V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}\}$$

представимо в виде дизъюнктивного разложения

$$\{\mathbf{0} \in W\} = \bigcup_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} \bigcup_{\Delta: \Delta \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}} \{\mathbf{0} \in W : C \cup \Delta = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W]\}.$$

Так как $\mathcal{Q}(A)$ является компонентой этого разложения при $\Delta = A$, то

$$\mathcal{Q}(A) = \bigcup_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} \{\mathbf{0} \in W : C \cup A = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W]\}.$$

Следовательно, вероятность $\Pr\{\mathcal{Q}(A)\} = cp(A)$ этого события представляется в виде суммы

$$cp(A) = \sum_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} P[C; A], \quad (7)$$

где

$$P[C; A] = \Pr \left\{ \mathbf{0} \in W : C \cup A = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W] \right\} = (1 - c)^{|\partial_+ V_0^{(n)} \cup \partial_+ C| - |A|} c^{|A|} P[C], \quad (8)$$

$$P[C] = \Pr \left\{ \mathbf{0} \in W \subset V_0^{(n)} : C = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W] \right\},$$

так как случайные величины $\rho(x)$ в вершинах $x \in V_0^{(n)}$ и $x \in \partial_+ V_0^{(n)}$ независимы. В частности, полученное разложение справедливо и при $A = \emptyset$.

5. Конструкция аппроксимаций вероятности перколяции на графе $\mathbb{Z}^2$. Определим случайную последовательность, траектории $\{B_n; n \in \mathbb{N}_+\}$ которой составлены из множеств $B_0 = \{0\}$ и $B_n \subset S_n = \{j_1, \dots, j_n\}$, $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, n$. Случайные события, определяемые этими множествами, таковы, что существует конфигурация W на иерархическом графе, где выполняются отношения $\varphi(\mathbf{x}, B_n; W)$ и $\overline{\varphi}(\mathbf{0}, S_n \setminus B_n; W)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда формулы (7), (8), вместе с (5), (6), указывают, согласно (2), на то, что эта случайная последовательность является марковской цепью с ветвлением и марковским измельчением, у которой эти формулы определяют условные вероятности перехода. Для распределения вероятностей $p(A) = \Pr \{ \mathcal{Q}(A) | \mathbf{0} \in W \}$, $A \subset I_{4(2n+1)}$, посредством которых определяются вероятностей перехода, имеет место соотношение

$$\sum_{A \subset I_{4(2n+1)}} p(A) = 1.$$

Это связано с тем, что события

$$\mathcal{Q}(A) = \left\{ \mathbf{0} \in W : \varphi(\mathbf{0}, x; W), x \in A; \overline{\varphi}(\mathbf{0}, y; W), y \in I_{4(2n+1)} \setminus A \right\}$$

несовместимы для различных множеств $A \subset I_{4(2n+1)}$ и их объединение составляет все пространство конфигураций $\mathcal{W}$. Расчет вероятностей $p(A)$ сводится к расчету вероятностей $P[C; A]$ реализации каждого из таких кластеров C внутри $V_0^{(n)}$, который содержит вершину $\mathbf{0}$ и пересечение внешней границы которого с $\partial_+ V_0^{(n)}$ содержит фиксированное множество A .

Для описанной марковской цепи возможна постановка задачи о вычислении перколяции. Соответствующую перколяционную модель будем обозначать $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$. При этом все вершины, которые входят в подмножества из S_m , являются вершинами сочленения иерархического графа с метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$, $j_k \in I_{4(2n+1)}$, $k = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, на котором также возможна постановка задачи о перколяции из начальной вершины. Соответствующую перколяционную модель будем обозначать $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$. Пусть $\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)})$ и $\bar{\mathcal{Q}}_\infty(\Gamma_0^{(n)})$ — случайные события наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$ соответственно для моделей $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$ и $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Для перколяционных моделей $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$ и $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$ имеет место равенство*

$$\Pr \{ \mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)}) \} = \Pr \{ \bar{\mathcal{Q}}_\infty(\Gamma_0^{(n)}) \}.$$

Доказательство. Пусть $\Gamma^{(n)}$ — бесконечный иерархический граф, ассоциированный графом $\mathbb{Z}^2$. Он обладает набором вершин сочленения $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда согласно возрастанию номера поколения m любой бесконечный путь $\gamma(\mathbf{0})$ из начальной вершины обязательно последовательно пройдет через вершины с некоторыми метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in S_m$, $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ ограничению каждого пути $\gamma(\mathbf{0})$, входящего в случайное событие $\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)})$ на граф $\Gamma^{(n)}$ соответствует однозначным образом путь $\gamma(\mathbf{0}, z)$, $z \in V_m^{(n)}$ длины m .

Пусть $\mathcal{Q}_m = \{ W \subset V^{(n)} : \exists(z \in S_m : \varphi(\mathbf{0}, z; W)) \}$ — случайное событие в перколяционной иерархической модели, при котором существует такой путь $\gamma(\mathbf{0})$, что

$$\{\gamma(\mathbf{0})\} \cap S_m \neq \emptyset, \quad \mathcal{Q}_1(A) \equiv \mathcal{Q}(A).$$

Тогда

$$\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_m.$$

При этом имеет место дизъюнктивное разложение

$$\mathcal{Q}_m = \bigcup_{B \subset S_m} \mathcal{Q}_m(B),$$

где

$$\mathcal{Q}_m(B) = \left\{ W \subset V^{(n)} : \forall(z \in B : \varphi(\mathbf{0}, z; W)), \forall(z \in S_m \setminus B : \bar{\varphi}(\mathbf{0}, z; W)) \right\},$$

так как вершины из любого поколения S_m являются несмежными между собой на иерархическом графе.

Покажем, что вероятность события $\mathcal{Q}_m$ совпадает с вероятностью соответствующего события для марковской цепи. Пусть $F_m(\zeta)$ — введенная ранее производящая функции марковской цепи с ветвлением и марковским измельчением. Вычислим производящую функцию

$$\bar{F}_m(\zeta) = \sum_{\emptyset \neq B \subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathcal{Q}(B)\},$$

описывающую изменение вероятности попадания траектории в поколение S_m , $m \in \mathbb{N}$, в иерархической перколяционной модели. Для нее имеет место соотношение

$$F_m(\zeta) = \bar{F}_m(\zeta) + \Pr\{W \cap S_m = \emptyset\}.$$

Согласно формуле полной вероятности

$$\Pr\{\mathcal{Q}_m(B)\} = \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1} : B' \supset B} \Pr\{\mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(B')\} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\}$$

для любого непустого множества $B \subset S_m$. Так как при $\top B_x = \{x\}$ справедливо дизъюнктивное разложение $B = \sum_{x \in \top B} B_x$, так что

$$\mathcal{Q}_m(B) = \bigcap_{x \in \top B} \mathcal{Q}_m(B_x).$$

Тогда, учитывая (5) и (6), находим

$$\begin{aligned} \bar{F}_m(\zeta) &= \sum_{\emptyset \neq B \subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathcal{Q}_m(B)\} = \\ &= \sum_{\emptyset \neq B \subset S_m} \zeta^{|B|} \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}: B' \supset \top B} p_0^{|B' \setminus \top B|} \Pr\{\mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(\top B)\} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} = \\ &= \sum_{B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} \sum_{\emptyset \neq A \subset B'} p_0^{|B' \setminus A|} \prod_{x \in A} \sum_{\emptyset \neq B_x; x \in A} \zeta^{|B_x|} p(B_x) = \\ &= \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} (G^{|B'|}(\zeta) - p_0^{|B'|}) = \bar{F}_{m-1}(\zeta) - \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} p_0^{|B'|}. \end{aligned}$$

Так как

$$\Pr\{W \subset S_m : W = \emptyset\} = \Pr\{W \subset S_{m-1} : W = \emptyset\} + \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} p_0^{|B'|},$$

то получаем эволюционное уравнение

$$F_m(\zeta) = F_{m-1}(G(\zeta)),$$

которое совпадает с уравнением для производящей функции марковской цепи, соответствующей перколяционной модели. Ввиду совпадения уравнений для производящих функций, совпадения начальных состояний $\{0\}$ для обеих моделей, условие положительности вероятности $\Pr\{\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)})\}$ совпадает с условием наличия перколяции у марковской цепи. $\square$

Таким образом, для сконструированной иерархической перколяционной модели $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$ справедливы уравнения (3) и (4) с индексом ветвления $4(2n+1) = |S_1|$. При этом для расчета вероятности $p(A)$ того, что только вершины множества A , среди всех вершин первого поколения, принадлежат конфигурации, порождаемой случайной реализацией $\rho(x), x \in V^{(n)}$, должна быть использована разложение (7) и формула (8). Подставим в (4) разложение (8):

$$\begin{aligned} cq(c) &= \sum_{A \subset \partial_+ V_0^{(n)}} q^{|A|}(c) \sum_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} P[C; A] = \\ &= \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] \sum_{A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}} (1-c)^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)} \setminus A|} [cq(c)]^{|A|} = \\ &= \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] (1-c + cq(c))^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}|}. \end{aligned}$$

Таким образом уравнение (4), определяющее вероятность наличия перколяции для марковской цепи, которая соответствует перколяционной модели $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$, модифицируется в следующее:

$$cq(c) = \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] (1-c + cq(c))^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}|}. \quad (9)$$

Вероятность $P(c)$ перколяции при $c > c_*$ равна $c(1 - q(c))$, где $q(c)$ — решение уравнения (9), содержащееся в $(0, 1)$.

Произведем такие же преобразования в уравнении, определяющем порог перколяции для перколяционной модели $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$. Подставим выражения (7), (8) для $p(A)$ в уравнение (3). Умножив его на c и произведя преобразования, получаем

$$\begin{aligned} c &= \sum_{A \subset \partial_+ V_0^{(n)}} |A| c p(A) = \sum_{A \subset \partial_+ V_0^{(n)}} |A| \sum_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} P[C; A] = \\ &= \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] \sum_{A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}} |A| c^{|A|} (1-c)^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)} \setminus A|} = \\ &= c \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} |\partial V_0^{(n)} \cap \partial_+ C| \cdot P[C]. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Перколяция из вершины $\mathbf{0}$ на иерархическом графе $\Gamma^{(n)}$ с заданным на нем однородным бернуллиевским случайным полем существует при $c \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда $c > c_*$, где c_* — единственное решение в интервале $(0, 1)$ уравнения*

$$1 = \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} |\partial V_0^{(n)} \cap \partial_+ C| \cdot P[C]. \quad (10)$$

Вероятность $P(c)$ реализации перколяции при $c > c_*$ равна $c(1-q(c))$, где функция $q(c)$ является единственным решением со значениями в $(0, 1)$ уравнения (9).

Доказательство. Единственность решения c_* следует из утверждения о монотонном неубывании вероятности $P(c)$ перколяции при $c \in (0, 1)$ (см., например, [9]). $\square$

6. Вычисление приближения первого порядка. Опишем теперь конструкцию конкретных приближений вероятности перколяции для графа $\mathbb{Z}^2 = \langle V, \varphi \rangle$.

Вершину $z \in V \setminus C$ назовем внешней по отношению C , если существует бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(z)$ с начальной вершиной z , который не пересекает C , $\{\gamma(z)\} \cap C = \emptyset$. В противном случае вершину z назовем внутренней по отношению к C . Конечный кластер C назовем *полным*, если он не имеет внутренних вершин. Любой конечный кластер можно сделать полным, добавив к нему все его внутренние вершины, не нарушая конечности самого кластера.

Пусть $\Gamma_0^{(n)} = \langle V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)} \rangle$ — введенные в разделе 4 конечные графы, $n \in \mathbb{N}_+$, с полными кластерами $V_0^{(n)}$ внутренних вершин, на основе которых были построены иерархические перколяционные модели. Эти модели являются аппроксимирующими, если для любого значения концентрации $c \in (0, 1)$ однородного бернуллиевского случайного поля $\rho(x)$, $x \in V$ и $x \in \Gamma^{(n)}$ имеет место неравенство

$$\Pr \{ \mathcal{Q}_\infty(\Gamma) \} \leq \Pr \{ \mathcal{Q}_\infty(\Gamma^{(n)}) \}.$$

Предположим, что иерархические модели $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$, порожденные графами $\Gamma^{(n)}$, являются аппроксимирующими. Справедливо следующее утверждение, доказанное в [1].

Теорема 8. *Для последовательности $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ перколяционных моделей, аппроксимирующих бесконечный локально компактный граф Γ с отмеченной вершиной $\mathbf{0}$, соответствующая ей последовательность $\langle P^{(n)}(c); n \in \mathbb{N} \rangle$ вероятностей перколяции однородного бернуллиевского случайного поля $\rho(x)$, $x \in V$ с концентрацией $c \in (0, 1)$ на графах $\Gamma^{(n)} = \langle V^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к вероятности перколяции $P(c)$ из вершины $\mathbf{0}$ на графе $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$.*

В связи с этим утверждением мы опишем в настоящем разделе перколяционную модель $\Upsilon(\Gamma_0^{(1)})$ и вычислим на ее основе верхнюю оценку $P^{(1)}(c)$ для вероятности перколяции $P(c)$ в случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}^2$.

В нулевом приближении при $n = 0$ множество $V_0^{(0)}$ состоит из одной вершины, $V_0^{(0)} = \{\mathbf{0}\}$, а множество вершин $\partial_+ V_0^{(0)}$ его внешней границей по отношению к $\mathbb{Z}^2$ состоит из всех вершин, смежных на квадратной решетке $\mathbf{0}$, т.е. $\partial_+ V_0^{(0)} = \{x \in \{\pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2\}\}$. Объединение этих множеств является множеством вершин графа $\Gamma_0^{(0)}$.

Легко видеть, что соответствующий иерархический граф $\Gamma^{(0)}$ представляет собой дерево Кэйли с индексом ветвления, равным 4. Тогда уравнение (3) записывается в виде

$$\sum_{A \subset I_4} |A| c^{|A|} (1-c)^{4-|A|} = c(1-c)^3 \left[\frac{d}{d\eta} (1+\eta)^4 \right]_{\eta=c/(1-c)} = 4c = 1.$$

Поэтому порог перколяции в этом приближении равен $c_* = 0,25$. Так как для единственного кластера $C = \{\mathbf{0}\}$ в (9) имеем $P[C] = c$, то уравнение для условной вероятности $q(c)$ в этом случае принимает вид

$$q = (1 - c + cq)^4, \quad q = q(c),$$

где $q(c)$ является его отличным от 1 вещественным решением, и, соответственно, $P^{(0)}(c) = c(1 - q(c))$. Так как одно из решений этого уравнения равно 1, то для интересующего нас решения получаем посредством понижения степени кубическое уравнение. Его вещественное решение записывается по формуле Кардано в радикалах. При этом оно пригодно для описания перколяции только в диапазоне изменения параметра c , где $q(c) \in (0, 1)$. Этот диапазон как раз и ограничивается порогом c_* .

Перейдем теперь к анализу первого приближения. В этом приближении с $n = 1$ множество $V_0^{(1)}$ состоит из девяти вершин,

$$V_0^{(1)} = \left\{ x : x = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2; |n_j| \leq 1, j \in \{1, 2\} \right\},$$

и, соответственно, его внешней границей на графе $\mathbb{Z}^2$ является

$$\partial_+ V_0^{(1)} = \left\{ x = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 : |n_1| = 2, n_2 \in \{0, \pm 1\}; |n_2| = 2, n_1 \in \{0, \pm 1\} \right\}.$$

Вершины графа $\Gamma_0^{(1)}$ представляет множество $V_0^{(1)} \cup \partial_+ V_0^{(1)}$. Для формулировки уравнений (9), (10) необходимо перечислить все кластеры $C \subset V_0^{(1)}$ вместе с соответствующими им числами $|\partial_+ V_0^{(1)} \cap \partial_+ C|$ вершин в множествах $\partial_+ V_0^{(1)} \cap \partial_+ C$ и затем выписать для всей этой совокупности кластеров соответствующие им вероятности $P[C]$ реализации их в блоке $V_0^{(1)}$ иерархического графа $\Gamma^{(n)}$.

Кластеры C , входящие в сумму в (9), будем классифицировать по числу $m = |C| = 1, \dots, 9$ находящихся в нем вершин. Так как все кластеры оказываются полными, то соответствующие им вероятности $P[C]$ даются общей формулой

$$P[C] = c^m (1-c)^l, \tag{11}$$

где $l = |\partial_+ C \cap V_0^{(1)}|$ — число вершин внешней границы кластера, находящихся в $V_0^{(1)}$.

Для визуального сопровождения классификации мы будем располагать граф $\Gamma_0^{(1)}$ с множеством вершин $V_0^{(1)} \cup \partial_+ V_0^{(1)}$ на плоскости, рассматривая его как часть графа $\mathbb{Z}^2$ при погружении в $\mathbb{R}^2$. При этом смежные вершины графа будут изображаться в виде смежных между собой квадратов: черные соответствуют вершинам кластера C , а белые — вершинам, не входящим в кластер. Вершины, отмеченные крестиками, составляют множество $\partial_+ V_0^{(1)}$. Вершины внутри $V_0^{(1)}$, отмеченные черными точками, составляют ту часть $\partial_+ C \cap V_0^{(1)}$ внешней границы кластера, которая содержится в $V_0^{(1)}$. Центральный квадрат, соответствующий вершине $\mathbf{0}$, отмечен белой точкой.

Сумму в (9) составляют вклады $P[C]$ от 161 кластера C . Для того чтобы представить явно все эти слагаемые и составить уравнения (9), (10) первого приближения, заметим, что, с точки зрения значений (11) вероятностей $P[C]$, кластеры объединяются в группы изоморфных между собой, которые получаются из одного представителя группы посредством вращений множества

$V_0^{(1)}$ на углы, кратные $\pi/2$, и/или отражений относительно вертикальной и горизонтальной осей. Все изоморфные между кластеры имеют одинаковые значения m , l и $r = |\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(1)}|$, и поэтому определяют одинаковые слагаемые в уравнении (9), которые имеют, согласно (11), вид

$$P[C](1 - c + cq(c))^{| \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)} |} = c^m (1 - c)^l (1 - c + cq)^r. \quad (12)$$

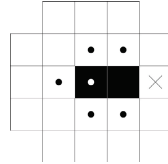
В связи с этим введем характеристику s — число изоморфных между собой кластеров, которую будем называть *кратностью*. О неизоморфных между собой кластерах с одним и тем же значением m будем говорить как о кластерах, имеющих разный тип. Каждый тип кластеров обладает характерным для него набором значений чисел m , l , s и r . Таким образом, в приводимой ниже классификации кластеров мы указываем для каждого значения m соответствующее число типов. Всего имеется 33 типа кластеров. По этой причине запишем уравнение (9) с учетом (12) в виде

$$cq = \sum_{k=1}^{33} R_k, \quad R_k \equiv s_k c^{m_k} (1 - c)^{l_k} (1 - c + cq)^{r_k}, \quad k = 1, \dots, 33. \quad (13)$$

Ниже представлена классификация всех кластеров согласно их типу и для каждой группы изоморфных между собой указан один ее представитель.

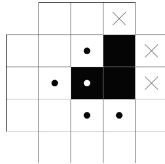
В случае $m = 1$ имеется один кластер $\{0\}$ с $l = 4$, у которого $\partial_+ V_0^{(1)} \cap \partial_+ C = \emptyset$ и поэтому $s = 1$, $r = 0$ и $R_1 = c(1 - c)^4$.

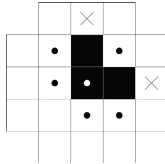
При $m = 2$ имеется только один тип кластеров:

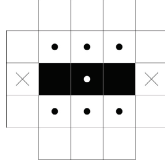


$$l = 5, \quad s = 4, \quad r = 1, \\ R_2 = 4c^2(1 - c)^5(1 - c + cq).$$

При $m = 3$ имеется три типа кластеров:

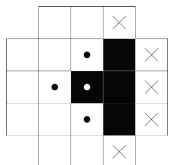


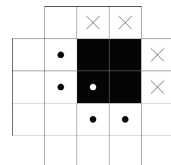
$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 3, \\ R_3 = 8c^3(1 - c)^4(1 - c + cq)^3;$$


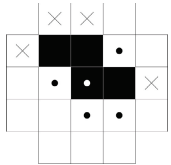
$$l = 5, \quad s = 4, \quad r = 2, \\ R_4 = 4c^3(1 - c)^5(1 - c + cq)^2;$$


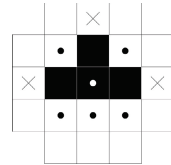
$$l = 6, \quad s = 2, \quad r = 2, \\ R_5 = 2c^3(1 - c)^6(1 - c + cq)^2.$$

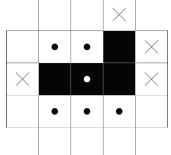
При $m = 4$ имеется 5 типов кластеров:



$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 5, \\ R_6 = 4c^4(1 - c)^3(1 - c + cq)^5;$$


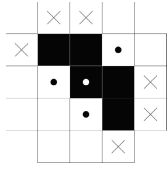
$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 4, \\ R_7 = 4c^4(1 - c)^4(1 - c + cq)^4;$$


$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 4, \\ R_8 = 8c^4(1 - c)^4(1 - c + cq)^4;$$


$$l = 5, \quad s = 4, \quad r = 3, \\ R_9 = 4c^4(1 - c)^5(1 - c + cq)^3;$$


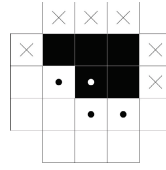
$$l = 5, \quad s = 8, \quad r = 4, \\ R_{10} = 8c^4(1 - c)^5(1 - c + cq)^4.$$

При $m = 5$ имеется 8 типов кластеров:



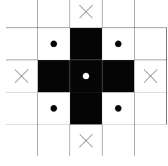
$$s = 4, \quad l = 3, \quad r = 6,$$

$$R_{11} = 4c^5(1-c)^3(1-c+cq)^6;$$



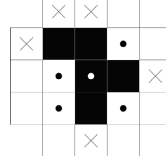
$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 6,$$

$$R_{12} = 8c^5(1-c)^3(1-c+cq)^6;$$



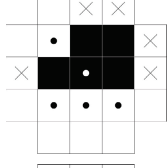
$$l = 4, \quad s = 1, \quad r = 4,$$

$$R_{13} = c^5(1-c)^4(1-c+cq)^4;$$



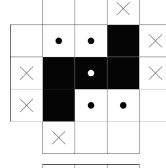
$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 5,$$

$$R_{14} = 8c^5(1-c)^4(1-c+cq)^5;$$



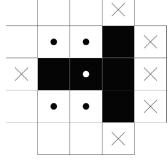
$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 5,$$

$$R_{15} = 8c^5(1-c)^4(1-c+cq)^5;$$



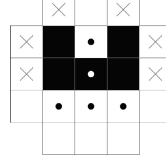
$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 6,$$

$$R_{16} = 4c^5(1-c)^4(1-c+cq)^6;$$



$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 6,$$

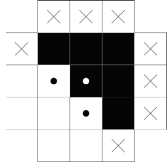
$$R_{17} = 4c^5(1-c)^4(1-c+cq)^6;$$



$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 6,$$

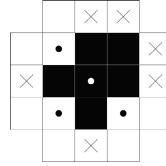
$$R_{18} = 4c^5(1-c)^4(1-c+cq)^6.$$

При $m = 6$ имеется 7 типов кластеров:



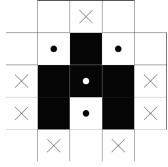
$$l = 2, \quad s = 4, \quad r = 8,$$

$$R_{19} = 4c^6(1-c)^2(1-c+cq)^8;$$



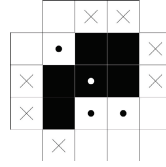
$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 6,$$

$$R_{20} = 4c^6(1-c)^3(1-c+cq)^6;$$



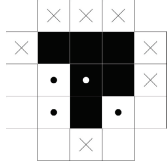
$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 7,$$

$$R_{21} = 4c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$



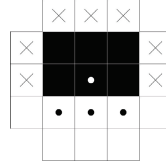
$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 7,$$

$$R_{22} = 8c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$



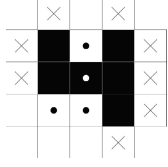
$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 7,$$

$$R_{23} = 8c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$



$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 7,$$

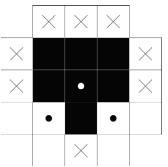
$$R_{24} = 4c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$



$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 8,$$

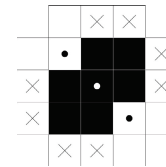
$$R_{25} = 8c^6(1-c)^3(1-c+cq)^8.$$

При $m = 7$ имеется 5 типов кластеров:



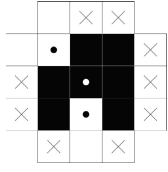
$$l = 2, \quad s = 4, \quad r = 8,$$

$$R_{26} = 4c^7(1-c)^2(1-c+cq)^8;$$



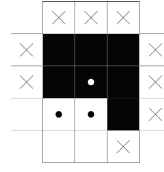
$$l = 2, \quad s = 2, \quad r = 8,$$

$$R_{27} = 2c^7(1-c)^2(1-c+cq)^8;$$



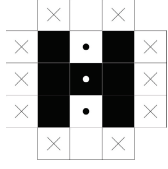
$$l = 2, \quad s = 8, \quad r = 9,$$

$$R_{28} = 8c^7(1-c)^2(1-c+cq)^9;$$



$$l = 2, \quad s = 8, \quad r = 9,$$

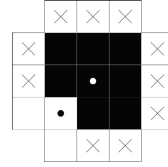
$$R_{29} = 8c^7(1-c)^2(1-c+cq)^9;$$



$$l = 2, \quad s = 2, \quad r = 10,$$

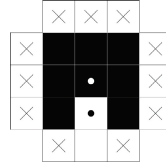
$$R_{30} = 2c^7(1-c)^2(1-c+cq)^{10}.$$

При $m = 8$ имеется 2 типа кластеров:



$$l = 1, \quad s = 4, \quad r = 10,$$

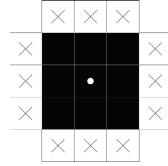
$$R_{31} = 4c^8(1-c)(1-c+cq)^{10};$$



$$l = 1, \quad s = 4, \quad r = 11,$$

$$R_{32} = 4c^8(1-c)(1-c+cq)^{11};$$

а при $m = 9$ — один кластер



$$l = 9, \quad s = 1, \quad r = 12,$$

$$R_{33} = c^9(1-c+cq)^{12}.$$

После подстановки описанных выражений для вероятностей R_k , $k = 1, \dots, 33$, в (13) получается полиномиальное уравнение 12-й степени, у которого отличное от 1 решение представляет собой функцию $q(c)$. График вероятности $P(c) = c(1-q(c))$ перколяции представлен на рис. 1 (красная кривая). Непосредственно проверяется, что решением этого уравнения является также $q = 1$.

Подстановка вероятностей R_k , $k = 1, \dots, 33$, в (10) при $q = 1$ дает уравнение для порога перколяции c_* :

$$\begin{aligned} 1 = & 4c^2(1-c)^5 + 4c^3(1-c)^5[3-2c] + 12c^3(1-c)^4[2+c(1-c)] + \\ & + 4c^4(1-c)^4[20-7c] + 20c^4(1-c)^3[1+4c(1-c)] + 48c^5(1-c)^3[3-c] + 168c^6(1-c)^3 + \\ & + 16c^6(1-c)^2[6-c] + 144c^7(1-c)^2 + 20c^7(1-c^2) + 44c^8(1-c) + 12c^9. \end{aligned}$$

Его решение $c_* \approx 0,34 \in (0, 1)$ (с недостатком).

На рисунке представлены графики приближения функции $P^{(j)}(c)$ порядков $j = 0, 1, 2$. Во втором приближении для получения соответствующего уравнения (13) перечисление графиков и коэффициенты полинома двадцатой степени относительно q рассчитывались на компьютере. Решение соответствующего уравнения для порога в этом приближении дает его значение $c_* \approx 0,38$.

7. Заключение. Достоинством предложенной схемы аппроксимации вероятности перколяции $P(c)$ на $\mathbb{Z}^2$, по нашему мнению, является то, что она дает для этой функции гарантированные верхние оценки. Вместе с тем, проведенные явным образом вычисления показывают, что при увеличении порядка приближения они сталкиваются с серьезными техническими трудностями, которые связаны с ростом степени полинома в (3) и объемом перечисления всех кластеров, необходимых для определения его коэффициентов. Более того, представленное в тексте перечисление полных кластеров оказывается довольно прозрачным только при $n = 1$. Уже при $n = 2$ появляются неполные кластеры C , что усложняет вычисление соответствующих вероятностей $P[C]$. Более того, если анализируемый периодический граф имеет размерность больше 2, то вычисление вероятностей $P[C]$ осложняется еще и тем, что они могут иметь нетривиальную топологическую структуру. В случае трехмерных периодических графов, например, даже в простейшем случае графа в виде кубической решетки $\mathbb{Z}^3$, кластеры C при погружении в $\mathbb{R}^3$ могут представляться заузленными областями.

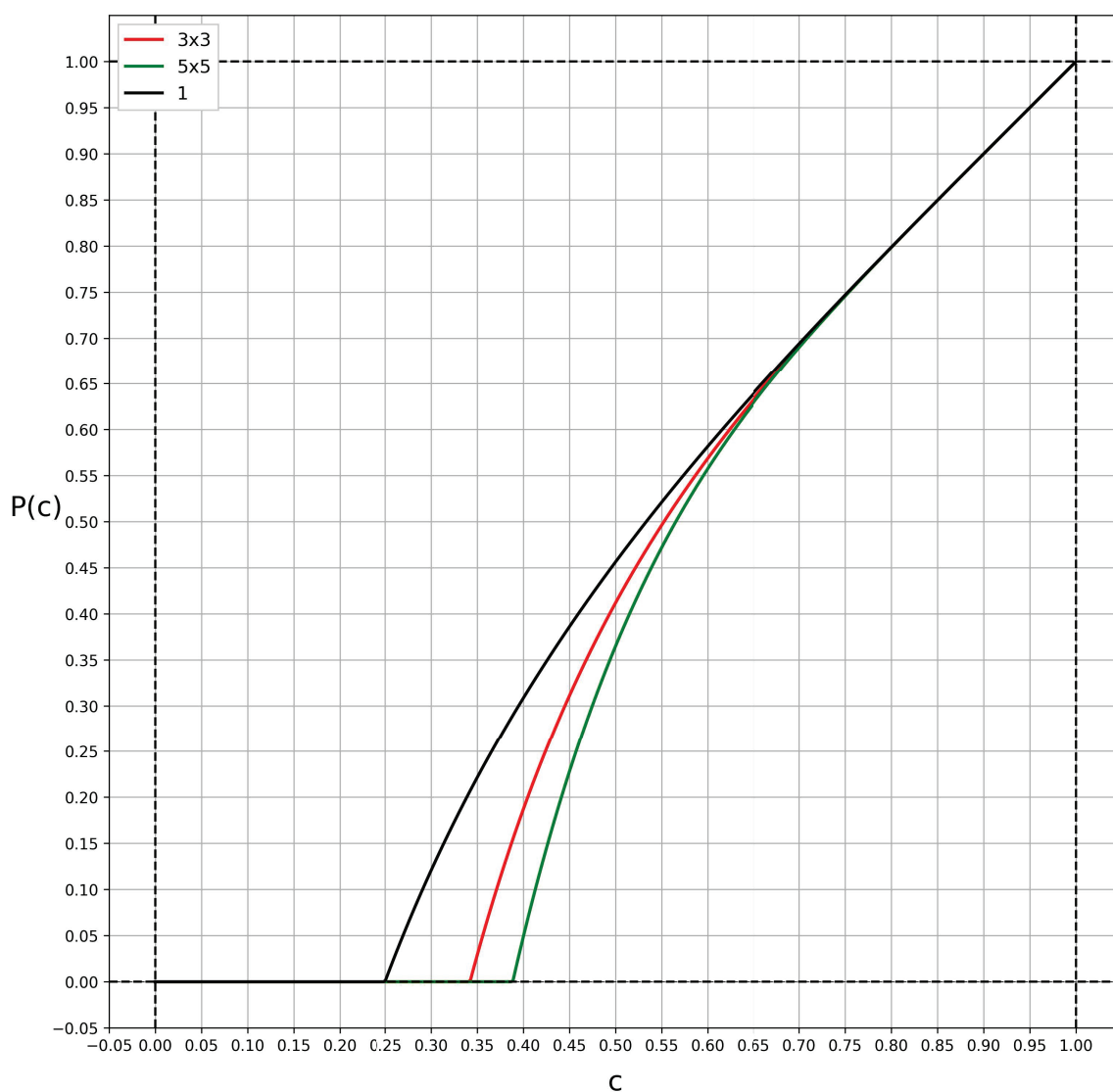


Рис. 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вирченко Ю. П., Черкашин Д. А. Иерархические модели дискретной теории перколяции и марковские ветвящиеся процессы // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 235. — С. 15–33.
2. Вирченко Ю. П., Шпильнская О. Л. Точечные случайные поля с марковскими измельчениями и геометрия фрактально неупорядоченных сред // Теор. мат. физ. — 2000. — 124, № 3. — С. 490–505.
3. Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф. Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки техн. Сер. теор. вер., мат. стат. теор. кибер. — 1986. — 24. — С. 53–110.
4. Молчанов С. А., Степанов А. К. Просачивание случайных полей, I // Теор. мат. физ. — 1983. — 55, № 2. — С. 246–256.
5. Молчанов С. А., Степанов А. К. Просачивание случайных полей, II // Теор. мат. физ. — 1983. — 55, № 3. — С. 419–430.
6. Молчанов С. А., Степанов А. К. Просачивание случайных полей, III // Теор. мат. физ. — 1985. — 65, № 3. — С. 371–379.
7. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
8. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.

9. *Antonova E. S., Virchenko Yu. P.* Monotonicity of the probability of percolation for Bernoulli random fields on periodic graphs// J. Math. Sci. — 2011. — 175, № 1. — P. 86–90.
10. *Broadbent S. R., Hammersley J. M.* Percolation processes, I. Crystals and mazes// Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1957. — 53. — P. 629–641.
11. *Dyson F. J.* An Ising ferromagnet with discontinuous long-range order// Commun. Math. Phys. — 1971. — 21. — P. 269–283.
12. *Frisch C. M., Hammersley J. M.* Percolation processes and related topics// J. Soc. Industr. Appl. Math. — 1963. — 11. — P. 894–918.
13. *Grimmett G.* Percolation. — New York: Springer-Verlag, 1999.
14. *Hammersley J. M.* Percolation processes: lower bounds for the critical probability// Ann. Math. Stat. — 1957. — 28, № 3. — P. 790–795.
15. *Kesten H.* Percolation Theory for Mathematicians. — Boston: Birkhäuser, 1982.
16. *Nummelin E.* General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators. — New York: Cambridge Univ. Press, 1984.
17. *Ruelle D.* Statistical Mechanics. Rigorous Results. — New York: Benjamin, 1969.
18. *Simon R.* The $P(\varphi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
19. *Virchenko Yu. P., Tolmacheva Yu. A.* Method of sequential approximative estimates in discrete percolation theory// in: Studies in Mathematical Physics Research (*Benton C. V.*, ed.). — New York: Nova Science, 2004. — P. 155–175.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович (Virchenko Yuri Petrovich)

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород
(Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia)

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Черкашин Дмитрий Андреевич (Cherkashin Dmitrii Andreevich)

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород
(Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia)

E-mail: dmt.cherkashin@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 41–45
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-41-45

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ 3-КАКТУСОВ

© 2025 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. k -Кактус — это связный граф, у которого каждое ребро содержится максимум в k циклах. Получены точные и асимптотические формулы для числа помеченных эйлеровых 3-кактусов с заданным числом вершин.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, эйлеров граф, 3-кактус, асимптотика.

ENUMERATION OF LABELED EULERIAN 3-CACTI

© 2025 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. k -Cactus is a connected graph in which each edge is contained in a maximum of k cycles. We obtain exact and asymptotic formulas for the number of labeled Eulerian 3-cacti with a given number of vertices.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, Eulerian graph, 3-cactus, asymptotics.

AMS Subject Classification: 05C30

Определение 1. Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 2. Блок — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 3 (см. [8, с. 93]). Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле.

У кактуса каждый блок является ребром или циклом.

Определение 4 (см. [11]). k -Кактус — это связный граф, у которого каждое ребро содержится максимум в k циклах. 1-Кактусы называют просто кактусами.

Определение 5 (см. [11]). k -Тета-графом называется граф, состоящий из k внутренне непересекающихся цепей с одной и той же парой концевых вершин. 3-Тета-граф — это обычный тета-граф.

Лемма 1. Для числа $T_n(4)$ помеченных n -вершинных 4-тета-графов верна формула

$$T_n(4) = \frac{n!}{288}(n-3)(n-4)(n+7), \quad n \geq 5.$$

Доказательство. Гомеоморфный тип — это общий граф (возможно, содержащий петли или кратные ребра) без вершин степени 2, из которого все графы из заданного класса гомеоморфных графов получаются вставкой вершин степени 2 (см. [7, 10]). Пусть H — гомеоморфный тип с a вершинами, b ребрами, b_0 петлями, b_i — число пучков ребер кратности i , $A(H)$ — порядок вершинно-

реберной группы автоморфизмов графа H . Тогда число помеченных графов C_n с n вершинами и гомеоморфным типом H равно

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0} A(H)} \text{Coef}_{x^{n-a}} \frac{1}{(1-x)^b} x^{b+b_0-\sum_{i=1}^b b_i} \prod_{i=1}^b (x+i(1-x))^{b_i}$$

(см. [7, лемма 2]). Для 4-тета-графа имеем $a = 2$, $b = 4$, $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 = 1$, $A(H) = 48$,

$$T_n(4) = \frac{n!}{48} \text{Coef}_{x^{n-2}} \frac{x^3(x+4(1-x))}{(1-x)^4} = \frac{n!}{48} [x^{-1}] \left(\frac{x^4}{(1-x)^4} + \frac{4x^3}{(1-x)^2} \right) x^{-n+1}.$$

С учетом разложения

$$(1-z)^{-m-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+m}{m} z^p$$

получим

$$T_n(4) = \frac{n!}{48} \left(\binom{n-3}{3} + 4 \binom{n-3}{2} \right) = \frac{n!}{288} (n-3)(n-4)(n+7).$$

Найдем еще производящую функцию и ее производную:

$$f_4(z) = \sum_{n=5}^{\infty} T_n(4) \frac{z^n}{n!} = \frac{z^5(4-3z)}{48(1-z)^4}, \quad f'_4(z) = \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5}. \quad \square$$

Теорема 1. Число $Eca(n, 3)$ помеченных эйлеровых 3-кактусов с n вершинами при $n \geq 3$ равно

$$Eca(n, 3) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(n \left(\frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5} \right) \right). \quad (1)$$

Доказательство. Граф является 3-кактусом тогда и только тогда, когда каждый его блок — ребро, цикл, тета-граф или 4-тета-граф (см. [11]). Граф эйлеров тогда и только тогда, когда каждый его блок — эйлеров граф (см. [4]). Так как граф K_2 (блок-ребро) и тета-граф неэйлеровы, а цикл и 4-тета-граф — эйлеровы, то у эйлерова 3-кактуса каждый его блок является циклом или 4-тета-графом.

Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Введем производящую функцию:

$$B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

В [1] автором была получена формула

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n}, \quad (2)$$

где $[z^i]$ — коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [6, с. 11, 25]). Эта формула верна не только для всего класса связных графов, но и для его блочно-устойчивого подкласса (см. [2]). Она используется при перечислении помеченных графов с известной структурой блоков. Класс эйлеровых 3-кактусов является блочно-устойчивым классом графов, так как у эйлеровых 3-кактусов все блоки принадлежат заданному множеству 2-связных графов (см. [2]).

Используем производящую функцию $\bar{B}(z)$ для числа блоков помеченных кактусов (см. [1])

$$\bar{B}(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2} \frac{z^n}{n!}.$$

Вычитая слагаемое производящей функции $z^2/2$ для блоков-ребер и добавляя слагаемое для 4-тета-блоков $f_4(z)$ к $\tilde{B}(z)$, для производящей функции $\tilde{B}(z)$ 3-кактусов найдем

$$\tilde{B}(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2} \frac{z^n}{n!} + f_4(z), \quad \tilde{B}'(z) = \frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5}.$$

После подстановки $\tilde{B}'(z)$ вместо $B'(z)$ в формулу (2) получим утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2. Для числа $E\mathcal{C}a(n, 3)$ помеченных эйлеровых 3-кактусов с n вершинами верна асимптотическая формула

$$E\mathcal{C}a(n, 3) \sim c_2 n^{-5/2} a_2^n n!, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $c_2 \approx 0,06818801111$, $a_2 \approx 5,388086206$.

Доказательство. Выражение (1) можно представить в виде

$$E\mathcal{C}a(n, 3) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] z \exp \left(n \left(\frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5} \right) \right) z^{-n-1}.$$

Используем следующую теорему Флажолы и Седжвика.

Теорема (см. [9, теорема VIII.8]). Обозначим

$$F(N, n) = [z^N] \{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}}.$$

Пусть функции

$$a(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j, \quad b(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$$

удовлетворяют следующим условиям.

- (i) Функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z = 0$, имеют неотрицательные коэффициенты и $b(0) \neq 0$;
- (ii) $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$;
- (iii) если $R \leq \infty$ — радиус сходимости $b(z)$, то радиус сходимости $a(z)$ не меньше R ;

Положим

$$T = \lim_{x \rightarrow R-0} \frac{x b'(x)}{b(x)}.$$

Пусть λ — такое положительное число, что $0 < \lambda < T$, и пусть r — единственный действительный корень уравнения $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$. Положим $\sigma = \frac{d^2}{dr^2} (\ln b(r) - \lambda \ln r)$. Тогда для целого $N = \lambda n$ при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$F(N, n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1} \sqrt{2\pi n \sigma}}.$$

В нашем случае $N = n$, $\lambda = 1$,

$$E\mathcal{C}a(n, 3) = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n), \quad a(z) = z, \quad b(z) = \exp \left(\frac{z^2}{2(1-z)} + \frac{10z^4 - 11z^5 + 3z^6}{24(1-z)^5} \right).$$

Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z = 0$, $b(0) = 1$. Радиус сходимости R ряда для $b(z)$ равен 1. Ряд для функции $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $\tilde{B}(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. С помощью Maple найдем $b_1 = 5/2 > 0$, $b_2 = 5/2 > 0$, $\text{НОД}(1, 2) = 1$. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажолы–Седжвика выполнены. Находим

$$\phi(z) = z \frac{b'(z)}{b(z)} = z (\ln(b(z)))' = z \left(\frac{2z - z^2}{2(1-z)^2} + \frac{40z^3 - 45z^4 + 18z^5 - 3z^6}{24(1-z)^6} \right).$$

$$T = \lim_{z \rightarrow 1-0} \phi(z) = +\infty.$$

Так как $\lambda = 1$ и $0 < \lambda < T$, то, решая уравнение $\phi(r) = \lambda$ с помощью Maple, видим, что его единственным действительным корнем в круге сходимости функции $b(z)$ является число $r \approx 0,4057469937$. Далее,

$$\sigma_2 = \left(\frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \frac{2r - r^2}{(1-r)^3} + \frac{10r^2 - 5r^3}{2(1-r)^7} + \frac{1}{r^2},$$

так что $\sigma_2 \approx 34,22977823$. Также с помощью Maple вычислим

$$a_2 = \frac{b(r)}{r} \approx 5,388086206, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \approx 0,06818801111.$$

Окончательно при $n \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$ECa(n, 3) = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! c_2 n^{-5/2} a_2^n. \quad \square$$

Отметим, что каждый кактус является 3-кактусом. Обозначим через $ECa(n, k)$ число помеченных эйлеровых k -кактусов с n вершинами.

Следствие 1. *Почти все помеченные эйлеровы 3-кактусы не являются эйлеровыми кактусами.*

Доказательство. В [3, 5] для числа $ECa(n, 1)$ помеченных n -вершинных эйлеровых кактусов найдена асимптотика

$$ECa(n, 1) \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!, \quad c_1 \approx 0,1079436709, \quad a_1 \approx 2,5424753735. \quad (4)$$

С помощью формулы (4), учитывая, что $a_1 < a_2$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ECa(n, 1)}{ECa(n, 3)} = \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^n = 0.$$

Это значит, что доля эйлеровых кактусов среди всех эйлеровых 3-кактусов при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискр. анал. исслед. опер. — 2012. — 19, № 4. — С. 48–59.
2. Воблый В. А. Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискр. анал. исслед. опер. — 2019. — 26, № 1. — С. 20–32.
3. Воблый В. А. Об одном подходе к перечислению помеченных связных графов: обзор результатов // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 188. — С. 106–118.
4. Воблый В. А., Мелешко А. К. Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов // Дискр. анал. исслед. опер. — 2014. — 21, № 2. — С. 24–32.
5. Воблый В. А., Мелешко А. К. Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов // Мат. XVII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 16-20 июня 2014 г.), 2014. — С. 58–60.
6. Гильден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
7. Степанов В. Е. О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки // Теор. вероят. примен. — 1987. — 32, № 4. — С. 633–657.
8. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
9. Flajolet P., Sedgewick G. E. Analytic Combinatorics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.
10. Ford G. W., Uhlenbeck G. E. Combinatorial problems in theory graphs, IV // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1957. — 43. — P. 163–167.
11. Zhang L., Huang Y. On sizes of generalized cactus graphs // Discr. Appl. Math. — 2024. — 348. — P. 184–191.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: vitvobl@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 46–60
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-46-60

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ЗАРЕМБЫ И УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2025 г. В. И. КОРЗЮК, Я. В. РУДЬКО

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для полулинейного волнового уравнения в первом квадранте, в которой на пространственной полупрямой задаются условия Коши, а на временной полупрямой — граничное условие Зарембы. Исходная задача переформулирована как задача с условиями сопряжения на характеристиках. Наложённые неоднородные условия сопряжения определяют разрыв решения на характеристиках единственным образом. Методом характеристик построено решение в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Изучена разрешимость этих уравнений, а также зависимость от начальных данных и гладкость их решений. Для рассматриваемой задачи доказана единственность решения и установлены условия, при которых существует ее классическое решение. В случае недостаточно гладких данных задачи построено слабое решение. Полученные математические результаты применены для решения задачи из теории горения.

Ключевые слова: классическое решение, смешанная задача, условия сопряжения, нелинейное волновое уравнение, метод характеристик.

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH THE ZAREMBA BOUNDARY CONDITION AND CONJUGATION CONDITIONS FOR A SEMILINEAR WAVE EQUATION

© 2025 V. I. KORZYUK, J. V. RUDZKO

ABSTRACT. We consider an initial-boundary value problem for a semilinear wave equation in the first quadrant in which we pose the Cauchy conditions on the spatial half-line and the Zaremba boundary condition on the time half-line. We reformulate this problem as a problem with conjugation conditions on the characteristics. The imposed inhomogeneous conjugation conditions uniquely define discontinuity of the solution on the characteristics. By the method of characteristics, we construct a solution in an implicit analytical form as a solution of some integro-differential equations. The solvability of these equations and the dependence on the initial data and the smoothness of their solutions are examined. For the problem considered, we prove the uniqueness of a solution and establish conditions of the existence of a classical solution. A mild solution is constructed in the case of insufficiently smooth data of the problem. The obtained mathematical results are applied to a problem from combustion theory.

Keywords and phrases: classical solution, mixed problem, conjugation conditions, nonlinear wave equation, method of characteristics.

AMS Subject Classification: 35Axx, 35Lxx

1. Постановка задачи. В области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}$ рассмотрим смешанную задачу для нелинейного уравнения вида

$$\square_a u(t, x) = \mathcal{N}[u](t, x) := f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

с условиями Коши

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

и граничным условием Зарембы

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \in [0, t_*], \quad (3)$$

$$\alpha(t)u(t, 0) + \partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \in [t_*, \infty), \quad (4)$$

В формулах (1)–(4) использованы следующие обозначения: $\square_a = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ — оператор Даламбера ($a > 0$ для определенности), t_* — положительное действительное число, f — функция, заданная на множестве $\bar{Q} \times \mathbb{R}^3$, φ и ψ — функции, заданные на полупрямой $[0, \infty)$, α и μ_1 — функции, заданные на отрезке $[0, t_*]$, и μ_2 — функция, заданная на полупрямой $[t_*, \infty)$.

Классическое решение задачи (1)–(4) с $\alpha \equiv 0$ было построено в [26]. В случае волнового уравнения и условия Неймана (4), т.е. $f(t, x, u, u_t, u_x) = f(t, x)$ и $\alpha \equiv 0$, решение задачи (1)–(4) произвольной гладкости было построено в [5].

Можно рассматривать задачу (1)–(4) как две связанные начально-краевые задачи: первая смешанная задача и третья смешанная задача. Тогда в некоторых случаях удастся получить классическое¹ решение (см. [7, 23]) или обобщенное (см. [34, 36]) решение задачи (1)–(4) в рамках одного метода, но это сопряжено с рядом трудностей, если, например, не выполняются условия согласования. Поэтому в данной работе будем рассматривать задачу (1)–(4) как единое целое.

Задачи вида (1)–(4) возникают в математической теории горения. При этом часто полагают $\mu_1(0) \neq \varphi(0)$ (см. [38]), т.е. не выполняется одно из необходимых условий согласования. Это влечет невозможность построения классического решения задачи (1)–(4) во всей четверти плоскости. Следовательно, представляется целесообразным предложить какое-либо другое определение решения задачи (1)–(4), чтобы оно было классическим на меньшем множестве, т.е. принадлежало классу $C^2(\bar{Q} \setminus \Gamma)$. Можно воспользоваться подходом из работ авторов [6, 8, 24]; при этом на множестве Γ , которое является объединением двух характеристик, будут задаваться условия согласования. Это приводит к следующей формулировке.

Задача (1)–(4) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3) и (4), и следующим условиям сопряжения:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)), \quad t \in [0, \infty), \quad (5)$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at - at_*) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad (6)$$

где $\gamma : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)) \in \mathbb{R}$ — функция с параметром $\varphi(0) - \mu_1(0)$, удовлетворяющая естественному условию согласования

$$\gamma(t; 0) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad \gamma(0; s) = s, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Здесь через $()^\pm$ обозначены предельные значения функции u , вычисляемые с разных сторон относительно кривой $x = r(t)$, т.е.

$$(u)^\pm(t, x = r(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} u(t, r(t) \pm \delta).$$

При таком определении решение задачи (1)–(4) не обязано принадлежать пространству $C^2(\bar{Q})$; от него требуется лишь принадлежность классу $C^2(\tilde{Q})$, где

$$\tilde{Q} = \bar{Q} \setminus \{(t, x) \mid x - at = 0 \vee x - at = -at^*\}.$$

Однако при выполнении некоторых дополнительных условий согласования такое решение будет классическим в обычном смысле, т.е. из класса $C^2(\bar{Q})$. Кроме того, отметим, такой подход делит единую задачу (1)–(7) на три связанные задачи (для ясности см. рис. 1):

¹Отметим, что в [7] в условии согласования (13) была допущена опечатка; должно быть: $\varphi(0)\beta'(0) + \beta(0)\psi(0) + \psi'(0) = \mu'(0)$; ср., например, с [7, формула (14)], где приведены правильные условия сопряжения

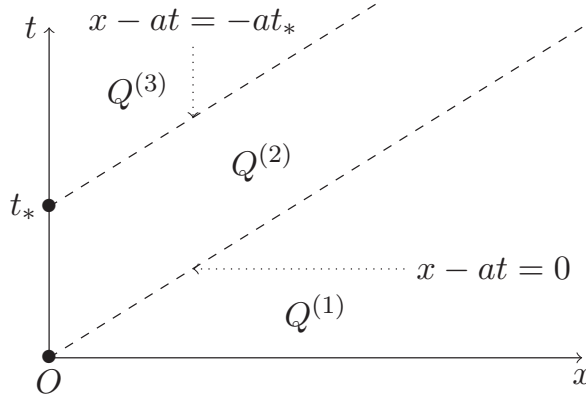


Рис. 1. Разделение области Q характеристиками $x - at = 0$ и $x - at = -at_*$ на три подобласти: $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$ и $Q^{(3)}$.

- (i) Задача Коши (1) и (2) в области $Q^{(1)} = Q \cap \{(t, x) \mid x - at > 0\}$.
- (ii) Задача Пикара (1), (3) и (5) в области $Q^{(2)} = Q \cap \{(t, x) \mid -at_* < x - at < 0\}$. Здесь следует упомянуть, что условие (7) фактически является необходимым и достаточным условием согласования в этой задаче Пикара (подробнее см. [4]).
- (iii) Задача Пикара (1), (4) и (6) в области $Q^{(3)} = Q \cap \{(t, x) \mid x - at < -at_*\}$.

Поскольку решение каждой такой подзадачи является классическим по отдельности, то решение задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) из класса $C^2(\tilde{Q})$ также будем считать классическим.

В случае $\alpha \equiv 0$ решение задачи (1)–(7) было анонсировано в [25].

При $f(t, x, u, u_t, u_x) = g(t, x)u$, $t_* = +\infty$ и $\gamma \equiv \text{const}$ — первая смешанная задача для линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока с переменным массовым коэффициентом — задача (1)–(7) была изучена в [9] (строго говоря, там рассматривалась задача не в четверти плоскости, а в полуполосе, однако в силу конечной скорости распространения колебаний из тех результатов следует также разрешимость задачи в четверти плоскости).

Следует сказать, что подобные задачи с условиями сопряжения для гиперболических уравнений, представленных во втором каноническом виде, рассматривались в [1–3, 11, 12]. В [10] изучалась похожая задача для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными краевыми условиями. Отметим также работу [13], где было получено обобщенное решение задачи Коши с условиями согласования на некоторой гиперплоскости.

Замечание 1. Функцию γ в условии (5) следует определять из физических соображений. В разделе 8 будет показано, как это можно сделать.

2. Основные результаты. В этом разделе мы сформулируем основные результаты статьи: теоремы существования и единственности решения задачи (1)–(4), доказательство которых будет представлено в последующих разделах настоящей работы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости

$$\begin{aligned} f &\in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3), \quad \varphi \in C^2([0, \infty)), \quad \psi \in C^1([0, \infty)), \\ \mu_1 &\in C^2([0, t_*]), \quad \mu_2 \in C^1([t_*, \infty)), \quad \alpha_2 \in C^1([t_*, \infty)), \quad \gamma \in C^2([0, \infty)), \end{aligned} \quad (8)$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x, u, u_t, u_x) - f(t, x, z, z_t, z_x)| \leq L(t, x)(|u - z| + |u_t - z_t| + |u_x - z_x|) \quad (9)$$

с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) имеет единственное решение и в классе $C^2(\tilde{Q}) \cap C(Q_0)$, где $Q_0 = \overline{Q} \setminus \{(t, x) \mid x - at = 0\}$. Это

решение представляется соотношениями

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$u^{(1)}(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \mathcal{N}[u](\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (11)$$

$$u^{(2)}(t, x) = \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - u^{(1)}\left(\frac{at - x}{2a}, \frac{at - x}{2}\right) + u^{(1)}\left(\frac{x + at}{2a}, \frac{x + at}{2}\right) + \gamma\left(\frac{at - x}{2a}; \varphi(0) - \mu_1(0)\right) - \gamma\left(\frac{x + at}{2a}; \varphi(0) - \mu_1(0)\right) - \frac{1}{4a^2} \int_{at-x}^{x+at} dz \int_0^{x-at} \mathcal{N}[u^{(2)}]\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{y + z}{2}\right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \quad (12)$$

$$u^{(3)}(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^{x-at} dy \int_{at-x}^{at+x} \mathcal{N}[u^{(3)}]\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{y + z}{2}\right) dz - u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) + u^{(2)}\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right) + \exp\left(a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\xi) d\xi\right) \left[2a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(z) u^{(2)}\left(\frac{t_* + z}{2}, \frac{a(z - t_*)}{2}\right) \exp\left(-a \int_{t_*}^z \alpha(\eta) d\eta\right) dz + 2u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) \exp\left(-a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\eta) d\eta\right) - \mu_1(t_*) - a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \exp\left(-a \int_{t_*}^z \alpha(\eta) d\eta\right) \times \left(\mu_2(z) + \frac{1}{2a^2} \int_{-at_*}^{-az} \mathcal{N}[u^{(3)}]\left(\frac{az - y}{2a}, \frac{az + y}{2}\right) dy\right) dz\right], \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}. \quad (13)$$

Замечание 2. Решение u смешанной задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), построенное в теореме 1, принадлежит классу $C^2(\tilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования $\mu_1(0) = \varphi(0)$.

Из теоремы 1 фактически следует следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия гладкости (8) и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) имеет единственное решение u в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad (14)$$

$$\mu_1'(0) = \psi(0), \quad (15)$$

$$\mu_1''(0) = f(0, 0, \varphi(0), \psi(0), \varphi'(0)) + a^2 \varphi''(0), \quad (16)$$

$$\mu_2(t_*) = \alpha(t_*) \mu_1(t_*) + \partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0), \quad (17)$$

$$\mu_2'(t_*) = \alpha'(t_*) \mu_1(t_*) + \alpha(t_*) \mu_1'(t_*) + \partial_t \partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0). \quad (18)$$

Это решение представляется соотношениями (10)–(13), где $\gamma \equiv 0$.

Если данные задачи (1)–(4) недостаточно гладкие, то можно рассматривать обобщенные решения в самых разных вариациях. Приведем один из таких способов.

Определение 1. Следуя [18], функцию u , представимую в виде (10)–(13), где

$$\gamma : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)) \in \mathbb{R}$$

— функция, удовлетворяющая условию (7), назовем *слабым решением* задачи (1)–(4).

В разделе 7 сравним определение 1 слабого решения с другими определениями обобщенных решений.

Замечание 3. В определении 1 слабого решения мы требуем, чтобы функция γ , задающая разрыв решения на характеристике $x - at = 0$, была найдена заранее, а не постулируем ее вид. Это диктуется тем, что решение должно быть физически корректным (или быть хотя бы близким к таковому), поскольку во многих физических приложениях, например, тепловых ударах, начальные и граничные данные не совпадают в общей точке $(0, 0)$.

Замечание 4. Любое классическое решение задачи (1)–(4) является также слабым решением этой задачи.

Замечание 5. Если выполняются дополнительные условия гладкости (8) и согласования (14)–(18), то слабое решение задачи (1)–(4) является классическим.

Имеют место теоремы существования и единственности слабого решения задачи (10)–(13).

Теорема 3. Пусть выполняются условия гладкости

$$\begin{aligned} f &\in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3), \quad \varphi \in C^1([0, \infty)), \quad \psi \in C([0, \infty)), \\ \mu_1 &\in C^1([0, t_*]), \quad \mu_2 \in C([t_*, \infty)), \quad \alpha_2 \in C([t_*, \infty)), \quad \gamma \in C^1([0, \infty)), \end{aligned} \quad (19)$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение и в классе $C^1(\tilde{Q}) \cap C(Q_0)$. Это решение непрерывно зависит от функций φ , ψ , μ_1 , μ_2 , α и γ .

Теорема 4. Пусть функция f имеет вид

$$f(t, x, u, u_t, u_x) = F(t, x) + g(t, x, u) \quad (20)$$

выполняются условия гладкости

$$\begin{aligned} F &\in L^1_{\text{loc}}(\overline{Q}), \quad g \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C([0, \infty)), \quad \psi \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty)), \\ \mu_1 &\in C([0, t_*]), \quad \mu_2 \in L^1_{\text{loc}}([t_*, \infty)), \quad \alpha_2 \in L^1_{\text{loc}}([t_*, \infty)), \quad \gamma \in C([0, \infty)), \end{aligned}$$

и функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$ класса $L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$. Смешанная задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение и в классе $C(\tilde{Q})$. Это решение непрерывно зависит от функций φ , ψ , μ_1 , μ_2 , α и γ .

Замечание 6. Слабое решение u смешанной задачи (1)–(4), построенное в теоремах 3 и 4, принадлежит классу $C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования $\mu_1(0) = \varphi(0)$.

3. Интегро-дифференциальные уравнения. В этом разделе будет показано, что решение задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) эквивалентно решению связанных интегро-дифференциальных уравнений (11)–(13).

Итак, пусть функция u принадлежит классу $C^2(\tilde{Q})$ и выполняются условия гладкости (8). Тогда, согласно [24], имеет место представление (11), где $u^{(1)}$ определяется формулой (10). Для вывода уравнения (12), где $u^{(2)}$ определяется выражением (10), выберем четыре точки

$$A_1 \left(\frac{at - x}{2a}, \frac{at - x}{2} \right), \quad B_1 \left(t - \frac{x}{a}, 0 \right), \quad C_1(t, x), \quad D_1 \left(\frac{at + x}{2a}, \frac{at + x}{2} \right)$$

из области $\overline{Q^{(2)}}$, учтем граничное условие (3): $u(B_1) = \mu(t - a^{-1}x)$ — и тот факт, что точки A_1 и D_1 лежат на характеристике $x - at = 0$; следовательно, $u(A_1)$ и $u(D_1)$ могут быть вычислены из

уравнения (11) и условия (5). Применяв тождество криволинейного характеристического параллелограмма [29], получим представление (12). Равенство (13), где $u^{(3)}$ определяется выражением (10), может быть также получено с помощью тождества криволинейного характеристического параллелограмма. Для этого выберем точки

$$A\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right), \quad B\left(t - \frac{x}{a}, 0\right), \quad C(t, x), \quad D\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right)$$

из множества $\overline{Q^{(3)}}$, учтем условия $u(A) = u^{(2)}(A)$ и $u(D) = u^{(2)}(D)$, обозначим $g(t) = u^{(3)}(t, 0)$, где g — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, которая будет определена в дальнейшем, и получим

$$u^{(3)}(t, x) = g\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^{x-at} dy \int_{at-x}^{at+x} \mathcal{N}[u^{(3)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right) dz - \\ - u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) + u^{(2)}\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}. \quad (21)$$

Для определения функции g воспользуемся граничным условием (4). Подставляя функцию u , заданную выражениями (10)–(12) и (21), в (4), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\alpha(t)g(t) - \frac{g'(t)}{a} = \mathcal{E}(t) := \\ := \mu_2(t) + \frac{1}{2a^2} \int_{-at_*}^{-at} \mathcal{N}[u^{(3)}] \left(\frac{at-y}{2a}, \frac{at+y}{2}\right) dy - \partial_x u^{(2)}\left(\frac{at + at_*}{2a}, \frac{at - at_*}{2}\right) - \\ - \frac{1}{a} \partial_t u^{(2)}\left(\frac{at + at_*}{2a}, \frac{at - at_*}{2}\right), \quad t \in [t_*, \infty).$$

Из условия сопряжения (6) следует условие Коши $g(t_*) = \mu_1(t_*)$. Значит, функция g определяется формулой

$$g(t) = \exp\left(a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\xi) d\xi\right) \left(\int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{R}(\xi) \exp\left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta\right) d\xi + \mu_1(t_*)\right), \quad t \in [t_*, \infty),$$

где $\mathcal{R} = -a\mathcal{E}$. Таким образом, имеет место равенство

$$u^{(3)}(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^{x-at} dy \int_{at-x}^{at+x} \mathcal{N}[u^{(3)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right) dz - \\ - u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) + u^{(2)}\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right) + \\ + \exp\left(a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\xi) d\xi\right) \left(\int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{R}(\xi) \exp\left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta\right) d\xi + \mu_1(t_*)\right), \\ t \in [t_*, \infty), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}. \quad (22)$$

Упростим уравнение (22). Для этого рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J} = \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \left\{ a \partial_x u^{(2)}\left(\frac{\xi + t_*}{2}, \frac{a\xi - at_*}{2}\right) - \partial_t u^{(2)}\left(\frac{\xi + t_*}{2}, \frac{a\xi - at_*}{2}\right) \right\} \exp\left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta\right) d\xi. \quad (23)$$

Обозначим

$$\mathcal{U}(\xi) = \exp \left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta \right), \quad \mathcal{V}(\xi) = 2a^{-1}u^{(2)} \left(\frac{\xi + t_*}{2}, \frac{a\xi - at_*}{2} \right)$$

и выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{U}(\xi) \mathcal{V}'(\xi) d\xi = (UV)(\xi) \Big|_{\xi=t_*}^{\xi=t-a^{-1}x} - \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{U}'(\xi) \mathcal{V}(\xi) d\xi = \\ &= 2a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(z) u^{(2)} \left(\frac{t_* + z}{2}, \frac{az - at_*}{2} \right) \exp \left(-a \int_{t_*}^z \alpha(\eta) d\eta \right) dz - 2\mu_2(t_*) + \\ &\quad + 2u^{(2)} \left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2} \right) \exp \left(-a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\eta) d\eta \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Из формул (22)–(24) следует представление (13).

Покажем теперь, что любая функция u из классов, которая представима в виде (10)–(13), где при этом $u^{(j)} \in C^1(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2, 3$, является решением задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), если выполняются условия гладкости (8). В самом деле, аналогично работе [30], в силу условий (8) заключаем, что $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Подставляя представления (10)–(13) в уравнение (1), убеждаемся, что функции $u^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют этому уравнению в $\overline{Q^{(j)}}$. Аналогично, подставляя эти представления в условия (2)–(4), приходим к выводу, что функция $u^{(1)}$ удовлетворяет начальным условиям (2), функция $u^{(2)}$ — условию Дирихле (3), функция $u^{(3)}$ — условию Робина (4). Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что выполняются условия сопряжения (5) и (6). Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполняются условия гладкости (8). Функция u из класса $C^2(\tilde{Q})$ является решением смешанной задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) тогда и только тогда, когда она представима в виде (10)–(13), где функции $u^{(j)} \in C^1(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2, 3$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Пусть выполняются условия гладкости (19) и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Тогда решения $u^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, уравнений (11)–(13) существуют, единственны в классе $C^1(\overline{Q^{(j)}})$ и непрерывно зависят от функций φ , ψ , μ_1 , μ_2 , α и γ .

Доказательство. Существование, единственность и непрерывная зависимость от исходных данных решения уравнений (11)–(13) при $\alpha \equiv 0$ доказаны в [26]. Разрешимость уравнения (13) при $\alpha \not\equiv 0$ доказывается аналогично. $\square$

4. Доказательство теоремы 1 и замечания 2. Теорема 1 следует из теорем 5 и 6. Чтобы при этом решение u принадлежало классу $C(\overline{Q})$, необходимо и достаточно выполнения условия $\gamma \equiv \text{const}$. Согласно (7), из $\gamma \equiv 0$ следует $\varphi(0) = \mu_1(0)$, и наоборот. Замечание 2 доказано.

5. Доказательство теоремы 2. Докажем необходимость. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)–(4). Из начальных условий (2) и граничных условий (3) и (4) следуют величины $\partial_t^k \partial_x^p u(0, 0)$, где k, p — целые неотрицательные числа, $0 \leq k + p \leq 2$. Продифференцировав условие (3) по переменной t дважды и условие (4) по переменной t один раз, получим

$$\partial_t u(t, 0) = \mu_1'(t), \quad \partial_t^2 u(t, 0) = \mu_1''(t), \quad t \in [0, t_*), \quad (25)$$

$$\alpha(t) \partial_t u(t, 0) + \partial_t \partial_x u(t, 0) + u(t, 0) \alpha'(t) = \mu_2'(t), \quad t \in [t_*, \infty). \quad (26)$$

Аналогично, дифференцируя условия Коши (2) по переменной x , будем иметь

$$\partial_x u(0, x) = \varphi'(x), \quad \partial_x^2 u(0, x) = \varphi''(x), \quad \partial_x \partial_t u(0, x) = \psi'(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (27)$$

Из выражений (2), (3), (25), (27) и уравнения (1) при $t = 0$ и $x = 0$ получим

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \varphi(0), \quad \partial_x u(0, 0) = \varphi'(0), \quad \partial_x^2 u(0, 0) = \varphi''(0), \\ \partial_t u(0, 0) &= \psi(0), \quad \partial_x \partial_t u(0, 0) = \psi'(0), \\ u(0, 0) &= \mu_1(0), \quad \partial_t u(0, 0) = \mu_1'(0), \quad \partial_t^2 u(0, 0) = \mu_1''(0), \\ \partial_t^2 u(0, 0) &= f(0, 0, u(0, 0), \partial_t u(0, 0), \partial_x u(0, 0)) - a^2 \partial_x^2 u(0, 0), \end{aligned} \quad (28)$$

Из представлений (28) следуют равенства (14)–(16).

Теперь подставим $t = t_*$ в формулы (26):

$$\begin{aligned} \mu_2(t_*) &= \alpha(t_*)u(t_*, 0) + \partial_x u(t_*, 0), \\ \mu_2'(t_*) &= \alpha(t_*)\partial_t u(t_*, 0) + \partial_t \partial_x u(t_*, 0) + u(t_*, 0)\alpha'(t_*). \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку $u \in C^2(\overline{Q})$ и $\mu_1 \in C^2([0, t_*])$, то

$$\begin{aligned} u(t_*, 0) &= u(t_* - 0, 0) = \mu_1(t_* - 0) = \mu(t_*), \\ \partial_t u(t_*, 0) &= \partial_t u(t_* - 0, 0) = \mu_1'(t_* - 0) = \mu'(t_*), \end{aligned}$$

и, в таком случае, из (29) следуют равенства (17) и (18).

Также заметим, что функция $u \in C^2(\overline{Q})$ является решением задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), причем в силу непрерывности функции u на характеристике $x - at = 0$ верно равенство $\gamma \equiv 0$, которое не противоречит (7), поскольку ранее мы показали, что $\mu_1(0) = \varphi(0)$. Следовательно, имеют место представления (10)–(13) с $\gamma \equiv 0$ для решения $u \in C^2(\overline{Q})$.

Обоснуем *достаточность*. Заметим, что при условиях теоремы существует единственное решение u задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) с некоторой условно произвольной функцией γ . Это решение представимо в виде (10)–(13). Более того, поскольку $\mu_1(0) = \varphi(0)$, то γ однозначно определяется как $\gamma \equiv 0$ в силу (7). При этом согласно доказательству теоремы 5 имеем $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Из условий (5), (6) и $\gamma \equiv 0$ также следует $u \in C(\overline{Q})$. Для того чтобы доказать принадлежность функции u классу $C^2(\overline{Q})$, необходимо установить совпадение на характеристиках $x = at$ и $x = at - at_*$ значений производных первого и второго порядков функций $u^{(j)}$, т.е.

$$\begin{aligned} \partial_t^k \partial_x^p u^{(1)}(t, x = at) &= \partial_t^k \partial_x^p u^{(2)}(t, x = at), \\ \partial_t^k \partial_x^p u^{(2)}(t, x = at - at_*) &= \partial_t^k \partial_x^p u^{(3)}(t, x = at - at_*), \end{aligned}$$

где k, p — целые неотрицательные числа, $1 \leq k + p \leq 2$. Для этого достаточно условий (14)–(18), что можно вывести из представлений (10)–(13), действуя в точности по алгоритму, изложенному в [27, 28, 30]. Таким образом, построено решение $u \in C^2(\overline{Q})$ задачи (1)–(4).

Докажем единственность классического решения. Предположим, что существуют два различных решения $u \in C^2(\overline{Q})$ и $v \in C^2(\overline{Q})$ смешанной задачи (1)–(4). Очевидно, они являются решениями задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), где $\gamma \equiv 0$, что противоречит теореме 1.

6. Доказательство теорем 3, 4 и замечания 6. Теорема 3, гарантирующая существование и единственность слабого решения, следует из теоремы 6.

Если в уравнении (1) нелинейность f имеет вид (20), то уравнения (11)–(13) становятся интегральными, и их решения можно искать в классе непрерывных функций, как в [7, 23, 27, 28]; в указанных работах доказано существование, единственность и непрерывная зависимость от исходных данных решений этих интегральных уравнений в классе непрерывных функций. В этом случае непрерывность построенного слабого решения на характеристике $x - at = -at_*$ устанавливается непосредственной проверкой. Это окончательно доказывает теорему 4. Замечание 6 доказывается аналогично замечанию 2.

7. Обобщенное решение. В этом разделе сравним определение 1 слабого решения с другими подходами определения обобщенных решений задачи (1)–(4).

Наиболее очевидным определением обобщенным решением является решение u в пространстве Соболева $W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$. Однако в этом случае по теореме вложения Соболева $W_{\text{loc}}^{2,p}(Q) \subset C(\overline{Q})$, если $p > 1$. Из этого следует условие согласования (14), что делает невозможным рассмотрение разрывных решений в пространствах $W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$, $1 < p \leq \infty$.

Как и в предыдущих частях работы, введем функции $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) как сужение решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ задачи (1)–(4) на множества $\overline{Q^{(i)}}$ по формуле (10). Теперь проинтегрируем уравнение (1) по треугольнику

$$\mathcal{T}_1 = \text{Conv}\{(t, x), (0, x - at), (0, x + at)\},$$

где $(t, x) \in \overline{Q^{(1)}}$, т.е. $\mathcal{T}_1 \subset \overline{Q^{(1)}}$. Применим теорему Грина для функций, принадлежащих пространствам Соболева (см. [40]), к левой части уравнения, вычислим линейные интегралы с использованием условий Коши (2) аналогично [24] и получим представление (11) решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ в области $\overline{Q^{(1)}}$. Аналогично, рассматривая множество

$$\mathcal{T}_2 = \text{Conv}\left\{(t, x), \left(t - \frac{x}{a}, 0\right), (0, at - x), (0, x + at)\right\} \subset \overline{Q^{(2)}},$$

выводим представление (12) с $\gamma \equiv 0$ решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ в области $\overline{Q^{(2)}}$. Поэтому такое определение не позволяет корректно с физической точки зрения трактовать разрыв решения на характеристике $x - at = 0$ даже в случае $p = 1$. Используя те же рассуждения, показываем, что решение $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ в области $\overline{Q^{(3)}}$ можно представить в виде (13). Следовательно, решение $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ задачи (1)–(4) представимо в виде (10)–(13) с $\gamma \equiv 0$, т.е. оно является слабым с $\gamma \equiv 0$.

Можно показать, что если $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(Q)$ является решением задачи (1)–(4), то оно является кусочно непрерывным, т.е., возможно, после модификации функции u на множестве лебеговой меры нуль, $u \in C(\overline{Q^{(1)}})$ и $u \in C(\overline{Q^{(2)} \cup Q^{(3)}})$. Действительно, если $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(Q)$, то $\partial_t^2 u \in L_{\text{loc}}^1(Q)$ и $\partial_x^2 u \in L_{\text{loc}}^1(Q)$. Следовательно, $\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = \mathcal{N}[u] \in L_{\text{loc}}^1(Q)$. Также, возможно, после модификации функции u на множестве лебеговой меры нуль, функции $\varphi = u(0, \cdot)$ и $\psi = \partial_t u(0, \cdot)$ принадлежат пространствам $W_{\text{loc}}^{1,1}([0, \infty)) \subset C([0, \infty))$ и $L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ соответственно (см. [17]). Итак, правая часть выражения (11) является непрерывной функцией. Это означает, что $u \in C(\overline{Q^{(1)}})$. Аналогично из представлений (12) и (13) доказываем, что $u \in C(\overline{Q^{(2)}})$ и $u \in C(\overline{Q^{(3)}})$. Так как из (12) и (13) следует равенство $[(u)^- - (u)^-](t, x = at - at_*) = 0$, то $u \in C(\overline{Q^{(2)} \cup Q^{(3)}})$.

Теперь выберем произвольную ограниченную область $G \subset \overline{Q}$ с положительно ориентированной кусочно гладкой границей ∂G без точек возврата. Тогда, проинтегрировав уравнение (1) по множеству G и применив теорему Грина к левой части, получим интегральный закон сохранения

$$\oint_{\partial G} a^2 \partial_x u(t, x) dt + \partial_t u(t, x) dx + \iint_G \mathcal{N}[u](t, x) dt dx = 0 \quad (30)$$

для решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$. Уравнение (30) служит основой для определения обобщенного кусочно гладкого решения волнового уравнения в [14, гл. II, § 2, п. 9]. Однако определения, основанные на интегральном соотношении (30), не позволяют корректно трактовать разрывы решения (см. [24]).

Другим способом обобщения определения решения является концепция, в которой решения являются пределом классических решений.

Определение 2. Пусть выполняются условия гладкости (19). Тогда функция u является *сильным обобщенным решением* задачи (1)–(4), если $u \in C^1(\overline{Q})$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{Q})$, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u)_{C^1(\overline{Q})} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\square_a u_n - \mathcal{N}[u_n], 0)_{C(\overline{Q})} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n(0, \cdot), \varphi)_{C^1([0, \infty))} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\partial_t u_n(0, \cdot), \psi)_{C([0, \infty))} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n(\cdot, 0), \mu_1)_{C^1([0, t_*])} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\alpha(\cdot) u_n(\cdot, 0) + \partial_x u_n(\cdot, 0), \mu_2)_{C([t_*, \infty))} &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\rho(x_1, x_2)_X$ — расстояние между элементами $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ метрического пространства X .

Определение 2 не допускает разрывные сильные обобщенные решения, однако позволяет считать решение «почти» классическим, поскольку оно является пределом классических решений, и, следовательно, отличается от классического некоторой погрешностью.

Замечание 7. Любое классическое решение задачи (1)–(4) также является сильным обобщенным решением этой задачи.

Замечание 8. Если существует сильное обобщенное решение u , то выполняются условия согласования (14), (15) и (17).

Доказательство. Пусть $u_n \in C^2(\overline{Q})$ — такая последовательность функций, что выполняются условия (31). Тогда $u_n(0, \cdot)$ и $u_n(\cdot, 0)$ сходятся поточечно к φ и μ_1 соответственно. Это влечет $u(0, 0) = \varphi(0) = \mu_1(0)$. По тем же соображениям получаем, что выполнены условия (15) и (17). $\square$

Замечание 9. Если выполняются дополнительные условия гладкости (8) и условия согласования (16) и (18), то сильное обобщенное решение u задачи (1)–(4) является классическим.

Аналогично [21] устанавливается следующий факт.

Утверждение 1. Пусть выполняются условия гладкости (19) и условия согласования (14), (15) и (17). Функция u является сильным обобщенным решением задачи (1)–(4) тогда и только тогда, когда функция u является слабым решением задачи (1)–(4) с $\gamma \equiv 0$.

Сформулируем теорему о существовании и единственности сильного обобщенного решения.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (19) и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) имеет сильное обобщенное решение u в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (14), (15) и (17). Это решение определяется формулами (14), (10)–(16) и непрерывно зависит от функций φ , ψ , μ_1 , μ_2 и α .

Доказательство. Необходимость условий согласования (14), (15) и (17) доказана в замечании 7. Докажем достаточность. Согласно утверждению 1 имеем представления (10)–(16) сильного обобщенного решения u . Согласно теореме 6 уравнения (10)–(13) имеют единственные непрерывно дифференцируемые решения, которые непрерывно зависят от исходных данных. Из (10)–(16) и условий согласования (14), (15) и (17) следует, что $u \in C^1(\overline{Q})$. $\square$

8. Применение результатов к решению задачи из теории горения. Следуя [16, 38], рассмотрим задачу из математической теории горения для идеально изолированного, полубесконечного, очень тонкого, однородного и изотропного стержня постоянного сечения с постоянной температуропроводностью κ^2 ($\kappa = \sqrt{\lambda \rho^{-1} c^{-1}}$, где λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, c — удельная теплоемкость). Пусть температура u задается функцией μ_1 на конце $x = 0$ стержня в моменты времени $t \in [0, t_*)$. После момента времени t_* конец $x = 0$ стержня больше не поддерживается при определенной температуре, вместо этого плотность теплового потока на границах задается функцией $\tilde{\mu}_2$ для всех моментов времени $t \geq t_*$. Также предположим следующее:

- (a) В момент времени $t = 0$ стержень не горит, а нагрет до температуры, близкой к температуре воспламенения.
- (b) Начальное распределение температуры $u(t = 0, \cdot)$ задается функцией φ , начальное распределение скорости изменения температуры $\partial_t u(t = 0, \cdot)$ задается функцией ψ .
- (c) Температура на конце $x = 0$ стержня в моменты времени $t \in (0, t_*)$ больше начальной температуры стержня.
- (d) Протекание процесса теплопереноса внутри стержня строго подчиняется закону Максвелла–Каттанео со временем релаксации τ_r , т.е. связь между температурой u и плотностью теплового потока q удовлетворяет уравнению

$$q(t, x) = -\lambda \partial_x u(t, x) - \tau_r \partial_t q(t, x). \quad (32)$$

- (е) Отсутствуют внутренние источники или стоки тепла, за исключением выделения тепла за счет протекания химической реакции, которая строго подчиняется закону Аррениуса, что дает уравнение теплового баланса в виде

$$\rho c \partial_t u(t, x) + \partial_x q(t, x) = \omega(u(t, x)), \quad (33)$$

где $\omega(u) = Q\rho k \exp(-ER^{-1}u^{-1})\theta(u)$, θ — функция Хевисайда, Q — количество тепла, выделяемого на единицу массы в результате химической реакции, k — предэкспоненциальный множитель, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная.

Учитывая вышеизложенное, приходим к задаче (1)–(4), в которой

$$a = \frac{\kappa^2}{\tau_r}, \quad f(t, x, u, u_t, u_x) = \frac{\omega(u) + \tau_r \omega'(u) u_t}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r}, \quad \mu_2 = -\frac{\tilde{\mu}_2 + \tau_r \tilde{\mu}_2'}{\lambda}, \quad \alpha \equiv 0. \quad (34)$$

Поскольку верно равенство

$$\omega'(u) = Q\rho k E R^{-1} u^{-2} \exp(-ER^{-1}u^{-1})\theta(u) = ER^{-1}u^{-2}\omega(u),$$

то мы можем преобразовать функцию f , заданную выражением (34), к более простому виду:

$$f(t, x, u, u_t, u_x) = \frac{(1 + \tau_r E R^{-1} u^{-2} u_t) \omega(u)}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r}$$

с безразмерной величиной $\tau_r E R^{-1} u^{-2} \partial_t u$, которая, по-видимому, характеризует релаксацию тепла, полученного от внутреннего источника, т.е. ее малость свидетельствует о незначительности релаксационных явлений, связанных с выделением энергии в процессе горения, но не с теплопередачей: незначительность релаксационных эффектов теплопередачи можно оценить величиной $\tau_r \partial_t^2 u / \partial_t u$ (см. [31]).

Следует отметить, что данная математическая модель не учитывает выгорание вещества, что справедливо, если время воспламенения достаточно мало или если протекание реакций конденсированной фазы имеет нулевой порядок по концентрации. Более того, данная модель верна только до момента воспламенения t_{ig} , который можно определить на основе различных критериев (см., например, [37, 39]).

Наша цель — решить задачу (1)–(4), (34) без предположения истинности каких-либо условий согласования. Для этого мы можем рассмотреть задачу с условиями сопряжения, т.е. задачу (1)–(7), (34) и применить теорему 1 или 3. Последнее представляется возможным, поскольку функция f , заданная формулой (34), удовлетворяет условию Липшица по трем последним переменным; это следует из того факта, что функции ω и ω' являются ограниченными. В таком случае необходимо определить функцию γ из физических соображений.

Проведем вывод функции γ по схеме, изложенной в [15, 19, 20]. Сначала, следуя [33], перепишем уравнение (1), (34) в консервативном виде:

$$\begin{pmatrix} \partial_t u(t, x) \\ \partial_t q(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1} c^{-1} \\ \lambda \tau_r^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u(t, x) \\ \partial_x q(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^{-1} c^{-1} \omega(u(t, x)) \\ -\tau_r^{-1} q(t, x) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Из системы (35) следуют условия Ранкина–Гюгонио

$$[q] = \sqrt{\lambda c \rho \tau_r^{-1}} [u]. \quad (36)$$

Также система (35) влечет формулы

$$[\partial_t u] + c^{-1} \rho^{-1} [\partial_x q] = c^{-1} \rho^{-1} [\omega(u)], \quad [\partial_t q] + \lambda \tau_r^{-1} [\partial_x T] = -\tau_r^{-1} [q],$$

где $[\cdot] = (\cdot)^- - (\cdot)^+$.

Для нахождения функции γ понадобится лемма Адамара (см. [19, 20], которая для (35) имеет вид

$$\frac{\delta [u]}{\delta t} = [\partial_t u] + \sqrt{\frac{\lambda}{\tau_r c^{-1} \rho}} [\partial_x u]. \quad (37)$$

Рассматривая систему (35)–(37), получаем эволюционное уравнение относительно $[u]$:

$$\frac{\delta [u]}{\delta t} = \frac{[\omega(u)]}{2\rho c} - \frac{[u]}{2\tau_r} := \frac{\omega((u)^+ + [u]) - \omega((u)^+)}{2\rho c} - \frac{[u]}{2\tau_r}.$$

Теперь, учитывая соотношение

$$\llbracket u \rrbracket(t, x = at) = \tilde{\gamma}(t) = -\gamma(t)$$

и условие (3), из которого следует $\tilde{\gamma}(0) = \mu_1(0) - \varphi(0)$, получаем задачу Коши

$$\gamma'(t) = \frac{\gamma(t)}{2\tau_r} - \frac{\omega(u(t, at + 0) - \gamma(t)) - \omega(u(t, at + 0))}{2\rho c}, \quad \gamma(0) = u_0(0) - \mu_T(0). \quad (38)$$

Уравнение (38) корректно, так как оно содержит функцию

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto u(t, at + 0) \mapsto \mathbb{R}, \quad (39)$$

которая определяется из решения задачи Коши в области $\overline{Q^{(1)}}$ и, таким образом, зависит только от функций φ , ψ , ω и коэффициентов c , ρ , κ .

Уравнение (38) в общем случае не интегрируется в квадратурах, но это не мешает доказать, что функция γ корректно определена на множестве $[0, \infty)$. В самом деле, если функция (39) непрерывна, то функция

$$[0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (t, \gamma) \mapsto \frac{\gamma}{2\tau_r} - \frac{\omega(u(t, at + 0) - \gamma) - \omega(u(t, at + 0))}{2\rho c} \in \mathbb{R} \quad (40)$$

тоже непрерывна. Поскольку функция (40) удовлетворяет условию Липшица по второй переменной, то по теореме Пикара—Линделефа существует единственное решение γ задачи Коши (38) в пространстве $C^1([0, \infty))$. Более того, согласно теореме о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, если $u \in C^1(\overline{Q^{(1)}})$, то $\gamma \in C^2([0, \infty))$.

В частном случае $\omega \equiv 0$ можно указать явный вид функции γ , а именно,

$$\gamma(t) = \gamma(0) \exp\left(-\frac{t}{2\tau_r}\right).$$

8.1. Модифицированный закон Аррениуса. В данной работе мы фактически решили задачу из теории горения, где использовали закон Аррениуса для описания зависимости скорости химической реакции от температуры. Однако закон Аррениуса не является фундаментальным законом природы и не всегда выполняется. Результаты, полученные в данной работе, остаются справедливыми, если, например, вместо стандартного закона Аррениуса использовать одну из его модификаций и/или обобщений:

- (a) $\omega_1(u) = Q\rho k \exp(-ER^{-1}(u - T_0)^{-1})\theta(u - T_0)$, где T_0 — некоторая температура, которая определяется экспериментально (см. [22]);
- (b) $\omega_2(u) = Q\rho\beta u^m \exp(-ER^{-1}u^{-1})\theta(u)$, где $m \in [0, 1]$ — показатель степени слабого температурного члена ($m = 0$ соответствует стандартному закону Аррениуса, $m = 0,5$ предсказывается теорией столкновений, а $m = 1$ предсказывается теорией переходного состояния; см. [22], β — константа, не зависящая от температуры (см. [32]);
- (c) $\omega_3(u) = Q\rho k(1 + ER^{-1}u^{-1}(1 - T_0u^{-1})) \exp(-ER^{-1}u)\theta(u)$, где T_0 — некоторая температура, которая определяется экспериментально (см. [22]).

Заметим, что каждая из функций ω_i ($i = 1, 2, 3$) бесконечно дифференцируема и имеет ограниченную производную. Из этого следует, что функция

$$f : \overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x, u, u_t, u_x) \mapsto \frac{\omega_i(u) + \tau_r \omega'_i(u) u_t}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r} \in \mathbb{R} \quad (41)$$

принадлежит классу $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ и удовлетворяет условию Липшица по трем последним переменным с некоторой константой. Таким образом, замена функции ω на одну из функций ω_i ($i = 1, 2, 3$) в задаче (1)–(4), (34) сохраняет результаты, полученные в данной работе.

Результаты настоящей статьи позволяют рассматривать достаточно произвольный закон $\omega_{\text{gen}}(u)$ зависимости скорости химической реакции от температуры u . Заметим, что не имеет значения, как ведет себя функция $u \mapsto \omega_{\text{gen}}(u)$ при температуре u выше планковской T_P или

ниже абсолютного нуля, поскольку такие температуры невозможны. Поэтому вместо функции ω_{gen} , заданной определенным правилом, можно рассмотреть функцию

$$\tilde{\omega}_{\text{gen}}(u) = \begin{cases} \omega_{\text{gen}}(0), & x \leq -\varepsilon, \\ s_1(u), & -\varepsilon \leq x \leq 0, \\ \omega_{\text{gen}}(u), & 0 \leq x \leq T_P, \\ s_2(u), & T_P \leq x \leq T_P + \varepsilon, \\ \omega_{\text{gen}}(T_P), & x \geq T_P + \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} s_1(u) &= \omega_{\text{gen}}(0) + \frac{1}{2\varepsilon^4} \left(u(\varepsilon + u)^3 (2\varepsilon\omega'_{\text{gen}}(0) + \varepsilon u\omega''_{\text{gen}}(0) - 6u\omega'_{\text{gen}}(0)) \right), \\ s_2(u) &= \omega_{\text{gen}}(T_P) + (u - T_P)(\varepsilon + T_P - u)^3 \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\varepsilon^4} \left(\varepsilon(u - T_P)\omega''_{\text{gen}}(T_P) + 2(\varepsilon - 3T_P + 3u)\omega'_{\text{gen}}(T_P) \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Легко показать, что если $\omega_{\text{gen}} \in C^2([0, T_P])$, то функция $\tilde{\omega}_{\text{gen}}$ принадлежит классу $C^2(\mathbb{R})$ и ее производная ограничена. Следовательно, функция

$$f : \overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x, u, u_t, u_x) \mapsto \frac{\tilde{\omega}_{\text{gen}}(u) + \tau_r \tilde{\omega}'_{\text{gen}}(u) u_t}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r} \in \mathbb{R} \quad (43)$$

удовлетворяет условию Липшица по трем последним переменным и принадлежит классу $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$. Таким образом, как и в предыдущем случае, замена функции ω на функцию $\tilde{\omega}_{\text{gen}}$ в задаче (1)–(4), (34) оставляет в силе полученные результаты.

Если функция ω не принадлежит классу $C^2([0, T_P])$, но принадлежит классу $C^1([0, T_P])$, то остаются справедливыми только результаты, касающиеся слабых и обобщенных решений, поскольку в этом случае функция f , определенная формулой (43), принадлежит только классу $C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$, но не $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$, где функция $\tilde{\omega}_{\text{gen}}$ определяется как и прежде, т.е. по формуле (41), но в представлениях (42) мы заменяем $\omega''_{\text{gen}}(0)$ и $\omega''_{\text{gen}}(T_P)$ на 0 и в результате получаем, что $\tilde{\omega}_{\text{gen}} \in C^1(\mathbb{R})$.

9. Заключение. В настоящей работе сформулированы достаточные условия существования единственного классического решения смешанной задачи в четверти плоскости для слабо квазилинейного волнового уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всей четверти плоскости. Если эти условия не выполняются, изучена задача с условиями сопряжения на характеристиках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волкодав В. Ф., Бушков С. В., Илюшина Ю. А. Для уравнения гиперболического типа задача с производными по нормам на двух частях границы рассматриваемого множества и единственность ее решения // Мат. модел. краев. задачи. — 2004. — 3. — С. 43–48.
2. Волкодав В. Ф., Илюшина Ю. А. Характеристический принцип локального экстремума для одного уравнения гиперболического типа и его применение // Изв. вузов. Мат. — 2002. — № 4. — С. 13–17.
3. Волкодав В. Ф., Куликова Н. А. Задача Δ_2 для уравнения гиперболического типа с сопряжением пределов производных дробного порядка // Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 12. — С. 1704–1707.
4. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А. Задача Пикара на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2023. — 31, № 1. — С. 70–80.
5. Корзюк В. И., Козловская И. С., Соколович В. Ю., Севастюк В. А. Решение произвольной гладкости одномерного волнового уравнения для задачи со смешанными условиями // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2021. — 57, № 3. — С. 286–295.
6. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение смешанных задач из теории продольного удара по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего тела после удара // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2024. — 60, № 2. — С. 95–105.

7. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение третьей смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 232. — С. 37–49.
8. Корзюк В. И., Рудько Я. В., Колячко В. В. Решения задач с разрывными условиями для волнового уравнения// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2023. — 3. — С. 6–18.
9. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна—Гордона—Фока с неоднородными условиями согласования// Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2019. — 63, № 1. — С. 7–13.
10. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна—Гордона—Фока с интегральными условиями в случае неоднородных условий согласования// Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2019. — 63, № 2. — С. 142–149.
11. Куликова Н. А. Задача для уравнения гиперболического типа Δ_2 с сопряжением по нормали// Мат. модел. краев. задачи. — 2005. — 3. — С. 148–150.
12. Плотникова Ю. А. Краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов со специальными условиями сопряжения/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Стерлитамак, 2005.
13. Скалько Ю. И., Груднев С. Ю. Фундаментальное решение оператора задачи и его применение для приближенного решения начально-краевых задач// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 193. — С. 110–121.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
15. Christov I., Jordan P. M. Shock bifurcation and emergence of diffusive solitons in a nonlinear wave equation with relaxation// New J. Phys. — 2008. — 10. — 043027.
16. Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.
17. Geymonat G. Trace theorems for Sobolev spaces on Lipschitz domains// Ann. Math. Blaise Pascal. — 2007. — 14. — P. 187–197.
18. Iwamiya T. Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces// Hiroshima Math. J. — 1986. — 16. — P. 499–530.
19. Jordan P. M. Growth and decay of shock and acceleration waves in a traffic flow model with relaxation// Phys. D. — 2005. — 207. — P. 220–229.
20. Jordan P. M., Lambers J. V. On the propagation and bifurcation of singular surface shocks under a class of wave equations based on second-sound flux// Int. J. Non-Linear Mech. — 2021. — 132. — 103696.
21. Kharibegashvili S. S., Jokhadze O. M. Global and blowup solutions of a mixed problem with nonlinear boundary conditions for a one-dimensional semilinear wave equation// Sb. Math. — 2014. — 205, № 4. — P. 573–599.
22. Kohout J. Modified Arrhenius equation in materials science, chemistry and biology// Molecules. — 2021. — 26. — 7162.
23. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical and mild solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential// Izv. Irkutsk. Univ. Ser. Mat. — 2023. — 43. — P. 48–63.
24. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical and mild solutions of the Cauchy problem for a mildly quasilinear wave equation with discontinuous and distributional initial conditions// J. Math. Sci. — 2024. — 286, № 4. — P. 535–559.
25. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary-value problem with a mixed boundary condition and conjugation conditions for a mildly quasilinear wave equation// Мат. V Междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», посв. столетию со дня рождения Иванова Е. А. и Бриша Н. И. (Минск, 17–19 декабря 2024 г.). — Минск: БГУ, 2024. — С. 48–49.
26. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary-value problem with a mixed boundary condition for a mildly quasilinear wave equation// Proc. 11th Int. Workshop “Analytical Methods of Analysis and Differential Equations” (AMADE-2024) (Minsk, September 16–20, 2024). — Minsk: Belarusian State Univ., 2024. — P. 46–55.
27. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential// Differ. Equations. — 2022. — 58, № 2. — P. 175–186.
28. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential in a curvilinear quadrant// Differ. Equations. — 2023. — 59, № 8. — P. 1075–1089.
29. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of the second order// Eurasian Math. J. — 2024. — 15, № 2. — P. 61–74.

30. *Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I.* Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients// *Differ. Equations.* — 2017. — 53, № 1. — P. 74–85.
31. *Kostanovskiy A. V., Kostanovskaya M. E.* A criterion of applicability of the parabolic heat conduction equation// *Tech. Phys. Lett.* — 2008. — 34. — P. 500–502.
32. *Laidler K. J.* A glossary of terms used in chemical kinetics, including reaction dynamics (IUPAC recommendations 1996)// *Pure Appl. Chemistry.* — 1996. — 68. — P. 149–192.
33. *Levanov E. N., Sotskii E. I.* Some properties of the heat-transfer process in a motionless medium, taking account of heat-flux relaxation// *J. Eng. Phys.* — 1986. — 50. — P. 733–740.
34. *Maia S. A., Milla Miranda M.* Existence and decay of solutions of an abstract second order nonlinear problem// *J. Math. Anal. Appl.* — 2009. — 358. — P. 445–456.
35. *Roždestvenskiĭ B. L., Janenko N. N.* Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics. — Providence: Am. Math. Soc., 1983.
36. *Tsutsumi M.* Some nonlinear evolution equations of second order// *Proc. Jpn. Acad.* — 1971. — 47. — P. 950–955.
37. *Vilyunov V. N., Vorozhtsov A. B., Borovskoi I. G., Shelupanov A. A.* Ignition of condensed material// *Combust. Explos. Shock Waves.* — 1988. — 24, № 3. — P. 297–299.
38. *Viliunov V. N., Zarko V. E.* Ignition of Solids. — Amsterdam: Elsevier, 1989.
39. *Zeldovich Ya. B.* Ignition of Condensed Material// in: *Selected Works of Ya. B. Zeldovich. Vol. I: Chemical Physics and Hydrodynamics.* — Princeton: Princeton Univ. Press, 1992. — P. 255–261.
40. *Ženíček A.* Green's theorem from the viewpoint of applications// *Appl. Math. Praha* — 1999. — 44. — P. 55–80.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Корзюк Виктор Иванович (Korzyuk Viktor Ivanovich)

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь;
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,

Minsk, Republic of Belarus;

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus)

E-mail: korzyuk@bsu.by

Рудько Ян Вячеславович (Rudzko Jan Viacslavavicz)

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,

Minsk, Republic of Belarus)

E-mail: janycz@yahoo.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 61–73
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-61-73

УДК 517.929

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И КОНКУРЕНЦИИ НА МАКРОЭКОНОМИЧЕСКУЮ ДИНАМИКУ

© 2025 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ

Аннотация. В работе рассмотрена система из двух нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом, являющаяся обобщением известной модели «спрос–предложение». Показано, что учет запаздывания и конкуренции существенно меняет поведение решений соответствующей динамической системы. Рассмотренная математическая модель с качественной точки зрения демонстрирует динамику, которая вполне естественна с экономической точки зрения.

Ключевые слова: модель «спрос–предложение», запаздывание, конкуренция, устойчивость, бифуркации, нормальные формы.

THE IMPACT OF DELAY AND COMPETITION ON MACROECONOMIC DYNAMICS

© 2025 А. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV

ABSTRACT. In this paper, we consider a system of two nonlinear equations with a deviating argument, which is a generalization of the well-known “demand–supply” model. It is shown that taking into account the delay and competition significantly changes the behavior of solutions of the corresponding dynamic system. From the qualitative point of view, this mathematical model demonstrates dynamics that are quite natural from the economic point of view.

Keywords and phrases: “supply–demand” model, delay, competition, stability, bifurcations, normal forms.

AMS Subject Classification: 34K18, 37G05, 37N40

1. Введение. Среди большого числа математических моделей макроэкономики всегда называют одну из первых таких моделей, которая известна под названиями «модель спрос–предложение» или «модель рынка одного товара» (см. [10, 11]). Напомним ее в первоначальной версии. Пусть $p(t)$ — цена товара в момент времени t , $p(t) \geq 0$. Тогда изменение $p(t)$ может быть найдено как решение дифференциального уравнения

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \quad (1)$$

где $D(p)$ — спрос (востребованность на рынке) товара, а $S(p)$ — предложение товара (предложение его производителем). Обе функции зависят от многих факторов, но основным, естественно, является цена товара. При этом, опираясь на экономические интерпретации данного уравнения, принято считать, что для функций $D(p)$, $S(p)$ выполнены следующие условия (см., например, [3, 6, 10, 11]):

Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета №075-02-2025-1636).

- (I) Функции $D(p)$, $S(p)$ определены при $p \in (0, \infty)$ и зависят от p достаточно гладко (как правило, функции $D(p)$, $S(p) \in C^\infty(0, \infty)$).
- (II) $D(p) > 0$, $S(p) > 0$, $D'(p) < 0$, $S'(p) > 0$.
- (III) $\lim_{p \rightarrow 0} S(p) = 0$, $\lim_{p \rightarrow \infty} S(p) = \infty$ или $\lim_{p \rightarrow \infty} S(p) = S_\infty$, где $S_\infty \gg 1$. Второй вариант соответствует рынку одного товара с «насыщением».
- (IV) $\lim_{p \rightarrow 0} D(p) = \infty$ или $\lim_{p \rightarrow 0} D(p) = D_\infty \gg 1$, $\lim_{p \rightarrow 0} D(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} D(p) = 0$.

Опираясь на эти предположения, стандартным образом можно показать, что у дифференциального уравнения (1) имеется единственное положительное состояние равновесия $p(t) = p_0$ ($p_0 > 0$), которое асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво), если рассматривать только положительные значения для переменной $p(t)$ ($p(t) > 0$).

Последнее замечание позволяет сделать вывод, что такой вариант математической модели не является естественным с экономической точки зрения, так как для рыночной экономики характерно следующее:

- (а) состояние равновесия $p = p_0$ может быть неустойчивым;
- (б) для рыночной экономики характерны циклы (экономические циклы), что показала экономическая практика XIX и XX вв.

Поэтому у многих экономистов эта модель считается классической, но устаревшей. Вместе с тем, ее достаточно легко подправить таким образом, чтобы устранить такие очевидные недостатки.

Одним из самых простых и действенных вариантов модификации уравнения (1) является учет эффекта запаздывания. Это приводит к замене обыкновенного дифференциального уравнения (1) на уравнение с отклоняющимся аргументом (см. [3, 6]), например,

$$\dot{p} = D(p_h) - S(p_h), \quad (2)$$

где теперь в правой части $p_h = p(t - h)$, $h > 0$. Уместность такого изменения правой части уравнения (1) основывается на таком простом и экономически естественном соображении, что цена в некий торговый день (час) формируется под воздействием цены предшествующего торгового периода (например, дня). Ясно, что уравнение (2), так же как и (1), имеет состояние равновесия $p(t) = p_0 > 0$.

Уравнение (2) было изучено в [3, 6]. В этих работах показано, что при $h < h_*$ состояние равновесия $p = p_0$ асимптотически устойчиво, а при $h > h_*$ теряет устойчивость колебательным образом.

Действительно, пусть $p = p_0$ — положительное состояние равновесия уравнения (2). Положим

$$p(t) = p_0 + x(t), \quad p_h(t) = p_0 + y(t), \quad y(t) = x(t - h).$$

Тогда для $x(t)$ получаем следующее уравнение с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{x} = -ay + a_2y^2 + a_3y^3 + o(y^3), \quad (3)$$

где

$$a = -(D'(p_0) - S'(p_0)), \quad a_2 = \frac{1}{2}(D''(p_0) - S''(p_0)), \quad a_3 = \frac{1}{6}(D'''(p_0) - S'''(p_0)),$$

а через $o(y^3)$ обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости относительно переменной y . Линеаризованный вариант уравнения (3) имеет следующий вид:

$$\dot{x} = -ay. \quad (4)$$

Изучим вопрос об устойчивости решений уравнения (4), а также в первом приближении устойчивость нулевого решения уравнения (3). При этом вопрос об устойчивости решений уравнения (4) сводится к анализу характеристического уравнения

$$\lambda = -a \exp(-\lambda h), \quad (5)$$

анализ которого приведен в [3, 6]. При $h = H$, где $H = \pi/(2a)$, уравнение (4) имеет периодические решения $\exp(\pm i\sigma t)$, где $\sigma = a$. Если же $h < H$, то решения уравнения (4) асимптотически устойчивы, а при $h > H$ — неустойчивы.

Аналогичные выводы можно сделать относительно устойчивости нулевого решения нелинейного уравнения (2): при $h \in (0, H)$ оно асимптотически устойчиво, а при $h > H$ теряет устойчивость. Наконец, при $h = H$ для нулевого решения уравнения (3) реализуется критический случай пары

простых чисто мнимых собственных значений спектра устойчивости. Добавим, что, если положить

$$h = H(1 + \gamma\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \gamma = \pm 1, \quad (6)$$

то при анализе нелинейного уравнения (3) может быть использована бифуркационная теорема Андронова—Хопфа (см. [9]). В частности, это уравнение может иметь в окрестности нулевого состояния равновесия предельный цикл, в том числе устойчивый (подробнее см. [3, 6]).

Кроме запаздывания еще одним фактором влияния на экономическую динамику следует считать фактор наличия конкуренции. В данной работе рассмотрим этот вопрос на основе изучения динамики рынка в простейшем случае, когда рассматривается рынок двух идентичных товаров, которые могут конкурировать. При этом будем изучать вариант, когда конкуренция «слабая», т.е. соответствующие коэффициенты малы по сравнению с другими. Рассмотрим следующую систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= D(p_{1,h}) - S(p_{1,h}) + \varepsilon c(p_{2,h} - p_{1,h}), \\ \dot{p}_2 &= D(p_{2,h}) - S(p_{2,h}) + \varepsilon c(p_{1,h} - p_{2,h}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $p_1 = p_1(t)$, $p_2 = p_2(t)$ — цена товаров 1 и 2, $p_{j,h} = p_j(t - h)$, $h > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Функции $D(p)$, $S(p)$ были описаны выше. Будем изучать систему дифференциальных уравнений (7), если h выбрано с помощью равенства (6). При отсутствии конкуренции ($c = 0$) у каждого из уравнений системы (7) реализуется случай, близкий к критическому в задаче об устойчивости состояния экономического равновесия ($p_1(t) = p_2(t) = p_0$). Подчеркнем, что система из двух дифференциальных уравнений (7) имеет состояние равновесия $p_1 = p_2 = p_0$ при любом выборе ε , c , где p_0 — состояние равновесия уравнения (1) (или (2)).

Положим теперь в системе (7)

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_0 + x_1(t), & p_2(t) &= p_0 + x_2(t), \\ p_{1,h} &= p_0 + y_1(t), & p_{2,h} &= p_0 + y_2(t), \\ y_j(t) &= x_j(t - h), & h &= H(1 + \gamma\varepsilon), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

В результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ay_1 + F(y_1) + \varepsilon c(y_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 &= -ay_2 + F(y_2) + \varepsilon c(y_1 - y_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где $F(y_j) = a_2 y_j^2 + a_3 y_j^3 + o(y_j^3)$, $j = 1, 2$. У нее есть нулевое состояние равновесия. Далее в работе изучается структура окрестности нулевого состояния равновесия системы (8) при $c \neq 0$ и, в частности, устойчивость нулевого решения системы (8).

2. Устойчивость нулевого состояния равновесия. Из теоремы об устойчивости по линейному (первому) приближению следует, что сначала вместо нелинейной системы (8) следует рассмотреть ее линеаризованный вариант, т.е. следующую систему линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{x}_1 = -ay_1 + \varepsilon c(y_2 - y_1), \quad \dot{x}_2 = -ay_2 + \varepsilon c(y_1 - y_2). \quad (9)$$

У системы (9) найдем нетривиальные решения вида

$$x_1 = \eta_1 \exp(\lambda t), \quad x_2 = \eta_2 \exp(\lambda t),$$

где η_1 , η_2 , λ — комплексные или действительные постоянные. При этом числа η_1 , η_2 находим как ненулевые решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + (a + c\varepsilon) \exp(-\lambda h))\eta_1 - (c\varepsilon \exp(-\lambda h))\eta_2 &= 0, \\ (-\varepsilon c \exp(-\lambda h))\eta_1 + (\lambda + (a + c\varepsilon) \exp(-\lambda h))\eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

У нее есть нетривиальные решения, если ее определитель равен 0. Здесь и далее $h = H(1 + \gamma\varepsilon)$. В результате получаем характеристическое уравнение

$$(\lambda + (a + c\varepsilon) \exp(-\lambda h))^2 - (c\varepsilon \exp(-\lambda h))^2 = 0,$$

которое приводит к двум следующим уравнениям:

$$\lambda + (a + 2c\varepsilon) \exp(-\lambda h) = 0, \quad (10)$$

$$\lambda + a \exp(-\lambda h) = 0. \quad (11)$$

При $\varepsilon = 0$ каждое из них совпадает с уравнением

$$\lambda = -a \exp(-\lambda H), \quad (12)$$

которое, как отмечалось ранее, имеет решения вида $\lambda_{1,2} = \pm i\sigma$, $\sigma = a$, а остальные его корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \leq -\nu_0 < 0$, ($\nu_0 = \text{const} > 0$), если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$.

Поэтому для анализа устойчивости представляют интерес те корни уравнений (10), (11), которые при $\varepsilon = 0$ равны $\pm ia$. Вычисления с точностью до ε показывают, что такие корни уравнения (10) имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau_1(\varepsilon) \pm i\sigma_1(\varepsilon), \quad \tau_1(\varepsilon) = \frac{\pi(2a\gamma + 4c)}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \sigma_1(\varepsilon) = \frac{(8c - a\pi^2\gamma)}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Уравнение (11) имеет корни

$$\lambda_{3,4}(\varepsilon) = \tau_2(\varepsilon) \pm i\sigma_2(\varepsilon), \quad \tau_2(\varepsilon) = \frac{2\pi a\gamma}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \sigma_2(\varepsilon) = -\frac{\pi^2 a\gamma}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Лемма 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (8) асимптотически устойчиво, если $\gamma = -1$ и $2c - a < 0$. Если $\gamma = 1$ или при $\gamma = -1$ справедливо неравенство $2c - a > 0$, то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (8) неустойчиво.*

Замечание 1. Если оказалось, что $\gamma = -1$ и $2c - a = 0$, то для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости нулевого решения системы (8) следует учесть слагаемые более высокого порядка малости, т.е. при определении $\lambda_{1,2}(\varepsilon)$, $\lambda_{3,4}(\varepsilon)$ их вычисления следует продолжить до членов, имеющих порядок малости ε^2 и, возможно, далее.

3. Анализ задачи в нелинейной постановке. Нормальная форма. В этом разделе рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений (8), если $h = H(1 + \gamma\varepsilon)$, где число $\gamma \in \mathbb{R}$ будет выбрано далее в ходе анализа нелинейной системы, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Положим $t = (1 + \gamma\varepsilon)\tau$. В результате система дифференциальных уравнений (8) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= (1 + \gamma\varepsilon)(-ay_1 + F(y_1) + \varepsilon c(y_2 - y_1)), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= (1 + \gamma\varepsilon)(-ay_2 + F(y_2) + \varepsilon c(y_1 - y_2)), \end{aligned} \quad (13)$$

где теперь $y_j = x_j(\tau - H)$ при всех ε , $j = 1, 2$.

Естественно, что и система (13) имеет нулевое состояние равновесия $x_1 = x_2 = 0$, для которого реализуется близкий к критическому случай двух пар чисто мнимых корней характеристического уравнения. Остальные корни характеристического уравнения, отличные от тех, которые близки к корням $\pm ia$, лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 < 0$. Следовательно (см. [2, 9]), система дифференциальных уравнений (13) имеет четырехмерное гладкое инвариантное многообразие $M_4(\varepsilon)$. Все решения системы дифференциальных уравнений (13) из малой, но не зависящей от ε , окрестности нулевого состояния равновесия с течением времени приближаются к $M_4(\varepsilon)$ с экспоненциальной скоростью. Поэтому анализ поведения решений, принадлежащих $M_4(\varepsilon)$, может быть сведен к анализу соответствующей четырехмерной действительной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В комплексной форме записи она имеет следующий вид:

$$z'_1 = \varphi_1(z_1, z_2, \varepsilon), \quad z'_2 = \varphi_2(z_1, z_2, \varepsilon), \quad (14)$$

где правые части обоих уравнений гладко зависят от аргументов z_1, z_2, ε , если $|z_j| \leq \delta$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и $\varphi_j(0, 0, \varepsilon) = 0$. Достаточно часто систему (14) называют нормальной формой. При этом в ситуации общего положения вместо системы (14) достаточно рассматривать ее укороченный вариант, т.е. систему

$$z'_1 = \psi_1(z_1, z_2), \quad z'_2 = \psi_2(z_1, z_2), \quad (15)$$

где $\psi_j(z_1, z_2) = \varphi_j(z_1, z_2, 0)$.

Дальнейший анализ поведения решений системы дифференциальных уравнений (13), принадлежащих окрестности ее нулевого решения, основан на предварительном изучении системы (15). При этом правые части системы дифференциальных уравнений (15) будут определяться в ходе реализации алгоритма, который можно считать модификацией широко известного алгоритма Крылова—Боголюбова (см., например, [3, 6]).

Решения системы (13), принадлежащие $M_4(\varepsilon)$, будем искать в виде сумм

$$x_1(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}x_{1,1}(\tau, z_1, \bar{z}_1) + \varepsilon x_{1,2}(\tau, z_1, \bar{z}_1) + \varepsilon^{3/2}x_{1,3}(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + O(\varepsilon^2), \quad (16)$$

$$x_2(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}x_{2,1}(\tau, z_2, \bar{z}_2) + \varepsilon x_{2,2}(\tau, z_2, \bar{z}_2) + \varepsilon^{3/2}x_{2,3}(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

где $s = \varepsilon\tau$ — «медленное» время. Отметим, что также справедливы равенства

$$y_1(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}y_{1,1}(\tau, z_1, \bar{z}_1) + \varepsilon y_{1,2}(\tau, z_1, \bar{z}_1) + \varepsilon^{3/2}y_{1,3}(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + O(\varepsilon^2),$$

$$y_2(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}y_{2,1}(\tau, z_1, \bar{z}_1) + \varepsilon y_{2,2}(\tau, z_1, \bar{z}_1) + \varepsilon^{3/2}y_{2,3}(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + O(\varepsilon^2).$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} y_j(\tau, s, \varepsilon) &= x_j(\tau - H, s, \varepsilon), & j &= 1, 2, \\ y_{j,k}(\tau, z_j, \bar{z}_j) &= x_{j,k}(\tau - H, z_j, \bar{z}_j), & j &= 1, 2, \quad k = 1, 2, \\ y_{j,3}(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) &= x_{j,3}(\tau - H, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \\ x_{j,1}(\tau, z_j, \bar{z}_j) &= z_j q(\tau) + \bar{z}_j \bar{q}(\tau), \quad z_j = z_j(s), & j &= 1, 2, \quad q(\tau) = \exp(i\sigma\tau), \quad \sigma = a. \end{aligned}$$

Наконец, функции $x_{j,2}(\tau, z_j, \bar{z}_j)$ и $x_{j,3}(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ гладко зависят от своих аргументов, если $|z_j| < \delta$, $\delta > 0$. По переменной τ они имеют период $2\pi/\sigma$, и для них справедливо тождество

$$M_{\pm}(x_{2,j}) = M_{\pm}(x_{3,j}) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где

$$M_{\pm}(\varphi) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\pi/\sigma}^{\pi/\sigma} \varphi(\tau) \exp(\mp i\sigma\tau) d\tau$$

и $\varphi(\tau)$ — непрерывная $(2\pi/\sigma)$ -периодическая функция. Такой класс функций обозначим W .

Подставим суммы (16), (17) в первое и второе уравнения системы (13) и выделим слагаемые, имеющие одинаковый порядок малости относительно одинаковых степеней ε ($\varepsilon^{1/2}$, ε , $\varepsilon^{3/2}$ и т. д.). При $\varepsilon^{1/2}$ получим равенства в силу выбора первых слагаемых в каждой из формул (16), (17). Для функций $x_{j,2}$, $x_{j,3}$, $j = 1, 2$, получим следующие линейные неоднородные системы уравнений:

$$\frac{d}{d\tau}x_{1,2} + ay_{1,2} = a_2(y_{1,1})^2, \quad (18)$$

$$\frac{d}{d\tau}x_{2,2} + ay_{2,2} = a_2(y_{2,1})^2, \quad (19)$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x_{1,3} + ay_{1,3} &= -(z'_1 q + \bar{z}'_1 \bar{q}) - \gamma a(z_1 Q + \bar{z}_1 \bar{Q}) + \\ &+ aH(z'_1 Q + \bar{z}'_1 \bar{Q}) + 2a_2 y_{1,1} y_{1,2} + a_3 (y_{1,1})^3 + c(y_{2,1} - y_{1,1}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x_{2,3} + ay_{2,3} &= -(z'_2 q + \bar{z}'_2 \bar{q}) - \gamma a(z_2 Q + \bar{z}_2 \bar{Q}) + \\ &+ aH(z'_2 Q + \bar{z}'_2 \bar{Q}) + 2a_2 y_{2,1} y_{2,2} + a_3 (y_{2,1})^3 + c(y_{1,1} - y_{2,1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $Q = Q(\tau) = \exp(i\sigma\tau) \exp(-i\sigma H)$, $z_j = z_j(s)$, а штрихом обозначена производная по s .

Каждое из неоднородных дифференциальных уравнений (18), (19) имеет $(2\pi/\sigma)$ -периодическое решение, принадлежащее W :

$$x_{j,2}(\tau, z_j, \bar{z}_j) = \eta_2 q^2 z_j^2 + \bar{\eta}_2 \bar{q}^2 \bar{z}_j^2 + \eta_0 |z_j|^2,$$

где

$$\eta_2 = a_2 \left(\frac{1+2i}{5a} \right), \quad \eta_0 = \frac{2a_2}{a}, \quad aH = \frac{\pi}{2}, \quad j = 1, 2.$$

Каждое из уравнений (20), (21) имеет решение, принадлежащее W , если выполнено условие разрешимости в классе $(2\pi/\sigma)$ -периодических функций. Напомним это условие.

Условие разрешимости. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\tau} u + a\tilde{u} = f(\tau),$$

в котором $\tilde{u} = u(\tau - H)$, а функция $f(\tau)$ имеет период $2\pi/\sigma$ и непрерывна, имеет $(2\pi/\sigma)$ -периодическое решение, если выполнены два равенства

$$M_{\pm}(f) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\pi/\sigma}^{\pi/\sigma} f(\tau) \exp(\mp i\sigma\tau) d\tau = 0,$$

причем решение единственно.

Применяя условие разрешимости к каждому из уравнений (20), (21), получим два следующих равенства:

$$\begin{aligned} -z'_1 + i\gamma a z_1 - iaH z'_1 + (l_3 + il_4) z_1 |z_1|^2 - ic(z_2 - z_1) &= 0, \\ -z'_2 + i\gamma a z_2 - iaH z'_2 + (l_3 + il_4) z_2 |z_2|^2 - ic(z_1 - z_2) &= 0. \end{aligned}$$

При их выводе учтено, что $\sigma H = \pi/2$, $\exp(-i\sigma H) = -i$. Наконец,

$$l_3 + il_4 = -i \left(3a_3 + \frac{2}{5a} a_2^2 (11 + 2i) \right).$$

После преобразований с учетом того обстоятельства, что $\sigma = a$ ($aH = \pi/2$) получаем систему уравнений (нормальную форму) для комплекснозначных функций $z_1(s)$, $z_2(s)$. В нашем случае она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z'_1 &= g \left(\frac{\pi}{2} + i \right) z_1 + (l_1 + il_2) z_1 |z_1|^2 - d \left(\frac{\pi}{2} + i \right) (z_2 - z_1), \\ z'_2 &= g \left(\frac{\pi}{2} + i \right) z_2 + (l_1 + il_2) z_2 |z_2|^2 - d \left(\frac{\pi}{2} + i \right) (z_1 - z_2), \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\gamma a}{4 + \pi^2}, \quad l_1 = \frac{2}{5a(4 + \pi^2)} \left(2a_2^2(4 - 11\pi) - 15\pi a a_3 \right), \\ d &= \frac{4c}{4 + \pi^2}, \quad l_2 = -\frac{4}{5a(4 + \pi^2)} \left(15a a_3 + 2a_2^2(11 + \pi) \right). \end{aligned}$$

Следует различать следующие варианты: $l_1 < 0$, $l_1 > 0$, $l_1 = 0$. В рамках данной работы ограничимся рассмотрением первого из них.

Замечание 2. Одна из причин такого выбора варианта состоит в следующем. В [3, 6] для первоначальной модели «спрос–предложение» (т.е. уравнения (2)) с учетом запаздывания было показано, что при реализации случая, близкого к критическому ($h = H(1 + \gamma\varepsilon)$), локальная динамика решений сводится к анализу дифференциального уравнения

$$z' = (\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})z + (\tilde{l}_1 + i\tilde{l}_2)z|z|^2, \quad \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

т.е. к анализу нормальной формы, характерной для бифуркаций Андронова–Хопфа.

Если $\tilde{l}_1 < 0$, то при $\tilde{\alpha} > 0$ реализуется «мягкая» бифуркация рождения устойчивого предельного цикла. Если же $\tilde{l}_1 > 0$, то говорят о жестком возбуждении автоколебаний, когда при $\tilde{\alpha} < 0$ в окрестности еще асимптотически устойчивого состояния равновесия существует неустойчивый предельный цикл. Добавим, что при $\tilde{l}_1 = 0$ укороченная нормальная форма (23) не позволяет определить характер бифуркаций, и правая часть уравнения (23) требует уточнений и вычислений членов, имеющих более высокий порядок малости.

Подчеркнем также, что ситуация, когда $l_1 < 0$, характерна для уравнения (22) (см. [6]), если $D(p) = \alpha_0 p^{-m}$, $S(p) = \beta_0 p^k$, где α_0, β_0 — некоторые положительные постоянные, $m \geq 1$ и k — не очень большая положительная постоянная (например, $k = 1/2$). Такой выбор k, m достаточно приемлем для модели «спрос–предложение». Добавим также, что вариант $l_1 < 0$ обеспечивает диссипативность системы (22) (доказательство этого свойства можно найти в [5]).

Итак, далее будем считать, что $\gamma = 1$, $g > 0$, $l_1 < 0$. Постоянная d может иметь любой знак. Справедливости ради, можно отметить, что вариант $d > 0$ более характерен для задач макроэкономики. С экономической точки зрения вариант $d > 0$ ($c > 0$) означает, что падение цен у конкурента заставляет производителя также понижать цены. Такой выбор характерен, когда конкуренция носит сугубо экономический характер. Вместе с тем экономическая практика предоставляет нам примеры и противоположных вариантов ($d < 0$). Вариант $d = 0$ означает, что конкуренция отсутствует и две экономические системы развиваются независимо.

В системе дифференциальных уравнений (22) положим

$$s = \frac{2}{\pi g} \Theta, \quad z_j = \beta w_j, \quad \beta = \sqrt{-\frac{\pi g}{2l_1}}. \quad (24)$$

В результате замены (24) получим нормированный вариант нормальной формы (22):

$$\begin{aligned} w_1' &= (1 + i\kappa)w_1 - (1 + il)w_1|w_1|^2 - \nu(1 + i\kappa)(w_2 - w_1), \\ w_2' &= (1 + i\kappa)w_2 - (1 + il)w_2|w_2|^2 - \nu(1 + i\kappa)(w_1 - w_2), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\kappa = 2/\pi$, штрихом обозначена производная по Θ , $\nu = d/g$, $l = l_2/l_1$.

Замечание 3. Система дифференциальных уравнений (25) получена из системы (22) с помощью замен (24) при предположении, что $g > 0$, $l_1 < 0$. Если эти неравенства не выполнены, то нормировки (24) можно и нужно изменить, но в результате получим систему (25) аналогичной структуры, но, естественно, с иными коэффициентами. Тем не менее, подчеркнем еще раз, что далее изучается система дифференциальных уравнений (25).

4. Анализ нормальной формы. Перепишем систему (25) в действительной форме. Для этого положим

$$w_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad w_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2), \quad (26)$$

где $\rho_j = \rho_j(\Theta) > 0$, $\varphi_j = \varphi_j(\Theta) \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. В результате получаем вместо системы (25) следующую систему из четырех дифференциальных уравнений:

$$\rho_1' = \rho_1 - \rho_1^3 - \nu(\rho_2 \cos \psi - \rho_1 - \kappa \rho_2 \sin \psi), \quad (27)$$

$$\varphi_1' = \kappa - l\rho_1^2 - \nu \left(\kappa \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \psi - 1 \right) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin \psi \right), \quad (28)$$

$$\rho_2' = \rho_2 - \rho_2^3 - \nu(\rho_1 \cos \psi - \rho_2 + \kappa \rho_1 \sin \psi), \quad (29)$$

$$\varphi_2' = \kappa - l\rho_2^2 - \nu \left(\kappa \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \cos \psi - 1 \right) - \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin \psi \right). \quad (30)$$

Положим $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Вычитая из дифференциального уравнения (30) уравнение (28) и оставляя без изменений уравнения (27), (29), получим в результате систему дифференциальных уравнений для «медленных» переменных $\rho_1(\Theta)$, $\rho_2(\Theta)$, $\psi(\Theta)$, которую можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \rho_1 - \rho_1^3 + \nu(\rho_1 - \rho_2 \cos \psi + \kappa \rho_2 \sin \psi), \\ \rho_2' &= \rho_2 - \rho_2^3 + \nu(\rho_2 - \rho_1 \cos \psi - \kappa \rho_1 \sin \psi), \\ \psi' &= l(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \nu \left(\kappa \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \cos \psi + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sin \psi \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Состояниям равновесия системы дифференциальных уравнений (31) соответствуют периодические решения системы дифференциальных уравнений (27)–(30), а также комплексной системы дифференциальных уравнений (25). Последние замечания вытекают из замены (26), которая связывает системы (25) и (27)–(30).

В результате вопрос о нахождении циклов свелся к анализу следующей алгебро-тригонометрической системы уравнений:

$$\nu\rho_2(\cos\psi - \kappa\sin\psi) = (1 + \nu)\rho_1 - \rho_1^3, \quad (32)$$

$$\nu\rho_1(\cos\psi + \kappa\sin\psi) = (1 + \nu)\rho_2 - \rho_2^3, \quad (33)$$

$$l(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \nu \left(\kappa \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \cos\psi + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sin\psi \right) = 0. \quad (34)$$

Отметим, что удобно и эффективно выделить два класса возможных решений у системы (32)–(34). Первый из них содержит те решения, для которых характерно равенство $\rho_1 = \rho_2$, второй — те, для которых эти компоненты различны, $\rho_1 \neq \rho_2$.

Пусть $\rho = \rho_1 = \rho_2$ ($\rho_1, \rho_2 > 0$). Тогда из уравнения (34) вытекает, что $\sin\psi = 0$. Следовательно, $\psi = 0$ или $\psi = \pi$.

Если $\psi = 0$, то находим $\rho > 0$ как решение уравнения

$$(1 + \nu) - \rho^2 = \nu \quad \Rightarrow \quad \rho = 1.$$

Во втором случае, когда $\psi = \pi$, находим соответствующее ρ из уравнения

$$(1 + \nu) - \rho^2 = -\nu \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{1 + 2\nu}.$$

Итак, первый вариант ($\rho_1 = \rho_2$) привел к нахождению двух состояний равновесия системы (32)–(34):

$$E_1 : \quad \rho_1 = \xi_1, \quad \rho_2 = \xi_2, \quad \xi_1 = \xi_2 = 1, \quad \psi = \psi_* = 0;$$

$$E_2 : \quad \rho_1 = \xi_1, \quad \rho_2 = \xi_2, \quad \xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1 + 2\nu}, \quad \psi = \psi_* = \pi.$$

Состояние равновесия E_1 существует при всех ν и κ , а состояние равновесия E_2 существует, если $1 + 2\nu > 0$, иначе $\nu \in (-1/2, 0) \cup (0, \infty)$. Случай $\nu = 0$ можно исключить из анализа. Такой вариант означает, что в первоначальной постановке (см. (7)) $c = 0$. В свою очередь, $c = 0$ соответствует анализу двух не взаимодействующих экономик (отсутствию конкуренции).

Перейдем теперь к анализу устойчивости состояний равновесия E_1, E_2 . Для этого используем известную теорему А. М. Ляпунова об устойчивости по линейному (первому) приближению. Для этого найдем матрицу Якоби $A = \{a_{j,k}\}$ с последующей подстановкой в нее координат состояний равновесия. Отметим, что в нашем случае

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - 3\rho_1^2 + \nu, & a_{12} &= -\nu \cos\psi + \nu\kappa \sin\psi, & a_{13} &= \nu\rho_2 \sin\psi + \nu\kappa\rho_2 \cos\psi, \\ a_{21} &= -\nu \cos\psi - \kappa\nu \sin\psi, & a_{22} &= 1 - 3\rho_2^2 + \nu, & a_{23} &= \nu\rho_1 \sin\psi - \nu\kappa\rho_1 \cos\psi, \\ a_{31} &= 2l\rho_1 + \nu \left(-\kappa \left(\frac{\rho_2}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2} \right) \cos\psi + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\rho_2}{\rho_1^2} \right) \sin\psi \right), \\ a_{32} &= -2l\rho_2 + \nu \left(\kappa \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2^2} \right) \cos\psi + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2^2} \right) \sin\psi \right), \\ a_{33} &= -\nu\kappa \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \sin\psi + \nu \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \cos\psi. \end{aligned}$$

После подстановки координат состояний равновесия E_1, E_2 получаем две соответствующие им матрицы Якоби

$$A_1 = \begin{pmatrix} \nu - 2 & -\nu & \nu\kappa \\ -\nu & \nu - 2 & -\nu\kappa \\ 2l - 2\nu\kappa & -2l + 2\nu\kappa & 2\nu \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 - 5\nu & \nu & -\nu\kappa\rho \\ \nu & -2 - 5\nu & \nu\kappa\rho \\ 2l\rho + 2\nu\kappa/\rho & -2l\rho - 2\nu\kappa/\rho & -2\nu \end{pmatrix},$$

где $\rho = \sqrt{1 + 2\nu}$.

Анализ устойчивости состояния равновесия E_1 предполагает изучение расположения собственных чисел матрицы A_1 . Нетрудно найти, что $\lambda_3 = -2$, а два оставшихся корня характеристического уравнения находим как корни квадратного уравнения

$$P_a(\lambda) = \lambda^2 + p_a\lambda + q_a = 0,$$

где $p_a = 2(1-2\nu)$, $q_a = 4\nu[(\kappa^2+1)\nu - (1+l\kappa)]$. Анализ последнего квадратного уравнения приводит к следующему утверждению.

Лемма 2. Система дифференциальных уравнений (32)–(34) при всех значениях параметров ν и l имеет состояние равновесия $E_1 : \rho_1 = \rho_2 = 1, \psi = 0$. Оно асимптотически устойчиво, если

$$p_a = 2(1-2\nu) > 0, \quad q_a = 4\nu[(\kappa^2+1)\nu - (1+l\kappa)] > 0.$$

Состояние равновесия E_1 неустойчиво, если хотя бы один из коэффициентов последнего квадратного трехчлена $P_a(\lambda)$ отрицателен.

Для анализа устойчивости состояния равновесия E_2 рассмотрим матрицу A_2 . Нетрудно убедиться, что одно из ее собственных чисел $\lambda_3 = -2(1+2\nu)$, т.е. $\lambda_3 < 0$ при всех ν , когда E_2 существует. Остальные собственные числа находим как корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + p_p \lambda + q_p = 0,$$

где $p_p = 2(1+4\nu)$, $q_p = 4\nu[\kappa(1+2\nu)l + 1 + 3\nu + \kappa^2\nu]$.

Лемма 3. Система дифференциальных уравнений (32)–(34) имеет состояние равновесия E_2 , если $1+2\nu > 0$. Оно асимптотически устойчиво, если $p_p > 0$, $q_p > 0$.

Отметим, что в типичной ситуации, когда $\nu > 0$, $l > 0$ (см. [6]) состояние равновесия E_2 всегда существует и асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании состояний равновесия у системы (32)–(34), для которых $\rho_1 \neq \rho_2$, т.е. заведомо отличных от E_1, E_2 . Для этого рассмотрим уравнения (32), (33), из которых выразим $\cos \psi$, $\sin \psi$. Это можно сделать, если эти два уравнения рассматривать как систему из двух линейных уравнений относительно $\cos \psi$, $\sin \psi$. При этом ее определитель

$$\Delta = 2\kappa\nu^2\rho_1\rho_2 \neq 0,$$

если $\nu \neq 0$. Дополнительные определители системы (32), (33)

$$\Delta_1 = \nu\kappa[(1+\nu)(\rho_1^2 + \rho_2^2) - (\rho_1^4 + \rho_2^4)], \quad \Delta_2 = \nu(\rho_1^2 + \rho_2^2)[(1+\nu) - (\rho_1^2 + \rho_2^2)].$$

Следовательно,

$$\cos \psi = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \sin \psi = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

В более подробной записи получаем следующие равенства:

$$\cos \psi = \frac{(1+\nu)(\rho_1^2 + \rho_2^2) - (\rho_1^4 + \rho_2^4)}{2\nu\rho_1\rho_2}, \quad \sin \psi = \frac{(\rho_2^2 - \rho_1^2)[(1+\nu) - (\rho_1^2 + \rho_2^2)]}{2\kappa\nu\rho_1\rho_2}.$$

Если теперь полученные равенства для $\cos \psi$, $\sin \psi$ подставить в уравнение (34), то после преобразований (например, сокращений на $\rho_2^2 - \rho_1^2 \neq 0$) получим систему алгебраических уравнений для определения положительных величин ρ_1, ρ_2 :

$$2\kappa l \rho_1^2 \rho_2^2 = \kappa^2[(1+\nu)(\rho_1^2 + \rho_2^2) - (\rho_1^4 + \rho_2^4)] + (\rho_1^2 + \rho_2^2)[(1+\nu) - (\rho_1^2 + \rho_2^2)], \quad (35)$$

$$4(\nu\kappa)^2 \rho_1^2 \rho_2^2 = \kappa^2[(1+\nu)(\rho_1^2 + \rho_2^2) - (\rho_1^4 + \rho_2^4)]^2 + (\rho_2^2 - \rho_1^2)^2[(1+\nu) - (\rho_1^2 + \rho_2^2)]^2. \quad (36)$$

Отметим, что уравнение (36) — это следствие основного тригонометрического тождества.

Положим

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = z, \quad \rho_1\rho_2 = w. \quad (37)$$

Используя замены (37), уравнение (35) можно записать следующим образом:

$$2\kappa l w^2 = \kappa^2(zM(z) + 2w^2) + zM(z), \quad (38)$$

где $M(z) = 1 + \nu - z$. Из равенства (38), если $l - \kappa \neq 0$, можно выразить w^2 :

$$w^2 = \frac{b}{2}zM(z), \quad b = \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa(l - \kappa)}. \quad (39)$$

Если же $l = \kappa$, то $M(z) = 0$ или иначе $z = 1 + \nu$.

Если теперь в уравнении (36) заменить $\rho_1^2 \rho_2^2 = w^2$ на правую часть равенства (39), то в результате получим такой его вариант:

$$2(\nu\kappa)^2 bzM(z) = \kappa^2(1+b)^2 z^2 M^2(z) + (z - 2bM(z))zM^2(z),$$

которое эквивалентно двум равенствам

$$M(z) = 0, \quad (40)$$

или

$$\kappa^2(1+b^2)zM(z) + (z - 2bM(z))M(z) = 2(\nu\kappa)^2 b. \quad (41)$$

Уравнение (41) можно записать в виде квадратного уравнения

$$P_2(z, \nu, b) = P_2(z) = p_2 z^2 - p_1 z + p_0 = 0, \quad (42)$$

где $p_2 = p + 2b$, $p_1 = (1 + \nu)(p + 4b)$, $p_0 = 2b((1 + \nu)^2 + \kappa^2 \nu^2)$, $p = \kappa^2(1 + b)^2 + 1$ ($p \geq 1$ при всех κ и b). Напомним, что $b = (\kappa^2 + 1)/(\kappa(l - \kappa))$, т.е. зависит от l — второго параметра в данной задаче.

Рассмотрим сначала равенство (40). Из него вытекает, что $z = 1 + \nu$ и, в частности, $w^2 = 0$ (см. равенство (39)), если $l \neq \kappa$. Случай $l = \kappa$ следует рассматривать как особый; он реализуется крайне редко. Тем не менее и в последнем случае $w = 0$. Итак, в обоих вариантах получаем, что либо $\rho_1 = 0$, либо $\rho_2 = 0$. В данной задаче это посторонние решения.

Итак, основной содержательный вариант может быть реализован, если найти корни квадратного уравнения (42). При этом у данного уравнения интерес представляют лишь положительные корни ($\rho_1^2 + \rho_2^2 = z$). Еще одно ограничение возникает из-за равенства (39). Если $b > 0$, то $1 + \nu - z > 0$, т.е. $z < 1 + \nu$. При $b < 0$ получаем неравенство $z > 1 + \nu$.

Отметим также, что интерес для задачи представляют не неизвестные z и w ($z > 0$, $w > 0$), а ρ_1 , ρ_2 как положительные корни системы алгебраических уравнений (37). При этом z — один из подходящих корней квадратного уравнения (42), а равенство (39) позволяет найти w .

Очевидно, что система алгебраических уравнений (37) имеет решения

$$\rho_1 = \xi_1 = \frac{\sqrt{z+2w} + \sqrt{z-2w}}{2}, \quad \rho_2 = \xi_2 = \frac{\sqrt{z+2w} - \sqrt{z-2w}}{2} \quad (43)$$

или

$$\rho_1 = \xi_2 = \frac{\sqrt{z+2w} - \sqrt{z-2w}}{2}, \quad \rho_2 = \xi_1 = \frac{\sqrt{z+2w} + \sqrt{z-2w}}{2}, \quad (44)$$

если, конечно, $z - 2w > 0$. Итак, в принципе, можем найти решения (43), (44), если z — корень квадратного уравнения (42), который удовлетворяет одному из следующих условий: $z \in (0, 1 + \nu)$, если $b > 0$, или $z \in (\nu_*, \infty)$, если $b < 0$, где $\nu_* = \max(0, 1 + \nu)$.

Анализ квадратного уравнения (42) был бы не очень сложной задачей, если бы не некоторые обстоятельства. Первое из них — это зависимость его коэффициентов от параметров. Во-вторых, достаточно сложный отбор решений, который обеспечивает содержательность равенств (43), (44). Поэтому анализ решений квадратного уравнения (42) был проведен численно, с использованием компьютера и результатов численного анализа из [6].

В заключение отметим, что определение величин ξ_1 , ξ_2 при отыскании координат состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (31), для которых $\xi_1 \neq \xi_2$ представляет основную трудность. Третья координата определяется достаточно просто с помощью формул для $\cos \psi$ и $\sin \psi$. Пусть найдены величины ξ_1 , ξ_2 (см. (43), (44)) и, естественно, z и w . Тогда при выборе варианта решения (43) получаем, что

$$\cos \psi = \frac{(1 + \nu)z - z^2 + 2w^2}{2\nu w}, \quad \sin \psi = -\frac{\sqrt{z^2 - 4w^2}(1 + \nu - z)}{2\kappa\nu w}.$$

Во втором варианте (см. (44)) получаем, что

$$\cos \psi = \frac{(1 + \nu)z - z^2 + 2w^2}{2\nu w}, \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{z^2 - 4w^2}(1 + \nu - z)}{2\kappa\nu w}.$$

Две пары последних равенств, естественно дают два варианта значений $\psi = \psi_*$.

Далее состояния равновесия, отличные от E_1 , E_2 , будем обозначать E_a («асимметричные» состояния равновесия). Подчеркнем, что их всегда два, когда они существуют. Состояние равновесия, определяемое первым вариантом формул, будем обозначать E_{a3} , а второе — E_{a4} .

5. Некоторые результаты численного анализа. В этом разделе приведем некоторые численные результаты анализа задачи об определении координат асимметричного состояния равновесия, т.е. состояния равновесия, для которого $\xi_1 \neq \xi_2$. Этот анализ, естественно, зависит от выбора двух параметров, т.е. ν и l . В свою очередь, $l = l_2/l_1$, где комплексная постоянная $l_1 + il_2$ — коэффициент при нелинейном слагаемом в уравнениях (22) (ее часто называют ляпуновской величиной).

Далее численные результаты будут приведены при уточненном выборе правых частей системы дифференциальных уравнений. Пусть

$$D(p_h) = p_h^{-k}, \quad S(p_h) = p_h^m,$$

где k, m — положительные числа. Как было показано в [6] при анализе бифуркаций Андронова—Хопфа у уравнения (2) (см. [6]) для ляпуновских величин

$$l_1 = l_1(m, k) = \pi \frac{k+m}{4+\pi^2} \left[\frac{4-11\pi}{5\pi} (k-m+1)^2 + k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2 \right],$$

$$l_2 = l_2(m, k) = 2 \frac{k+m}{4+\pi^2} \left[k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2 - (k-m+1)^2 \frac{11+\pi}{5} \right].$$

При таком выборе $D(p_h)$, $S(p_h)$ и, следовательно, $l_1, l_2, l = l_2/l_1$ можно продемонстрировать, что вспомогательная нормальная форма (31) может иметь состояния равновесия, для которых $\rho_1 \neq \rho_2$ ($\xi_1 \neq \xi_2$). Приведем два соответствующих примера.

Пусть $k = 2, m = 0,02$. В таком случае оказалось, что

$$l_1 = -2,45937, \quad l_2 = -3,84979, \quad l = 1,56535.$$

Выберем $\nu = 0,13$. В таком случае оказалось, что

$$\xi_1 \approx 1,05766, \quad \xi_2 \approx 0,07859, \quad \psi_* \approx -0,43118 \text{ рад или } -24,70^\circ.$$

Нетрудно привести и еще один пример. Если $k = 2, m = 0,07, \nu = 1,49$, то

$$\xi_1 \approx 1,03265, \quad \xi_2 \approx 0,96569, \quad \psi_* \approx -0,031 \text{ рад или } -1,82^\circ.$$

Конечно, возможен более детальный численный анализ, и можно привести иные примеры, когда нормальная форма (31) имеет состояния равновесия третьего типа ($\rho_1 \neq \rho_2$); в рамках данной работы ограничимся этими двумя примерами.

6. Итоги анализа нормальной формы. Из предыдущих построений вытекает, что результаты анализа состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (31) позволяют сделать некоторые выводы для нормальной формы (25), а затем уже и для основной системы (8), если $h = H(1 + \varepsilon)$.

Пусть система дифференциальных уравнений (31) имеет состояние равновесия $E_*(\xi_1, \xi_2, \psi_*)$ (это может быть E_1 или E_2 , а также $E_{a,3}$ или $E_{a,4}$). Тогда такому состоянию равновесия соответствует однопараметрическое семейство периодических решений комплексной системы дифференциальных уравнений (25) (состояний равновесия в исключительной ситуации) следующего вида:

$$w_1(\Theta, \varphi_0) = \xi_1 \exp(i\sigma_* \Theta + i\varphi_0),$$

$$w_2(\Theta, \varphi_0) = \xi_2 \exp(i\sigma_* \Theta + i\psi_* + i\varphi_0),$$

где $\varphi_0 \in R$, ψ_* — третья координата состояния равновесия S_* . Наконец, используя уравнение (28)

$$\sigma_* = \kappa - l\xi_1^2 + \nu \left[\kappa \left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \cos \psi_* - \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin \psi_* \right]. \quad (45)$$

Пусть E_* — одно из грубых состояний равновесия системы (31), т.е. E_* — это либо E_1 , либо E_2 , либо $E_{a,3}$, $E_{a,4}$. Напомним, что состояние равновесия называют грубым, если спектр его устойчивости не имеет собственных значений, принадлежащих мнимой оси. В нашем случае собственные значения матрицы Якоби, вычисленной при координатах, равных координатам состояний равновесия, таковы, что $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$. Подчеркнем, что условия устойчивости и как следствие условия грубости для состояний равновесия E_1, E_2 были получены ранее (см. раздел 2). Для $E_{a,3}, E_{a,4}$ условия грубости следует проверять численно.

Из результатов работ [2–6] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Грубому состоянию равновесия E_* системы (31) соответствует предельный цикл $C_*(\varepsilon)$ системы (8), в которой $h = H(1 + \varepsilon)$ ($H = \pi/(2a)$). Этот цикл образован однопараметрическим семейством периодически решений следующего вида (см. (16), (17)):

$$\begin{aligned} p_1(t, \varepsilon) &= p_0 + x_1(t, \varepsilon), \quad p_2(t, \varepsilon) = p_0 + x_2(t, \varepsilon), \\ x_1(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \xi_1 \beta \left[\exp(i\sigma(\varepsilon)t + i\Phi_0) + \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i\Phi_0) \right] + o(\varepsilon^{1/2}), \\ x_2(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \xi_2 \beta \left[\exp(i\sigma(\varepsilon)t + i\Phi_0 + i\psi_*) + \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i\Phi_0 - i\psi_*) \right] + o(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Здесь ψ_* — третья координата состояния равновесия нормальной формы (31),

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma + \left(\frac{\pi g}{2} \sigma_* - \sigma \right) \varepsilon + o(\varepsilon),$$

где постоянные β , σ_* были определены ранее (см. равенства (24), (45)), а Φ_0 — произвольная действительная постоянная.

Наконец, цикл $C_*(\varepsilon)$ орбитально асимптотически устойчив, если состояние равновесия E_* асимптотически устойчиво, и он неустойчив, если E_* неустойчиво.

Отметим особо, что состоянию равновесия E_1 соответствует цикл $C_1(\varepsilon)$, у которого $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\psi_* = 0$, т.е. получаем, что $x_1(t, \varepsilon) = x_2(t, \varepsilon)$. Такой цикл принято называть *синхронным*, или циклом Андронова—Хопфа (см. [4, 8]). Если рассматриваем цикл $C_2(\varepsilon)$, отвечающий состоянию равновесия E_2 , то $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1 + 2\nu}$ ($1 + 2\nu > 0$) и $\psi_* = \pi$. Такой цикл принято называть *противофазным*, или циклом Гюйгенса (см. [1, 4, 7, 8]).

Наконец, как было показано, существуют и циклы третьего типа, когда $\xi_1 \neq \xi_2$, $\psi_* \neq 0$, $\psi_* \neq \pi$. Такие циклы можно назвать *асимметричными* (см., например, [4, 5]).

7. Заключение. В работе рассмотрена модификация известной модели «спрос–предложение». К стандартной версии был добавлен учет двух факторов: запаздывание спроса и предложения, а также фактор наличия конкуренции. Полученная таким образом система из двух уравнений с отклоняющимся аргументом показала, что динамика решений такой системы достаточно богата и естественна с экономической точки зрения.

У изучаемой в данной работе математической модели существует состояние равновесия $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 > 0$, которое в зависимости от параметров системы может быть устойчивым или неустойчивым. Напомним, что в первоначальном варианте модели это было исключено: состояние экономического равновесия всегда было устойчиво. В рассматриваемой системе дифференциальных уравнений с запаздыванием возможны циклы трех видов: синхронный, противофазный и асимметричный. В циклах последнего типа амплитуды колебаний подсистем могут быть различными. Особо отметим, что в рассматриваемом варианте модели существует и устойчив противофазный цикл, если $c > 0$, а остальные параметры изучаемой модели изменяются в широком и естественном диапазоне. Тем самым такой цикл достаточно типичен.

Такой вывод совпадает с выводом Гюйгенса, когда он изучал синхронизацию колебаний двух идентичных маятников и экспериментально показал, что для них характерны противофазные колебания. Конечно, задача Гюйгенса и данная задача внешне далеки друг от друга, но выводы во многом аналогичны.

Полученные в статье результаты базируются на методе изучения нелинейных динамических систем, в первую очередь, на методах интегральных многообразий и теории нормальных форм.

Экономическая интерпретация полученных результатов достаточно прозрачна. Например, наличие устойчивого цикла Андронова—Хопфа означает, что колебания двух экономик происходят синхронно: подъем первой экономики сопровождается подъемом экономики второго субъекта экономической деятельности. Реализация устойчивого противофазного цикла означает, что подъем экономики первого субъекта сопровождается депрессией конкурента, а затем их роли меняются.

Особый интерес представляют асимметричные циклы, когда колебания подсистем происходят с разной амплитудой, причем разность фаз этих колебаний отлична от 0 и π . Внешне эти колебания можно интерпретировать как несинхронные. На самом деле они представляют собой более сложный вариант синхронной динамики, когда синхронизация проявляет себя достаточно нестандартным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.
2. Куликов А. Н. Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 186. — С. 57–66.
3. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Математическая модель рынка и эффект запаздывания// в кн.: Математика в Ярославском университете: Сборник обзорных статей к 40-летию математического факультета. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2016. — С. 132–151.
4. Куликов Д. А. Автономные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов// Изв. вузов. Прикл. нелин. дин. — 2006. — 14, № 5. — С. 120–132.
5. Куликов Д. А. Автономные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабосвязанных осцилляторах// Прикл. мат. мех. — 2010. — 74, № 4. — С. 543–559.
6. Куликов Д. А. Эффект запаздывания и экономические циклы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 217. — С. 41–50.
7. Пиковский А., Розенблум М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное явление. — М.: Техносфера, 2003.
8. Kulikov A. N., Kulikov D. A., Radin M. A. Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes's business cycle model// Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — 25, № 1. — P. 93–111.
9. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
10. Puu T. Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. — New York: Springer-Verlag, 2000.
11. Zhang W. B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета №075-02-2025-1636).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич (Kulikov Anatolii Nikolaevich)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль
(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич (Kulikov Dmitrii Anatol'evich)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль
(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич (Frolov Dmitrii Gennadievich)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль
(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)
E-mail: supfro@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 74–81
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-74-81

УДК 517.538, 517.574

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (НЕ)ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО РОСТА

© 2025 г. Э. Б. МЕНЬШИКОВА, Б. Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Приведена одна простая теорема единственности для целых функций f на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с верхними ограничениями на рост её модуля $\ln |f| \leq M$. Результат формулируется исключительно в терминах радиальной проинтегрированной считающей функции N_Z распределения точек Z , где $f(Z) = 0$. В обратном направлении получена достаточно общая теорема неединственности о существовании ненулевой целой функции f , обращающейся в нуль на Z , с ограничениями на рост $\ln |f|$ через малые сдвиги считающей функции N_Z .

Ключевые слова: целая функция, распределение корней, субгармоническая функция, риссовское распределение масс, теорема единственности, теория Неванлинны.

DISTRIBUTIONS OF (NON)UNIQUENESS FOR ENTIRE FUNCTIONS OF ARBITRARY GROWTH

© 2025 Е. В. MENSHIKOVA, B. N. KHABIBULLIN

ABSTRACT. A simple uniqueness theorem is given for entire functions f on the complex plane $\mathbb{C}$ with upper constraints on the growth of its module $\ln |f| \leq M$. The result is formulated exclusively in terms of the radial integral counting function N_Z of the distribution of points Z , such that $f(Z) = 0$. In the opposite direction, a rather general nonuniqueness theorem is obtained on the existence of a nonzero entire function f that vanishes on Z , with restrictions on the growth of $\ln |f|$ by small shifts of the countable function N_Z .

Keywords and phrases: entire function, distribution of zeros, subharmonic function, Riesz distribution of masses, uniqueness theorem, Nevanlinna theory.

AMS Subject Classification: 30D20, 30C15, 31A05

1. Введение. Символом $\emptyset$ обозначаем *пустое множество*, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество всех *натуральных чисел*, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ — *расширение* множества $\mathbb{N}_0$ со стандартным отношением порядка $\leq$ и точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$, для которой $n \leq +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leq$ рассматриваем и как *вещественную ось* в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ и с *замкнутой положительной полуосью* $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, а $\mathbb{R}_*^+ := \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ — *открытая положительная полуось* и $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — *проколота в нуле комплексная плоскость*. Порядковое пополнение $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями $+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \emptyset \notin \mathbb{R}$ и $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \emptyset \notin \mathbb{R}$ определяет её *расширение* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где, наряду со стандартными операциями, полагаем $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0$; $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Работа Э. Б. Меньшиковой (раздел 3) выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002). Работа Б. Н. Хабибуллина (разделы 1, 2) выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код темы FMRS-2025-0010).

Как и в [1], величина $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* при $x \in \overline{\mathbb{R}}^+$, *строго* положительна, когда $0 \neq x \in \overline{\mathbb{R}}^+$, *отрицательна* при $x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$, *строго* отрицательна при $0 \neq x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$; $x^+ := \sup\{0, x\} \in \overline{\mathbb{R}}^+$ — *положительная часть* величины $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x^- := (-x)^+ \in \overline{\mathbb{R}}^+$ — её *отрицательная часть*.

Символом 0, наряду с $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $0 \in \mathbb{C}$, могут обозначаться и нулевые функции, меры и т. п., а величина $c \in \overline{\mathbb{R}}$ может рассматриваться и как *функция, тождественно равная c*. Так, для функции $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и $c \in \overline{\mathbb{R}}$ запись $f = c$ на X означает, что $f(x) = c$ для всех $x \in X$; будем писать $f \neq c$ на X , если найдётся $x_f \in X$, для которого $f(x_f) \neq c$.

Функция $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* (соответственно *строго* положительна, *отрицательна*, *строго* отрицательна), если $f(X) \subseteq \mathbb{R}^+$ (соответственно $f(X) \subseteq \mathbb{R}_*^+$, $f(X) \subseteq -\mathbb{R}^+$, $f(X) \subseteq -\mathbb{R}_*^+$). Если $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ и для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$), то функция f — *возрастающая* (соответственно *строго* возрастающая) на X ; функция f *убывающая* (соответственно *строго* убывающая) на X , если противоположная функция $-f$ возрастающая (соответственно *строго* возрастающая) на X .

Интервалы с концами $a \leq b \in \overline{\mathbb{R}}$ — это *отрезки* $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$, множества $(a, b] := [a, b] \setminus a$, $[a, b) := [a, b] \setminus b$ и (открытые) *промежутки* $(a, b) := [a, b] \setminus a$ и $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$.

Через $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, а также $\partial\mathbb{D} := \partial\overline{\mathbb{D}} := \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$ обозначаем соответственно открытый и замкнутый *единичные круги*, а также *единичную окружность* с центром в нуле. При $r \in \mathbb{R}^+$, таким образом, $r\mathbb{D}$ и $r\overline{\mathbb{D}}$, а также $r\partial\mathbb{D} = r\partial\overline{\mathbb{D}}$ — соответственно открытый и замкнутый круги, а также *окружность радиуса r* с центром в нуле.

Пусть X — некоторое множество (точек). Любую функцию $Z : X \rightarrow \overline{\mathbb{N}}_0$ называем *распределением точек на X с кратностями* $Z(x) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ *точек* $x \in X$ *в* Z . Каждому подмножеству $S \subseteq X$ можно поставить в соответствие *сужение* этого распределения точек на S , обозначаемое $Z|_S : S \rightarrow \overline{\mathbb{N}}_0$ и определяемое правилом $Z|_S(x) = Z(x)$ для каждого $x \in S$.

Если f — голоморфная на *открытом множестве* $O \subseteq \mathbb{C}$ функция, то распределение точек

$$\text{Zero}_f : z \mapsto \sup_{z \in O} \left\{ p \in \mathbb{R} \mid \limsup_{\substack{w \rightarrow z \\ w \neq z}} \frac{|f(w)|}{|w - z|^p} < +\infty \right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0$$

называем *распределением корней* функции f на O . Распределение корней $Z|_O$ нулевой функции на O — функция, равная $+\infty$. В случае, когда $D \subseteq \mathbb{C}$ — *область*, т.е. открытое связное множество, существование голоморфной функции $f \neq 0$ на D с распределением корней $\text{Zero}_f = Z$ эквивалентно конечности $Z(D) \subseteq \mathbb{N}_0$ распределения точек Z и дискретности в D множества всех точек $z \in D$ с ненулевой кратностью $Z(z) > 0$.

Пусть Z — распределение точек на области $D \subseteq \mathbb{C}$, а $M : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — функция на D . Если для голоморфной на D функции f из неравенств $\ln |f| \leq M$ и $\text{Zero}_f \geq Z$ на $\mathbb{C}$ следует $f = 0$, т.е. $\text{Zero}_f = +\infty$, то Z — *распределение единственности* по функции M . В противном случае Z — *распределение неединственности* по функции M . Распределение точек $Z|_O = +\infty$ на D — распределение единственности по любой функции M .

Радиальная считающая функция распределения точек Z на $\mathbb{C}$ — это функция

$$Z^r : t \mapsto \sum_{|z| \leq t} Z(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+,$$

а *радиальная проинтегрированная считающая функция* по Р. Неванлинне определяется как

$$N_Z(r) = \int_0^r \frac{Z^t(t) - Z(0)}{t} dt + Z(0) \ln r \in \overline{\mathbb{R}}^+ \quad \text{при } r \in \mathbb{R}_*^+. \quad (1)$$

Основная проблематика статьи — выявление распределений (не)единственностей Z на $\mathbb{C}$ по общим функциям M через их радиальную проинтегрированную считающую функцию N_Z .

2. Теорема единственности для произвольных распределений точек. Для функций $M : r\partial\mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ определим *радиальное интегральное среднее* (см. [6, определение 2.6.7])

$$C_M : r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta}) d\theta \quad (2)$$

по окружности $r\partial\mathbb{D}$ при существовании этого интеграла Римана или Лебега со значением, вообще говоря, в $\overline{\mathbb{R}}$, т.е. когда функция M интегрируема на окружностях с центром в нуле.

Следующая теорема в целом элементарна.

Теорема 1 (единственности). Пусть Z — распределение точек на $\mathbb{C}$ и для некоторой неограниченной в $\mathbb{R}^+$ последовательности $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ чисел $r_n \in \mathbb{R}^+$ функция $M : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема на окружностях $r_n\partial\mathbb{D}$ радиусов r_n с центром в нуле. Если верхний предел

$$\limsup_{r_n \rightarrow +\infty} (N_Z(r_n) - C_M(r_n)) = +\infty, \quad (3)$$

то Z — распределение единственности по функции M .

Доказательство. Если $Z^*(r) = +\infty$ для какого-нибудь $r \in \mathbb{R}^+$, то по классическим теоремам единственности Z — распределение единственности по любой функции M безотносительно к условию (3). Осталось рассмотреть случай конечной считающей функции $Z^*(r) < +\infty$ при всех $r \in \mathbb{R}^+$. Сужение распределения точек Z на начало координат обозначим через

$$Z|_0 : z \mapsto \begin{cases} Z(0) & \text{при } z = 0, \\ 0 & \text{при } z \neq 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0. \quad (4)$$

По одной из теорем Вейерштрасса существует целая функция f_0 с распределением корней $\text{Zero}_{f_0} \stackrel{(4)}{=} Z - Z|_0$, для которой $f_0(0) \neq 0$, и по классической формуле Пуассона—Йенсена

$$C_{\ln|f_0|} = N_{Z-Z|_0} + \ln|f_0(0)|. \quad (5)$$

Если f — целая функция, для которой $\text{Zero}_f \geq Z$ на $\mathbb{C}$ и $\ln|f| \leq M$, то имеет место представление

$$f(z) = z^{Z(0)} f_0(z) h(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}, \text{ где } h — \text{целая функция}, \quad (6)$$

а также одновременно, после интегрирования неравенства $\ln|f| \leq M$,

$$C_{\ln|f|} + C_{\ln|h|} \leq C_M \quad \text{на } \mathbb{R}^+, \quad (7)$$

где из представления (6) для первого слагаемого в левой части неравенства имеем равенства

$$\begin{aligned} C_{\ln|f|}(r) &\stackrel{(6)}{=} C_{\ln|f_0|}(r) + Z(0) \ln r \stackrel{(5)}{=} N_{Z-Z|_0}(r) + \ln|f_0(0)| + Z(0) \ln r = \\ &= N_{Z-Z|_0}(r) + Z(0) \ln r + \ln|f_0(0)| \stackrel{(4),(1)}{=} N_Z(r) + \ln|f_0(0)| \quad \text{при всех } r \in \mathbb{R}_*^+. \end{aligned}$$

Последнее согласно (7) влечёт за собой неравенства

$$C_{\ln|h|} \stackrel{(7)}{\leq} C_M - N_Z - \ln|f_0(0)| \quad \text{на } \mathbb{R}_*^+.$$

Переходя здесь к нижнему пределу по $r_n \rightarrow +\infty$, получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} C_{\ln|h|}(r_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (C_M(r_n) - N_Z(r_n)) - \ln|f_0(0)| = \\ &= -\limsup_{n \rightarrow +\infty} (C_M(r_n) - N_Z(r_n)) - \ln|f_0(0)|, \end{aligned}$$

откуда по условию (3) имеем

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} C_{\ln|h|}(r_n) = -\infty,$$

что возможно лишь для $h = 0$. Таким образом, $f = 0$ по представлению (6) для любой целой функции f с $\text{Zero}_f \geq Z$ и $\ln|f| \leq M$ на $\mathbb{C}$. Отсюда Z — распределение единственности по M . Теорема доказана. $\square$

3. Теорема неединственности для произвольных распределений точек. Следующая теорема неединственности в противоположном направлении не столь проста и потребует достаточно тонкого подхода. Она развивает и содержит в себе теорему 1 из [2], являющуюся подобным результатом асимптотического характера.

Теорема 2 (неединственности). Пусть непрерывная функция $d : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_*^+$, для некоторых чисел $b, c \in \mathbb{R}^+$ имеют место ограничения для её производной

$$d'(t) \geq -c \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}_*^+, \quad (8a)$$

$$\text{существует предел } \frac{d(t)}{t} \Big|_{t=0} := \lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{d(t)}{t} \in (0, b] \subseteq \mathbb{R}_*^+, \quad (8b)$$

$$\text{функция } t \mapsto \frac{d(t)}{t} \text{ является убывающей на } \mathbb{R}^+. \quad (8c)$$

Тогда любое распределение точек Z на $\mathbb{C}$ конечной кратности в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ и нулевой кратности в начале координат является распределением неединственности по функции

$$z \mapsto B_d \frac{|z|}{d(|z|)} N_Z(|z| + d(|z|)), \quad (9)$$

где $B_d := 54(1+b)(1+c) \in \mathbb{R}^+$ зависит только от b и c из (8a)–(8b).

Замечание 1. В случае ненулевой кратности $Z(0) > 0$ в нуле заключение теоремы 2 останется в силе, если функцию (10) подправить, заменив её на функцию

$$z \mapsto B_d \frac{|z|}{d(|z|)} N_{Z-Z|_0}(|z| + d(|z|)) + Z(0) \ln |z|. \quad (10)$$

Замечание 2. Условие (8b) теоремы 2 можно заменить на более жёсткое в терминах производной, а именно: $d'(t) \leq b$ при всех $t \in \mathbb{R}_*^+$ и $d(0) = 0$.

Субгармонической функции $u \neq -\infty$ на $\mathbb{C}$ соответствует борелевская конечная на компактах, или радоновская, мера (см. [4, гл. 3, п. 3.5], [6, гл. 3, п. 3.7])

$$\Delta_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u, \quad \text{где } \Delta - \text{оператор Лапласа}, \quad (11)$$

действующий в смысле теории обобщённых функций на D . Мере Δ_u называем *риссовским распределением масс* функции u . По определению риссовское распределение масс субгармонической функции $u = -\infty$ на D — это внешняя мера, равная $+\infty$ на любом непустом подмножестве из D .

Далее будет существенно использоваться некоторая техническая обработка доказательства основного результата статьи [2] с субгармоническими дополнениями.

Лемма 1 (см. [2, основная теорема]). Пусть $\Delta \geq 0$ — некоторая радоновская мера на $\mathbb{C}$. Тогда для каждой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции u с риссовским распределением масс $\Delta_u = \Delta$ при любом выборе непрерывной строго положительной функции ϱ , определённой на луче $[a, +\infty)$ при некотором $a > 0$ и удовлетворяющей условию

$$r \mapsto r + \varrho(r) - \text{строго возрастающая функция на } [a, +\infty), \quad (12)$$

найдётся субгармоническая на $\mathbb{C}$ функция $v \neq -\infty$, с которой при

$$b := a + \varrho(a) \in \mathbb{R}_*^+ \quad (13)$$

выполняется неравенство

$$u(z) + v(z) \leq \int_a^r \int_a^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\Delta^r(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} + \Delta^r(b) \ln(1+r) \quad \text{при всех } r := |z| > a. \quad (14)$$

Из леммы 1 получим её вариант с более компактным, чем (14), неравенством по всей $\mathbb{C}$.

Лемма 2. Пусть функция $\varrho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_*^+$, причём

$$\varrho'(t) \geq -\frac{1}{2} \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}_*^+, \quad (15a)$$

$$\text{существует предел } \frac{\varrho(t)}{t} \Big|_{t=0} := \lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{\varrho(t)}{t} \in (0, \sigma] \subseteq \mathbb{R}_*^+, \quad (15b)$$

$$\text{функция } t \mapsto \frac{\varrho(t)}{t} \text{ является убывающей на } \mathbb{R}^+. \quad (15c)$$

Тогда для любой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции u , гармонической в некоторой окрестности нуля, с риссовским распределением масс Δ_u найдётся субгармоническая функция $v \neq -\infty$, сумма $u + v$ с которой удовлетворяет неравенству

$$u(z) + v(z) \leq 4(1 + \sigma)^2 \frac{r}{\varrho(r)} \int_0^{r+\varrho(r)} \frac{\Delta_u^r(t)}{t} dt \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \text{ и } r := |z| \in \mathbb{R}^+. \quad (16)$$

Доказательство. Функция u — гармоническая в некоторой окрестности нуля, поэтому

$$\Delta_u^r = 0 \quad \text{на } [0, \varepsilon) \text{ при некотором } \varepsilon > 0. \quad (17)$$

Согласно требованию (15a) имеем $1 + \varrho'(t) \geq 1/2$ и функция

$$t \mapsto t + \varrho(t) \quad (18)$$

строго возрастает на $\mathbb{R}_*^+$. Ясно, что в этом случае можно применять лемму 1 при любом выборе $a > 0$. Ввиду (15a) его можно выбрать столь малым, что $b \stackrel{(13)}{=} a + \varrho(a) < \varepsilon$. В этом случае $\Delta_u^r(b) \ln(1 + r) = 0$ для любого $r > a$. По лемме 1 можно выбрать субгармоническую функцию $v \neq -\infty$, для которой

$$u(z) + v(z) \stackrel{(14)}{\leq} \int_a^r \int_a^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\Delta_u(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} \leq \int_0^r \int_0^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\Delta_u(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} \quad (19)$$

при всех $z \in \mathbb{C}$ и $r := |z| > a$. Но в круге $a\overline{\mathbb{D}}$ левая часть (19) ввиду её полунепрерывности сверху не больше некоторого числа $C \in \mathbb{R}^+$. Поэтому замена функции v на разность $v - C$ с сохранением обозначения v для этой разности влечёт за собой выполнение неравенства (19) при всех $z \in \mathbb{C}$. Ввиду убывания функции (15c)

$$\text{функция } t \mapsto \frac{t}{\varrho(t)} \text{ является возрастающей на } \mathbb{R}_*^+, \quad (20)$$

и по (19) при любом $z \in \mathbb{C}$ и $r := |z|$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} u(z) + v(z) &\stackrel{(19)}{\leq} \int_0^r \int_0^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\Delta_u^r(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} \stackrel{(20)}{\leq} 2 \int_0^r \left(1 + \frac{x}{\varrho(x)}\right) \int_0^x d\Delta_u^r(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} \\ &= 2 \int_0^r \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\varrho(x)}\right) \Delta_u^r(x + \varrho(x)) dx = 2 \int_0^r \left(2 + \frac{\varrho(x)}{x} + \frac{x}{\varrho(x)}\right) \frac{\Delta_u^r(x + \varrho(x))}{x + \varrho(x)} dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Ввиду убывания функции (15c) и согласно (15b)

$$\frac{\varrho(x)}{x} \leq \sigma \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}^+. \quad (22)$$

Используя это, для скобки в подынтегральном выражении из правой части (21) получаем

$$\left(2 + \frac{\varrho(x)}{x} + \frac{x}{\varrho(x)}\right) = \frac{x}{\varrho(x)} \left(1 + \frac{\varrho(x)}{x}\right)^2 \stackrel{(22)}{\leq} \frac{x}{\varrho(x)} (1 + \sigma)^2. \quad (23)$$

Ввиду возрастания функции (20) из (21)–(23) следует

$$u(z) + v(z) \stackrel{(21), (15a)}{\leq} \int_0^r \int_0^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) d\Delta_u^r(t + \varrho(t)) \frac{dx}{x} \leq 2(1 + \sigma)^2 \frac{r}{\varrho(r)} \int_0^r \frac{\Delta_u^r(x + \varrho(x))}{x + \varrho(x)} dx \quad (24)$$

при всех $z \in \mathbb{C}$ и $r := |z| \in \mathbb{R}^+$, а также строго возрастает обратная к (18) непрерывно дифференцируемая функция $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, причём

$$x'(t) \stackrel{(15a)}{=} \frac{1}{1 + \varrho'(x(t))} \leq \frac{1}{1 + (-1/2)} = 2 \quad \text{при всех } t > 0. \quad (25)$$

Замена переменной для последнего интеграла из (24) даёт соотношения

$$\int_0^r \frac{\Delta_u^r(x + \varrho(x))}{x + \varrho(x)} dx = \int_0^{r+\varrho(r)} \frac{\Delta_u^r(t)}{t} x'(t) dt \stackrel{(25)}{\leq} 2 \int_0^{r+\varrho(r)} \frac{\Delta_u^r(t)}{t} dt,$$

что согласно (24) влечёт за собой неравенство (29). $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть d — функция из теоремы 2, удовлетворяющая условиям (8) с постоянной $c \in \mathbb{R}^+$ в (8a). Рассмотрим функцию

$$\varrho := \frac{1}{3(1+c)(1+b)} d \leq \frac{1}{3} d, \quad (26)$$

для которой согласно (8) имеют место все три условия из (15), где в (15b) можно выбрать

$$\sigma := \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3(1+c)(1+b)}, \quad \varrho(r) \stackrel{(22)}{\underset{r \in \mathbb{R}^+}{\leq}} \sigma r = \frac{1}{2} r \quad (27)$$

Существует целая функция f_Z с распределением корней $\text{Zero}_{f_Z} = Z$, и по условию $Z(0) = 0$. Риссовское распределение масс субгармонической функции $\ln |f_Z|$ — это риссовское распределение масс $\Delta_{\ln |f_Z|}$, определяемое равенством (см. [6, теорема 3.7.8])

$$\Delta_{\ln |f_Z|}(S) = \sum_{z \in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \quad \text{для любого } S \subset \mathbb{C}$$

соответственно с радиальной считающей функцией

$$\Delta_{\ln |f_Z|}^r(t) \stackrel{=}{=} \sum_{\substack{t \in \mathbb{R}^+ \\ z \in t\overline{\mathbb{D}}}} Z(z)$$

и радиальной проинтегрированной считающей функцией

$$N_Z(r) \stackrel{=}{=} \int_0^r \frac{\Delta_{\ln |f_Z|}^r(t)}{t} dt. \quad (28)$$

По лемме 2 для субгармонической функции $u := \ln |f_Z| \neq -\infty$ и $\sigma \stackrel{(27)}{=} 1/2$ найдётся субгармоническая функция $v \neq -\infty$, для которой имеет место неравенство (29) в данном случае вида

$$\ln |f_Z(z)| + v(z) \leq 4(1 + \sigma)^2 \frac{|z|}{\varrho(|z|)} \int_0^{|z|+\varrho(|z|)} \frac{\Delta_u^r(t)}{t} dt \stackrel{(28), (27)}{=} 9 \frac{|z|}{\varrho(|z|)} N_Z(|z| + \varrho(|z|)) \quad (29)$$

при всех $z \in \mathbb{C}$. Теперь потребуется также следующий результат из [3] (см. также [5]).

Лемма 3 (см. [3, следствие 3(iii)]). Пусть функция $v \neq -\infty$ субгармонична на $\mathbb{C}$, а функция $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ непрерывна и удовлетворяет неравенству $s(z) \leq 1 + |z|$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда найдётся целая функция $h \neq 0$, для которой выполнено неравенство

$$\ln |h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + d(z)e^{i\theta}) d\theta + \ln^+ \frac{1}{s(z)} \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \quad (30)$$

Замечание 3. В формулировке [3, следствие 3] в последнем слагаемом в [3, формула (1.11)] был потерян верхний индекс $+$ в логарифмической функции $\ln^+$, без которого для неограниченной функции s требуемая в (30) целая функция $h \neq 0$ может и не существовать, но только в случае конечного риссовского распределения масс $\Delta_v(\mathbb{C}) \leq 1$.

Применение леммы 3 к функции v из (29) при выборе $s(z) \underset{z \in \mathbb{C}}{=} \varrho(|z|)$ даёт неравенство

$$\ln|h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + \varrho(|z|)e^{i\theta}) d\theta + \ln^+\left(\frac{1}{\varrho(|z|)}\right) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \quad (31)$$

С целью применения последнего неравенства (31) проинтегрируем неравенство (29) с учётом субгармоничности функции $\ln|f_Z|$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} \ln|f_Z(z)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + \varrho(|z|)e^{i\theta}) d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f_Z(z + \varrho(|z|)e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + \varrho(|z|)e^{i\theta}) d\theta \leq \\ &\leq 9 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}|}{\varrho(|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}|)} N_Z \left(|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}| + \varrho(|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}|) \right) d\theta \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (31) для некоторой целой функции $h \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \ln|f_Z(z)h(z)| &= \ln|f_Z(z)| + \ln|h(z)| \leq \\ &\leq 9 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}|}{\varrho(|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}|)} N_Z \left(|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}| + \varrho(|z + \varrho(|z|)e^{i\theta}|) \right)}_{I(z, \theta)} d\theta \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (32)$$

Ввиду возрастания функций

$$t \xrightarrow[t \in \mathbb{R}_*^+]{(20)} \frac{t}{\varrho(t)}, \quad t \xrightarrow[t \in \mathbb{R}^+]{(18)} t + \varrho(t),$$

а также радиальной проинтегрированной считающей функции N_Z для последнего подынтегрального выражения $I(z, \theta)$ в обозначении $r := |z|$ получаем неравенства

$$I(z, \theta) \leq \frac{r + \varrho(r)}{\varrho(r + \varrho(r))} N_Z \left(r + \varrho(r) + \varrho(r + \varrho(r)) \right), \quad r := |z|, \quad (33)$$

где правая часть не зависит от θ . Здесь по теореме о конечных приращениях

$$\varrho(r + \varrho(r)) - \varrho(r) \geq \inf_{t \in \mathbb{R}_*^+} \varrho'(t) \cdot \varrho(r) \stackrel{(15a)}{\geq} -\frac{1}{2}\varrho(r),$$

что влечёт за собой неравенства

$$\varrho(r + \varrho(r)) \geq \frac{1}{2}\varrho(r), \quad \frac{r + \varrho(r)}{\varrho(r + \varrho(r))} \stackrel{(27)}{\leq} \frac{r + \frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}\varrho(r)} = 3 \frac{r}{\varrho(r)}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (33) следует

$$I(z, \theta) \leq 3 \frac{r}{\varrho(r)} N_Z \left(r + \varrho(r) + \varrho(r + \varrho(r)) \right), \quad r := |z|. \quad (34)$$

В то же время снова ввиду убывания функции $t \xrightarrow[t \in \mathbb{R}_*^+]{(20)} \frac{\varrho(t)}{t}$ имеем

$$\begin{aligned} r + \varrho(r) + \varrho(r + \varrho(r)) &= (r + \varrho(r)) \left(1 + \frac{\varrho(r + \varrho(r))}{r + \varrho(r)} \right) \leq (r + \varrho(r)) \left(1 + \frac{\varrho(r)}{r} \right) = \\ &= r + 2\varrho(r) + \varrho(r) \frac{\varrho(r)}{r} \stackrel{(27)}{\leq} r + 2\varrho(r) + \varrho(r) \cdot \frac{1}{2} \leq r + 3\varrho(r). \end{aligned}$$

Таким образом, можем продолжить оценку (34) в виде неравенства

$$I(z, \theta) \leq 3 \frac{r}{\varrho(r)} N_Z(r + 3\varrho(r)), \quad r := |z|,$$

где правая часть не зависит от θ . Применяя это неравенство к (32), получаем

$$\ln |f_Z(z)h(z)| \leq 18 \frac{r}{\varrho(r)} N_Z(r + 3\varrho(r)) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \text{ и } r := |z|.$$

Отсюда согласно построению функции ϱ через d в (26) получаем

$$\ln |f_Z(z)h(z)| \stackrel{(26)}{\leq} 54(1+b)(1+c) \frac{r}{d(r)} N_Z(r + d(r)) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \text{ и } r := |z|. \quad (35)$$

Здесь функция $f := f_Z h$ — ненулевая целая функция с

$$\text{Zero}_f = \text{Zero}_{f_Z h} = \text{Zero}_{f_Z} + \text{Zero}_h = Z + \text{Zero}_h \geq Z,$$

удовлетворяющая неравенству (35). Следовательно, Z — распределение неединственности по функции (10). Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание 4. Равномерный характер основных соотношений теорем 1 и 2 и определённая независимость констант в оценках позволяют получить прямые аналоги этих теорем для (плюри)субгармонических и целых функций и распределений аналитических множеств коразмерности 1 на $\mathbb{C}^n$ и при $1 < n \in \mathbb{N}$. Такое распространение требует значительной подготовки и будет изложено в дальнейших наших публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
2. Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций с заданными нулями и представление мероморфных функций // Мат. заметки. — 2003. — 73, № 1. — С. 120–134.
3. Хабибуллин Б. Н., Байгускаров Т. Ю. Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции // Мат. заметки. — 2016. — 99, № 4. — С. 588–602.
4. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
5. Khabibullin B. N. The logarithm of the modulus of an entire function as a minorant for a subharmonic function outside a small exceptional set // Azerbaijan J. Math. — 2021. — 11, № 2. — P. 48–59.
6. Ransford T. Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа Э. Б. Меньшиковой (раздел 3) выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002). Работа Б. Н. Хабибуллина (разделы 1, 2) выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код темы FMRS-2025-0010).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Меньшикова Энже Булатовна (Menshikova Enzhe Bulatovna)

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа

(Institute of Mathematics with Computing Centre —

Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru

Хабибуллин Булат Нурмиевич (Khabibullin Bulat Nurmievich)

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа

(Institute of Mathematics with Computing Centre —

Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

E-mail: khabib-bulat@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 82–91
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-82-91

УДК 517.984

СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ТРЕХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

© 2025 г. С. М. ТАШПУЛАТОВ

Аннотация. Рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и исследуются структура существенного спектра и дискретный спектр системы в ν -мерной решетке Z^ν с взаимодействием ближайших соседей.

Ключевые слова: модель Гейзенберга, трехмагнонная система, существенный спектр, дискретный спектр.

STRUCTURE OF THE ESSENTIAL SPECTRUM AND THE DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF THREE-MAGNON SYSTEMS IN THE HEISENBERG MODEL

© 2025 S. M. TASHPULATOV

ABSTRACT. We consider the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model and examine the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the system in the ν -dimensional lattice Z^ν with the coupling nearest neighbors.

Keywords and phrases: Heisenberg model, three-magnon systems, essential spectrum, discrete spectra.

AMS Subject Classification: 62M15, 46L60, 47L90

1. Введение. Двухмагнонные системы давно привлекают внимание многих исследователей. Впервые такие системы, были рассмотрены в одномерных целочисленных решетках в работе Бете [5]. Бете доказал, что в этом случае существует не более одного связанного состояния системы.

В [6] также рассматривалась двухмагнонная система в одномерном случае и были подтверждены результаты Бете.

М. Уортис [16] рассмотрел двухмагнонную систему на d -мерной целочисленной решетке для произвольного d . Он доказал, что в этом случае система имеет $0, 1, 2, \dots, d$ связанных состояний.

Ч. Маюмдар [10] изучал двухмагнонную систему на одномерной целочисленной решетке уже с взаимодействием ближайших и вторых соседей для значения полного квазиимпульса $\Lambda = \pi$ и численно нашел спектр и связанные состояния системы.

В [11] такая система была рассмотрена в одномерном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей для значений $\Lambda = \pi$ и $\Lambda = \pi/2$; были изучены спектр и связанные состояния системы для этих значений Λ с помощью численных методов.

И. Г. Гочев рассмотрел двухмагнонную систему в одномерном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей для всех значений полного квазиимпульса системы (см. [1]). Он доказал, что при $\Lambda = \pi$ система имеет единственное связанное состояние ниже области непрерывного спектра для значений $\alpha < 1/2$, а при $\alpha \geq 1/2$ такое связанное состояние исчезает (α — отношение параметра обменного билинейного взаимодействия для вторых соседей к параметру обменного билинейного взаимодействия для ближайших соседей, $0 \leq \alpha \leq 1$). Кроме того, при $\Lambda = \pi/2$ существует единственное связанное состояние системы для всех значений α , лежащих ниже области непрерывного спектра оператора, а при $\Lambda = 0$ связанные состояния системы отсутствуют. Для остальных же значений Λ ($-\pi < \Lambda < \pi$) установлено, что существует такое α , обозначаемое $\alpha_{\text{сг}}$, что при фиксированном полном квазиимпульсе Λ и $0 < \alpha < \alpha_{\text{сг}}$ в системе существует единственное связанное состояние, а при $\alpha \geq \alpha_{\text{сг}}$ оно исчезает.

Двухмагнонная система в анизотропной модели Гейзенберга со взаимодействием ближайших соседей была рассмотрена в [2].

В работе автора [4] двухмагнонная система рассматривалась в одномерном анизотропном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей; были изучены спектр и связанные состояния этой системы для всех значений полного квазиимпульса системы.

В [15] трехмагнонная система была рассмотрена в двумерной изотропной и анизотропной ограниченной ферромагнитной решетке; были исследованы спектр и связанные состояния системы с помощью численных методов.

В работе автора [14] трехмагнонная система была рассмотрена в изотропной негейзенберговской ферромагнитной модели со значениями спина 1 с взаимодействием ближайших соседей. Изучена структура существенного спектра системы; были получены верхняя и нижняя оценки для количества трехмагнонных связанных состояний системы.

2. Гамильтониан системы. В настоящей работе рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и описывается структура существенного спектра и дискретный спектр системы в целочисленных решетках Z^ν . Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = J \sum_{m, \tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}). \quad (1)$$

Здесь $J < 0$ — параметр билинейного обменного взаимодействия между атомами ближайших соседей в решетке, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ — оператор атомного спина m -го узла ν -мерной целочисленной решетки Z^ν , а $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям.

Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями

$$S_m^+ \varphi_0 = 0, \quad S_m^z \varphi_0 = \frac{1}{2} \varphi_0, \quad |\varphi_0| = 1.$$

Вектор $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ описывает состояние системы трех магнонов, находящихся в узлах p , q и r . Замыкание пространства, образованного всевозможными линейными комбинациями этих векторов, обозначим через $\mathcal{H}_3$; оно называется трехмагнонным пространством оператора H .

Теорема 1. *Подпространство $\mathcal{H}_3$ инвариантно относительно оператора H , а сужение H_3 оператора H на подпространство $\mathcal{H}_3$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\bar{H}_3$, действующий в пространстве l_2^{as} по формуле*

$$\begin{aligned} (\bar{H}_3 f)(p, q, r) = J \sum_{\tau} \left[\left\{ \delta_{p, q+\tau} + \delta_{p+\tau, q} + \delta_{p+\tau, r} + \delta_{p, r+\tau} + \delta_{q, r+\tau} + \delta_{q+\tau, r} - 6 \right\} f(p, q, r) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau, q} f(p-\tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau, r} f(p-\tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{q-\tau, r} f(p, q-\tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{q, r-\tau} f(p, q, r-\tau) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{p, q-\tau} f(p, q-\tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{p, r-\tau} f(p, q, r-\tau) + f(p-\tau, q, r) + f(p, q-\tau, r) + f(p, q, r-\tau) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\delta_{p+\tau,q}f(p+\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p+\tau,r}f(p+\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{q+\tau,r}f(p,q+\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{q,r+\tau}f(p,q,r+\tau) - \\
& -\frac{1}{2}\delta_{p,q+\tau}f(p,q+\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{p,r+\tau}f(p,q,r+\tau) + f(p+\tau,q,r) + f(p,q+\tau,r) + f(p,q,r+\tau)], \quad (2)
\end{aligned}$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Сам оператор H_3 действует на вектор $\psi \in \mathcal{H}_3$ по формуле

$$H_3\psi = \sum_{p,q,r \in Z^\nu} (\overline{H}_3 f)(p,q,r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0. \quad (3)$$

Доказательство. Подействуем гамильтонианом H на векторы $\psi_3 \in \mathcal{H}_3$ с использованием обычных коммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения магнонов в узлах:

$$[S_p^+, S_q^-] = 2\delta_{p,q} S_p^z, \quad [S_p^\pm, S_q^\pm] = -\delta_{p,q} S_p^\pm, \quad S_p^z \varphi_0 = \frac{1}{2} \varphi_0,$$

а также учтем, что $S_p^+ \varphi_0 = \theta$, где θ — нулевой элемент пространства $\mathcal{H}_3$. Отсюда получается утверждение теоремы. $\square$

Лемма 1. *Спектры операторов H_3 и $\overline{H}_3$ совпадают.*

Доказательство. Так как операторы H_3 и $\overline{H}_3$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то из критерия Вейля (см. [12, гл. VII, раздел 3, с. 262-263]) следует существование такой последовательности векторов ψ_i , что

$$\psi_i = \sum_{p,q,r} f_i(p,q,r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0, \quad \|\psi_i\| = 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|(H_3 - \lambda)\psi_i\| = 0, \quad (4)$$

где $\lambda \in \sigma(H_3)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\|(H_3 - \lambda)\psi_i\|^2 &= ((H_3 - \lambda)\psi_i, (H_3 - \lambda)\psi_i) = \\
&= \sum_{p,q,r} \|(H_3 - \lambda)f_i(p,q,r)\|^2 (S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0, S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0) = \\
&= \sum_{p,q,r} \|(\overline{H}_3 - \lambda)F_i(p,q,r)\|^2 (S_p^+ S_q^+ S_r^+ S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0, \varphi_0) = \\
&= \sum_{p,q,r} \|(\overline{H}_3 - \lambda)F_i(p,q,r)\|^2 (\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{p,q,r} \|(\overline{H}_3 - \lambda)F_i(p,q,r)\|^2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

где

$$F_i = \sum_{p,q,r} f_i(p,q,r), \quad \|F_i\|^2 = \sum_{p,q,r} |f_i(p,q,r)|^2 = \|\psi_i\|^2 = 1.$$

Это означает, что $\lambda \in \sigma(\overline{H}_3)$. Следовательно, $\sigma(H_3) \subset \sigma(\overline{H}_3)$.

Обратно, пусть $\bar{\lambda} \in \sigma(\overline{H}_3)$. Тогда в силу того же критерия Вейля существует такая последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$, что

$$\|F_i\| = 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|(\overline{H}_3 - \bar{\lambda})\psi_i\| = 0.$$

Полагая

$$F_i = \sum_{p,q,r} f_i(p,q,r), \quad \|F_i\| = \left(\sum_{p,q,r} |f_i(p,q,r)|^2 \right)^{1/2},$$

имеем

$$\|\psi_i\| = \|F_i\| = 1, \quad \|(\overline{H}_3 - \bar{\lambda})F_i\| = \|(\overline{H}_3 - \bar{\lambda})\psi_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда вытекает, что $\bar{\lambda} \in \sigma(\overline{H}_3)$ и, следовательно, $\sigma(\overline{H}_3) \subset \sigma(H_3)$. Эти два соотношения означают, что $\sigma(H_3) = \sigma(\overline{H}_3)$. $\square$

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^3) \rightarrow L_2((T^\nu)^3) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_3,$$

где T^ν — ν -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е. $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим $\tilde{H}_3 = \mathcal{F}\bar{H}_3\mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор $\bar{H}_3$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{\text{symm}}((T^\nu)^3)$, где L_2^{symm} — подпространство симметричных функций в $L_2((T^\nu)^3)$.

Теорема 2. Преобразование Фурье переводит оператор $\bar{H}_3$ в ограниченный самосопряженный оператор $\tilde{H}_3 = \mathcal{F}\bar{H}_3\mathcal{F}^{-1}$, действующий в пространстве $L_2^{\text{symm}}((T^\nu)^3)$ по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{H}_3\psi_3 = & -J\{12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma\}f(\lambda, \mu, \gamma) + \\ & + J\int_{T^\nu} \left[12 + 2\cos(\lambda - s) + 2\cos(\mu - s) - 2\cos s - 2\cos(\lambda + \mu - s) - \right. \\ & \left. - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma \right] f(s, \lambda + \mu - s, \gamma) ds + \\ & + J\int_{T^\nu} \left[12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 2\cos(\lambda - s) + 2\cos(\gamma - s) - \right. \\ & \left. - 2\cos s - 2\cos(\lambda + \gamma - s) \right] f(s, \mu, \lambda + \gamma - s) ds + \\ & + J\int_{T^\nu} \left[12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma - 2\cos s - 2\cos(\mu + \gamma - s) + \right. \\ & \left. + 2\cos(\mu - s) + 2\cos(\gamma - s) \right] f(\lambda, s, \mu + \gamma - s) ds + \\ & + J\int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \left[12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 3\cos(\lambda + \mu + \gamma - s - t) + \right. \\ & + 2\cos(\lambda + \mu - s) + 2\cos(\lambda + \gamma - s) + 4\cos s + 4\cos t + 2\cos(\lambda + \mu - t) + \\ & + 2\cos(\mu + \gamma - t) + \cos(\lambda + t) + 2\cos(\mu - s - t) + 2\cos(\lambda - s - t) - 8\cos(\lambda - s) - \\ & \left. - 6\cos(\mu - t) - 8\cos(\lambda + \mu - s - t) - 2\cos(\lambda - t) \right] f(s, t, \lambda + \mu + \gamma - s - t) ds dt, \quad (5) \end{aligned}$$

где L_2^{symm} — подпространство симметричных функций в $L_2((T^\nu)^3)$.

Следующий факт является важным для последующих исследований спектра оператора $\tilde{H}_3$. Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x + y + z = \Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x, y, z) : x + y + z = \Lambda\}$. Известно (см. [3]), что оператор $\tilde{H}_3$ и пространство $\tilde{\mathcal{H}}_3$ можно разложить в прямые интегралы

$$\tilde{H}_3 = \int_{T^\nu} \bigoplus \tilde{H}_{3\Lambda} d\Lambda, \quad \tilde{\mathcal{H}}_3 = \int_{T^\nu} \bigoplus \tilde{\mathcal{H}}_{3\Lambda} d\Lambda$$

операторов $\tilde{H}_{3\Lambda}$ и пространств $\tilde{\mathcal{H}}_{3\Lambda}$ так, что пространства $\tilde{\mathcal{H}}_{3\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\tilde{H}_{3\Lambda}$.

Спектральные свойства рассматриваемого оператора энергии трехмагнонных систем в изотропной ферромагнитной модели Гейзенберга тесно связаны со спектральными свойствами его двухмагнонных подсистем. Поэтому сначала исследуем спектр и связанные состояния двухмагнонных систем.

3. Спектр и связанные состояние оператора энергии двухмагнонных систем в модели Гейзенберга. Гамильтониан двухмагнонных систем также имеет вид (1). Обозначим через $\mathcal{H}_2$ двухмагнонное подпространство оператора H , а через H_2 — сужение оператора H на подпространство $\mathcal{H}_2$.

Теорема 3. Пространство $\mathcal{H}_2$ инвариантно относительно оператора H . Оператор H_2 является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\bar{H}_2$, действующей в пространстве $l_2((Z^\nu)^2)$ по формуле

$$\begin{aligned}
(\overline{H}_2 f)(p, q) = J \sum_{\tau} \sum_{p, q} \left[(\delta_{p, q+\tau} + \delta_{p+\tau, q} - 2) f(p, q) + \frac{1}{2} f(p - \tau, q) + \frac{1}{2} f(p, q - \tau) - \right. \\
\left. - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau, q} f(p - \tau, q) - \frac{1}{2} \delta_{p, q-\tau} f(p, q - \tau) + \frac{1}{2} f(p + \tau, q) + \frac{1}{2} f(p, q + \tau) - \right. \\
\left. - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau, q} f(p + \tau, q) - \frac{1}{2} \delta_{p, q+\tau} f(p, q + \tau) \right]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Сам оператор H_2 действует на вектор $\psi \in \mathcal{H}_2$ по формуле

$$H_2 \psi = \sum_{p, q} (\overline{H}_2 f)(p, q) S_p^- S_q^- \varphi_0. \quad (7)$$

Лемма 2. Спектры операторов H_2 и $\overline{H}_2$ совпадают.

Теорема 4. Преобразование Фурье переводит оператор $\overline{H}_2$ в ограниченный самосопряженный оператор $\tilde{H}_2$, действующий в пространстве $\mathcal{H}_2$ по формуле

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_2 f)(\lambda, \mu) = -J [4 - 2 \cos \lambda - 2 \cos \mu] f(\lambda, \mu) + J \int_{T^\nu} [4 - 2 \cos \lambda - 2 \cos \mu + \\
+ 2 \cos(\lambda - s) + 2 \cos(\mu - s) - 2 \cos s - 2 \cos(\lambda + \mu - s)] f(s, \lambda + \mu - s) ds. \quad (8)
\end{aligned}$$

Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x + y = \Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x, y) : x + y = \Lambda\}$. Известно, что оператор $\tilde{H}_2$ и пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$ можно разложить в прямые интегралы

$$\tilde{H}_2 = \int_{T^\nu} \bigoplus \tilde{H}_{2\Lambda} d\Lambda, \quad \tilde{\mathcal{H}}_2 = \int_{T^\nu} \bigoplus \tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} d\Lambda$$

операторов $\tilde{H}_{2\Lambda}$ и пространств $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ так, что пространства $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\tilde{H}_{2\Lambda}$, а операторы $\tilde{H}_{2\Lambda}$ в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ действуют по формуле

$$(\tilde{H}_{2\Lambda} f_\Lambda)(\lambda) = h_\Lambda(\lambda) f_\Lambda(\lambda) + \int_{T^\nu} h_{1\Lambda}(\lambda, s) f_\Lambda(s) ds, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
h_\Lambda(\lambda) = -4J \left[1 - \cos \frac{\Lambda}{2} \cos \left(\frac{\Lambda}{2} - \lambda \right) \right], \\
h_{1\Lambda}(\lambda, s) = 4J \left\{ 1 - \cos \frac{\Lambda}{2} \cos \left(\frac{\Lambda}{2} - \lambda \right) + \left[\cos \left(\frac{\Lambda}{2} - \lambda \right) - \cos \frac{\Lambda}{2} \right] \cos \left(\frac{\Lambda}{2} - s \right) \right\};
\end{aligned}$$

здесь $f_\Lambda(\lambda) = f(\lambda, \Lambda - \lambda)$.

Известно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}(\lambda)$ не зависит от функции $h_{1\Lambda}(\lambda, s)$ и заполняет весь отрезок $G_\Lambda = [-4J(1 - \cos(\Lambda/2)), -4J(1 + \cos(\Lambda/2))]$.

Определение 1. Собственная функция $\varphi_\Lambda \in L_2(T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$, отвечающая собственному значению $z_\Lambda \notin G_\Lambda$, называется связанным состоянием оператора $\tilde{H}_2$, а величина z_Λ — энергией этого связанного состояния.

Положим

$$\begin{aligned}
D_\Lambda^1(z) = z \int_T \frac{ds}{h_\Lambda(s) - z} \left(1 + 4J \int_T \frac{[\cos(\frac{\Lambda}{2} - s) - \cos \frac{\Lambda}{2}] \cos(\frac{\Lambda}{2} - s) ds}{h_\Lambda(s) - z} \right) - \\
- z \int_T \frac{\cos(\frac{\Lambda}{2} - s) ds}{h_\Lambda(s) - z} \int_T \frac{4J [\cos(\frac{\Lambda}{2} - s) - \cos \frac{\Lambda}{2}] ds}{h_\Lambda(s) - z}.
\end{aligned}$$

Лемма 3. Число $z = z_0 \notin \sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_{2\Lambda})$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_2$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $D_\Lambda^1(z)$, т.е. $D_\Lambda^1(z) = 0$.

Доказательство. Пусть число $z = z_0$ — собственное значение оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$, а $\varphi_\Lambda(x)$ — соответствующая собственная функция, т.е.

$$h_\Lambda(x)\varphi_\Lambda(x) - \int_T h_{1\Lambda}(t)\varphi_\Lambda(t)dt = z\varphi_\Lambda(x).$$

Введем обозначение $\psi_\Lambda(x) = [h_\Lambda(x) - z]\varphi_\Lambda(x)$. Тогда

$$\psi_\Lambda(x) - \int_T \frac{h_{1\Lambda}(x, t)}{\varphi_\Lambda(t) - z} dt = 0,$$

т.е. число $\mu = 1$ есть собственное значение оператора

$$(K_\Lambda(z)f_\Lambda)(x) = \int_T \frac{h_{1\Lambda}(x, t)}{h_\Lambda(t) - z}.$$

Отсюда следует, что $D_\Lambda^1(z) = 0$.

Пусть теперь $z = z_0$ является нулем функции $D_\Lambda^1(z) = 0$, т.е. $D_\Lambda^1(z) = 0$. Из теоремы Фредгольма следует, что однородное уравнение

$$\psi_\Lambda(x) - \int_T \frac{h_{1\Lambda}(x, t)}{h_\Lambda(t) - z} dt = 0$$

имеет нетривиальное решение. Это означает, что число $z = z_0$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. $\square$

Теорема 5.

- (а) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = \pi$, то непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из единственной точки $-4J$ и оператор имеет единственное собственное значение $z = -2J$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.
- (б) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = 0$, то непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из точки 0, причем оператор $\tilde{H}_{2\Lambda}$ не имеет собственных значений, лежащих ниже области непрерывного спектра.
- (с) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \neq \pi/2$ и $\Lambda \neq 0$, то непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из отрезка

$$\sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_{2\Lambda}) = \left[-4J \left(1 - \cos \frac{\Lambda}{2} \right), -4J \left(1 + \cos \frac{\Lambda}{2} \right) \right],$$

и оператор $\tilde{H}_{2\Lambda}$ имеет единственное собственное значение $z = -2J(1 - \cos^2(\Lambda/2))$, лежащее ниже области непрерывного спектра этого оператора.

Доказательство. В одномерном случае, при $\Lambda = \pi$ действие оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ определяется с помощью формулы

$$(\tilde{H}_{2\Lambda}f_\Lambda)(\lambda) = -4Jf_\Lambda(\lambda) + 4J \int_T \{1 + \sin \lambda \sin s\} f_\Lambda(s) ds,$$

а уравнение для собственных значений и собственных функций примет вид

$$(-4J - z)f_\Lambda(\lambda) + 4J \int_T \{1 + \sin \lambda \sin s\} f_\Lambda(s) ds = 0. \quad (10)$$

Введем обозначения

$$a = \int_T f_\Lambda(s) ds, \quad b = \int_T \sin s f_\Lambda(s) ds.$$

Тогда

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{-4Ja - 4Jb \sin \lambda}{-4J - z}.$$

Для нахождения a и b имеем систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\left(1 + \frac{4J}{-4J - z}\right) a + \frac{4J \sin \lambda}{-4Ja - z} b = 0, \quad \left(1 + \frac{2J}{-4J - z}\right) b = 0.$$

Из второго уравнения находим, что $z = -2J$. Утверждение (а) доказано.

Пусть теперь полный квазиимпульс системы $\Lambda = 0$. Тогда действие оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ определяется формулой

$$(\tilde{H}_{2\Lambda} f_\Lambda)(\lambda) = -4J(1 - \cos \lambda) f_\Lambda(\lambda) + 4J \int_T \{1 - \cos \lambda - (1 - \cos \lambda) \cos s\} f_\Lambda(s) ds,$$

а уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$[-4J(1 - \cos \lambda) - z] f_\Lambda(\lambda) + 4J \int_T \{1 - \cos \lambda - (1 - \cos \lambda) \cos s\} f_\Lambda(s) ds = 0.$$

Введем обозначения

$$a = \int_T f_\Lambda(s) ds, \quad b = \int_T \cos s f_\Lambda(s) ds.$$

Тогда

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{-4J(1 - \cos \lambda)a + 4J(1 - \cos \lambda)b}{-4J(1 - \cos \lambda) - z}.$$

Теперь для нахождения a и b получаем систему из двух однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} - \int_T \frac{ds}{-4J(1 - \cos s) - z} a + \left(1 + z \int_T \frac{ds}{-4J(1 - \cos s) - z}\right) b &= 0, \\ - \int_T \frac{\cos s ds}{-4J(1 - \cos s) - z} a + \left(1 + z \int_T \frac{\cos s ds}{-4J(1 - \cos s) - z}\right) b &= 0, \end{aligned}$$

имеющую нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее детерминант

$$D_\Lambda^1(z) = \int_T \frac{(1 - \cos s) ds}{-4J(1 - \cos s) - z}$$

равен нулю. В этом случае уравнение $D_\Lambda^1(z) = 0$ имеет решение $z = 0$. Утверждение (б) доказано.

Для доказательства утверждения (с). Выразив все интегралы в выражении для $D_\Lambda^1(z)$ через интеграл

$$J^*(z) = \int_T \frac{ds}{-4J[1 - \cos \frac{\Lambda}{2} \cos(\frac{\Lambda}{2} - s)] - z}, \quad (11)$$

получаем, что уравнение $D_\Lambda^1(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$J^*(z) = \frac{1}{-4J(1 - \cos^2 \frac{\Lambda}{2}) - z}. \quad (12)$$

Поскольку функция $1/(h_\Lambda(s) - z)$ непрерывна при $z \notin G_\Lambda$ и

$$[J^*(z)]' = \int_T \frac{ds}{[h_\Lambda(s) - z]^2} > 0,$$

закключаем, что функция $J^*(z)$ является возрастающей функцией при $z \notin G_\Lambda$. Кроме того,

$$\begin{aligned} J^*(z) &\xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 0, & J^*(z) &\xrightarrow{z \rightarrow m_\Lambda - 0} +\infty, \\ J^*(z) &\xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0, & J^*(z) &\xrightarrow{z \rightarrow M_\Lambda + 0} -\infty. \end{aligned}$$

В одномерном случае интеграл (11) вычисляется в квадратурах. Вычисляя его и решая уравнение (12), получим утверждение (с). $\square$

4. Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии трехмагнонных систем. Сначала определим структуру существенного спектра оператора энергии трехмагнонных систем, а потом найдем оценки для количества трехмагнонных связанных состояний этой системы. Сравнивая формулы (5) и (15), и используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах (см. [13]) и учитывая, что $f(\lambda, \mu, \gamma)$ — симметричная функция, можно убедиться, что оператор $\tilde{H}_3$ представим в виде

$$\tilde{H}_{3\Lambda} = \tilde{H}_{2\Lambda_1} \otimes I + I \otimes (\tilde{H}_{2\Lambda_2} + \tilde{H}_{2\Lambda_3}) + K_\Lambda, \quad (13)$$

где I — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1$, $\tilde{H}_{2\Lambda_1}$, $\tilde{H}_{2\Lambda_2}$ и $\tilde{H}_{2\Lambda_3}$ — операторы энергии двухмагнонных систем,

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_{2\Lambda_1} f_{\Lambda_1})(\lambda) &= -4J \left[1 - \cos \frac{\Lambda_1}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_1}{2} - \lambda \right) \right] f_{\Lambda_1}(\lambda) + \\ &+ 4J \int_T \left\{ \left[1 - \cos \frac{\Lambda_1}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_1}{2} - \lambda \right) \right] + \left[\cos \left(\frac{\Lambda_1}{2} - \lambda \right) - \cos \frac{\Lambda_1}{2} \right] \cos \left(\frac{\Lambda_1}{2} - s \right) \right\} f_{\Lambda_1}(s) ds \end{aligned}$$

и K_Λ есть оператор конечного ранга

$$\begin{aligned} (K_\Lambda f_\Lambda)(s, t) &= -2J \cos \gamma \int_T f_{\Lambda_1}(s) ds - 2J \cos \mu \int_T f_{\Lambda_2}(s) ds - \\ &- 2J \cos \lambda \int_T f_{\Lambda_3}(s) ds + J \int_T \int_T K'_\Lambda(s, t) ds dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K'_\Lambda(s, t) &= 6 - 2 \cos \lambda - 2 \cos \mu - 2 \cos \gamma + 2 \cos(\lambda + \mu + \gamma - s - t) + 2 \cos(\lambda + \mu - s) + \\ &+ 2 \cos(\lambda + \gamma - s) + 4 \cos s + 4 \cos t + 2 \cos(\lambda + \mu - t) + 2 \cos(\mu + \gamma - t) + 2 \cos(\lambda + t) - \\ &- 2 \cos(\lambda - t) + 2 \cos(\mu - s - t) - 8 \cos(\lambda - s) - 6 \cos(\mu - t) - 6 \cos(\lambda + \mu - s - t), \\ \Lambda &= \lambda + \mu + \gamma, \quad \Lambda_1 = \lambda + \mu, \quad \Lambda_2 = \lambda + \gamma, \quad \Lambda_3 = \mu + \gamma. \end{aligned}$$

Спектр оператора $A \otimes I + I \otimes B$, где A и B — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в [7–9]. В них даны явные формулы, выражающие существенный спектр σ_{ess} и дискретный спектр σ_{disc} оператора $A \otimes I + I \otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{\text{disc}}(A)$ оператора A и через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{\text{disc}}(B)$ оператора B :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{disc}}(A \otimes I + I \otimes B) &= \\ &= \left\{ \sigma(A) \setminus \sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B) \setminus \sigma_{\text{ess}}(B) \right\} \setminus \left\{ (\sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{\text{ess}}(B)) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_{\text{ess}}(A \otimes I + I \otimes B) = (\sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{\text{ess}}(B)). \quad (15)$$

Ясно, что

$$\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \{ \lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B) \}.$$

Теперь, воспользовавшись одним из результатов, полученных при исследовании спектра оператора энергии двухмагнетонных систем в модели Гейзенберга представлением (13), можем описать структуры существенного спектра оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ и получить нижние и верхние оценки для количества собственных значений этого оператора.

Теорема 6.

- (a) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = \pi$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из трех точек: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = \{-12J, -8J, -10J\}$, и для числа N трехмагнетонных связанных состояний имеет место соотношение $1 \leq N \leq 10$.
- (b) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = 0$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -24J]$, и для числа трехмагнетонных связанных состояний N имеет место соотношение $0 \leq N \leq 9$.
- (c) Если $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \neq \pi$ и $\Lambda \neq 0$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединений трех отрезков:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = & \left[-4J \left(3 - \cos \frac{\Lambda_1}{2} - \cos \frac{\Lambda_2}{2} - \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right), -4J \left(3 + \cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) \right] \cup \\ & \cup \left[-8J + 2J \left(2 \cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2} + \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2} \right), -8J - 4J \cos \frac{\Lambda_1}{2} + 2J \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2} + 2J \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2} \right] \cup \\ & \cup \left[-10J + 4J \left(\cos \frac{\Lambda_2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) + 2J \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}, -10J - 4J \left(\cos \frac{\Lambda_2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) + 2J \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

и число N трехмагнетонных связанных состояний удовлетворяет неравенству $1 \leq N \leq 10$.

Доказательство. (a) В одномерном случае при $\Lambda = \pi$ непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из единственной точки $-4J$ и оператор имеет единственное собственное значение $-2J$. Поэтому из представления (13) вытекает, что существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из точек $-12J$, $-8J$ и $-10J$, число $-6J$ принадлежит дискретному спектру оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$, а возмущенный оператор K_Λ есть конечномерный оператор. В случае, когда $\nu = 1$ оператор K_Λ имеет ранг 9, поэтому, оператор $\tilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более девяти дополнительных собственных значений. Следовательно, дискретный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит не более чем из $9 + 1 = 10$ точек, т.е. оператор $\tilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более десяти связанных состояний. Таким образом, число трехмагнетонных связанных состояний N удовлетворяет неравенству $1 \leq N \leq 10$.

(b) В одномерном случае при $\Lambda = 0$ непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из отрезка $[0, -8J]$ и оператор не имеет собственных значений. Поэтому из представления (13) вытекает, что существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -24J]$, а оператор K_Λ является конечномерным. В случае, когда $\nu = 1$, оператор K_Λ имеет ранг 9. Поэтому оператор $\tilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более девяти собственных значений. Следовательно, дискретный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит не более чем из 9 точек, т.е. оператор $\tilde{H}_{3\Lambda}$ имеет не более девяти связанных состояний. Таким образом, число N трехмагнетонных связанных состояний удовлетворяет неравенству $0 \leq N \leq 9$.

(c) В одномерном случае, при полном квазиимпульсе системы $\Lambda \neq \pi$ и $\Lambda \neq 0$, непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из отрезка $\left[-4J \left(1 - \cos \frac{\Lambda}{2} \right), -4J \left(1 + \cos \frac{\Lambda}{2} \right) \right]$, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из единственного собственного значения $z = -2J(1 - \cos^2(\Lambda/2))$. Поэтому из представления (13) вытекает, что существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединений трех отрезков (16) и число

$$z = -2J \left(3 - \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2} - \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2} - \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2} \right)$$

является собственным значением оператора $\tilde{H}_{3\Delta}$. Следовательно, для числа N трехмагнонных связанных состояний имеет место неравенство $1 \leq N \leq 10$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гочев И. Г. Двухмагнонные состояния в одномерной модели Гейзенберга с взаимодействием вторых соседей// Теор. мат. физ. — 1973. — 15. — С. 402–406.
2. Гочев И. Г. Связанные состояния магнонов в линейной анизотропной цепочке.// ЖЭТФ. — 1971. — 61, № 10. — С. 1674–1678.
3. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
4. Ташпулатов С. М. Исследование спектра оператора энергии двухмагнонной системы в одномерном анизотропном ферромагнетике Гейзенберга с взаимодействием вторых соседей// Теор. мат. физ. — 1996. — 107, № 1. — С. 155–161.
5. Bethe H. A. Eigenwerte und Eigenfunction der linearen Atom kette// Z. Phys. — 1931. — 71. — P. 205–226.
6. Fukuda N., Wortis M. Bound states in the spin wave problem// Phys. Chem. Solids. — 1963. — 24. — P. 1675–1677.
7. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 1// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — 235. — P. 75–113.
8. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 2. The approximate point spectrum and Kato essential spectrum// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — 237. — P. 223–254.
9. Ichinose T. Tensor products of linear operators. Spectral theory// Banach Center Publ. — 1982. — 8. — P. 294–300.
10. Majumdar C. K. Bound states of two spin waves in the Heisenberg ferromagnet with nearest and next nearest neighbours interactions// J. Math. Phys. — 1969. — 132. — P. 85.
11. Ono I., Mikado I. S., Oguchi T. Two-magnon bound states in a linear Heisenberg chain with nearest and next nearest neighbours interactions// J. Phys. Soc. Jpn. — 1971. — 30. — P. 358–366.
12. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis. — New York, 1972.
13. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Operator Analysis. — New York: Academic Press, 1982.
14. Tashpulatov S. M. Structure of essential spectrum and discrete spectrum of the energy operator of three-magnon systems in the isotropic ferromagnetic non-Heisenberg model with spin one and nearest-neighbor interactions// J. Appl. Math. Phys. — 2019. — 7, № 4. — P. 874–899.
15. Van Himbergen J. E., Tjon J. A. Three-magnon bound states in the two-dimensional isotropic and anisotropic Heisenberg ferromagnet// Phys. A. — 1976.. — 82. — P. 389–416.
16. Wortis M. Bound states of two spin waves in the Heisenberg ferromagnet// Phys. Rev. — 1963. — 132. — P. 85–97.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ташпулатов Садулла Мамаражабович (Tashpulatov Sadulla Mamarazhabovich)

Институт ядерной физики

Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Республика Узбекистан

(Institute of Nuclear Physics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

E-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 92–104
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-92-104

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2025 г. М. В. ЧИРОВА

Аннотация. Приведено доказательство существования слабых решений для системы уравнений, описывающей движение вязкой жидкости. Выведен ряд априорных оценок для семейства решений. На основе топологической теории степени вполне непрерывных векторных полей установлено существование слабых решений аппроксимационной задачи. Доказана сходимость решений аппроксимационных задач к решению исходной краевой задачи.

Ключевые слова: уравнения Навье—Стокса, слабая разрешимость.

INVESTIGATION OF THE WEAK SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE NAVIER—STOKES SYSTEM BASED ON THE METHOD OF PARABOLIC REGULARIZATION

© 2025 M. V. CHIROVA

ABSTRACT. A proof of the existence of weak solutions for a system of equations describing the motion of a viscous fluid is given. A number of a priori estimates for the family of solutions are derived. Based on the topological theory of the degree of completely continuous vector fields, the existence of weak solutions of the approximation problem is established. The convergence of solutions of approximation problems to the solution of the original boundary-value problem is proved.

Keywords and phrases: Navier–Stokes Equations, weak solvability.

AMS Subject Classification: 35Q30, 35B30

1. Введение. Большинство реальных процессов, происходящих в окружающей среде, по причине их сложности, могут быть смоделированы только с помощью нелинейных дифференциальных уравнений, для которых доказывать существование и единственность гладких решений очень трудно. Именно поэтому данная тема является популярной, так как требует поиска новых или доработки старых оптимальных методов изучения таких систем.

В данной работе рассматривается система уравнений Навье—Стокса с особой правой частью. Для доказательства существования слабого решения используется аппроксимационно-топологический метод, предложенный в [2] и развитый в [1, 3, 4, 6]. Путем добавления к исходной задаче нового члена $\varepsilon \Delta^2 u$ вводится аппроксимационная задача, а затем с помощью предельного перехода доказывается разрешимость первоначальной задачи в исходных пространствах.

2. Постановка задачи и основные обозначения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная локально липшицева область. На отрезке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$, рассматривается начально-краевая

задача для системы Навье—Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]; \quad (2)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

и краевым условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Искомым решением является вектор-функция скорости u и функция давления $p(x, t)$. Внешние силы определяются функцией $f = f(x, t)$; ν — положительный коэффициент вязкости.

Следующие пространства потребуются для введения понятия слабого решения: $\mathcal{V} = \{u(x) = (u_1, u_2, u_3) \in C_0^\infty(\Omega)^3 : \operatorname{div} u = 0\}$ (пространство соленоидальных функций); V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)^3$; V^1 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^3$. В пространстве

$$W_0 = \left\{ u : u \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), u' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1}) + L_1(0, T; V^0) \right\}$$

сформулируем утверждение о слабой разрешимости первоначальной задачи при некоторых условиях на правую часть системы (1), а в пространствах

$$W_1 = \left\{ u : u \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), u' \in L_2(0, T; V^{-2}) + L_1(0, T; V^0) \right\},$$

$$W_2 = \left\{ u : u \in L_2(0, T; V^2), u' \in L_2(0, T; V^{-2}) + L_1(0, T; V^0) \right\}$$

будет доказана разрешимость задачи, аппроксимирующей исходную.

3. Определение слабого решения. Аппроксимационная задача. Чтобы ввести понятие слабого решения, рассмотрим пробную функцию $\varphi \in V^1$. Умножив первое уравнение системы (1)–(4) на данную функцию и проинтегрировав, получаем следующее интегральное тождество:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx - \nu \int_{\Omega} \Delta u \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla p \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (5)$$

В дальнейших преобразованиях будет применяться следующее тождество:

$$\int_{\Omega} u \Delta u dt = \int_{\partial\Omega} \nabla u \nabla u \bar{n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dt.$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \varphi dx;$$

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u : \nabla \varphi \bar{n} dS - \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx;$$

$$\int_{\Omega} \nabla p \varphi dx = \int_{\partial\Omega} p \varphi \bar{n} dS - \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = 0;$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (u_i \varphi) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i \varphi u \bar{n} dS - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u \frac{\partial (u_i \varphi)}{\partial x_i} dx = \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Тогда равенство (5) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Определение 1. Пусть $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_2(0, T; V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0, T; V^0)$, $a \in V^0$. Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $u \in W_0$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^1$ равенству

$$\langle u', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (6)$$

при почти всех $t \in (0, T)$ и начальному условию (3).

На первом этапе нужно доказать, что существует слабое решение в пространстве W_1 , а далее показать, что полученное решение также принадлежит и W_0 .

Теорема 1. Пусть $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_2(0, T; V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0, T; V^0)$, $a \in V^0$. Тогда начально-краевая задача (1)–(4) имеет по крайней мере одно слабое решение $u \in W_0$.

Чтобы доказать эту теорему, вводится в рассмотрение аппроксимационная задача. К исходной задаче добавляется новый член $\varepsilon \Delta^2 u$, повышающий гладкость решения.

Теорема 2. Пусть $f_1 \in L_2(0, T; V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0, T; V^0)$, $a \in V^0$. Тогда начально-краевая задача (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение, принадлежащее пространству W_2 .

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu \Delta u + \varepsilon \Delta^2 u + \nabla p = f, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (8)$$

$$u(0) = a, \quad (9)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

$$\Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (11)$$

Вывод тождества, которому должно удовлетворять слабое решение аппроксимационной задачи, производится как и в предыдущем разделе. Поэтому получим следующее определение.

Определение 2. Слабым решением начально-краевой задачи (7)–(11) называется такая функция $u \in W_2$, удовлетворяющая начальному условию (3), что равенство

$$\langle u', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u : \Delta \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (12)$$

выполняется при почти всех $t \in (0, T)$ для любой функции $\varphi \in V^1$.

4. Операторная постановка аппроксимационной задачи. Определим операторы A , B следующим образом:

$$B : L_2(\Omega)^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle B(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx, \quad u \in L_2(\Omega)^3, \quad \varphi \in V^1; \quad (13)$$

$$A : V^1 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1. \quad (14)$$

Так как в (12) рассматривалась произвольная функция $\varphi \in V^1$, то задача (12) и задача, введённая с помощью операторов, эквивалентны. Теперь задача сводится к поиску слабого решения $u \in W_2$ операторного уравнения, которое удовлетворяет условию (3).

Операторное уравнение имеет следующий вид:

$$u' - B(u) + \nu Av + \varepsilon A^2 v = f. \quad (15)$$

Введем также операторы

$$L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^0, \quad L(u) = (u' + \nu Av + \varepsilon A^2 v, u|_{t=0}); \quad (16)$$

$$K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^0, \quad K(u) = (B(u), 0). \quad (17)$$

Тогда операторное уравнение (15) запишется в виде

$$L(u) - K(u) = (f, a), \quad (18)$$

для которого будем искать слабое решения, удовлетворяющее начальному условию.

Будем рассматривать также семейство операторных уравнений, в котором $\lambda \in [0, 1]$:

$$L(u) - \lambda K(u) = \lambda(f, a). \quad (19)$$

5. Свойства операторов. В данном разделе докажем свойства введенных операторов.

Лемма 1.

(i) Оператор $A : V^1 \rightarrow V^{-1}$ линеен, непрерывен и удовлетворяет оценке

$$\|Au\|_{V^{-1}} \leq \|u\|_{V^1}. \quad (20)$$

(ii) Для любой функции $u \in L_2(0, T; V^1)$ функция Au принадлежит пространству $L_2(0, T; V^{-1})$. Оператор $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ линеен, непрерывен и удовлетворяет оценке

$$\|Au\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq \|u\|_{L_2(0, T; V^1)}. \quad (21)$$

(iii) Для любой функции $u \in W_2$ функция Au принадлежит пространству $L_2(0, T; V^{-2})$ и справедлива оценка

$$\|Au\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C_1 \|u\|_{L_2(0, T; V^1)}. \quad (22)$$

Доказательство. (i) Несложно убедиться, что оператор A линеен. Действительно,

$$\langle A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) : \nabla \varphi \, dx = \alpha_1 \int_{\Omega} \nabla u_1 : \nabla \varphi \, dx + \alpha_2 \int_{\Omega} \nabla u_2 : \nabla \varphi \, dx.$$

Покажем, что оператор ограничен; из этого будет следовать непрерывность:

$$|\langle Au, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi \, dx \right| \leq \|u\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1},$$

так что

$$\|Au\|_{V^{-1}} \leq \|u\|_{V^1}. \quad (23)$$

Следовательно, оператор непрерывен, и оценка из пункта (i) получена.

(ii) Для функции $u \in L_2(0, T; V^1)$ при почти всех $t \in (0, T)$ справедливо неравенство

$$\|Au(t)\|_{V^{-1}} \leq \|u(t)\|_{V^1}.$$

Возведем последнюю оценку в квадрат и проинтегрируем от 0 до T :

$$\|Au(t)\|_{V^{-1}}^2 \leq \|u(t)\|_{V^1}^2 = \int_0^T \|Au(t)\|^2 \, dt \leq \int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt. \quad (24)$$

Так как $\|u(t)\|_{V^1} \in L_2(0, T)$, то $\|Au(t)\|_{V^{-1}} \in L_2(0, T)$ и $Au \in L_2(0, T; V^{-1})$. Извлекая корень из последней оценки, получаем требуемую оценку (21). Так как оператор ограничен и линеен, то он непрерывен как оператор из $L_2(0, T; V^1)$ в $L_2(0, T; V^{-1})$.

(iii) Из (21) и того факта, что вложение $L_2(0, T; V^{-1}) \subset L_2(0, T; V^{-2})$ непрерывно, следует требуемая в лемме оценка. $\square$

Чтобы доказать некоторые свойства для оператора B , воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3 (см. [5]). Пусть $X_0 \subset X \subset X_1$ — такие банаховы пространства, что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Пусть M вложено в $L_p(0, T; X_0)$, $1 \leq p \leq \infty$, и для всякой $f \in M$ её обобщенная производная в пространстве $D'(0, T; X_0)$ принадлежит $L_r(0, T; X_0)$, $1 \leq r \leq \infty$. Пусть множество M ограничено в $L_p(0, T; X_0)$, а множество $\{f' : f \in M\}$ ограничено в $L_r(0, T; X)$. Тогда при $p < \infty$ множество M относительно компактно в $L_p(0, T; X_1)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ относительно компактно в $C([0, T], X_1)$.

Лемма 2.

(i) Оператор $B : L_2(\Omega)^3 \rightarrow V^{-1}$ непрерывен, причем справедливо неравенство

$$\|B(u)\|_{V^{-1}} \leq C_1 \|u\|_{L_2(\Omega)^3}^2. \quad (25)$$

(ii) Оператор $B : L_2(0, T; L_2(\Omega)^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен.

(iii) Оператор $B : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ компактен, причем имеет место неравенство

$$\|B(u)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C_5 \|u\|_{L_2(0, T; V^1)} \|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)}. \quad (26)$$

Доказательство. Для любых $u \in L_2(\Omega)^3$, $\varphi \in V^1$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle B_1(u), \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^3 \left| \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |u_i| |u_j| \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx \leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i\|_{L_2(\Omega)} \|u_j\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u\|_{L_2(\Omega)^3} \|u\|_{L_2(\Omega)^3} \|\varphi\|_{V^1} \leq C_1 \|u\|_{L_2(\Omega)^3}^2 \|\varphi\|_{V^1}. \end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец, получаем требуемую оценку.

Для проверки непрерывности оператора $B : L_2(\Omega)^3 \rightarrow V^{-1}$, $u = B(u)$, рассмотрим произвольные $u^m, u^0 \in L_2(\Omega)^3$:

$$\begin{aligned} |\langle B(u^m), \varphi \rangle - \langle B(u^0), \varphi \rangle| &= \\ &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i^m u_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i^0 u_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1} \leq \|\varphi\|_{V^1} \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|B(u^m) - B(u^0)\|_{V^{-1}} \leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Далее проведем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L_2(\Omega)} &= \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^m u_j^0 + u_i^m u_j^0 - u_i^0 u_j^0\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m (u_j^m - u_j^0)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^3 \|u_j^0 (u_i^m - u_i^0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|u_j^m - u_j^0\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^3 \|u_j^0\|_{L_2(\Omega)} \|u_i^m - u_i^0\|_{L_2(\Omega)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_2 \|u^m\|_{L_2(\Omega)^3} \|u^m - u^0\|_{L_2(\Omega)^3} + C_2 \|u^0\|_{L_2(\Omega)^3} \|u^m - u^0\|_{L_2(\Omega)^3} = \\ &= C_2 \left(\|u^m\|_{L_2(\Omega)^3} + \|u^0\|_{L_2(\Omega)^3} \right) \|u^m - u^0\|_{L_2(\Omega)^3}. \end{aligned}$$

Сравнивая также начало и конец, получаем:

$$\|B(u^m) - B(u^0)\|_{V^{-1}} \leq C_2 (\|u^m\|_{L_2(\Omega)^3} + \|u^0\|_{L_2(\Omega)^3}) \|u^m - u^0\|_{L_2(\Omega)^3}. \quad (27)$$

При $u^m \rightarrow u^0$ в $L_2(\Omega)^3$ отображение $B : L_2(\Omega)^3 \rightarrow V^{-1}$ непрерывно.

(ii) Рассмотрим функцию $u \in L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)$. Согласно (25) при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\|B(u)(t)\|_{V^{-1}} \leq C_1 \|u(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^2.$$

Возведем эту оценку в квадрат и проинтегрируем:

$$\int_0^T \|B(u)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq C_1^2 \int_0^T \|u(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^4 dt = C_1^2 \|u\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^2.$$

Поскольку $C_1^2 \|u\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^2$ — конечное число, значения интегралов также конечны. Следовательно, $B : L_2(0, T; L_2(\Omega)^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$. Чтобы доказать непрерывность, предположим, что $u^0 \in L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)$ является пределом последовательности $u^m \subset L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)$. Для (28) при почти всех $t \in (0, T)$ справедлива оценка

$$\|B(u^m)(t) - B(u^0)(t)\|_{V^{-1}} \leq C_2 (\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3} + \|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}) \|u^m - u^0\|_{L_2(\Omega)^3}.$$

Возводя в квадрат, интегрируя и применяя неравенство Гельдера, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|B(u^m)(t) - B(u^0)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \\ &\leq C_2^2 \int_0^T \left(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3} + \|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3} \right)^2 \|u^m(t) - u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^2 dt \leq \\ &\leq C_2^2 \left(\int_0^T \left(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3} + \|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3} \right)^4 dt \right)^{1/2} \times \left(\int_0^T \|u^m(t) - u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^4 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Оценим предпоследнее подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3} + \|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3} \right)^4 dt \leq 8 \int_0^T \left(\|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^4 + \|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^4 \right) dt = \\ &= 8 \int_0^T \|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^4 dt + 8 \int_0^T \|u^0(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^4 dt = 8 \|u^m\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^4 + 8 \|u^0\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^4. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\|B(u^m)(t) - B(u^0)(t)\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 \leq \\ &\leq 2\sqrt{2} C_2^2 \|u^m - u^0\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^2 \left(\|u^m\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^4 + \|u^0\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^4 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2} C_2^2 \|u^m - u^0\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^2 \left(\|u^m\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^4 + \|u^0\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^4 \right). \end{aligned}$$

В силу стремления правой части неравенства к нулю при $m \rightarrow +\infty$, получаем, что и левая часть стремится к нулю. Следовательно, непрерывность для п. (ii) леммы доказана.

(iii) По лемме, о которой упоминалось ранее, любая функция $u \in W_2$ принадлежит пространству $C([0, T]; V^0)$. Значит любая функция, принадлежащая W_2 , принадлежит как $L_2(0, T; V^2)$, так и $L_2(0, T; V^2) \cap L_\infty(0, T; V^0)$. Далее, справедливы вложения:

$$L_2(0, T; V^2) \cap L_\infty(0, T; V^0) \subset L_2(0, T; V^1).$$

Следовательно, $W_2 \subset X_1 = \{u : u \in L_2(0, T; V^1), u' \in L_2(0, T; V^{-2})\}$. Справедливо компактное вложение $X_1 \hookrightarrow L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)$. Запишем отображение B следующим образом:

$$W_2 \subset X_1 \hookrightarrow L_2(0, T; L_2(\Omega)^3) \xrightarrow{B} L_2(0, T; V^{-1}) \subset L_2(0, T; V^{-2}).$$

Непрерывность отображения $B : L_2(0, T; L_2(\Omega)^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ доказана ранее в п. (ii). Первое вложение является непрерывным, второе вполне непрерывно; поэтому $B : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ — вполне непрерывное отображение. Оценим $\|B(u)\|_{L_2(0, T; V^{-2})}$:

$$\begin{aligned} |\langle B(u), \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^3 \left| \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |u_i| |u_j| \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i\|_{L_2(\Omega)} \|u_j\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{L_2(\Omega)^3} \|u\|_{V^0} \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Поэтому для любой функции $v \in W_2$ при почти всех $t \in (0, T)$ выполняется неравенство

$$\|B(u)(t)\|_{V^{-2}} \leq C_3 \|u(t)\|_{L_4(\Omega)^3} \|u(t)\|_{V^0}.$$

Применим к этой оценке те же действия, что и ранее:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|B(u)(t)\|_{V^{-2}}^2 dt &\leq C_3^2 \int_0^T \|u(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^2 \|u(t)\|_{V^0}^2 dt \leq C_3^2 \|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \int_0^T \|u(t)\|_{L_2(\Omega)^3}^2 dt = \\ &= C_3^2 \|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \|u\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega)^3)}^2 \leq C_3^2 C_2 \|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \|u\|_{L_2(0, T; V^1)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|B(u)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C_5 \|u\|_{L_2(0, T; V^1)} \|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)}. \quad \square$$

Следующее утверждение требуется для доказательства леммы 4.

Лемма 3 (см. [7]). Пусть X и Y — гильбертовы пространства, $X \subset Y$ с непрерывным оператором вложения $i : X \rightarrow Y$, $i(X)$ плотно в Y . Пусть X — сепарабельное пространство, $A : X \rightarrow X^*$ — непрерывный линейный оператор. Предположим, что существует такое положительное α , что

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Если $a \in Y$ и $f \in L_2(0, T; X^*)$, то задача Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad u(0) = a \quad (28)$$

имеет единственное решение

$$u \in L_2(0, T; X), \quad u' \in L_2(0, T; X^*),$$

непрерывно зависящее f и a .

Лемма 3 обобщается на случай $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_2(0, T; V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0, T; V^0)$.

Лемма 4.

- (i) Оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^0$ непрерывно обратим, а обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^0 \rightarrow W_2$ непрерывен.
- (ii) Оператор $K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^0$ непрерывен и компактен.

Доказательство. (i) Рассмотрим оператор $L(u) = (u' + \nu Au + \varepsilon A^2 u, u|_{t=0})$. Проверим, что для оператора $\nu A + \varepsilon A^2 : V^2 \rightarrow V^{-2}$ выполняются условия предыдущей леммы:

$$\begin{aligned} \langle \nu Au + \varepsilon A^2 u, v \rangle &= \langle \nu Au, u \rangle + \langle \varepsilon A^2 u, u \rangle = \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u \, dx + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u \, \Delta u \, dx = \\ &= \nu \|u\|_{V^2}^2 + \varepsilon \|u\|_{V^2}^2 \geq \varepsilon \|u\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\langle \nu Au + \varepsilon A^2 u, u \rangle \geq \varepsilon \|u\|_{V^2}^2$, что удовлетворяет условиям леммы. Таким образом, оператор L является непрерывно обратимым.

(ii) Оператор K , определяемый равенством $K = (B(u), 0)$ будет непрерывным, а так как компактность оператора B доказана в п. (iii) леммы 2, то K вполне непрерывен. $\square$

6. Априорные оценки. Для оценки сходимости на следующих этапах требуется доказать априорные оценки для семейства уравнений

$$u' - \lambda B(u) + \nu Au + \varepsilon A^2 u = \lambda f, \quad (29)$$

$$u(0) = \lambda a, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (30)$$

Теорема 4. Для любого решения $u \in W_2$ семейства (29) для некоторого $\lambda \in [0, 1]$, справедливы следующие оценки:

$$\|u\|_{L_{\infty}(0,T;V^0)}^2 \leq C_4 \left(\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2 \right); \quad (31)$$

$$\nu \|u\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 \leq C_5 \left(\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2 \right); \quad (32)$$

$$\varepsilon \|u\|_{L_2(0,T;V^2)}^2 \leq C_5 \left(\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2 \right). \quad (33)$$

Доказательство. Пусть $u \in W_2$ — решение (29), (30) для некоторого $\lambda \in [0, 1]$. Рассмотрим уравнение (12) при $\varphi = u$:

$$\langle u', u \rangle - \lambda \langle B(u), u \rangle + \nu \langle Au, u \rangle + \varepsilon \langle A^2 u, u \rangle = \lambda \langle f, u \rangle.$$

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \langle u', u \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{V^0}^2; \\ \langle B(u), u \rangle &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_j \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_i) \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i u_i \, dx = 0; \\ \nu \langle Au, u \rangle &= \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u \, dx = \nu \|u\|_{V^1}^2; \quad \varepsilon \langle A^2 u, u \rangle = \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u \, \Delta u \, dx = \varepsilon \|u\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{V^0}^2 + \nu \|u(t)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|u(t)\|_{V^2}^2 = \lambda \langle f(t), u(t) \rangle.$$

Теперь оценим сверху правую часть последнего неравенства, воспользовавшись неравенством

$$ab \leq \frac{\nu a^2}{2} + \frac{b^2}{2\nu}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} |\lambda \langle f(t), u(t) \rangle| &\leq \lambda |\langle f(t), u(t) \rangle| \leq \\ &\leq \lambda |\langle f_1(t), u(t) \rangle| + \lambda |\langle f_2(t), u(t) \rangle| \leq \|f_1(t)\|_{V^{-1}} \|u(t)\|_{V^1} + \|f_2(t)\|_{(V^0)^*} \|u(t)\|_{V^0} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\nu} \|f_1(t)\|_{V^{-1}}^2 + \frac{\nu}{2} \|u(t)\|_{V^1}^2 + \frac{1}{4} \|f_2(t)\|_{(V^0)^*}^2 + \frac{1}{4} \|u(t)\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при почти всех $t \in (0, T)$ получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{V^0}^2 + \nu \|u(t)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|u(t)\|_{V^2}^2 \leq \frac{1}{2\nu} \|f_1(t)\|_{V^{-1}}^2 + \frac{\nu}{2} \|u(t)\|_{V^1}^2 + \frac{1}{4} \|f_2(t)\|_{(V^0)^*}^2 + \frac{1}{4} \|u(t)\|_{V^0}^2$$

Приведя подобные слагаемые, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{V^0}^2 + \frac{\nu}{2} \|u(t)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|u(t)\|_{V^2}^2 \leq \frac{1}{2\nu} \|f_1(t)\|_{V^{-1}}^2 + \frac{1}{4} \|f_2(t)\|_{(V^0)^*}^2 + \frac{1}{4} \|u(t)\|_{V^0}^2.$$

Умножив его на 2 и проинтегрировав от 0 до t , получаем:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{V^0}^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|_{V^1}^2 ds + 2\varepsilon \int_0^t \|u(s)\|_{V^2}^2 ds &\leq \\ &\leq \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^{-1}}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|f_2(s)\|_{(V^0)^*}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|u(s)\|_{V^0}^2 ds + \|a\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Оценим правую часть неравенства сверху:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^{-1}}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|f_2(s)\|_{(V^0)^*}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|u(s)\|_{V^0}^2 ds + \|a\|_{V^0}^2 &\leq \\ &\leq \|a\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_1(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2. \end{aligned}$$

Так как каждое слагаемое предыдущего неравенства неотрицательно, получаем три неравенства:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{V^0}^2 &\leq \|a\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_1(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2; \\ \nu \int_0^t \|u(s)\|_{V^2}^2 ds &\leq \|a\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_1(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2; \\ 2\varepsilon \int_0^t \|u(s)\|_{V^2}^2 ds &\leq \|a\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_1(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2. \end{aligned}$$

Перейдя к максимуму по t в левой части, получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2 &\leq \|a\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_1(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2; \\ \nu \|u\|_{L_2(0,T,V^1)}^2 &\leq \|a\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_1(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2; \\ \varepsilon \|u\|_{L_2(0,T,V^2)}^2 &\leq \|a\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_1(t)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_\infty(0,T,V^0)}^2. \end{aligned}$$

Оценка (31) очевидно следует из первого неравенства. Сложив первое неравенство со вторым, получим оценку (32), а при сложении первого с третьим — оценку (33). $\square$

Теорема 5. Если $u \in W_2$ — решение (29), (30) для какого-либо $\lambda \in [0, 1]$, то имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} &\leq \\ &\leq C_6 \|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_6 \|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)} + C_9 \frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + C_6 \frac{1}{2} \|f_2\|_{L_2(0,T;(V^0)^*)}^2 + \\ &\quad + C_5 \|a\|_{V^0}^2 + \left(\nu C_6 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2\|_{L_1(0,T;(V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Доказательство. Пусть $u \in W_2$ — решение операторного уравнения (29) с начальным условием (30). Выразим из этого уравнения u' и оценим по норме $L_2(0, T; V^{-2})$:

$$\begin{aligned}
\|u'\|_{L_2(0, T; V^{-2})} &= \|\lambda f + \lambda B(u) - \nu Au - \varepsilon A^2 v\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq \\
&\leq \|\lambda f_1\|_{L_2(0, T; V^{-2})} + \|\lambda f_2\|_{L_2(0, T; V^{-2})} + \|\lambda B(u)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} + \\
&\quad + \nu \|Av\|_{L_2(0, T; V^{-2})} + \varepsilon \|A^2 u\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq \\
&\leq \lambda C_6 \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + \lambda C_6 \|f_2\|_{L_2(0, T; (V^0)^*)} + \lambda \|B(u)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} + \\
&\quad + \nu C_6 \|Av\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + \varepsilon \|A^2 v\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq \\
&\leq C_6 \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + C_6 \|f_2\|_{L_2(0, T; (V^0)^*)} + C_5 \|u\|_{L_2(0, T; V^1)} \|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)} + \\
&\quad + \nu C_6 \|u\|_{L_2(0, T; V^1)} + \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L_2(0, T; V^2)} \leq \\
&\leq C_6 \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + C_6 \|f_2\|_{L_2(0, T; (V^0)^*)} + \\
&\quad + C_5 \left(C_4 \left(\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0, T; (V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \nu C_6 \sqrt{C_4 \left(\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0, T; (V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2 \right) +} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{C_6 \left(\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \frac{1}{\nu} \|f_2(t)\|_{L_1(0, T; (V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2 \right)} \right) = \\
&= C_6 \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + C_6 \|f_2\|_{L_2(0, T; (V^0)^*)} + C_9 \frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + C_6 \frac{1}{2} \|f_2\|_{L_2(0, T; (V^0)^*)}^2 + \\
&\quad + C_5 \|a\|_{V^0}^2 + \left(\nu C_6 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{1}{\nu} \|f_1\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|f_2(t)\|_{L_1(0, T; (V^0)^*)}^2 + \|a\|_{V^0}^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку (34). $\square$

7. Разрешимость аппроксимационной задачи. Пусть $u \in W_2$ — решение семейства (19). Из доказанных априорных оценок следует, что норма $\|u\|$ может быть оценена сверху некоторой константой C_7 , которая зависит, вообще говоря, от $1/\varepsilon$.

Теорема 6. Для любых $\varepsilon \geq 0$, $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L_2(0, T; V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0, T; V^0)$, $a \in V^0$ существует хотя бы одно слабое решение аппроксимационной задачи (7)–(11).

Доказательство. Докажем разрешимость операторного уравнения (15), так как задача о существовании у него решения $u \in W_2$, равносильна задаче о слабых решениях аппроксимационной задачи (7)–(11).

Решения семейства операторных уравнений лежат в шаре B_R с центром в нуле и радиусом $R = C_7 + 1$. По лемме 4 оператор $K(\cdot)$ является вполне непрерывным, значит оператор $K + (f, a)$ также вполне непрерывен.

Рассмотрим теперь оператор $G(\lambda, u) = \lambda L^{-1}(K(u) + (f, a))$. Он будет вполне непрерывным как композиция вполне непрерывного оператора $K + (f, a)$ и непрерывного оператора L . Переписав (18) с введённым оператором, получим:

$$u - \lambda G(u) = 0. \quad (35)$$

Так как векторное поле $I - \lambda G(\cdot)$ вполне непрерывно, то для него определена степень Лере—Шаудера $\deg_{LS}(I - \lambda G, B_R, 0)$, и в силу свойства гомотопической инвариантности имеем

$$\deg_{LS}(I, B_R, 0) = \deg_{LS}(I - G, B_R, 0) = \deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1,$$

так как $0 \in B_R$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения $u \in W_2$ уравнения (35) при $\lambda = 1$, а следовательно, и существование хотя бы одного решения операторного уравнения (18). $\square$

8. Предельный переход. Вернемся к определению слабого решения аппроксимационной задачи. Оно существует согласно доказанной в разделе 7 теореме. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого ε_n существует решение $u_n \in W_2 \subset W_1$, которое для каждой функции $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет равенствам

$$\langle u'_n, \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (u_n)_i (u_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_n : \nabla \varphi dx + \varepsilon_n \int_{\Omega} \Delta u_n : \Delta \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (36)$$

и $u_n(0) = a$. В силу оценки (31) последовательность $\{u_n\}$ является ограниченной в $L_{\infty}(0, T; V^0)$. Следовательно, из u_n можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ слабо в } L_{\infty}(0, T; V^0).$$

Исходя из (32), $u_n \rightharpoonup u$ в $L_{\infty}(0, T; V^1)$ (без ограничения общности). Значит,

$$\nu \int_{\Omega} \nabla u_n : \nabla \varphi dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx.$$

Далее, согласно оценке (33) последовательность $\sqrt{\varepsilon_n} u_n$ является ограниченной в $L_2(0, T; V^2)$. Тогда

$$\sqrt{\varepsilon_n} u_n \rightarrow \omega \text{ в } L_2(0, T; V^2).$$

Так как $\sqrt{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, получим

$$\varepsilon_n \int_{\Omega} \Delta u_n \Delta \varphi dx = \sqrt{\varepsilon_n} \left(\sqrt{\varepsilon_n} \int_{\Omega} \Delta u_n \Delta \varphi dx \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

т.е. последнее слагаемое в левой части равенства (37) исчезает. Наконец, в силу последней априорной оценки (34) получаем, что $u'_n \rightharpoonup u'$ в $L_2(0, T; V^{-2})$, т.е.

$$\langle u'_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle u', \varphi \rangle.$$

Согласно теореме 3 справедливо компактное вложение

$$W_1 \hookrightarrow L_2(0, T; L_4(\Omega)^4).$$

Поэтому имеет место и сильная сходимость последовательности $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ в $L_2(0, T; L_4(\Omega)^4)$.

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (u_n)_i (u_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

Исследуем характер сходимости в последнем выражении:

$$\begin{aligned} (u_n)_i &\rightarrow u_i \quad \text{*}-\text{слабо в } L_{\infty}(0, T; V^0), \\ (u_n)_j &\rightarrow u_j \quad \text{сильно в } L_2(0, T; L_4(\Omega)^4); \end{aligned}$$

следовательно, $(u_n)_i (u_n)_j$ сходится слабо в $L_2(0, T; L_{4/3}(\Omega)^4)$.

Далее, $u_n(0) = a$ и $u_n \rightharpoonup u$ в $L_2(0, T; V^1)$, $u'_n \rightharpoonup u'$ в $L_2(0, T; V^{-2})$. Таким образом, $u_n(0) \rightharpoonup u(0)$, $u(0) = a$.

Таким образом, устремив ε к нулю и перейдя к пределу в (36) и соответствующем начальном условии, заключаем, что существует функция $u \in W_1$, удовлетворяющая условиям

$$\langle u', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (37)$$

и $u(0) = a$.

9. Эквивалентность существования решений, принадлежащих двум пространствам. Вернёмся к операторному уравнению

$$u' - B(u) + \nu Au = f. \quad (38)$$

В разделе 8 было доказано существование слабого решения начально-краевой задачи (1)–(4), принадлежащего пространству W_1 : для любого $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L_2(0, T; V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0, T; V^0)$, и любого $a \in V^0$ существует функция $u \in W_1$, являющаяся слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4). Иными словами, функция $u \in W_1$, должна удовлетворять равенству (37) и начальному условию $u(0) = a$.

Поскольку в (37) пробная функция $\varphi \in V^2$ произвольна, то слабое решение $u \in W_1$ начально-краевой задачи (1)–(4) должно удовлетворять операторному уравнению

$$u' - B(u) + \nu Au = f \quad (39)$$

и начальному условию $u(0) = a$.

Правая часть f данного равенства по условию принадлежит $L_2(0, T; V^{-1}) + L_1(0, T; V^0)$. Далее, $\nu Au \in L_2(0, T; V^{-1})$. Используя оценку Ладыженской:

$$\begin{aligned} \|B(u)\|_{L_{4/3}(0, T; V^{-1})} &\leq \left(\int_0^T \|B(u(t))\|_{V^{-1}}^{4/3} dt \right)^{3/4} \leq C_8 \left(\int_0^T \|u(t)\|_{V^0}^{2/3} \|u(t)\|_{V^1}^2 dt \right)^{3/4} \leq \\ &\leq C_8 \left(\|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^{2/3} \int_0^T \|u(t)\|_{V^1}^2 dt \right) \leq C_8 \|u\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^{1/2} \|u\|_{L_2(0, T; V^1)}^{3/2}, \end{aligned}$$

получим, что $B(u) \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})$. Таким образом, выражая из (39) функцию u' , получим, что

$$u' = f + B(u) - \nu Au \in L_{4/3}(0, T; V^{-1}) + L_1(0, T; V^0).$$

Мы получили, что два функционала из $L_2(0, T; V^{-2})$ равны. Поскольку один из них принадлежит пространству $L_{4/3}(0, T; V^{-1}) + L_1(0, T; V^0)$, то второй также принадлежит этому пространству, а значит, слабое решение начально-краевой задачи (1)–(4) принадлежит и пространству W_0 . Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Звягин В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Совр. мат. Фундам. напр. — 2012. — 46. — С. 92–119.
2. Звягин В. Г. On some method of investigation of weak solutions for equations of viscous-elastic fluids // Тез. докл. Междунар. конф., посв. 75-летию чл.-корр. РАН проф. Л. Д. Кудрявцева «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 1–5 марта 1998 г.). — Москва, 1998. — С. 197.
3. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Об одном варианте аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье—Стокса // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2017. — 3. — С. 104–124.
4. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Вариант аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье—Стокса на основе параболической регуляризации // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2017. — 3. — С. 125–142.
5. Simon J. Compact sets in the space $L(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — 146. — P. 65–96.
6. Zvyagin V. G. Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics // J. Math. Sci. — 2014. — 201, № 6. — P. 830–858.
7. Zvyagin V., Vorotnikov D. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. — Berlin–New York: de Gruyter, 2008.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Чирова Маргарита Витальевна (Chirova Margarita Vitalievna)

Федеральное казенное предприятие «Научно-производственный центр «Дельта»,

Воронежский филиал, Воронеж

(Federal State Enterprise “Scientific and Production Center ‘Delta’,”

Voronezh branch, Voronezh, Russia)

E-mail: rita.chirova@yandex.ru

CONTENTS

Numerical-analytical method for studying the dynamics of hinged elastic plate (<i>M. A. Ankilov, A. S. Andreev</i>)	3
The method of equivalent operators in the study of one class of first-order differential operators with constant operator coefficient (<i>A. G. Baskakov, G. V. Garkavenko, L. N. Kostina, N. B. Uskova</i>)	11
Approximations of the percolation probability on a periodic graph $\mathbb{Z}^2$ (<i>Yu. P. Virchenko, D. A. Cherkashin</i>)	22
Enumeration of labeled Eulerian 3-cacti (<i>V. A. Voblyi</i>)	41
Classical solution of a mixed problem with the Zaremba boundary condition and conjugation conditions for a semilinear wave equation (<i>V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko</i>)	46
The impact of delay and competition on macroeconomic dynamics (<i>A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, D. G. Frolov</i>)	61
Distributions of (non)uniqueness for entire functions of arbitrary growth (<i>E. B. Menshikova, B. N. Khabibullin</i>)	74
Structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model (<i>S. M. Tashpulatov</i>)	82
Investigation of the weak solvability of the initial-boundary-value problem for the Navier–Stokes system based on the method of parabolic regularization (<i>M. V. Chirova</i>)	92

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)
Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Канель-Белов Алексей Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова,
Университет имени Бар-Илана)
Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Лукьяненко Дмитрий Витальевич, д.ф.-м.н. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Виктор Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)
Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.н., профессор (Университет Флоренции)
Сачков Юрий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор (Институт программных систем
им. А. К. Айламазяна)
Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)
Туганбаев Аскар Аканович, д.ф.-м.н., профессор (НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Фалалеев Михаил Валентинович, д.ф.-м.н., профессор
(Иркутский государственный университет)
Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор (Институт математики с вычислительным
центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН)
Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Канель-Белов Алексей Яковлевич
Корпусов Максим Олегович
Лукьяненко Дмитрий Витальевич
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Сачков Юрий Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.